

## آزمون پایان ترم

زمان آزمون: ۲۱۰ دقیقه

مدرسین: دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر

## سوال ۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{آ (۵ نمره)} \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$\text{ب (۵ نمره)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

## سوال ۲

(۱۰ نمره) سطح و حجم شیء سه‌بعدی که توسط معادلات زیر توصیف می‌شود را محاسبه کنید (a) ثابت مثبتی است).

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad y^2 + z^2 \leq a^2.$$

## سوال ۳

سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-2}} x^{3n-2}$  را در نظر بگیرید.

آ (۵ نمره) به ازای چه مقادیری از  $x$ ، سری همگراست؟

ب (۵ نمره) سری را بر حسب نگاشت‌های مقدماتی محاسبه کنید.

ج (۲ نمره) مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-2}}$  را محاسبه کنید.

## سوال ۴

سری  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  و مجموع جزئی آن  $S_n$  را در نظر بگیرید.

آزمون پایان ترم

آ (۵ نمره) نشان دهید

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S < S_n + \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

ب (۳ نمره) بهترین  $N$  را بیابید که اگر به جای  $S$  از  $S_n$  برای  $n \geq N$  استفاده شود، خطا از  $10^{-3}$  ناپیشتتر باشد.

ج (۲ نمره) اگر به جای  $S$  از  $S_n + \frac{1}{4} \left( \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right)$  استفاده شود،  $N$  را طوری بیابید که برای  $n \geq N$  خطا از  $10^{-3}$  ناپیشتتر باشد.

سوال ۵

آ (۵ نمره) ماکزیمم مطلق  $|x^n \ln x|$  را روی بازه  $[0, 1]$  محاسبه کنید، که  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

ب (۵ نمره) با استفاده از قضیه تیلور، خطای حاصل از استفاده  $\int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx$  را بجای

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx$$

محاسبه کنید، که  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

ج (۳ نمره) انتگرال  $\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx$  را با تقریب  $10^{-4}$  محاسبه کنید.

سوال ۶

(۱۰ نمره) فرض کنید  $p$  عددی مثبت باشد. با استفاده از تکنیک‌های انتگرال ریمان نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

سوال ۷

(۱۰ نمره) تمامی اعداد مثبت  $p$  را چنان بیابید که انتگرال ناسره  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$  همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات).

## پاسخ آزمون پایان ترم

زمان آزمون: ۲۱۰ دقیقه

مدرسین: دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر

## پاسخ سوال ۱

آ) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی  $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$  و  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$  داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{1 + \cos^2 2x}$$

(۱ نمره). مجدداً، با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$  داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int \frac{dx}{3 + \cos 4x}$$

(۱ نمره). حال با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\cos 4x = \frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$  و تغییر متغیر  $u = \tan 2x$  داریم:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{du}{2 + u^2} \quad (۱ نمره)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (۱ نمره)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2} \tan 2x}{2} \right) + c. \quad (۱ نمره)$$

پاسخ آزمون پایان ترم

ب) با استفاده از تغییر متغیر  $x = \tan t$  داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^6 t \, dt \quad (1 \text{ نمره})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^3 dt \quad (1 \text{ نمره})$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt \right) \quad (1 \text{ نمره})$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{4} + 2 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt}_{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4t \, dt}_{\frac{1}{4}} \right) \quad (1 \text{ نمره})$$

$$= \frac{3\pi}{16}. \quad (1 \text{ نمره})$$

پاسخ سوال ۲

حجم:

$$V = 8 \int_0^a dV = 8 \int_0^a (\sqrt{a^2 - y^2})^2 dy = 8 \int_0^a (a^2 - y^2) dy = 8 \left( a^2 y - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{16a^3}{3},$$

(۵ نمره).

سطح:

$$\begin{aligned} S &= 16 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dS = 16 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \left( (\sqrt{a^2 - y^2})' \right)^2} dy \\ &= 16 \int_0^a a dy = 16a^2, \end{aligned}$$

(۵ نمره).

پاسخ سوال ۳

پاسخ آزمون پایان ترم

(آ) با تعریف دنباله‌ی  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$  داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{3n-2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n-2}{3n+1} \right| = 1 \Rightarrow R = 1. \quad (1 \text{ نمره})$$

مطابق قضایای درس، سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$  در همسایگی به مرکز  $x_0 = 0$  و به شعاع  $R = 1$ ، یعنی بازه‌ی  $(-1, 1)$  همگرای مطلق است (1 نمره). همگرایی سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$  را برای  $x = 1$  و  $x = -1$  جداگانه بررسی می‌کنیم.

• برای  $x = 1$  داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}.$$

با توجه به این‌که برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم  $a_{n+1} a_n < 0$  و  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، مطابق با آزمون لایب‌نیتز می‌توان نتیجه گرفت که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$  همگراست (1 نمره).

• برای  $x = -1$  داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3n-2}.$$

با توجه به واگرایی سری همساز  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  و با استفاده از آزمون مقایسه حدی می‌توان نتیجه گرفت که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3n-2}$  واگراست (1 نمره).

در نتیجه، سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$  برای هر  $x \in (-1, 1]$  همگراست (1 نمره).

(ب) برای هر  $x \in (-1, 1)$  داریم:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

با تغییر اندیس  $n \leftarrow n-1$  داریم:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{3n-3}.$$

(1 نمره). در نتیجه،

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{3n-3} \Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x t^{3n-3} dt \quad (1 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \quad (1 \text{ نمره})$$

پاسخ آزمون پایان ترم

با استفاده از تفکیک کسر داریم

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+t} + \frac{-t+2}{1-t+t^2} \right) \quad (1 \text{ نمره})$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} = \frac{1}{6} \left( \ln \left| \frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} \right| + 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right). \quad (1 \text{ نمره})$$

(ج) با توجه به همگرایی سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$  در  $x=1$  و با استفاده از قضیه آبل داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} = \frac{1}{6} \left( \ln 4 + 2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \left( \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right). \quad (2 \text{ نمره})$$

پاسخ سوال ۴

(آ) داریم:

$$S = S_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (1.0)$$

(۱ نمره) بعلاوه، با توجه به اکیدا نزولی بودن تابع  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  روی  $x > 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} &< \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\Rightarrow \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\Rightarrow S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S \end{aligned}$$

(۲ نمره) به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} &> \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} > \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\Rightarrow \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} > \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\Rightarrow S_n + \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} > S \end{aligned}$$

پاسخ آزمون پایان ترم

(۲ نمره). در نتیجه،

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S < S_n + \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

(ب) با استفاده از نامساوی قسمت قبل داریم:

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S - S_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < S - S_n < \frac{1}{n},$$

(۲ نمره). لذا، برای محاسبه بهترین  $N$  که برای  $n \geq N$ ، خطای تقریب  $S$  با  $S_n$  از  $10^{-3}$  نایبتر باشد، کافی است داشته باشیم  $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{1000}$  و  $\frac{1}{N+1} \geq \frac{1}{1001}$ . در نتیجه،  $N = 10^3$  (۱ نمره).

(ج) با استفاده از نامساوی قسمت (الف) داریم:

$$\left| S - \left( S_n + \frac{1}{2} \left( \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right) \right) \right| < \frac{1}{2} \left( \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} - \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right) \\ = \frac{1}{2n^2 + 2n}$$

(۱ نمره). لذا، برای این که خطای تقریب  $S$  با  $S_n + \frac{1}{2} \left( \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right)$  از  $10^{-3}$  نایبتر باشد، کافی است داشته باشیم  $\frac{1}{2n^2 + 2n} \leq 10^{-3}$ ، یعنی  $n \geq 22$  (۱ نمره).

پاسخ سوال ۵

(آ) برای عدد صحیح مثبت  $n$  و هر  $x \in (0, 1]$  داریم  $\ln x \leq 0$  و  $x^n > 0$ . در نتیجه،

$$f(x) = |x^n \ln x| = -x^n \ln x, \quad \forall x \in (0, 1],$$

(۱ نمره). به این ترتیب، برای  $x \in (0, 1)$  داریم:

$$f'(x) = -x^{n-1} (n \ln x + 1),$$

(۱ نمره). در نتیجه،  $x = e^{-1/n}$  تنها نقطه ایستای تابع  $f$  در بازه  $(0, 1]$  است (۱ نمره). با توجه به پیوستگی تابع نامنفی  $f$  روی بازه  $(0, 1]$ ، و این که  $f(1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  می توان نتیجه گرفت که تنها نقطه ایستای تابع  $f$  در بازه  $(0, 1]$ ، یعنی نقطه  $x = e^{-1/n}$  ماکزیمم مطلق  $|x^n \ln x|$  روی بازه  $(0, 1]$  است. در نتیجه، مقدار ماکزیمم مطلق  $f(x)$  روی بازه  $(0, 1]$  برابر  $f(e^{-1/n}) = 1/(ne)$  است (۲ نمره). با استفاده از آزمون مشتق اول (تعیین علامت مشتق اول) یا آزمون مشتق دوم نیز می توان ماکزیمم مطلق بودن نقطه ایستای  $x = e^{-1/n}$  را نشان داد.

پاسخ آزمون پایان ترم

(ب) راه حل اول: با استفاده از قضیه تیلور برای تابع  $e^x$  حول نقطه‌ی  $x = 0$  داریم:

$$e^x - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1},$$

که در آن  $s$  نقطه‌ای بین  $0$  و  $x$  است (۱) (نمره). در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx &= \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx + \int_0^1 \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1} \ln x dx \\ \Rightarrow \int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx - \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx &= \int_0^1 \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1} \ln x dx \quad (2) \text{ (نمره)} \\ \Rightarrow \left| \int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx - \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{|e^s|}{(n+1)!} |x^{n+1} \ln x| dx \\ &\leq \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \quad (2) \text{ (نمره)} \end{aligned}$$

که نامساوی آخر با استفاده از قسمت (الف) و این که  $e^x \leq e$  برای هر  $x \in [0, 1]$  حاصل شده است.

(ج) (۳) (نمره) برای این که خطای محاسبه‌ی  $\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx$  با استفاده از  $\int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx$  از  $10^{-4}$  کم‌تر باشد، کافی است داشته باشیم:

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} \leq 10^{-4} \Rightarrow n \geq 6. \quad (1) \text{ (نمره)}$$

بنابراین، تقریب مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^6 \frac{x^k}{k!} dx &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln x dx \quad (1) \text{ (نمره)} \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \quad (1) \text{ (نمره)} \end{aligned}$$

که تساوی آخر از محاسبه‌ی  $\int_0^1 x^k \ln x dx$ ، با تکنیک انتگرال‌گیری جزء به جزء بدست آمده است.

اشتباه رایج: برخی با استفاده از بسط تیلور  $e^x$  حول نقطه‌ی  $x = 0$ ، خطای تخمین انتگرال در قسمت (ب) را به صورت

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx - \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx = \int_0^1 \ln x \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) dx$$



## پاسخ آزمون پایان ترم

سپس بدون ارائه دلیل کافی، سری را از انتگرال خارج کرده‌اند. باید توجه داشت که در حالت کلی نمی‌توان سری را از انتگرال خارج کرد. برای این اشتباه یک نمره کسر شده است.

### پاسخ سوال ۶

با در نظر گرفتن افزایش  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  از بازه  $[0, 1]$  و برای تابع انتگرال‌پذیر ریمان  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  داریم:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f(k/n). \quad (۲.۰)$$

در نتیجه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx \quad (۸ \text{ نمره})$$

$$= \frac{1}{p+1}. \quad (۲ \text{ نمره})$$

توجه: اگر فقط رابطی (۲.۰) نوشته شده باشد، ۳ نمره داده شده است.

### پاسخ سوال ۷

(۱۰ نمره) تمامی اعداد مثبت  $p$  را چنان بیابید که انتگرال ناسره  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$  همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات). در ابتدا توجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(x^p)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{\sin x^p} = 1.$$

لذا، مطابق تعریف حد برای  $\frac{1}{p} = \varepsilon$ ,  $\delta > 0$  چنان یافت می‌شود که

$$\frac{1}{2x^p} \leq \frac{1}{\sin(x^p)} \leq \frac{3}{2x^p}, \quad \forall x \in (0, \delta).$$

در نتیجه، بنا به آزمون مقایسه، دو انتگرال  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$  و  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند (۵ نمره). می‌دانیم  $p$ -انتگرال  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  برای  $0 < p < 1$  همگرا و برای  $p \geq 1$  واگراست. لذا، با توجه به استدلال بالا،  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$  نیز برای  $0 < p < 1$  همگرا و برای  $p \geq 1$  واگراست (۵ نمره).

توجه: تعیین بازه‌های همگرایی و واگرایی باید با استدلال درست و کامل ارائه شده باشد. در صورت عدم ارائه استدلال لازم نمره کامل داده نشده است.

اشتباه رایج:

### پاسخ آزمون پایان ترم

- اشتباه گرفتن  $\int_a^\infty \frac{dx}{\sin(x^p)}$  با  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$ .
- استفاده از آزمون مقایسه بر مبنای نامساوی  $\frac{1}{\sin(x^p)} > \frac{1}{x^p}$  برای  $x$  های مثبت خیلی کوچک، تنها واگرایی انتگرال  $\int_a^\infty \frac{dx}{\sin(x^p)}$  برای  $p \geq 1$  را نتیجه می دهد. لذا، برای افرادی که در کنار این استدلال، دلیل کافی برای همگرایی انتگرال برای  $1 < p < \infty$  ارائه ندادند، نمره ۷ داده شده است.