بسمه تعالی

۱

حل تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

اعداد مختلط

۱. فرض کنید $Z, Z_۱, Z_۲ \in C$ ثابت کنید:

a) $\bar{\bar{Z}} = Z$

با فرض $Z = a+ib$ داریم

$\bar{Z} = a-ib \Rightarrow \bar{\bar{Z}} = a+ib \Rightarrow \bar{\bar{Z}} = Z$

b) $\overline{Z_۱+Z_۲} = \bar{Z}_۱+\bar{Z}_۲$

$Z_۱ = a_۱+ib_۱$ ، $Z_۲ = a_۲+ib_۲$

$Z_۱+Z_۲ = (a_۱+a_۲)+i(b_۱+b_۲) \Rightarrow \overline{Z_۱+Z_۲} = a_۱+a_۲)-i(b_۱+b_۲)$ ، (۱)

$\bar{Z}_۱ = a_۱-ib_۱$
$\bar{Z}_۲ = a_۲-ib_۲$ $\Rightarrow \bar{Z}_۱+\bar{Z}_۲ = (a_۱+a_۲)-i(b_۱+b_۲)$ (۲)

(۱) ,(۲) $\Rightarrow \overline{Z_۱+Z_۲} = \bar{Z}_۱+\bar{Z}_۲$

c) $\overline{Z_۱Z_۲} = \bar{Z}_۱\bar{Z}_۲$

$Z_۱Z_۲ = (a_۱a_۲-b_۱b_۲)+i(b_۲a_۱+a_۲b_۱) \Rightarrow \overline{Z_۱Z_۲} = (a_۱a_۲-b_۱b_۲)-i(b_۲a_۱+a_۲b_۱)$ (۱)

$\bar{Z}_۱\bar{Z}_۲ = (a_۱a_۲-b_۱b_۲)+i(a_۱b_۲-a_۲b_۱) = (a_۱a_۲-b_۱b_۲)-i(a_۱b_۲+a_۲b_۱)$ (۲)

(۱) , (۲) $\Rightarrow \overline{Z_۱Z_۲} = \bar{Z}_۱\bar{Z}_۲$

d) $\overline{(\frac{Z_۱}{Z_۲})} = \frac{\bar{Z}_۱}{\bar{Z}_۲}$

$\overline{(\frac{Z_۱}{Z_۲})} = (\overline{Z_۱\cdot\frac{۱}{Z_۲}}) = \bar{Z}_۱\cdot(\overline{\frac{۱}{Z_۲}}) = \bar{Z}_۱\frac{۱}{\bar{Z}_۲} = \frac{\bar{Z}_۱}{\bar{Z}_۲}$

e) $Re(Z) = \frac{Z+\bar{Z}}{۲}$

$Z = a+ib$
$\bar{Z} = a-ib$ $\Rightarrow Z+\bar{Z} = ۲a = ۲Re(Z) \Rightarrow Re(Z) = \frac{Z+\bar{Z}}{۲}$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

f) $Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{۲i}$

$Z = a+ib$
$\bar{Z} = a-ib \Rightarrow Z-\bar{Z} = ۲ib = ۲i\,Im(Z) \Rightarrow Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{۲i}$

g) $Re(iZ) = -Im(Z)$

h) $Im(iZ) = Re(Z)$

۲. مقادیر زیر را تعیین کنید.

$|(۱+i)(۲+i)| = |(۲-۱)+i(۲+۱)| = |۱+۳i| = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$

$\left|\frac{۴-۳i}{۲-i}\right| = \left|\frac{۴-۳i}{۲-i} \times \frac{۲+i}{۲+i}\right| = \left|\frac{(۸+۳)+i(۴-۶)}{۵}\right| = \left|\frac{۱۱}{۸} - \frac{۱}{۲}i\right| = \sqrt{\frac{۱۲۱}{۱۲} + \frac{۱}{۸}} = \sqrt{\frac{۱۲۵}{۱۲}} = \frac{۵}{۸}$

$|Z\bar{Z}| = |(a+ib)(a-ib)| = |a^۲+b^۲| = |Z|^۲$

$|Z-۱|^۲ = |(a-۱)+ib|^۲ = (a-۱)^۲+b^۲$

۳. کدام یک از مقادیر زیر درون دایره $|Z-i| = ۲$ قرار دارند

a) $\frac{۱}{۲}+i$

$|Z-i| = |\frac{۱}{۲}+i-i| = \frac{۱}{۲} < ۲$ درون دایره

b) $۲+۳i$

$|Z-i| = |۲+۳i-i| = |۲+۲i| = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} > ۲$ بیرون دایره

c) $\sqrt{۲}+i(\sqrt{۲}+۱)$

$|Z-i| = |\sqrt{۲}+i(\sqrt{۲}+۱)-i| = |\sqrt{۲}+i\sqrt{۲}| = ۲$ روی دایره

۴. مجموعه نقاطی را که با روابط زیر در صفحه مختلط تعیین می‌شوند رسم کنید.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

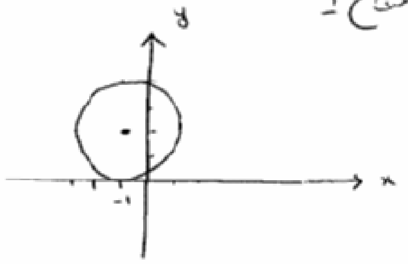
a) $|Z+۱-۲i|=۲$

فرض $Z=x+iy$ داریم:

$|Z+۱-۲i|=۲ \Rightarrow |x+iy+۱-۲i|=۲ \Rightarrow |(x+۱)+i(y-۲)|=۲$

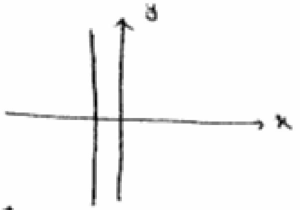
$\Rightarrow \sqrt{(x+۱)^۲+(y-۲)^۲}=۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$

دایره ای به مرکز $(-۱,۲)$ و شعاع ۲



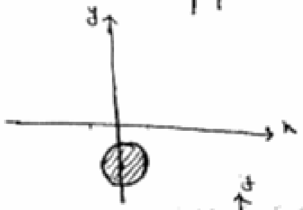
b) $Re(Z+۱)=۰$

$Re(x+iy+۱)=۰ \Rightarrow x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$



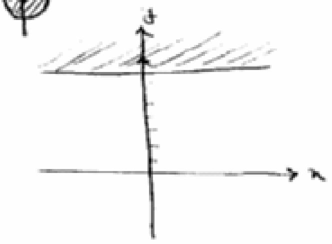
c) $|Z+۲i|\leq ۱$

$|x+i(y+۲)|\leq ۱ \Rightarrow x^۲+(y+۲)^۲\leqslant ۱$



d) $Im(Z-۲i)>۶$

$Im(x+iy-۲i)>۶ \Rightarrow y-۲>۶ \Rightarrow y>۸$



۵۴. ثابت کنید:

۱. $|Z|=۰ \Leftrightarrow Z=۰$

$|Z|=۰ \Leftrightarrow a^۲+b^۲=۰ \Leftrightarrow a^۲=۰, b^۲=۰ \Leftrightarrow a=۰, b=۰ \Leftrightarrow Z=۰$

۲. $|Z_۱-Z_۲|\leq|Z_۱|+|Z_۲|$

$|Z_۱-Z_۲|^۲=(Z_۱-Z_۲)\cdot(\overline{Z_۱-Z_۲})=(Z_۱-Z_۲)\cdot(\bar{Z}_۱-\bar{Z}_۲)=Z_۱\bar{Z}_۱-Z_۱\bar{Z}_۲-Z_۲\bar{Z}_۱+Z_۲\bar{Z}_۲$

$=|Z_۱|^۲-(Z_۱\bar{Z}_۲+\bar{Z}_۱\bar{Z}_۲)+|Z_۲|^۲ \quad (۱)$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$$\underbrace{(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2}_{\text{عدد حقیقی}} \geq 0 \qquad \underbrace{(z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2})^2}_{\text{عدد موهومی}} \leq 0$$

$$(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2-(z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2})^2=4z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2=4|z_1|^2|z_2|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})^2 \leq 4|z_1|^2|z_2|^2 \Rightarrow -2|z_1||z_2| \leq z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2} \leq 2|z_1||z_2$$

بنابه (۱) , (۲)

$$|z_1-z_2|^2 \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

۳. $|z_1-z_1|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)+|z_1|^2$

مشابه حالت قبل

$$|z_1-\bar{z}_2|^2=|z_1|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})+|z_2|^2$$

بنابر تعریف و حالت e . $2Re(z) = z+\bar{z}$ بنابراین

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$$

۴. $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2|$

مشابه حالت ۲

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})+|z_2|^2$$

$$-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}) \geq -2|z_1||z_2|$$

بنابراین

$$|z_1-z_2|^2 \geq |z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_1|)^2 \Rightarrow |z_1-z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$$

۵. $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)|+|Im(z)|$

$$\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)|+|Im(z)| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2} \geq |Re(z)|+|Im(z)|$$

$$\Leftrightarrow 2(Re(z)^2+Im(z)^2) \geq (|Re(z)|+|Im(z)|)^2 = Re(z)^2+Im(z)^2+2|Re(z)||Im(z)|$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$$\Longleftrightarrow Re(z)^2+Im(z)^2-2|Re(z)||Im(z)|\geq 0 \Longleftrightarrow (|Re(z)|+|Im(z)|)^2\geq 0$$

۷. بردارهای ناصفر z_1 و z_2 موازی‌اند اگر و تنها اگر $Im(z_1\bar{z}_2)=0$

فرض می‌کنیم $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1\bar{z}_2=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)$$

فرض می‌کنیم z_1 ، z_2 موازی باشند، در این صورت

$$z_1\times z_2=0 \Rightarrow (x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=x_1y_2\vec{k}-y_1x_2\vec{k}=0$$

بنابراین $x_1y_2=y_1x_2$ از طرفی

$$Im(z_1\bar{z}_2)=x_2y_1-x_1y_2$$

در نتیجه $Im(z_1\bar{z}_2)=0$.

و برعکس اگر $Im(z_1\bar{z}_2)=0$ آنگاه $x_2y_1=x_1y_2$ و در نتیجه $z_1\times z_2=0$ ، بنابراین z_1 و z_2 موازی هستند.

۸. $|z^n|=|z|^n$

نتیجه را با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم.

$n=1$ $\quad |z|=|z|$

فرض می‌کنیم نتیجه برای n برقرار باشد یعنی $|z^n|=|z|^n$

نشان می‌دهیم نتیجه برای $n+1$ نیز برقرار است.

$$|z^{n+1}|=|z\,z^n|=|z||z^n|=|z||z|^n=|z|^{n+1}.$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۵- آرگومان اصلی اعداد زیر را تعیین کنید.

a) $۱-i$

$|۱-i|=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\sin\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

$\arg(z)=\{-\frac{\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{\pi}{۴}$

b) $-\sqrt{۳}+i$

$|-\sqrt{۳}+i|=۲$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\sin\theta=\frac{۱}{۲}$

$\arg(-\sqrt{۳}+i)=\{\frac{۵\pi}{۶}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(-\sqrt{۳}+i)=\frac{۵\pi}{۶}$

c) $(-۱-i\sqrt{۳})^۲$

$|-۱-i\sqrt{۳}|=۲$ $\cos\theta=\frac{-۱}{۲}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\arg(-۱-i\sqrt{۳})=\{-\frac{۲\pi}{۳}+۲n\pi, n\in Z\}$

با توجه به اینکه $\arg(z_۱\cdot z_۲)=\arg(z_۱)+\arg(z_۲)$ داریم

$\arg(-۱-i\sqrt{۳})^۲=\{-\frac{۴\pi}{۳}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(-i\sqrt{۳}-۱)^۲=-\frac{۴\pi}{۳}+۲\pi=\frac{۲\pi}{۳}$

d) $(۱-i)^۳$

$|۱-i|=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\sin\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ $\arg(۱-i)=\{\frac{-\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\}$

$\arg(۱-i)^۳=\{-\frac{۳\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(۱-i)^۳=\frac{-۳\pi}{۴}$

e) $\frac{۲}{۱+i\sqrt{۳}}=\frac{۲(۱-i\sqrt{۳})}{۴}=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$

$|\frac{۲}{۱+i\sqrt{۳}}|=|\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i|=۱$ $\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ $\sin\theta=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

$\arg(\frac{۲}{۱+i\sqrt{۳}})=\{\frac{-\pi}{۳}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(\frac{۲}{۱+i\sqrt{۳}})=\frac{-\pi}{۳}$

f) $\frac{۲}{i-۱}=\frac{-۲}{\sqrt{۲}}(۱+i)$

$|\frac{۲}{i-۱}|=۲$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\arg(\frac{۲}{i-۱})=\{-\frac{۳\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\}$ $\operatorname{Arg}(\frac{۲}{i-۱})=-$

g) $\frac{۱+i\sqrt{۳}}{(۱+i)^{۲}} = \frac{۱+i\sqrt{۳}}{۲i} = \frac{-i}{۲}(-\sqrt{۳}+i) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{i}{۲}$

$|\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{i}{۲}| = ۱$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\sin\theta = -\frac{۱}{۲}$

$\arg(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{(۱+i)^{۲}}) = \{-\frac{\pi}{۶} + ۲n\pi, n\in Z\}$ $Arg(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{(۱+i)^{۲}}) = -\frac{\pi}{۶}$

h) $(۱+i\sqrt{۳})(۱+i)$

$|۱+i\sqrt{۳}| = ۲$ $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\arg(۱+i\sqrt{۳}) = \{\frac{\pi}{۳} + ۲n\pi, n\in Z\}$

$|۱+i| = \sqrt{۲}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\arg(۱+i) = \{\frac{\pi}{۴} + ۲n\pi, n\in Z\}$

$\arg((۱+i\sqrt{۳})(۱+i)) = Arg(۱+i\sqrt{۳}) + \arg(۱+i) = \{\frac{۷\pi}{۱۲} + ۲n\pi, n\in Z\}$

$Arg((۱+i\sqrt{۳})(۱+i)) = \frac{۷\pi}{۱۲}$

۶- اعداد مختلط زیر را به شکل نمائی نشان دهید.

a) $(\sqrt{۳}-i)(۱+i\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳}+۲i$

$|\sqrt{۳}-i| = ۲$ $Arg(\sqrt{۳}-i) = -\frac{\pi}{۶}$ $\Rightarrow \sqrt{۳}-i = ۲e^{-\frac{\pi}{۶}i}$

$|۱+i\sqrt{۳}| = ۲$ $Arg(۱+i\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}$ $\Rightarrow ۱+i\sqrt{۳} = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$

$|۲\sqrt{۳}+۲i| = ۴$ $Arg(۲\sqrt{۳}+۲i) = \frac{\pi}{۶}$ $۲\sqrt{۳}+۲i = ۴e^{\frac{\pi}{۶}i}$

$(\sqrt{۳}-i)(۱+i\sqrt{۳}) = ۲e^{-\frac{\pi}{۶}i} \times ۲e^{\frac{\pi}{۳}i} = ۴e^{\frac{\pi}{۶}i} = ۲\sqrt{۳}+۲i$

b) $(۱+i)^{۳} = -۲+۲i$

$|۱+i| = \sqrt{۲}$ $\arg(۱+i) = \{\frac{\pi}{۴} + ۲n\pi, n\in Z\} \Rightarrow \arg(۱+i)^{۳} = \{\frac{۳\pi}{۴} + ۲n\pi, n\in Z\}$

$(۱+i)^{۳} = (\sqrt{۲})^{۳} e^{\frac{۳\pi}{۴}i} = ۲\sqrt{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}i}$

$|-۲+۲i| = ۲\sqrt{۲}$ $\arg(-۲+۲i) = \{\frac{۳\pi}{۴} + ۲n\pi, n\in Z\}$ $-۲+۲i = ۲\sqrt{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}i}$

$(۱+i)^{۳} = -۲+۲i = ۲\sqrt{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}i}$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

c) $۲i(\sqrt{۳}+i)(۱+i\sqrt{۳})=-۸$

$|۲i|=۲ \qquad \arg(۲i)=\{\frac{\pi}{۲}+۲n\pi, n\in Z\} \qquad ۲i=۲e^{\frac{\pi}{۲}i}$

$|\sqrt{۳}+i|=۲ \qquad \arg(\sqrt{۳}+i)=\{\frac{\pi}{۶}+۲n\pi, n\in Z\} \qquad \sqrt{۳}+i=۲e^{\frac{\pi}{۶}i}$

$|۱+i\sqrt{۳}|=۲ \qquad \arg(۱+i\sqrt{۳})=\{\frac{\pi}{۳}+۲n\pi, n\in Z\} \qquad ۱+i\sqrt{۳}=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$

$|-۸|=۸ \qquad \arg(-۸)=\{-\pi+۲n\pi, n\in Z\} \qquad -۸=۸e^{-i\pi}$

$۲i(\sqrt{۳}+i)(۱+i\sqrt{۳})=۲e^{\frac{\pi}{۲}i}\times ۲e^{\frac{\pi}{۶}i}\times ۲e^{\frac{\pi}{۳}i}=۸e^{-\pi i}=-۸$

d) $\frac{۸}{۱+i}=۴-۴i$

$|۱+i|=\sqrt{۲} \qquad \arg(۱+i)=\{\frac{\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\} \qquad ۱+i=\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$

$|۴-۴i|=۴\sqrt{۲} \qquad \arg(۴-۴i)=\{-\frac{\pi}{۴}+۲n\pi, n\in Z\} \qquad ۴-۴i=۴\sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i}$

$\frac{۸}{۱+i}=\frac{۸}{\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}}=۴\sqrt{۲}\,e^{-\frac{\pi}{۴}i}=۴-۴i$

۷. اعداد زیر را به شکل قطبی به نمایش دهید

a) $-۴=۴(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$

b) $۶-۶i$

$|۶-۶i|=۶\sqrt{۲} \qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۱} \qquad \theta=-\frac{\pi}{۴}$

$۶-۶i=۶\sqrt{۲}(\cos(-\frac{\pi}{۴})+i\sin(-\frac{\pi}{۴}))=۶\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴})$

c) $-۷i$

$|-۷i|=۷ \qquad \cos\theta=0 \qquad \sin\theta=-۱ \qquad \theta=-\frac{\pi}{۲}$

$-۷i=۷(\cos\frac{\pi}{۲}-i\sin\frac{\pi}{۲})$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

d) $-۲\sqrt{۳}-۲i$

$|-۲\sqrt{۳}-۲i|=۴$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\sin\theta=-\frac{۱}{۲}$ $\theta=\frac{\pi}{۶}-\pi=-\frac{۵\pi}{۶}$

$-۲\sqrt{۳}-۲i=۴(\cos\frac{۵\pi}{۶},-i\sin\frac{۵\pi}{۶})$

f) $\frac{۶}{i+\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}(\sqrt{۳}-i)$

$|\frac{۳}{۲}(\sqrt{۳}-i)|=۳$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\sin\theta=-\frac{۱}{۲}$ $\theta=-\frac{\pi}{۶}$

$\frac{۶}{i+\sqrt{۳}}=۳(\cos\frac{\pi}{۶}-i\sin\frac{\pi}{۶})$

g) $(۵+۵i)^{۳}$

$|۵+۵i|=۵\sqrt{۲}$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\theta=\frac{\pi}{۴}$

$۵+۵i=۵\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})$

$(۵+۵i)^{۳}=(۵\sqrt{۲})^{۳}(\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴})$

۸. اعداد زیر را به فرم جبری $a+ib$ نمایش دهید

a) $e^{i\frac{\pi}{۲}}=\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}=i$

b) $۴e^{-i\frac{\pi}{۲}}=۴(\cos(-\frac{\pi}{۲})+i\sin(-\frac{\pi}{۲}))=-۴i$

c) $۸e^{i\frac{۷\pi}{۳}}=۸(\cos(\frac{۷\pi}{۳})+i\sin(\frac{۷\pi}{۳}))=۸(\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۴(۱+\sqrt{۳}i)$

d) $-۲e^{i\frac{۵\pi}{۶}}=-۲(\cos(\frac{۵\pi}{۶})+i\sin(\frac{۵\pi}{۶}))=-۲(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i\frac{۱}{۲})=\sqrt{۳}-i$

e) $۲ie^{i\frac{۲\pi}{۳}}e^{i\pi}=۲i(\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳})(\cos\pi+i\sin\pi)=۲i(-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i)i=۱-\sqrt{۳}i$

f) $۶e^{i\frac{۲\pi}{۳}}=۶(\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳})=۶(-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i)=۳(-۱+\sqrt{۳}i)$

g) $e^{۲}e^{i\pi}=e^{۲}(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^{۲}i$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

h) $e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\pi} = e^{i\frac{-3\pi}{4}} = \cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

۹. فرض کنید $Z_1 = -1+i\sqrt{3}$ ، $Z_2 = -\sqrt{3}+i$ نشان دهید که معادله زیر برقرار نیست.

$$Arg(Z_1 Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2)$$

$Z_1 = -1+i\sqrt{3}$ $\quad |Z_1| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$arg(Z_1) = \{\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in Z\}$ $\qquad Arg(Z_1) = \frac{2\pi}{3}$

$Z_2 = -\sqrt{3}+i$ $\quad |Z_2| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$arg(Z_2) = \{\frac{\pi}{6} - \pi + 2n\pi, n\in Z\}$ $\qquad Arg(Z_2) = \cancel{\frac{-5\pi}{6}}\ \frac{5\pi}{6}$

$Z_1 Z_2 = (-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i) = -4i$ $\qquad Arg(Z_1 Z_2) = -\frac{\pi}{2}$

$Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3} + \overset{5\pi/6}{\cancel{\frac{4\pi}{6}}} = \overset{3\pi/2}{\cancel{0}} \neq \frac{-\pi}{2} = Arg(Z_1 Z_2)$

۱۰. ثابت کنید.

a) $arg(\frac{Z_1}{Z_2}) = arg(Z_1) - arg(Z_2)$

$arg(Z_1) - arg(Z_2) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in arg(Z_1), \theta_2 \in arg(Z_2)\}$

فرض می‌کنیم $\theta \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$. چون $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ بنابراین $\theta_1 - \theta_2 \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$

در نتیجه

$$\exists n_0 \in Z:\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2n_0\pi$$

اما چون $\theta_1 \in arg(Z_1)$ ، لذا $\theta_1 + 2n_0\pi \in arg(Z_1)$ در نتیجه

$$\theta = (\theta_1 + 2n_0\pi) - \theta_2 \in arg(Z_1) - arg(Z_2)$$

بنابراین $arg(Z_1/Z_2) \subseteq arg(Z_1) - arg(Z_2)$. (1)

بالعکس، فرض می‌کنیم $\theta_0 \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$. بنابراین

$$\exists \theta_1 \in arg(Z_1) \quad \exists \theta_2 \in arg(Z_2):\ \theta_0 = \theta_1 - \theta_2$$

در نتیجه $Z_1 = |Z_1| e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = |Z_2| e^{i\theta_2}$ شکل قطبی Z_1 ، Z_2 می‌باشند

$\frac{Z_1}{Z_2} = |\frac{Z_1}{Z_2}| e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ $\rightarrow$ (2) $arg(Z_1) - arg(Z_2) \subseteq arg(Z_1/Z_2)$

11 حل تمرین ریاضی عمومی ۱

b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = \{2n\pi - \theta ,\ n\in Z,\ \theta\in \arg(z)\}$

$= -\{\theta - 2n\pi ,\ n\in Z,\ \theta\in \arg(z)\}$

چون $\theta\in\arg(z)$ بنابراین $\theta - 2n\pi\in\arg(z)$ در نتیجه

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

c) $\arg(z_1\bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$z_2 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z}_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$

بنابراین $-\theta\in\arg(\bar{z}_2)$ در نتیجه

$\arg(\bar{z}_2) = \{-\theta + 2n\pi,\ n\in Z,\ \theta\in\arg(z_2)\} = -\{\theta - 2n\pi,\ \theta\in\arg(z_2),\ n\in Z\}$

چون $\theta\in\arg(z_2)$ بنابراین $\theta - 2n\pi\in\arg(z_2)$ در نتیجه

$\arg(\bar{z}_2) = -\arg(z_2)$

$\arg(z_1\bar{z}_2) = \arg(z_1) + \arg(\bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

۱۱. ثابت کنید:

a) $Arg(z\bar{z}) = 0$

$\arg(z\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = \{2n\pi,\ n\in Z\} \Rightarrow Arg(z\bar{z}) = 0$

b) $Re(z) > 0$ ، آنگاه $Arg(z+\bar{z}) = 0$

$\arg(z+\bar{z}) = \arg(2Re(z)) = \{2n\pi,\ n\in Z\} \Rightarrow Arg(z+\bar{z}) = 0$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ریشه n ام یک عدد مختلط

همه مقادیر زیر را مشخص کنید.

a) $(-۲+۲i)^{۱/۳}$ $\quad Z^{۳}=(-۲+۲i)$

$r_۰=|-۲+۲i|=۲\sqrt{۲}$ $\quad \cos\theta_۰=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\quad \sin\theta_۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\quad \theta_۰=\frac{۳\pi}{۴}$

$$Z_k=(۲\sqrt{۲})^{۱/۳}\left(\cos\left(\frac{\frac{۳\pi}{۴}+۲k\pi}{۳}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{۳\pi}{۴}+۲k\pi}{۳}\right)\right) \qquad ۰\leq k\leq ۲$$

$k=۰$ $\quad Z_۰=\sqrt[۶]{۸}\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt[۶]{۸}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=(۱+i)$

$k=۱$ $\quad Z_۱=\sqrt[۶]{۸}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۲\pi}{۳}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۲\pi}{۳}\right)\right)=\sqrt[۶]{۸}\left(-\frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})}{۴}+i\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{۴}\right)=-\frac{۱}{۴}$

$=-\frac{۱}{۲}\left((۱+\sqrt{۳})+i(۱-\sqrt{۳})\right)$

$k=۲$ $\quad Z_۲=\sqrt[۶]{۸}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۴\pi}{۳}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۴\pi}{۳}\right)\right)=\sqrt[۶]{۸}\left(\frac{-\sqrt{۲}(۱-\sqrt{۳})}{۴}-i\frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})}{۴}\right)$

$=-\frac{۱}{۲}\left((۱-\sqrt{۳})+i(۱+\sqrt{۳})\right)$

b) $(-۱)^{۱/۵}$ $\quad Z^{۵}=-۱$ $\quad r_۰=۱$ $\quad \theta_۰=\pi$

$$Z_k=\cos\left(\frac{\pi+۲k\pi}{۵}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+۲k\pi}{۵}\right) \qquad ۰\leq k\leq ۴$$

$k=۰$ $\quad Z_۰=\cos\left(\frac{\pi}{۵}\right)+i\sin\frac{\pi}{۵}=۰/۸۰۹+۰/۵۸۷۸\,i$

$k=۱$ $\quad Z_۱=\cos\left(\frac{۳\pi}{۵}\right)+i\sin\left(\frac{۳\pi}{۵}\right)=-۰/۳۰۹+۰/۹۵۱۱\,i$

$k=۲$ $\quad Z_۲=\cos\pi+i\sin\pi=-i$

$k=۳$ $\quad Z_۳=\cos\left(\frac{۷\pi}{۵}\right)+i\sin\left(\frac{۷\pi}{۵}\right)=-۰/۳۰۹-۰/۹۵۱۱\,i$

$k=۴$ $\quad Z_۴=\cos\left(\frac{۹\pi}{۵}\right)+i\sin\left(\frac{۹\pi}{۵}\right)=۰/۸۰۹-۰/۵۸۷۸\,i$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

d) $(1+i)^{\frac{1}{4}}$ $\quad Z^4=1+i$ $\quad r_0=\sqrt{2}$ $\quad \theta_0=\frac{\pi}{4}$

$$Z_k=\sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right] \qquad 0\leq k\leq 3$$

e) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$ $\quad Z^2=\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$r_0=1 \qquad \theta_0=-\frac{\pi}{2}$

$$Z_k=\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) \qquad 0\leq k\leq 1$$

فرض کنید $1\neq\omega$ یک ریشه n ام واحد است. ثابت کنید

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-n}{1-\omega}$$

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=\frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

با مشتق گیری از طرفین داریم

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-(n+1)\omega^n(1-\omega)+(1-\omega^{n+1})}{(1-\omega)^2}$$

با توجه به اینکه $1=\omega^n$ و $\omega^{n+1}=\omega$ پس داریم

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-(n+1)(1-\omega)+(1-\omega)}{(1-\omega)^2}$$

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-(n+1)+1}{1-\omega}$$

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-n}{1-\omega}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

تابع

۱. فرض کنید $F(x)=\frac{1}{1+x}$ مطلوبست:

الف $F(F(x))$

$$F(F(x))=F\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1+1+x}=\frac{1+x}{2+x}$$

ب $F(\frac{1}{x})$

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+x}$$

ج. $F(Cx)$

$$F(Cx)=\frac{1}{1+Cx}$$

د. به ازای کدام مقادیر C، x ی وجود دارد که $F(Cx)=F(x)$

$$F(Cx)=F(x)\Rightarrow\frac{1}{1+Cx}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow 1+x=1+Cx\Rightarrow(C-1)x=0$$

اگر $C\neq 1$ باشد $x=0$.

ه) به ازای کدام مقادیر C، معادله $F(Cx)=F(x)$ حداقل دارای دو جواب است؟

$$\frac{1}{1+Cx}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow 1+Cx=1+x\Rightarrow Cx=x\Rightarrow C=1$$ دارای حداقل ۲ جواب

۲. فرض کنید $g(x)=x^2$، $h(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q'\end{cases}$.

الف به ازای کدام y، $h(y)\le y$ ؟

$y\in Q \quad h(y)\le y\Rightarrow 0\le y$

$y\in R-Q' \quad h(y)\le y\Rightarrow 1\le y$

ب. به ازای کدام y، $h(y)\le g(y)$ ؟

$y\in Q \quad h(y)\le g(y)\Rightarrow y^2\geq 0 \quad y\in Q$ ها

$y\in R-Q' \quad h(y)\le g(y)\Rightarrow y^2\geq 1\Rightarrow y^2-1\geq 0 \quad y\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$((-\infty,-1]\cup[1,\infty))\cap R-Q'$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ج) حاصل $g(h(t))-h(t)$ چیست؟

$$g(h(t))=g\left(\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q\end{cases}\right)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q\end{cases}$$

$g(h(t))-h(t)=0$

د) به ازای کدام a، $g(g(a))=g(a)$؟

$g(g(a))=g(a^2)=a^4$

$$g(g(a))=g(a)\Rightarrow a^4=a^2\Rightarrow a^2(a^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a^2-1=0\Rightarrow a=\pm 1\end{cases}$$

۳. دامنه توابع زیر را مشخص کنید

الف) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2\geq 0$ $\quad x=\pm 1$ $\quad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & - & | & + & | & - \end{array}$ $\quad D_f=[-1,1]$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $h(x)=\dfrac{1}{x-2}$

$D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad D_h=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad D_f=D_g\cap D_h=\mathbb{R}-\{1,2\}$

ج) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $D_g=[-1,1]$

$h(x)=\sqrt{x^2-1}$ $\quad x^2-1\geq 0$ $\quad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & + & | & - & | & + \end{array}$ $\quad D_h=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$D_f=D_g\cap D_h=\{-1,1\}$

د) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$

$g(x)=\sqrt{1-x}$, $h(x)=\sqrt{x-2}$

$D_g=(-\infty,1]$ $\quad D_h=[2,\infty)$ $\quad\Rightarrow\quad D_f=\phi$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ج) حاصل $g(h(t))-h(t)$ چیست؟

$$g(h(t))=g\left(\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q'\end{cases}\right)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\in R-Q'\end{cases}$$

$$g(h(t))-h(t)=0$$

د) به ازای کدام a، $g(g(a))=g(a)$ ؟

$$g(g(a))=g(a^2)=a^4$$

$$g(g(a))=g(a)\Rightarrow a^4=a^2\Rightarrow a^2(a^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a^2-1=0\Rightarrow a=\pm 1\end{cases}$$

۳. دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$1-x^2\geq 0 \qquad x=\pm 1 \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & - & & + & & - \end{array} \qquad D_f=[-1,1]$$

ب. $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\ ,\quad h(x)=\frac{1}{x-2}$$

$$D_g=\mathbb{R}-\{1\} \qquad D_h=\mathbb{R}-\{2\} \qquad D_f=D_g\cap D_h=\mathbb{R}-\{1,2\}$$

ج. $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$$g(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\quad D_g=[-1,1]$$

$$h(x)=\sqrt{x^2-1} \qquad x^2-1\geq 0 \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & + & & - & & + \end{array} \qquad D_h=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

$$D_f=D_g\cap D_h=\{-1,1\}$$

د. $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$

$$g(x)=\sqrt{1-x}\ ,\quad h(x)=\sqrt{x-2}$$

$$D_g=(-\infty,1] \qquad D_h=[2,\infty) \quad\Rightarrow\quad D_f=\phi$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۴. فرض کنید $S(x)=x^۲$ ، $P(x)=۲^x$ ، $R(x)=\sin x$. هریک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف. $(SoP)(y)$

$$(SoP)(y)=S(P(y))=S(۲^y)=(۲^y)^۲=۲^{۲y}$$

ب. $(RoP)(t)+(SoPoR)(t)$

$$SoPoR(t)=SoP(R(t))=SoP(\sin t)=S(P(\sin t))=S(۲^{\sin t})=۲^{۲\sin t}$$

$$RoP(t)=R(۲^t)=\sin ۲^t$$

$$(RoP)(t)+(SoPoR)(t)=۲^{۲\sin t}+\sin ۲^t$$

۵. به ازای کدام مقادیر از a، b، c، d تابع $F(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در $F(F(x))=x$ به ازای هر x صادق است؟

$$F(F(x))=F\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d}=\frac{a^۲x+ab+bcx+bd}{acx+cb+dcx+d^۲}$$

$$=\frac{(a^۲+bc)x+(ab+bd)}{(ac+dc)x+(cb+d^۲)}=x$$

برای $x=۰$ داریم:

$$\frac{ab+bd}{cb+d^۲}=۰\Rightarrow ab+bd=۰\Rightarrow ab=-bd$$

با فرض $b\neq ۰$ ، $a=-d$

در این صورت

$$f(f(x))=\frac{(a^۲+bc)x}{(ac+cd)x+cb+d^۲}=x$$

$$\Rightarrow \frac{(a^۲+bc)x}{(cb+d^۲)x}=x$$

که این رابطه به ازای هر c و $a=-d$ برقرار است.

اگر $b=۰$ باشد، آنگاه

$$f(f(x))=\frac{a^۲x}{(ac+cd)x+d^۲}=x\Rightarrow$$

با فرض $c\neq ۰$ ، $a=-d$ و اگر $c=۰$ باشد، $a=\pm d$

۶. فرض کنید f یک تابع، y عددی است و $f(f(y))=y$. حاصل $f(f(f(\cdots(f(y))\cdots)))$ کدام است؟ این مقدار برای ۸۱ بار چند است؟ اگر $f(f(y))=f(y)$ حاصل های خواسته شده چگونه‌اند؟

$$\underbrace{f(f(\cdots(f(y)\cdots)))}_{\text{۸۰ بار}}=y \qquad \underbrace{f(f(f\cdots(f(y)\cdots)))}_{\text{۸۱ بار}}=f(y)$$

$$\underbrace{f(f(\cdots(f(y)\cdots)))}_{\text{۸۰ بار}}=f(y) \qquad \underbrace{f(f\cdots(f(y)\cdots)))}_{\text{۸۱ بار}}=f(f(y))=f(y)$$

۷. ثابت کنید هر تابع f با دامنه R را می‌توان به صورت $f=E+O$ نمایش داد که در آن E زوج و O فرد است. ثابت کنید این نمایش یکتاست.

در صورتی که $E=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ، $O=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. در این صورت $f=E+O$ که E یک تابع زوج و O یک تابع فرد است.

$$E(x)=f(x)-O(x) \Rightarrow E(-x)=f(-x)-O(-x)$$

چون E یک تابع زوج است بنابراین $E(-x)=E(x)$ در نتیجه داریم.

$$f(-x)-O(-x)=f(x)-O(x)$$

و حال چون O فرد است، بنابراین

$$f(-x)-(-O(x))=f(x)-O(x)$$

$$f(-x)+O(x)=f(x)-O(x)$$

$$2O(x)=f(x)-f(-x) \Rightarrow O(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$E(x)=f(x)-O(x) \Rightarrow E(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱:

۸- برای توابع f و g، تعریف کنید.

$$|f|(x) = |f(x)|$$
$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

نمایش برای توابع max و min برحسب قدر مطلق پیدا کنید.

$$\max(|f|,|g|)(x) = \max(|f|(x), |g|(x)) = \max(|f(x)|, |g(x)|)$$

$$\min(|f|,|g|)(x) = \min(|f|(x), |g|(x)) = \min(|f(x)|, |g(x)|)$$

۹. الف) برای تابع دلخواه f، نشان دهید

$$f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \max(f,0) = \max(f(x),0) = f(x) \\ \min(f,0) = \min(f(x),0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \max(f,0) = \max(f(x),0) = 0 \\ \min(f,0) = \min(f(x),0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow f = \max(f,0) + \min(f,0)$$

ب- نشان دهید هر تابع f را می‌توان به صورت $f = g - h$ که g و h توابعی نامنفی اند نمایش داد.

فرض می‌کنیم $h = \max(-f,0)$ و $g = \max(f,0)$ در این صورت g و h نامنفی اند و داریم

$$f \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} h = \max(-f,0) = 0 \\ g = \max(f,0) = f \end{cases} \Rightarrow g - h = f - 0 = f$$

$$f < 0 \Rightarrow \begin{cases} h = \max(-f,0) = -f \\ g = \max(f,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow g - h = 0 - (-f) = f$$

۱۹

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۰. ثابت یا رد کنید:

الف. $fo(g+h)=fog+foh$

مثال نقض:

$f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad g(x)=1-x \qquad h(x)=\frac{1}{x}$

$fog+foh=\sqrt{1-x}+\sqrt{\frac{1}{x}}$

$fog+foh\neq fo(g+h)$

$fo(g+h)=\sqrt{1-x+\frac{1}{x}}$

همچنین دامنه طرفین مساوی نیست.

ب- $(g+h)of=gof+hof$

$$((g+h)of)(x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))=gof(x)+hof(x)$$

$$D_{(g+h)of}=D_{gof}\cap D_{hof}=D_{gof+hof}$$

ج. $\frac{1}{fog}=\frac{1}{f}og$

$f(x)=\sqrt{1-x} \qquad g(x)=\frac{1}{1-x}$

$fog(x)=f(\frac{1}{1-x})=\sqrt{1-\frac{1}{1-x}}=\sqrt{\frac{-x}{1-x}} \Rightarrow \frac{1}{fog}(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

$f^{-1}(x)=1-x^2 \qquad \frac{1}{f}og(x)=\frac{1}{f}(\frac{1}{1-x})=1-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{fog}(x)\neq\frac{1}{f}og(x)$

د. $\frac{1}{fog}=fo\frac{1}{g}$

$g^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$

$$fo\frac{1}{g}(x)=f(\frac{x-1}{x})=\sqrt{1-\frac{x-1}{x}}=\sqrt{\frac{x-x+1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\neq\frac{1}{fog}(x)$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۱. فرض کنید I تابع همانی است و $f\circ g = I$. ثابت کنید:

الف. $x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y)$

$$g(x)=g(y) \Rightarrow f\circ g(x)=f\circ g(y) \Rightarrow I(x)=I(y) \Rightarrow x=y$$

ب. $\forall b \ \exists a \ (f(a)=b)$

$$\forall b \quad I(b)=b \Rightarrow f\circ g(b)=b \Rightarrow f(g(b))=b$$

با فرض $g(b)=a$ داریم

$$f(a)=b$$

۱۲. فرض کنید $f(x)=x+1$. آیا تابعی مانند g وجود دارد که $f\circ g=g\circ f$ ؟ ب. اگر f یک تابع ثابت باشد، به ازای کدام توابع g، $f\circ g=g\circ f$ ؟ ج. اگر به ازای هر تابع g، $f\circ g=g\circ f$ نشان دهید f همانی است.

الف. نشان می‌دهیم f معکوس پذیر است،

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+1=x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ f یک به یک

$y=x+1 \Rightarrow x=y-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=x-1$

ب. فرض می‌کنیم $f(x)=c$ که c یک عدد ثابت است، باشد. در این صورت

$$\left.\begin{array}{l} f\circ g(x)=f(g(x))=c \\ g\circ f(x)=g(f(x))=g(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g(c)=c$$

ج. فرض می‌کنیم تابع g، تابع ثابت $g(x)=c$ باشد، بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} f\circ g(x)=f(g(x))=f(c) \\ g\circ f(x)=g(f(x))=c \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)=c \qquad (1)$$

چون رابطه $f\circ g=g\circ f$ به ازای هر g دلخواه برقرار است بنابراین رابطه (۱) به ازای هر c دلخواه برقرار می‌باشد، بنابراین تابع f ، تابع همانی است.

حل تمرین ریاضی عمومی !

۱۳. نمودارهای روابط زیر را رسم کنید.

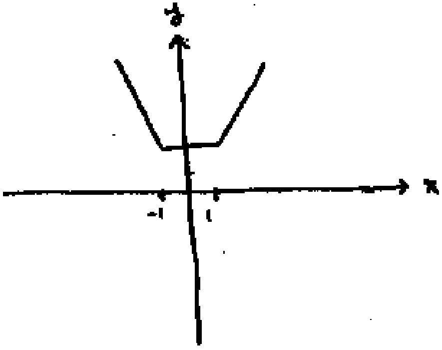
الف. $y=|x+1|+|x-1|$

ابتدا $x-1$ و $x+1$ را تعیین علامت می‌کنیم.

-1 1

$x+1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+

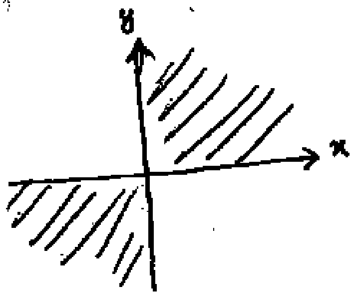
$$\Rightarrow y=\begin{cases} -(x+1)-(x-1)=-2x & x\leqslant -1 \\ x+1-(x-1)=2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ x+1+(x-1)=2x & x\geqslant 1 \end{cases}$$



ب. $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$

$$\frac{x}{|x|}=\begin{cases} 1 & x\geqslant 0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{|y|}=\begin{cases} 1 & x\geqslant 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \Rightarrow |y|=y \Rightarrow y\geqslant 0 \\ x<0 \Rightarrow |y|=-y \Rightarrow y<0 \end{cases}$$



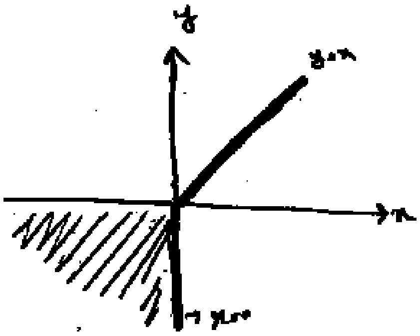
ج. $|x|+x=|y|+y$

$$|x|+x=\begin{cases} 2x & x\geqslant 0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

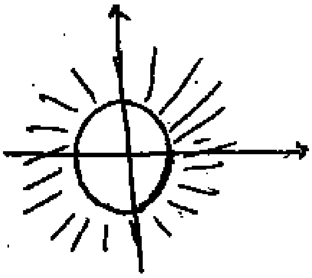
$$x\geqslant 0 \Rightarrow |y|+y=2x \Rightarrow \begin{cases} y\geqslant 0 & 2y=2x \Rightarrow y=x \\ y<0 & 0=2x \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$z\leqslant 0 \Rightarrow |y|+y=0 \Rightarrow |y|=-y \Rightarrow y\leqslant 0$$

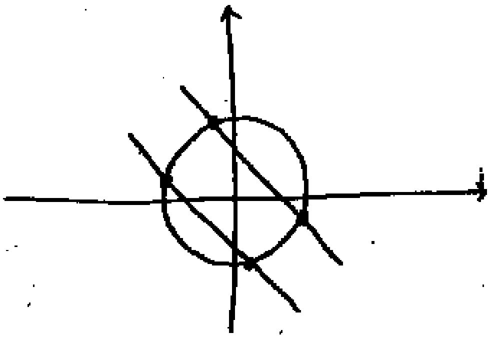
حل تمرین ریاضی عمومی ۱



د. $x^۲+y^۲>۱$



ز) $\begin{cases} |x+y|=۱ \\ x^۲+y^۲=۲ \end{cases}$



ز) $\begin{cases} |x-y|<۲ \\ y\geq ۳ \\ x^۲+y^۲<۴ \end{cases}$

جواب ندارد. چون y ای که در رابطه $y\geq ۳$ و $x^۲+y^۲<۴$ باهم صدق کند وجود ندارد.

۱۴. کدام یک از توابع زیر کران دارند؟

الف) $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ کران دار $|y|<۱$

ب. $y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ کران دار $|y|<۱$

ج. $y=\frac{x^۳}{x^۲+۱}$ کران دار نیست.

د. $y=|x|$ کران دار نیست.

ه) $y=\frac{۱}{|x|}$ کران دار

و) $y=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ کران دار

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

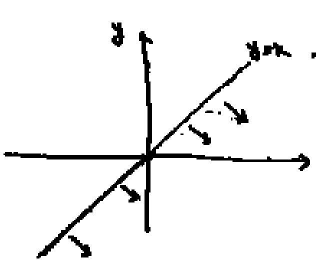
۱۵. ثابت کنید تابع $y=\frac{1-x}{1+x}$ معکوس خوداست.

$$y=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow y+xy=1-x \Rightarrow xy+x=1-y \Rightarrow x(1+y)=1-y$$

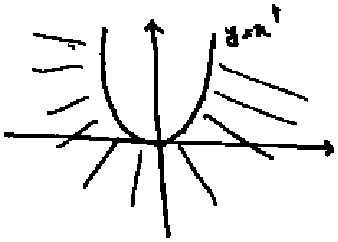
$$\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$$

۱۶. نمودارهای روابط زیر را در صفحه تعیین کنید.

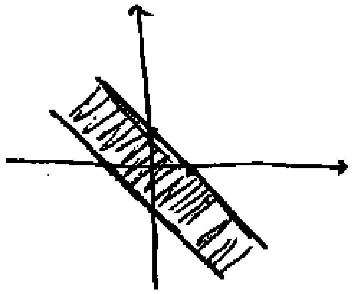
۱) $x>y$



۲) $y<x^2$



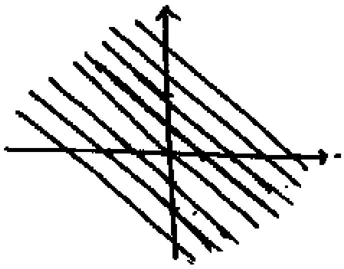
۳) $|x+y|<1$

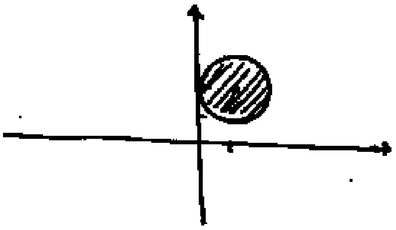


۴) $x+y$ یک عدد صحیح است.

$x+y=k \Rightarrow y=k-x$

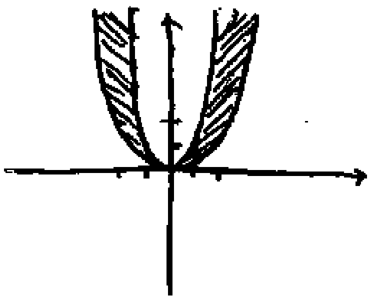
k عدد صحیح





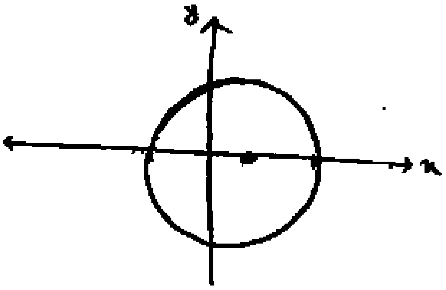
۵) $(x-1)^2+(y-2)^2<1$

۶) $x^2<y<x^4$



۷) $x^{۲}-۲x+y^{۲}=۴$

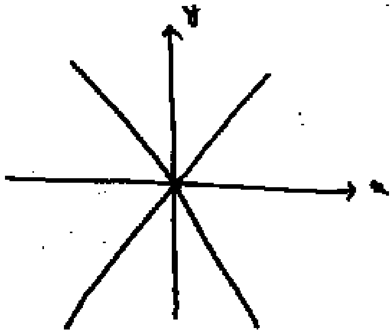
$x^{۲}-۲x+۱+y^{۲}=۴+۱ \Rightarrow (x-۱)^{۲}+y^{۲}=۵$



۸) $y^{۲}=x^{۲}$

$y=|x|$

$y=-|x|$

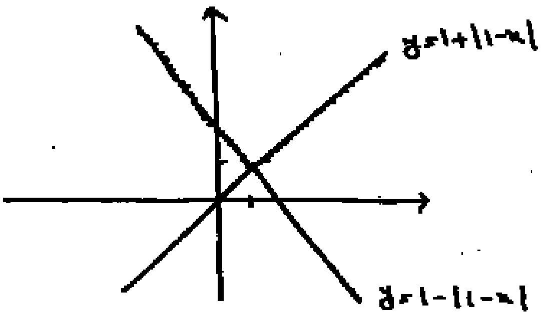


۹) $|۱-x|=|y-۱|$

$|y-۱|=\begin{cases}-(y-۱) & y\le ۱\\ y-۱ & y\ge ۱\end{cases}$

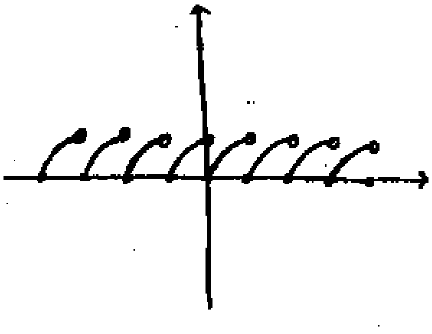
$\Rightarrow y\le ۱ \Rightarrow -(y-۱)=|۱-x| \Rightarrow y=۱-|۱-x|$

$y\ge ۱ \Rightarrow y-۱=|۱-x| \Rightarrow y=۱+|۱-x|$



۱۰) $y=\sqrt{x-[x]}$

اگر x عدد صحیح باشد ، $y=۰$



حل تمرین ریاضی عمومی ۱

• حد:

۱. حدود زیر را محاسبه کنید. در صورت عدم وجود دلیل ارائه دهید.

$$۱.\ \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۳x+۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x+۱)(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{x+۱}{x-۱} = ۳$$

$$۲.\ \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^۲+۶x+۸}{۱۰x^۲+۱۰^۲} = \frac{-۱}{۱۰}$$

$$۳.\ \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۳}}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۳})(\sqrt{x}+\sqrt{۳})}{(x-۳)(\sqrt{x}+\sqrt{۳})} = \lim_{x\to ۳} \frac{x-۳}{(x-۳)(\sqrt{x}+\sqrt{۳})} = \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

$$۴.\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{(۲x+۱)^۳(x-۵)^۴}{(x-۳)^۴\sqrt{۹-x}} = \frac{۷^۳ \times ۲^۴}{۰^-} = -\infty$$

$$۵.\ \lim_{x\to ۱} \frac{(x+۲)(x-۱)}{x^۲-۶x+۵} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۵)(x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۲}{x-۵} = \frac{-۳}{۴}$$

$$۶.\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲|x-۳|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{-x^۲(x-۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^-} -x^۲ = -۹$$

$$۷.\ \lim_{x\to \infty} e^{-x}+۱ = ۱$$

$$۸.\ \lim_{x\to \infty} \frac{۲x^۲-۳x+۷}{x^۳-۳} = ۰$$

$$۹.\ \lim_{x\to \infty} \frac{x-x^۲}{x+x^۲} = -۱$$

$$۱۰.\ \lim_{x\to \infty} \frac{۱۲+۲^x}{۶-۲^x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\ln ۲\ ۲^x}{-\ln ۲\ ۲^x} = -۱$$

$$۱۱.\ \lim_{x\to \infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \simeq \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{e^x} = ۱$$

۲۶

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۲. $\lim_{x\to ۳^-} \frac{۱۰x^۳-x^۲}{x-۳} = \frac{۲۷۰-۹}{۰^-} = -\infty$

۱۳. $\lim_{x\to -۵} \frac{x+۵}{x^۲+۴x-۵} = \lim_{x\to -۵} \frac{x+۵}{(x+۵)(x-۱)} = \frac{-۱}{۶}$

۱۴. $\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۴-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)}{x-۱} = ۴$

۱۵. $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{|x|} =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = ۱$, $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{-x} = -۱$

۱۶. $\lim_{h\to ۰} \frac{\sin ۲h}{h} = \lim_{h\to ۰} ۲ \times \frac{\sin ۲h}{۲h} = ۲$

۱۷. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۲+۲x+۲}}{x} \simeq \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۲+۲x+۱}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x+۱|}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-(x+۱)}{x} = -۱$

۱۸. $\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲-۲x+۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x+۳)(x-۱)}{(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۳}{x-۱} = +\infty$

۱۹. $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۹}-۳}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{x(\sqrt{x+۹}+۳)} = \frac{۱}{۶}$

۲۰. $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱} = ۳$

۲۱. $\lim_{x\to \pi} \frac{۲\cos^۲ x-۱}{\sin^۲ x-۱} = \lim_{x\to \pi} \frac{\cos ۲x}{-\cos^۲ x} = -۱$

۲۲. $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ ۳x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{x} \times \frac{\sin ۳x}{x} = ۳ \times ۳ = ۹$

۲۳. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^۳}{۴+x^۲} = -\infty$

۲۴. $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{\sin ۴x} = \frac{۱}{۴}$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۵. برای تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۸x^۳+۱۲x^۲}{x+۲} & x<-\frac{۱}{۲}\\ ۳ & x=\frac{-۱}{۲}\\ \frac{\sin \pi x}{x} & x>-\frac{۱}{۲}\end{cases}$ حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin \pi x}{x}=\pi$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^-}\frac{۸x^۳+۱۲x^۲}{x+۲}=۲$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^+}\frac{\sin \pi x}{x}=۲$

c) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{\sin \pi x}{x}=\frac{۰}{-۲}=۰$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۸x^۳+۱۲x^۲}{x+۲}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۸x^۲(x+۲)}{x+۲}=+\infty$

۲۶. برای تابع $y=\frac{|x|-x}{x}$ حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to ۰^+} y=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{|x|-x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-x}{x}=۰$

b) $\lim\limits_{x\to ۰^-} y=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|-x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x-x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۲x}{x}=-۲$

c) $\lim\limits_{x\to ۰} y=$ وجود ندارد

۲۷. $\lim\limits_{x\to -۲}\sqrt{\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۹x}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}}=\frac{۵}{۶}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\ln x\ \sin(x-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\ln x\times\frac{\sin(x-۱)}{x-۱}=۰\times ۱=۰$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۹. برای تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2} & x<0\\ 3 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & x>0\end{cases}$ حدود زیر را تعیین کنید.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=1$

۳۰. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to -5^-}\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}=\lim\limits_{x\to -5^-}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}=\lim\limits_{x\to -5^-}\frac{x-5}{x+5}=\frac{-10}{0^-}=+\infty$

۳۲. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{3\sin x}+\frac{\sin x}{3x}\right]=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]=0$

۳۳. هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x/2}=\frac{1}{-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=-2$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\simeq\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}-\frac{1}{t}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\times\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

۲۹.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۴. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (2x\,tgx - \pi \sec x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x\sin x - \pi}{\cos x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2(\frac{\pi}{2}-t)\sin(\frac{\pi}{2}-t)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{(\pi-2t)\cos t-\pi}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi\cos t - 2t\cos t - \pi}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-\pi(1-\cos t)-2t\cos t}{\sin t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{-2\pi\sin^2\frac{t}{2} - 2t\cos t}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} (-2\pi)\times\frac{\sin t/2}{\sin t}\times \sin t/2 - 2\frac{t}{\sin t}\times\cos t = -2$

۵. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}) \simeq \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = 0$

۶. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{t\to +\infty} t e^{-t} = \lim\limits_{u\to 0} (-\ln u)\times u = 0$

$\lim\limits_{u\to 0} u\ln u = \lim\limits_{u\to 0} u\ln(1+(u-1)) \simeq \lim\limits_{u\to 0} u(u-1) = 0$

۷. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{\sin 2x}{x} = +\infty - 2 = +\infty$

۸. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{cotg x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{1/tg x} \simeq \lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2} = e^{-2}$

۹. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}\ln x = \lim\limits_{t\to 0} t\ln(-\ln t) \simeq \lim\limits_{t\to 0} t(-\ln t - 1) = \lim\limits_{t\to 0} t\ln t + t = 0$

۱۰. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^{x^x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^x \ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{e^{\ln x^x}\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{e^{x\ln x}\ln x}$

$= e^{e^0(-\infty)} = e^{1(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

۱۱. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - tg x) = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$

$= \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)} = 0$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$$۱۲.\ \lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲i\sin x}{\sin x}=۲i$$

$$۱۳.\ \lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۲}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{۱-\cos x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۲}{\sin^۲ x}-\frac{۱+\cos x}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۲}{\sin^۲ x}-\frac{۱+\cos x}{\sin^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲\sin^۲ x/۲}{\sin^۲ x}=$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}۲\times\frac{\sin x/۲}{\sin x}\times\frac{\sin x/۲}{\sin x}=۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$۱۴.\ \lim_{x\to ۰}(۱-\sin x)^{۱/۳x}=\lim_{x\to ۰}(۱-x)^{۱/۳x}=\lim_{x\to ۰}\left((۱-x)^{-۱/x}\right)^{-۱/۳}=e^{-۱/۳}$$

$$۱۵.\ \lim_{x\to ۰}\frac{x e^{۲x}}{۴\,tg\,x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x e^{۲x}\cos x}{۴\sin x}=\frac{۱}{۴}\times۱\times۱=\frac{۱}{۴}$$

$$۱۶.\ \lim_{x\to \pi/۲^-}(\cos x)\ln\cos x=\lim_{t\to ۰^+}t\ln t=۰$$

$$۱۷.\ \lim_{x\to \pi/۲}\frac{cotg\,x-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to \pi/۲}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to \pi/۲}\frac{\cos x-\cos x\sin x}{x^۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to \pi/۲}\frac{\cos x(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{x^۲\sin x(۱+\sin x)}=\lim_{x\to \pi/۲}\frac{\cos^۳ x}{x^۲\sin x(۱+\sin x)}=۰$$

$$۱۸.\ \lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}-۱}{\sin x}\simeq\lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}-۱}{x}=\lim_{t\to ۰}\frac{e^{\ln(t+۱)}-۱}{\ln(۱+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱+t-۱}{\ln(۱+t)}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{\frac{\ln(۱+t)}{t}}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{\ln(۱+t)^{\frac{۱}{t}}}=\frac{۱}{\ln e}=۱$$

$$19.\ \lim_{x\to ۰^+}(\sin x)^{x}=\lim_{x\to ۰^+}x^{x}=\lim_{x\to ۰^+}e^{\ln x^{x}}=\lim_{x\to ۰^+}e^{x\ln x}=e^{۰}=۱$$

$$۲۰.\ \lim_{x\to ۰}(e^{x}+x)^{۱/x}=\lim_{x\to ۰}\left((۱+(e^{x}+x-۱))^{\frac{۱}{e^{x}+x-۱}}\right)^{\frac{e^{x}+x-۱}{x}}=e^{\lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}+x-۱}{x}}=$$

حل تمرین بر عهده شما !

۳۱. $$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+1} = e^{1+1} = e^{2}$$

۲۱. $$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} x^{x} = 1$$

۲۲. $$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\operatorname{tg} x}) = \ln(\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x}) = \ln(1) = 0$$

۲۳. فرض کنید $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ به x_0 همگرا باشد و برای هر n ، $x_n \neq x$ ، در این صورت $f(x_n) \to L$. به کمک این مسئله نشان دهید تابع دیریکله

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R-Q \end{cases}$$

در هیچ عدد حقیقی دارای حد نیست .

حل: فرض می‌کنیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ در این صورت .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (1)$$

برای این که نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ کافی است نشان دهیم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

حال چون $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ بنابراین برای $\delta > 0$ ، عدد طبیعی M وجود دارد که اگر $n \geq M$ باشد آن گاه

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \qquad (2)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) ، $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ ، در نتیجه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد گویا و همگرا به عدد حقیقی a و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد اصم و همگرا به a باشد در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1 , \quad \lim_{n\to\infty} D(y_n) = 0$$

بنابراین حد تابع $D(x)$ در a وجود ندارد.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۴. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1.\ \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1 \underset{\text{فشار}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m}}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}}=\frac{m}{n}$$

$$3.\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=\lim\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\sqrt{\frac{(x-a)^2}{(x-a)(x+a)}}\times\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}\times(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}\times 2\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1+2\sqrt{a}}{2\sqrt{2}\,a}$$

$$4.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\cong\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$$

$$5.\ \lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos(\frac{\pi}{3}+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2(\cos\frac{\pi}{3}\cos t-\sin\frac{\pi}{3}\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\frac{2\sqrt{3}}{2}\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

حل تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

۲۵. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\frac{\alpha}{n}x}=1$. با استفاده از آن

$\lim \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+27x}-\sqrt[4]{1+16x}\right)$

را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\frac{\alpha}{n}x}\times\frac{\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+\alpha x}+1}{\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+\alpha x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha x-1}{\frac{\alpha}{n}x}\times\frac{1}{\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n-1}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{n}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ \text{بار}}}=1$$

۲۶. a, b را چنان تعیین کنید که $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b$ در بی‌نهایت حدی برابر با صفر داشته باشد.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

برای اینکه $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ باشد باید درجه مخرج از صورت بیشتر باشد بنابراین باید:

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b=-1$

۲۷. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ اگر و تنها اگر $f(x)=L+g(x)$ که در آن $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

حل: ثابت می‌کنیم

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-L=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

اگر $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ ،

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-L=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}L=L-L=0$$

اگر $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-L=0$ ، داریم

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)+L-L=\lim_{x\to x_0}f(x)-L+\lim_{x\to x_0}L=0+L=L$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

پیوستگی

۱. نشان دهید تابع زیر در $x=-2$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & x\neq -2\\ -5 & x=-2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-3)=-5=f(-2)$$

۲. مقادیر a و c را چنان تعیین کنید که $f(x)$ در $x=4$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}2cx & x<4\\ x+a & x=4\\ x^2-6 & x>4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} 2cx=8c \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} x^2-6=10 \qquad f(4)=4+a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8c=10\Rightarrow c=\dfrac{5}{4}\\ 4+a=10\Rightarrow a=6\end{cases}$$

۳. ثابت کنید $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 7 & x=2\end{cases}$ در $x=2$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4\neq f(2)$$

۴. پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید.

i) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}} \qquad x\in R$

ii) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1} \qquad x\in R$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

i) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$$

پس تابع پیوسته نیست.

ii) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

پس تابع پیوسته است.

۵. بزرگترین مقدار k را طوری بیابید که به ازای آن تابع $f(x)=[x^2-2]$ روی بازه $[3,3+k)$ پیوسته باشد.

$$f(x)=[x^2-2]=[x^2]-2$$

$$3\leq x<3+k \Rightarrow 9\leq x^2<(3+k)^2$$

برای اینکه تابع f پیوسته باشد باید $(3+k)^2<10$

$$\Rightarrow (3+k)^2\leq 10 \Rightarrow 9+k^2+6k\leq 10 \Rightarrow k^2+6k-1\leq 0$$

$$\Delta=36+4=40 \qquad k=\frac{-6\pm\sqrt{40}}{2} \Rightarrow k=-3\pm\sqrt{10}$$

	$-3-\sqrt{10}$		$-3+\sqrt{10}$	
k	+		−	+

بزرگترین k ممکن عبارت است از $-3+\sqrt{10}$

۶. پیوستگی تابع زیر را در صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Arctg} x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\operatorname{Arctg} x=0\neq f(0)$$

f در صفر پیوسته نیست.

۷. نقاط ناپیوستگی و پیوستگی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2+\operatorname{sgn}(x-2)} & x<2\\ \left[\frac{x}{2}\right] & 2\leq x<6\\ \frac{-4}{x-7} & x\geq 6\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2+\operatorname{sgn}(x-2)}=\sqrt{2-1}=1=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x}{2}\right]=1=f(2) \rightarrow$$ f در ۲ پیوسته

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left[\frac{x}{2}\right]=2\neq \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}\frac{-4}{x-7}=4$$

f در ۶ پیوسته نیست

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

مشتق

۱. با استفاده از تعریف مشتق، $f'(x)$ را پیدا کنید.

1. $f(x)=(x-1)(x+1)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-1)(x+\Delta x+1)-(x-1)(x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x-1)(x+1)+\Delta x(x+\Delta x+1)+(x-1)\Delta x-(x-1)(x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(x+\Delta x+1+x-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

2. $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2\times\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\times\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}\times\cos x=\cos x$$

۲. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

1. $y=\ln\sqrt{5x^2-4}$

$$y'=\frac{\frac{10x}{2\sqrt{5x^2-4}}}{\sqrt{5x^2-4}}\Rightarrow y'=\frac{5x}{5x^2-4}$$

۳۷

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲. $y=(e^{x^2+2})^2$

$y'=2\times 2x e^{x^2+2}\times e^{x^2+2}=4x e^{2x^2+4}$

۳. $x^2y^3+5xy^4+3y^2=x^4-2x$

$x^2y^3+5xy^4+3y^2-x^4+2x=0$

$$y'=-\frac{2xy^3+5y^4-4x^3+2}{3x^2y^2+20xy^3+6y}$$

۴. $y=\frac{e^{3x}}{x}+\ln x$

$$y'=\frac{3e^{3x}\times x-e^{3x}}{x^2}+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{(3x-1)e^{3x}+x}{x^2}$$

۵. $y=2^{x+4}$

$y'=\ln 2\ 2^{x+4}$

۶. $e^{\csc x+x}$ $\qquad y'=(-\mathrm{ctg}x\csc x+1)e^{\csc x+x}$

۷. $y=\sin x^3+\mathrm{ctg}^2x$

$y'=3x^2\cos x^3-2(1+\mathrm{ctg}^2x)\mathrm{ctg}\,x$

۸. $y=\log_{10}x^2+2^x$

$y'=\frac{2x}{x^2}\log_{10}e+\ln 2\ 2^x$

۹. $y=(1-2x)^3\sin x$

$y'=3\times(-2x)(1-2x)^2\sin x+(1-2x)^3\cos x \Rightarrow y'=-6x(1-2x)^2\sin x+(1-2x)^3\cos x$

۱۰. $y=\ln(\sec x+e^{x^2})$

$$y'=\frac{\sec x\,\mathrm{tg}x}{\sec x}+2xe^{x^2}\Rightarrow y'=\mathrm{tg}x+2xe^{x^2}$$

حل تمرین های [illegible]

۱۱. $y = \frac{(x-۱)^{۳}}{(۲x^{۲}+۳)^{۲}}$

$y' = \frac{۳(x-۱)^{۲}(۲x^{۲}+۳)^{۲} - ۲\times۴x(۲x^{۲}+۳)(x-۱)^{۳}}{(۲x^{۲}+۳)^{۴}}$

$y' = \frac{(x-۱)^{۲}(۳(۲x^{۲}+۳) - ۸x(x-۱))}{(۲x^{۲}+۳)^{۳}} \Rightarrow y' = \frac{(x-۱)^{۲}(-۲x^{۲}+۸x+۹)}{(۲x^{۲}+۳)^{۳}}$

۱۲. $y = tg(\frac{x-۲}{x+۲})$

$y' = \frac{(x+۲)-(x-۲)}{(x+۲)^{۲}} . (۱+tg^{۲}(\frac{x-۲}{x+۲})) \Rightarrow y' = \frac{۴}{(x+۲)^{۲}} (۱+tg^{۲}(\frac{x-۲}{x+۲}))$

۱۳. $y = e^{\sin^{۳} x^{۲}}$

$y' = ۳\times۲x \cos x^{۲} \times \sin^{۲} x^{۲} e^{\sin^{۳} x^{۲}} \Rightarrow y' = ۶x \cos x^{۲} \sin^{۲} x^{۲} e^{\sin^{۳} x^{۲}}$

۱۴. $y = x^{x^{۲}}$

$Ln y = Ln x^{x^{۲}} \Rightarrow Ln y = x^{۲} Ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = ۲x \ln x + x^{۲} \times \frac{۱}{x} = ۲x Ln x + x$

$\Rightarrow y' = (۲x Ln x + x) x^{x^{۲}}$

۱۵. $y = x^{۷} e^{۳x}$

$y' = ۷x^{۶} e^{۳x} + ۳x^{۷} e^{۳x}$

۱۶. معادلات خطوط مماس و قائم بر $y = \frac{۱}{x-۱}$ در $(-۲, \frac{۱}{۳})$ را بیابید.

$y' = \frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}$ $m = \frac{-۱}{(-۲-۱)^{۲}} = \frac{-۱}{۹}$ شیب مماس شیب قائم $m' = ۹$

خط مماس $y - \frac{۱}{۳} = \frac{-۱}{۹}(x+۲) \Rightarrow y = \frac{-۱}{۹}x + \frac{۱}{۹}$

خط قائم $y - \frac{۱}{۳} = ۹(x+۲) \Rightarrow y = ۹x + \frac{۵۳}{۳}$

۱۷. مختصات نقاطی بر منحنی $y = ۲x^{۳} - ۲x + ۴$ را بیابید که خطوط مماس در آن نقاط بر منحنی با خط $y = ۲۲x - ۹$ موازیند.

$y' = ۶x^{۲} - ۲$

$y' = ۲۲$ $\Rightarrow ۶x^{۲} - ۲ = ۲۲ \Rightarrow ۶x^{۲} = ۲۴ \Rightarrow x^{۲} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$x=۲ \Rightarrow y=۲\times۸-۴+۴ \Rightarrow y=۱۶$

$x=-۲ \Rightarrow y=-۱۶+۴+۴ \Rightarrow y=-۸$

$(۲,۱۶)\ (-۲,-۸)$

۱۸. معادله خط مماس بر $x^۲+۳xy+y^۲=۵$ را در $(۱,۱)$ تعیین کنید.

$y'=-\frac{۲x+۳y}{۳x+۲y}$ $\quad m=-\frac{۲+۳}{۳+۲} \Rightarrow m=-۱$

$y-۱=-۱(x-۱) \Rightarrow y=-x+۲$ معادله خط مماس

۱۹. معادله مماس بر $y=\ln(۳x^۲-۱۱)-۵x$ را در $(۲,-۱۰)$ تعیین کنید.

$y'=\frac{۶x}{۳x^۲-۱۱}-۵$ $\quad m=\frac{۱۲}{۱۲-۱۱}-۵ \Rightarrow m=۷$

$y+۱۰=۷(x-۲) \Rightarrow y=۷x-۲۴$ خط مماس

۲۰. مشتقات مورد نظر را در معادلات زیر تعیین کنید.

۱. $s=۳t^۳-\frac{۲}{t}$ $\quad \frac{d^۲s}{dt^۲}$

$\frac{ds}{dt}=۹t^۲+\frac{۲}{t^۲}$ $\quad \frac{d^۲s}{dt^۲}=۱۸t-\frac{۴}{t^۳}$

۲. $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۲}$ $\quad f''(۵)$

$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲)^۲}}$ $\quad f''(x)=\frac{۲(۱-۴x^۲)}{۳\sqrt[۳]{x^۲+۲}}$

$f''(۵)=\frac{۲(۱-۱۰۰)}{۳\sqrt[۳]{۲۵+۲}} \Rightarrow f''(۵)=-۲۲$

۳. $h(t)=\sin ۲t$ $\quad h'''(t)$

$h'(t)=۲\cos ۲t$ $\quad h''(t)=-۴\sin ۲t$ $\quad h'''(t)=-۸\cos ۲t$

۴. $f(x)=e^{۳x}$, $f^{(n)}(x)$

$f'(x)=۳e^{۳x}$ $\quad f''(x)=۳^۲e^{۳x} \Rightarrow f^{(n)}(x)=۳^ne^{۳x}$

۲۱. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بر بازه داده شده تعیین کنید.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱) $[-2,2]$ ، $f(x)=x^3-x^2-8x+1$

$f'(x)=3x^2-2x-8 \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x-8=0$

$\Rightarrow x=2,-\frac{4}{3}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & -\frac{4}{3} & 2 & \\ \hline f'(x) & + & - & + \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

در $x=-\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم و در $x=2$ مینیمم.

۲) $[-\frac{1}{2},1]$ $\qquad f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 12x(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow x=0,1$

$f(0)=0 \qquad f(1)=1$

$f(x)$ در $x=0$ مینیمم و در $x=1$ ، ماکزیمم است.

۳) $[-1,\frac{1}{2}]$ $\qquad f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$$

$x=-1+\sqrt{2}$ در بازه $[-1,\frac{1}{2}]$ قرار دارد.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & -1-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & \\ \hline f'(x) & - & + & - \\ & \searrow & \nearrow & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ در $x=-1+\sqrt{2}$ ، ماکزیمم است.

$$f(-1+\sqrt{2})=\frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1} \Rightarrow f(-1+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$f(0)=0 \qquad f(\frac{1}{2})=\frac{6}{5}$

$f(x)$ در $x=0$ ، مینیمم است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۲. فرض کنید $a>0$. ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ را محاسبه کنید.

مشتق تابع $f(x)$ را روی بازه‌های $(-\infty,0)$ ، $(0,a)$ و (a,∞) تعیین می‌کنیم:

$$(-\infty,0] \quad f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-(x-a)}$$

$$[0,a] \quad f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-(x-a)}$$

$$[a,\infty) \quad f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+(x-a)}$$

$$(-\infty,0): \quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2} \qquad f'(x)\neq 0$$

$$(0,a) \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (1+x)^2=(1+a-x)^2 \Rightarrow 1+x=\pm(1+a-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x=1+a-x \Rightarrow x=\frac{a}{2} \\ 1+x=-(1+a)+x \Rightarrow a=-2 \; \times \end{cases}$$

$$x=\frac{a}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{4}{2+a}$$

$$(a,\infty) \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+(x-a))^2} \qquad f'(x)\neq 0$$

۲۳. ثابت کنید هرگاه:

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

آنگاه به ازای یک نقطه مانند $x\in[0,1]$ داریم:

$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$$

فرض می‌کنیم $F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\dots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. با توجه به فرض مسئله

$$F(0)=F(1)=0$$

بنابراین طبق قضیه رول، یک نقطه مانند $x\in[0,1]$ وجود دارد به طوریکه $F'(x)=0$

در نتیجه $f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$

۲۴. نشان دهید که تابع $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ صرف نظر از مقدار m نمی‌تواند دو ریشه در $[0,1]$ داشته باشد.

فرض می‌کنیم f_m در بازه $[0,1]$ دو ریشه مانند α و β داشته باشد:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

در این صورت بنا به قضیه رول، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $c \in [0,1]$ $f'_m(c) = 0$

در حالی که $f'_m(x) = 3x^2 - 3$ در بازه $[0,1]$ همواره منفی است

بنابراین f_m در این بازه نمی‌تواند دو ریشه داشته باشد.

۲۵. ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 - \cos x$ دقیقاً دارای دو ریشه است.

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) > 0$$

بنابراین $f(x)$ در بازه $[0,1]$ دارای یک ریشه است. از طرفی برای $(0,\infty)$ ، $f'(x) > 0$

بنابراین f در این بازه دقیقاً دارای یک ریشه است. همچنین

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(-1) > 0$$

بنابراین f در بازه $[-1,0]$ دارای یک ریشه است و $x \in (-\infty, 0]$ $f'(x) = 2x + \sin x < 0$

بنابراین f در این بازه نیز دارای دقیقاً یک ریشه است. در نتیجه f در کل دقیقاً دارای دو ریشه است.

۲۶. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $g(0) = g'(0) = 0$ ، $g''(0) = 17$ ، مقدار $f'(0)$ را پیدا کنید.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g'(\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g''(\Delta x)}{2} = \frac{g''(0)}{2} = \frac{17}{2}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

دنباله ها

۱. نامساوی برنولی را ثابت کنید.

باید نشان دهیم

$$\forall x \quad x \geq -1 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

با فرض $a = x+1$ و $b=1$ داریم:

$$(x+1)^n - 1 = (x+1-1)\underbrace{((x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \cdots + (x+1)+1)}_{P}$$

$$= xP$$

اگر $x \geq 0$ باشد، آنگاه $x+1 \geq 1$، در نتیجه $\forall k \in \mathbb{N} \quad (x+1)^k > 1$

بنابراین $P \geq n$، پس چون $x \geq 0$ است، $(1) \quad Px \geq nx$

اگر $-1 < x < 0$، آنگاه $0 < x+1 < 1$ در نتیجه $\forall k \in \mathbb{N} \quad (x+1)^k < 1$

بنابراین $P < n$، و چون $-1 < x < 0$ است، در نتیجه $(2) \quad Px > nx$

$$(1),(2) \Rightarrow Px \geq nx \Rightarrow (1+x)^n - 1 = Px \geq nx \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$$

۲. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \left(\frac{1}{1+n}\right)^n = \frac{1}{(1+n)^n} < \frac{1}{n}$$

طبق قضیه فشار،

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ب) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}$

از نامساوی $1 \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2^{1/n}} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} \leq 1$$

بنابراین طبق قضیه فشار

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = 1$$

حل تمرین‌های تمرین ۱

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n+\cos n}{۳}\right)^n$

$$-\sqrt{۲} < \sin n+\cos n < \sqrt{۲} \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)^n < \left(\frac{\sin n+\cos n}{۳}\right)^n < \left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)^n$$

طبق قضیه فشار، $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n+\cos n}{۳}\right)^n = 0$

۳. ثابت کنید هرگاه $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا و $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ واگرا باشند، آنگاه $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ واگراست.

فرض خلف، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n = l$ ؛

$$\begin{aligned}&\lim a_n+b_n = l\\ &\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l' \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -l'\end{aligned} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n+\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = l-l'$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n-a_n) = l-l' \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l-l' \quad \times$$

۴. فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای است دلخواه و $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای است که برای هر n، $\bar{a}_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$
ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = l$. نشان دهید عکس این گزاره درست نیست.

چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$، بنابراین برای ε دلخواه و از این پس ثابت،

$$\exists N \quad \forall n \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon/2$$

$$|\bar{a}_n - l| = \left|\frac{a_1+a_۲+\cdots+a_n}{n} - l\right| = \left|\frac{a_1+a_۲+\cdots+a_n-nl}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{(a_1-l)+(a_۲-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_{N-1}-l)}{n} + \frac{(a_N-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_{N-1}-l)}{n}\right| + \left|\frac{a_N-l}{n}\right| + \left|\frac{a_{N+1}-l}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_n-l}{n}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{۲n} + \frac{\varepsilon}{۲n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{۲n}}_{n-N} = \left(\frac{n-N+1}{۲n}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

عکس قضیه فوق برقرار نیست. به عنوان مثال، هرگاه $a_n=(-1)^n$ آنگاه واضح است $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا نیست.

$$\tilde{a}_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

$$\tilde{a}_n=\frac{(-1)+(-1)^2+\dots+(-1)^n}{n}=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=0$$

۵. ثابت کنید هرگاه $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک زیردنباله همگرا به A و یک زیردنباله همگرا به B داشته باشد و $A\neq B$، آنگاه دنباله $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ واگرا است.

برهان خلف: فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا به l باشد. بنابراین به ازای ε دلخواه داریم:

$$\exists N \quad \forall n \quad n\geqslant N \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon$$

$$\exists k_1 \quad \forall k \quad k\geqslant k_1 \Rightarrow |a_{n_k}-l|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_{n_k}=l \qquad (1)$$

a_{n_k} زیردنباله a_n و همگرا به A.

$$\exists k_2 \quad \forall k' \quad k'\geqslant k_2 \Rightarrow |a_{n_{k'}}-l|<\varepsilon \Rightarrow \lim a_{n_{k'}}=l \qquad (2)$$

$a_{n_{k'}}$ زیردنباله a_n و همگرا به B.

$$(1),(2)\Rightarrow A=B \quad . \times$$

۶. حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5=0\cdot e^5=0$$

ب) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{\frac{-n}{n+1}}$$

$$=e^{-1}$$

حل تمرین پایانی مرورها

۷. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $a_1 = ۱$ و $a_n = \sqrt{۱+a_{n-1}}$ $(n=۲,۳,۴,\dots)$

به استقرا نشان می دهیم این دنباله صعودی و از بالا کران دار است.

به وضوح $a_1 \leq a_۲$. فرض می کنیم $a_n \leq a_{n+1}$ (فرض استقرا). نشان می دهیم $a_{n+1} \leq a_{n+۲}$.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow ۱+a_n \leq ۱+a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{۱+a_n} \leq \sqrt{۱+a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+۲}$$

برای اثبات کران داری، نشان می دهیم: $\forall n,\ a_n \leq ۲$.

$a_1 \leq ۲$. فرض می کنیم $a_n \leq ۲$ (فرض استقرا). نشان می دهیم $a_{n+1} \leq ۲$.

$$a_n \leq ۲ \Rightarrow ۱+a_n \leq ۱+۲ \Rightarrow \sqrt{۱+a_n} \leq \sqrt{۳} \leq ۲ \Rightarrow a_{n+1} \leq ۲$$

بنابراین (a_n) یک دنباله از بالا کراندار و صعودی است، در نتیجه همگرا است. فرض می کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

$$a_n = \sqrt{۱+a_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{۱+a_{n-1}} \Rightarrow \ell = \sqrt{۱+\ell}$$

$$\Rightarrow \ell^۲ = ۱+\ell \Rightarrow \ell^۲-\ell-۱=0 \Rightarrow \ell = \frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

چون جملات دنباله همگی مثبت اند، $\ell = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

ب) $a_1 = \sqrt{۲}$ و $a_n = \sqrt{۲a_{n-1}}$ $(n=۲,۳,۴,\dots)$

واضح است $a_1 \leq a_۲$. فرض می کنیم $a_n \leq a_{n+1}$. بنابراین:

$$۲a_n \leq ۲a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{۲a_n} \leq \sqrt{۲a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+1}$$

برای اثبات کران داری واضح است که $a_۲ \leq ۳$. فرض می کنیم $a_n \leq ۳$. در این صورت:

$$۲a_n \leq ۶ \Rightarrow \sqrt{۲a_n} \leq \sqrt{۶} \leq ۳ \Rightarrow a_{n+1} \leq ۳$$

بنابراین (a_n) از بالا به ۳ کران دار است.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

$$a_n = \sqrt{۲a_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{۲a_{n-1}} \Rightarrow \ell = \sqrt{۲\ell} \Rightarrow \ell^۲ = ۲\ell \Rightarrow \ell = 0, ۲$$

جواب ـ قابل قبول $\ell = ۲$ است.

ج) $(p>0)$ $a_1=\sqrt{p}$, $a_n=\sqrt{p+a_{n-1}}$ $(n=۲,۳,\dots)$

استقرا $a_1=\sqrt{p}$ $a_۲=\sqrt{p+\sqrt{p}} \Rightarrow a_۲>a_1$

فرض $a_n>a_{n-1}$

حکم $a_{n+1}>a_n$

$$a_n>a_{n-1} \Rightarrow a_n+p>a_{n-1}+p \Rightarrow \sqrt{a_n+p}>\sqrt{a_{n-1}+p} \Rightarrow a_{n+1}>a_n$$

برای اثبات کرانداری:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

$$۲\sqrt{ab}>0 \Rightarrow a+b+۲\sqrt{ab}>a+b \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲>a+b \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

$$x\geqslant ۲ \Rightarrow x^۲>۲x \Rightarrow x>\sqrt{۲x}=\sqrt{۲}\cdot\sqrt{x}$$

(I) $0<p<1$ $a_1=\sqrt{p}<۵$

فرض $a_n<۵$

حکم $a_{n+1}<۵$

$$a_n<۵ \Rightarrow a_n+p<۵+p \Rightarrow \sqrt{a_n+p}<\sqrt{۵+p}\leqslant\sqrt{۵}+\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}<\sqrt{۵}+\sqrt{p}<۴+1 \Rightarrow a_{n+1}<۵$$

(II) $1<p<۲$ $a_1=\sqrt{p}<۴$

فرض $a_n<۴$

حکم $a_{n+1}<۴$

$$a_n<۴ \Rightarrow a_n+p<۴+p \Rightarrow a_{n+1}<\sqrt{۴+p}<\sqrt{۴}+\sqrt{p}<۲+۲ \Rightarrow a_{n+1}<۴$$

(III) $p>۲$ $a_1=\sqrt{p}<p$

فرض $a_n<p$

حکم $a_{n+1}<p$

$$a_n<p \Rightarrow a_n+p<۲p \Rightarrow \sqrt{a_n+p}<\sqrt{۲p}<p \Rightarrow a_{n+1}<p$$

$\forall P \quad (P>0 : \; a_n < \max\{P, ۵\} \;)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$

$a_n = \sqrt{a_{n-1}+P} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_{n-1}+P} \Rightarrow l = \sqrt{l+P} \Rightarrow l^۲ - l - P = 0$

$\Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+۴P}}{۲}$ چون تمام جملات دنباله مثبت است، $l = \frac{1+\sqrt{1+۴P}}{۲}$ قابل قبول است

۸. حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{۲}+\frac{1}{۴}+\cdots+\frac{1}{۲^n}}{1+\frac{1}{۳}+\frac{1}{۹}+\cdots+\frac{1}{۳^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-(^1/_۲)^n}{1-^1/_۲}}{\frac{1-(^1/_۳)^n}{1-^1/_۳}} = \frac{^۲/_۳}{^1/_۲} = \frac{1}{۳}$

ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+۲+\cdots+n}{n^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{۲n^۲} = \frac{1}{۲}$

ج) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{۲n}}$

$-1 < a < 1 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{۲n}} = \frac{0}{1+0} = 0$

$a > 1 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{۲n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^n}{a^{۲n}}}{1+\frac{1}{a^{۲n}}} = 0$

$a < -1 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{۲n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^n}{a^{۲n}}}{1+\frac{1}{a^{۲n}}} = 0$

$a = 1 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{۲n}} = \frac{1}{۲}$

$a = -1 \Rightarrow$ همگراست $= \pm \frac{1}{۲}$

۹. ثابت کنید هرگاه $a_n \to A$ ، $B_n \to B$ و $a_n \leq b_n$ (از جمله‌ای به بعد) آنگاه $A \leq B$.

فرض خلف $A \geqslant B$

چون $a_n \to A$ و $B_n \to B$ ، با فرض $\varepsilon = \frac{A-B}{۲}$ ، داریم

$a_n \to A \quad \exists N_1 , \forall n \quad (n \geqslant N_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{A-B}{۲}$

$b_n \to B \quad \exists N_۲ \quad \forall n \quad n \geqslant N_۲ \Rightarrow |b_n - B| < \frac{A-B}{۲}$

$$|a_n - A| < \frac{A-B}{۲} \Rightarrow -\frac{A-B}{۲} + A < a_n < \frac{A-B}{۲} + A$$

$$|b_n - B| < \frac{A-B}{۲} \Rightarrow -\frac{A-B}{۲} + B < b_n < \frac{A-B}{۲} + B$$

فرض می‌کنیم آن مرحله‌ای به بعد که $b_n \geqslant a_n$ است $N_۳$ باشد، $N \geqslant \max\{N_۱, N_۲, N_۳\}$

$$n \geqslant N \quad b_n \geqslant a_n \Rightarrow b_n - a_n \geqslant ۰$$

$$\begin{array}{l} -\frac{A-B}{۲} + A \leqslant a_n \leqslant \frac{A-B}{۲} + A \\ -\frac{A-B}{۲} - B \leqslant -b_n \leqslant \frac{A-B}{۲} - B \end{array} \Rightarrow -A+B+A-B \leqslant a_n - b_n \leqslant A-B+A-B$$

$$\Rightarrow ۰ \leqslant a_n - b_n < ۲(A-B) \quad \times \quad a_n - b_n \leqslant ۰$$

۱۰. ثابت کنید دنباله $\{\frac{۲^n}{n!}\}$ نزولی و از پایین کراندار است و بنابراین همگرا است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{۲^n}{n!}} = \frac{۲}{n+۱} \leqslant ۱ \Rightarrow a_{n+1} \leqslant a_n$$

بنابراین دنباله نزولی است.

$$۰ \leqslant a_n \leqslant ۲$$

a_n کران دار است.

بنابراین $\{\frac{۲^n}{n!}\}$ همگرا است.

۱۱. بررسی کنید کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و یا نزولی است؟

الف. $\frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+۱}{n}\right)^n = \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n > ۱$$

$\Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$ دنباله صعودی

ب- $\frac{۲^n}{۱+۲^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{۲^{n+۱}}{۱+۲^{n+۱}} \times \frac{۱+۲^n}{۲^n} = \frac{۲(۱+۲^n)}{۱+۲^{n+۱}} = \frac{۲+۲^{n+۱}}{۱+۲^{n+۱}} \geqslant ۱$$

$\Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$ دنباله صعودی

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ج. $\frac{n}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \leqslant 1 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant a_n$$

نزولی

د. $(n^2+(-1)^n n)$

$$a_{n+1}-a_n = (n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)-n^2-(-1)^n n$$

$$= n^2+2n+1+(-1)^{n+1}n+(-1)^{n+1}-n^2+(-1)^{n+1}n$$

$$= 2n+2(-1)^{n+1}n+1+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 4n+2 & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$ دنباله صعودی

۱۲. فرض کنید (a_n) دنباله‌ای است که در آن به ازای هر n، $a_n>0$ و $a_{n+1}<ka_n$ که $0<k<1$ ثابت کنید (a_n) همگراست.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد دلخواهی باشد چون $a_1>0$ پس $\frac{\varepsilon}{a_1}>0$. با توجه به اینکه $0<k<1$، خواهیم داشت $\exists N\in\mathbb{N} \quad k^{N-1}<\frac{\varepsilon}{a_1}$

دنباله $\{k^n\}$ به صفر همگراست بنابراین

$$\forall n\geqslant N \; ; \quad k^{n-1} \leqslant k^{N-1} < \frac{\varepsilon}{a_1}$$

در نتیجه $\forall n\geqslant N \quad a_1k^{n-1}<\varepsilon \quad *$

با توجه به فرض $a_{n+1}<ka_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$، لذا

$$a_n<ka_{n-1}<k^2a_{n-2}<\dots<k^{n-1}a_1$$

بنابراین $\forall n\in\mathbb{N}: a_n<k^{n-1}a_1$ ، از * داریم ، $\forall n\geqslant N \quad a_n<\varepsilon$

$$\forall n\geqslant N \quad |a_n|<\varepsilon \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$$

حل تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

انتگرال نامعین

الف) انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

۱. $\int \frac{(x^{-۱}+x)^{۲}}{x^{۲}}dx = \int \frac{۱}{x^{۲}}(\frac{۱}{x}+x)^{۲}dx = \int(۱+\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}dx$

$\frac{۱}{x}=u \Rightarrow \quad dx=\frac{-du}{u^{۲}}$

$\int(۱+\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}dx = \int(۱+u^{۲})^{۲}\times\frac{-du}{u^{۲}} = -\int(\frac{۱+u^{۴}+۲u^{۲}}{u^{۲}})du = -\int(\frac{۱}{u^{۲}}+u^{۲}+۲)du$

$=\frac{۱}{u}-\frac{۱}{۳}u^{۳}-۲u = x-\frac{۱}{۳x^{۳}}-\frac{۲}{x}$

۲. $\int[(\frac{۱}{x})^{۳}+(\frac{۱}{x})^{۲}-(\frac{۱}{x})]dx$

$\frac{۱}{x}=u \Rightarrow \quad dx=\frac{-du}{u^{۲}}$

$I=\int[u^{۳}+u^{۲}-u]\times\frac{-du}{u^{۲}} = -\int(u+۱-\frac{۱}{u})du = -(\frac{۱}{۲}u^{۲}+u-\ln u)$

$=-(\frac{۱}{۲x^{۲}}+\frac{۱}{x}-\ln(\frac{۱}{x})) = -(\frac{۱}{۲x^{۲}}+\frac{۱}{x}+\ln(x))$

۳. $\int tg^{۲}x\,dx = \int(tg^{۲}x+۱-۱)dx = tg\,x-x$

۴. $\int\frac{۱}{۱+\sin x}dx$

$tg\frac{x}{۲}=t \Rightarrow \quad x=۲\,arctg\,t \Rightarrow \quad dx=\frac{۲}{۱+t^{۲}}dt$

$\sin x=\frac{۲\,tg\,x/۲}{۱+tg^{۲}x/۲} \qquad \sin x=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}$

$I=\int\frac{۱}{۱+\frac{۲t}{۱+t^{۲}}}\times\frac{۲}{۱+t^{۲}}dt = \int(\frac{۲}{۱+t^{۲}+۲t})dt = \int\frac{۲}{(۱+t)^{۲}}dt$

$=-\frac{۲}{۱+t} = -\frac{۲}{۱+tg\,x/۲}$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ب) هر یک از انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

۱. $\int \frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}\,dx = \sqrt{x^۲-۱}$

۲. $\int x\cos ax\,dx$ $\quad x=u \quad dx=du$

$\cos ax\,dx=dv \quad v=\frac{۱}{a}\sin ax$

$I=\frac{۱}{a}x\sin ax-\int\frac{۱}{a}\sin ax\,dx=\frac{۱}{a}x\sin ax+\frac{۱}{a^۲}\cos ax$

۳. $\int\frac{۷x+۱}{x^۲-x-۲}\,dx=\int\frac{۷x+۱}{(x-۲)(x+۱)}\,dx$

$\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x+۱}=\frac{۷x+۱}{(x-۲)(x+۱)} \Rightarrow Ax+A+Bx-۲B=۷x+۱$

$A+B=۷$
$A-۲B=۱$ $\Rightarrow A=۵,\ B=۲$

$I=\int(\frac{۵}{x-۲}+\frac{۲}{x+۱})\,dx=۵\ln(x-۲)+۲\ln(x+۱)$

۴. $\int\cos^۳x\,dx=\int\cos^۲x\cos x\,dx=\int(۱-\sin^۲x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\cos x\sin^۲x)\,dx$

$=\sin x-\frac{۱}{۳}\sin^۳x$

۵. $\int\sin^۶x\cos^۳x\,dx=\int\sin^۶x(۱-\sin^۲x)\cos x\,dx=\int(\sin^۶x\cos x-\sin^۸x\cos x)\,dx$

$=\frac{۱}{۷}\sin^۷x-\frac{۱}{۹}\sin^۹x$

۶. $\int\sin\theta\ln(\cos\theta)\,d\theta$

$\ln(\cos\theta)=t \Rightarrow \cos\theta=e^t \Rightarrow -\sin\theta\,d\theta=e^t\,dt \Rightarrow \sin\theta\,d\theta=-e^t\,dt$

$I=-\int te^t\,dt$

$t=u \quad dt=du$
$e^t dt=dv \Rightarrow v=e^t$
$I=-te^t+\int e^t\,dt=-te^t+e^t=-\cos\theta\ln(\cos\theta)+\cos\theta$

۷. $\int \sec^{۴} ۲\theta \; tg^{۵} ۲\theta \; d\theta = \int \sec^{۳} ۲\theta \; tg ۲\theta \, (\sec^{۲} ۲\theta - ۱)^{۲} \, d\theta$

$\sec ۲\theta = t \qquad ۲\sec ۲\theta \; tg ۲\theta \, d\theta = dt \Rightarrow \sec ۲\theta \; tg ۲\theta \; d\theta = \frac{dt}{۲}$

$I = \int t^{۲} (t^{۲} - ۱)^{۲} \times \frac{dt}{۲} = \frac{۱}{۲} \int t^{۲} (t^{۴} - ۲t^{۲} + ۱) \, dt = \frac{۱}{۲} \int (t^{۶} - ۲t^{۴} + t^{۲}) \, dt$

$= \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۷} t^{۷} - \frac{۲}{۵} t^{۵} + \frac{۱}{۳} t^{۳} \right) = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۷} \sec^{۷} ۲\theta - \frac{۲}{۵} \sec^{۵} ۲\theta + \frac{۱}{۳} \sec^{۳} ۲\theta \right)$

۸. $\int \frac{dx}{(۴ - x^{۲})^{۳/۲}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{۴ - x^{۲}})^{۳}}$

$x = ۲ \sin t \qquad dx = ۲\cos t \, dt$

$I = \int \frac{۲\cos t \, dt}{(\sqrt{۴ - ۴\sin^{۲} t})^{۳}} = \int \frac{۲\cos t}{۸\cos^{۳} t} \, dt = \frac{۱}{۴} \int \sec^{۲} t \, dt = \frac{۱}{۴} tg t$

$\Rightarrow I = \frac{x}{۸\sqrt{۴ - x^{۲}}}$

۹. $\int arctg \sqrt{x} \; dx$

$arctg \sqrt{x} = t \Rightarrow x = tg^{۲} t \qquad dx = ۲\sec^{۲} t \; tg t \; dt$

$I = \int ۲t \sec^{۲} t \; tg t \; dt$

$t = u \Rightarrow dt = du$

$۲\sec^{۲} t \; tg t \, dt = dV \Rightarrow V = tg^{۲} t$

$I = t \, tg^{۲} t - \int tg^{۲} t \; dt = t \, tg^{۲} t - tg t + t$

$I = x \, arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg \sqrt{x}$

۱۰. $\int \frac{x^{۳}}{\sqrt{۴ - x^{۲}}} \, dx \qquad x = ۲\sin t \qquad dx = ۲\cos t \, dt$

$= \int \frac{۸\sin^{۳} t}{\sqrt{۴ - ۴\sin^{۲} t}} \times ۲\cos t \; dt = ۸ \int \sin^{۳} t \; dt = ۸ \int (۱ - \cos^{۲} t) \sin t \; dt$

$= ۸ \int (\sin t - \cos^{۲} t \sin t) \, dt = ۸ \left(-\cos t + \frac{۱}{۳} \cos^{۳} t \right)$

$I = ۸ \left(-\sqrt{۱ - \frac{x^{۲}}{۴}} + \frac{۱}{۳} \sqrt{(۱ - \frac{x^{۲}}{۴})}^{۳} \right)$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۱. $\int (x+۱)\sqrt{۲x-۱}\ dx$ $\qquad u=x+۱ \quad dx=du$

$\sqrt{۲x-۱}\,dx=dv \rightarrow v=\frac{۴}{۳}\ (۲x-۱)^{۳/۲}$

$I=\frac{۴}{۳}(x+۱)(۲x-۱)^{۳/۲}-\frac{۴}{۳}\int (۲x-۱)^{۳/۲}dx$

$=\frac{۴}{۳}(x+۱)(۲x-۱)^{۳/۲}-\frac{۱۲}{۱۵}\ (۲x-۱)^{۵/۲}$

۱۲. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\ dx$ $\qquad \mathrm{arctg}\,x=t \Rightarrow x=\mathrm{tg}\,t \quad dx=\sec^۲t\ dt$

$=\int t\sec^۲t\ \mathrm{tg}\,t\ dt$ $\qquad t=u \quad du=dt$

$\mathrm{tg}\,t\sec^۲t\ dt=dv \Rightarrow v=\frac{۱}{۲}\mathrm{tg}^۲t$

$=\frac{۱}{۲}t\,\mathrm{tg}^۲t-\frac{۱}{۲}\int \mathrm{tg}^۲t\ dt$

$=\frac{۱}{۲}t\,\mathrm{tg}^۲t-\frac{۱}{۲}(\mathrm{tg}\,t-t)=\frac{۱}{۲}x^۲\mathrm{arctg}\,x-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\mathrm{arctg}\,x$

۱۳. $\int e^x\sin x\ dx$ $\qquad e^x=u \quad e^xdx=du$

$\sin x\,dx=dv \quad v=-\cos x$

$=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$, $\qquad e^x=u \quad e^xdx=du$

$\cos x\,dx=dv \quad v=\sin x$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$

$\Rightarrow ۲\int e^x\sin x\ dx=e^x(\sin x-\cos x) \Rightarrow \int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{۲}$

۱۴. $\int x\sin^۳x^۲\cos^۴x^۲\ dx=\int x(۱-\cos^۲x^۲)\sin x^۲\cos^۴x^۲\ dx$

$=\int(x\sin x^۲\cos^۴x^۲-x\cos^۶x^۲\sin x^۲)\,dx=-\frac{۱}{۱۰}\cos^۵x^۲+\frac{۱}{۱۴}\cos^۷x^۲$

۱۵. $\int \sec^۲x\ \ln|\mathrm{ctg}\,x|\ dx$

$\ln|\mathrm{ctg}\,x|=t \Rightarrow |\mathrm{ctg}\,x|=e^t \xRightarrow{\mathrm{ctg}\,x>۰} \mathrm{ctg}\,x=e^t \Rightarrow \csc^۲x\,dx=-e^tdt$

$\mathrm{ctg}\,x=e^t \Rightarrow \mathrm{tg}\,x=e^{-t} \Rightarrow \frac{۱}{\cos x}=\frac{e^{-t}}{\sin x} \Rightarrow \sec x=\csc x\ e^{-t}$

$\Rightarrow \sec^۲x\,dx=\csc^۲x\,e^{-۲t}\ dx=-e^{-۲t}\times e^t\ dt=-e^{-t}dt$

حل تمرین ریاضی عمومی

$I = \int e^{-t}\,t\,dt$ $\qquad t = u \quad dt = du$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e^{-t}dt = dv \quad v = -e^{-t}$

$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt$

$= -te^{-t} - e^{-t} \Rightarrow I = -\operatorname{tg}x \ln|\operatorname{ctg}x| - \operatorname{tg}x$

۱۶. $\int \sec^{۴}x . \operatorname{tg}^{۳}x\,dx = \int \sec^{۴}x(\sec^{۲}x-۱)\operatorname{tg}x\,dx$

$= \int(\sec^{۶}x\operatorname{tg}x - \sec^{۴}x\operatorname{tg}x)dx = \int \sec^{۵}x\ \sec x\operatorname{tg}x\,dx - \int \sec^{۳}x\ \sec x\operatorname{tg}x\,dx$

$= \frac{۱}{۶}\sec^{۶}x - \frac{۱}{۴}\sec^{۴}x$

۱۷. $\int \frac{x^{۲}}{(۹-۴x^{۲})^{۳/۲}}dx$ $\qquad x = \frac{۳}{۲}\sin t \qquad dx = \frac{۳}{۲}\cos t\,dt$

$= \int \frac{\frac{۹}{۴}\sin^{۲}t}{(۹-۹\sin^{۲}t)^{۳/۲}} \times \frac{۳}{۲}\cos t\,dt = \frac{۱}{۸}\int \frac{\sin^{۲}t}{\cos^{۲}t}dt = \frac{۱}{۸}\int \operatorname{tg}^{۲}t\,dt$

$= \frac{۱}{۸}(\operatorname{tg}t - t) = \frac{۱}{۸}\left(\frac{\frac{۲}{۳}x}{\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}x^{۲}}} - \arcsin\frac{۲x}{۳}\right) = \frac{۱}{۸}\left(\frac{۲x}{\sqrt{۹-۴x^{۲}}} - \arcsin\frac{۲}{۳}x\right)$

۱۸. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}-۹}}$ $\qquad x = ۳\sec t \qquad dx = ۳\sec t\ \operatorname{tg}t\,dt$

$= \int \frac{۳\sec t\ \operatorname{tg}t\ dt}{۳\sec t\sqrt{۹\sec^{۲}t-۹}} = \int \frac{\operatorname{tg}t}{۹\operatorname{tg}t}dt = \frac{۱}{۹}t = \frac{۱}{۹}\sec^{-۱}(\frac{x}{۳})$

۱۹. $\int \operatorname{ctg}^{۳}x\,dx = \int \operatorname{ctg}\ \operatorname{ctg}^{۲}x\,dx = \int \operatorname{ctg}x(\csc^{۲}x-۱)dx$

$= \int(\operatorname{ctg}x\ \csc^{۲}x - \operatorname{ctg}x)dx = -\frac{۱}{۲}\csc^{۲}x - \ln|\sin x|$

۲۰. $\int \sin x\ \ln(\sec x)dx$ $\qquad \ln(\sec x) = t$

$= \int te^{-t}dt$ $\qquad \sec x = e^{t} \Rightarrow \sec x\ \operatorname{tg}x\,dx = e^{t}dt$

از بالا $= -te^{-t} - e^{-t}$ $\qquad \Rightarrow \sin x\ \sec^{۲}x\,dx = e^{t}dt$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \sin x \times e^{۲t}dx = e^{t}dt$

$= -\cos x\ \ln(\sec x) - \cos x$ $\qquad \sin x\,dx = e^{-t}dt$

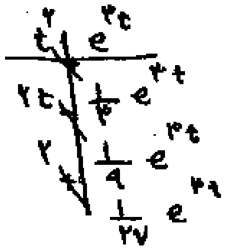
حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۲۱. $\int x^{۲}(\ln x)^{۲}dx$ $\qquad \ln x = t \quad x = e^{t} \quad dx = e^{t}dt$

$= \int e^{۲t}t^{۲}e^{t}dt = \int t^{۲}e^{۳t}dt$

$= \frac{۱}{۳}t^{۲}e^{۳t} - \frac{۲}{۹}te^{۳t} + \frac{۲}{۲۷}e^{۳t}$

$= \frac{۱}{۳}x^{۳}(\ln x)^{۲} - \frac{۲}{۹}x^{۳}\ln x + \frac{۲}{۲۷}x^{۳}$



۲۲. $\int \frac{\sin^{۳}x}{\cos^{۴}x}dx = \int \frac{\sin^{۳}x}{\cos^{۳}x} \times \frac{۱}{\cos x}dx = \int tg^{۳}x \sec x\, dx$

$= \int tg^{۲}x \; tgx \sec x\, dx = \int (\sec^{۲}x - ۱)\sec x \, tgx\, dx$

$= \int(\sec^{۲}x \; tgx - \sec x \; tgx)dx = + \frac{۱}{۳}\sec^{۳}x - \sec x$

۲۳. $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$ $\qquad e^{x} = t \quad e^{x}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$= \int \frac{\frac{۱}{t}dt}{t+\frac{۱}{t}} = \int \frac{dt}{۱+t^{۲}} = arctg(t) = arctg(e^{x})$

۲۴. $\int \cos^{۲}(\ln x)\frac{dx}{x}$ $\qquad \ln x = t \quad \frac{dx}{x} = dt$

$= \int \cos^{۲}t\, dt = \int (\frac{۱+\cos ۲t}{۲})dt = \frac{۱}{۲}t + \frac{۱}{۴}\sin ۲t$

$= \frac{۱}{۲}\ln x + \frac{۱}{۴}\sin(۲\ln x) = \frac{۱}{۲}\ln x + \frac{۱}{۴}\sin \ln x^{۲}$

۲۵. $\int x^{۳}\sqrt{x^{۲}-۴}\,dx$ $\qquad x = ۲\sec t \quad dx = ۲\sec t \; tgt\, dt$

$= \int ۸\sec^{۳}t \times ۲\, tgt \times ۲\sec t \; tgt\, dt$

$= ۳۲\int \sec^{۴}t \; tg^{۲}t\, dt$ $\qquad tgt = u \quad \sec^{۲}t\, dt = du$

$= ۳۲\int (۱+u^{۲})u\, du = ۳۲\int(u+u^{۳})du = ۳۲(\frac{۱}{۲}u^{۲}+\frac{۱}{۴}u^{۴})$

$= ۳۲(\frac{۱}{۲}tg^{۲}t + \frac{۱}{۴}tg^{۴}t) = \frac{۳۲}{۲}tg^{۲}t(۱+\frac{۱}{۲}tg^{۲}t)$

$= ۱۶\;(۱+\frac{x^{۲}}{۴})(۱+\frac{۱}{۲}(۱+\frac{x^{۲}}{۴})) = ۲(۲+x^{۲})(۵+x^{۲}$

۲۶. $\int \frac{\sec^2 3x}{tg3x}\,dx = \int \frac{1+tg^2 3x}{tg3x}\,dx = \int (\frac{1}{tg3x} + tg3x)\,dx$

$= \int (cotg3x + tg3x)\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| - \frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$

۲۷. $\int \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}$

$A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 = 5x^2-11x+5$

$Ax^2-3Ax+2A+Bx-2B+Cx^2-2Cx+C = 5x^2-11x+5$

$A+C=5$
$-3A+B-2C=-11 \Rightarrow A=0,\ C=5,\ B=-1$
$2A+C=5$

$I = \int (\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2})\,dx = \frac{-1}{x-1} + \ln(x-2)$

۲۸. $\int \frac{(\ln|x|)^3}{x}\,dx \qquad \ln|x| = t \Rightarrow |x| = e^t \Rightarrow \begin{cases} x = e^t & x>0 \\ x = -e^t & x<0 \end{cases}$

$x>0 \quad I = \int \frac{t^3 \times e^t}{e^t}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{4}(\ln|x|)^4$

$x<0 \quad I = \int \frac{t^3(-e^t)}{(-e^t)}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}(\ln|x|)^4$

۲۹. $\int x\,tg^2x\,dx = \int x(1+tg^2x-1)\,dx = \int [x(1+tg^2x) - x]\,dx$

$= \int x(1+tg^2x)\,dx - \frac{1}{2}x^2 \qquad u=x \Rightarrow du=dx$

$\qquad (1+tg^2x)\,dx = dv \Rightarrow v = tgx$

$= x\,tgx - \int tgx\,dx - \frac{1}{2}x^2$

$= x\,tgx + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$۳۰. \int Lnx \sqrt{xLnx - x}\, dx$

$x Lnx - x = u \Rightarrow Lnx\, dx = du$

$= \int \sqrt{u}\, du = \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}(x\, Lnx - x)^{\frac{۳}{۲}}$

$۳۱. \int \sin^{۴}(\frac{x}{۴})\, dx = \int (\frac{1-\cos\frac{x}{۲}}{۲})^{۲} dx = \frac{1}{۴}\int (1-\cos\frac{x}{۲})^{۲} dx$

$= \frac{1}{۴}\int (1+\cos^{۲}\frac{x}{۲} - ۲\cos\frac{x}{۲})\, dx = \frac{1}{۴}\int (1 + \frac{1+\cos x}{۲} - ۲\cos\frac{x}{۲})\, dx$

$= \frac{1}{۴}(\frac{۳}{۲}x + \frac{1}{۲}\sin x - ۴\sin\frac{x}{۲})$

$۳۲. \int \sec^{۳}\theta\, d\theta$

$\sec\theta = u \quad \sec\theta\, tg\theta\, d\theta = du$

$\sec^{۲}\theta d\theta = dv \Rightarrow v = tg\theta$

$I = \sec\theta\, tg\theta - \int \sec\theta\, tg^{۲}\theta\, d\theta$

$= \sec\theta\, tg\theta - \int \sec\theta\, (\sec^{۲}\theta - 1)\, d\theta$

$= \sec\theta\, tg\theta - \int \sec^{۳}\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$

$\Rightarrow ۲\int \sec^{۳}\theta\, d\theta = \sec\theta\, tg\theta + \int \sec\theta\, d\theta$

حل $\int \sec\theta\, d\theta$ را محاسبه می‌کنیم.

$Z = tg\frac{\theta}{۲} \qquad \cos\theta = \frac{1-tg^{۲}\frac{\theta}{۲}}{1+tg^{۲}\frac{\theta}{۲}} = \frac{1-Z^{۲}}{1+Z^{۲}} \qquad d\theta = \frac{۲dZ}{1+Z^{۲}}$

$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int \frac{1+Z^{۲}}{1-Z^{۲}} \cdot \frac{۲dZ}{1+Z^{۲}} = \int \frac{۲dZ}{1-Z^{۲}} = ۲\int \frac{dZ}{(1-Z)(1+Z)}$

$\frac{A}{1-Z} + \frac{B}{1+Z} = \frac{۲}{1-Z^{۲}} \qquad A(1+Z) + B(1-Z) = ۲ \Rightarrow \begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=۲ \end{array} \Rightarrow A=1, B=1$

$\int \sec\theta\, d\theta = \int (\frac{1}{1-Z} + \frac{1}{1+Z})\, dZ = -Ln|1-Z| + Ln|1+Z| = Ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right|$

$= Ln\left|\frac{1+tg\theta/۲}{1-tg\theta/۲}\right| = Ln|\sec\theta + tg\theta|$

بنابراین

$۲\int \sec^{۳}\theta\, d\theta = \sec\theta\, tg\theta + Ln|\sec\theta + tg\theta|$

$\int \sec^{۳}\theta\, d\theta = \frac{1}{۲}(\sec\theta\, tg\theta + Ln|\sec\theta + tg\theta|)$

۳۳. $\int \frac{arctg x}{x^۲} dx$ $arctg x = t \Rightarrow x = tg t \quad dx = \sec^۲ t \, dt$

$= \int \frac{t \sec^۲ t}{tg^۲ t} dt$ $t = u \quad dt = du$

$\frac{\sec^۲ t}{tg^۲ t} dt = dv \Rightarrow v = \frac{-۱}{tg t}$

$= \frac{-t}{tg t} + \int \frac{۱}{tg t} dt$

$= \frac{-t}{tg t} + Ln|\sin t| = -\frac{arctg x}{x} + Ln|\sin(arctg x)|$

۳۴. $\int (\arcsin x)^۲ dx$ $\arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t \quad dx = \cos t \, dt$

$= \int t^۲ \cos t \, dt = t^۲ \sin t + ۲t\cos t - ۲\sin t$

$= x(\arcsin x)^۲ + ۲\sqrt{۱-x^۲} \arcsin x - ۲x$

$t^۲$	$\cos t$
$۲t$	$\sin t$
۲	$-\cos t$
	$-\sin t$

۳۵. $\int \frac{\sec^۴ x}{\sqrt{tg x}} dx = \int \sec^۲ x \times \frac{\sec^۲ x}{\sqrt{tg x}} dx$

$\sec^۲ x = u \Rightarrow ۲\sec^۲ x \, tg x \, dx = du$

$\frac{\sec^۲ x}{\sqrt{tg x}} dx = dv \Rightarrow v = ۲\sqrt{tg x}$

$I = ۲\sqrt{tg x} \sec^۲ x - ۴\int \sec^۲ x \, (tg x)^{۳/۲} dx$

$= ۲\sqrt{tg x} \sec^۲ x - ۴ \times \frac{۲}{۵} (tg x)^{۵/۲}$

۳۶. $\int \frac{x^۲}{x^۴-۱} dx$

$\frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۱} + \frac{Cx+D}{x^۲+۱} = \frac{x^۲}{x^۴-۱}$

$A(x+۱)(x^۲+۱) + B(x-۱)(x^۲+۱) + (Cx+D)(x^۲-۱) = x^۲$

$A(x^۳+x+x^۲+۱) + B(x^۳+x-x^۲-۱) + Cx^۳ - Cx + Dx^۲ - D = x^۲$

۷۱

$A+B+C=0$

$A-B+D=1$

$A+B-C=0$

$A-B-D=0$

$A=\frac{1}{۴}\quad B=-\frac{1}{۴}\quad C=0,\ D=\frac{1}{۲}$

$$I=\int \frac{1}{۴(x-1)}-\frac{1}{۴(x+1)}+\frac{1}{۲(x^{۲}+1)}dx=\frac{1}{۴}\ln(x-1)-\frac{1}{۴}\cdot\ln|x+1|+\frac{1}{۲}\operatorname{arctg}(x)$$

$$=\frac{1}{۴}\ Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{۲}\operatorname{arctg}x$$

انتگرال معین

۱. مشتق هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $F(x)=\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt$

$F'(x)=2x\sin^2 x$

۲) $F(x)=\int_2^{\int_1^x \sin^2 t\,dt}\frac{dt}{1+\sin^4 t+t^2}$

$$F'(x)=\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)'\frac{1}{1+\sin^4\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)+\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\sin^4\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)+\left(\int_1^x \sin^2 t\,dt\right)^2}$$

۳) $F(x)=\int_{15}^{x}\left(\int_8^{y}\frac{dt}{t^2+\cos^2 t}\right)dy$

$$F'(x)=\int_8^x \frac{dt}{t^2+\cos^2 t}$$

۴) $F(x)=\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\sin^2 t}\,dt$

$$F(x)=x\int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\sin^2 t}\Rightarrow F'(x)=\int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\sin^2 t}$$

۲. بدون محاسبه انتگرال، مطلوب است تعیین $(f^{-1})'(0)$ هرگاه:

الف) $f(x)=\int_0^x (1+\sin(\sin t))\,dt$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

$f(0)=0\Rightarrow f^{-1}(0)=0$

$f'(x)=1+\sin(\sin x)$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1+\sin(\sin 0)}=1$$

ب) $f(x)=\int_1^x \cos(\cos t)\,dt$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

$f(1)=0\Rightarrow f^{-1}(0)=1$

$f'(x)=\cos(\cos x)$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{\cos(\cos(1))}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۳. تابع g را چنان تعیین کنید که:

الف) $\int_0^x t\,g(t)\,dt = x + x^2$

با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$x\,g(x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = 2 + \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

ب) $\int_0^{x^2} t\,g(t)\,dt = x + x^2$

$$2x \cdot x\,g(x) = (x + x^2)' = 1 + 2x \Rightarrow 2x^2 g(x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1+2x}{x^2}$$

۴. تمام توابع پیوسته f صادق در معادله زیر را پیدا کنید.

$$\int_0^x f(t)\,dt = (f(x))^2 + c$$

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left((f(x))^2 + c\right)' \Rightarrow f(x) = 2f'(x)f(x) \Rightarrow 2f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + c_1$$

۵. میانگین توابع زیر را بر بازه داده شده تعیین کنید.

الف. $f(x) = tgx \quad [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\text{میانگین} = \frac{\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx}{\pi/4} = \frac{\int_0^{\pi/4} tgx\,dx}{\pi/4} = -\frac{4}{\pi}\ln|\cos x|\,\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{4}{\pi}\ln(\frac{1}{2})$$

ب. $f(x) = \ln x \quad [1, e]$

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \ln x\,dx = \int_0^1 te^t\,dt \qquad \ln x = t \to dx = e^t dt$$

$$= te^t - e^t\,\Big|_0^1 = 1$$

$$\text{میانگین} = \frac{1}{e-1}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۶ـ ثابت کنید

الف ـ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}$$

اگر تابع $f(x)=x$ را روی بازه $[0,1]$ در نظر بگیریم و این بازه را به n قسمت تقسیم کنیم در این صورت مجموع ریمان f روی این بازه عبارت است از رابطه بالا، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

ب ـ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

۷. الف) به کمک قضیه مقدار میانگین برای مشتقات و تابع $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ ، قضیه مقدار میانگین برای انتگرال را ثابت کنید.

چون تابع $g(x)$ در شرایط قضیه مقدار میانگین برای مشتقات صدق می‌کند، بنابراین

$$\exists c\in(a,b)\qquad g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

با $g'(x)=f(x)$ ، $g(a)=0$ ، $g(b)=\int_a^b f(t)dt$ ، در نتیجه

$$\exists c\in(a,b)\qquad f(c)=\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$$

$$\Rightarrow\ \exists c\in(a,b)\qquad \int_a^b f(t)\,dt=f(c)(b-a)$$

ب) هرگاه f و g بر $[a,b]$ پیوسته و g در (a,b) هرگز صفر نشود، آنگاه

$$\exists c\in(a,b)\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

فرض می‌کنیم $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ در این صورت

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

از طرفی با فرض $G(x)=t$ داریم

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx=\int_{G(a)}^{G(b)} f(G^{-1}(t))\,dt$$

حال با به کارگیری قضیه مقدار میانگین انتگرال

$$\exists c_1\in(G(a),G(b))\qquad \int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx=f(G^{-1}(c_1))\,(G(b)-G(a))$$

در نتیجه با فرض $G^{-1}(c_1)=c$ داریم

$$\exists c\in(a,b)\qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\,(G(b)-G(a))$$

از طرفی $G(b)=\int_a^b g(x)\,dx$; $G(a)=0$ بنابراین

$$\exists c\in(a,b)\qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

۸. فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و نامنفی، و در نقطه‌ای از $[a,b]$ ناصفر باشد. نشان دهید $\int_a^b f(x)\,dx>0$

طبق قضیه مقدار میانگین

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a)$$

و چون f نامنفی است، بنابراین $f(c)>0$، در نتیجه

$$\int_a^b f(x)\,dx>0$$

۹. بدون محاسبه انتگرال نشان دهید $\frac{1}{6}<\int_0^2\frac{dx}{10+x}<\frac{1}{5}$

با فرض $f(x)=\frac{1}{10+x}$، مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع f در بازه $[0,2]$ عبارت است از

$$M=\frac{1}{10}=f(0)\qquad m=\frac{1}{12}=f(2)$$

بنابراین

$$m(b-a)<\int_0^2\frac{dx}{10+x}<M(b-a)$$

$$2\times\frac{1}{12}<\int_0^2\frac{dx}{10+x}<2\times\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$$

۱۰. ثابت کنید هرگاه m , n دو عدد صحیح باشند، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

ابتدا حالت $m \neq n$ را بدست می‌آوریم

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{(m-n)} \sin(m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

حالت $m=n$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$m \neq n \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$m=n \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2n} \sin^2 nx \Big|_0^{2\pi} = 0$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۱. ثابت کنید هرگاه f در $[-a,a]$ پیوسته و زوج باشد، آنگاه:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

در انتگرال $\int_{-a}^{0} f(x)dx$، تغییر متغیر $x=-t$ را قرار می‌دهیم

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

چون f یک تابع زوج است، بنابراین $f(-t)=f(t)$، در نتیجه

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \Rightarrow \int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

۱۲. ثابت کنید هرگاه f در $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد، آنگاه:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

۱۳. فرض کنید $f''(x)$ در $[a,b]$ پیوسته است. نشان دهید

$$\int_{a}^{b} x f''(x)dx = (b f'(b) - f(b)) - (a f'(a) - f(a))$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ابتدا از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم.

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$f''(x)dx = dv \Rightarrow v = f'(x)$$

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = x f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= b f'(b) - a f'(a) - f(x)\Big|_a^b$$

$$= b f'(b) - a f'(a) - f(b) + f(a)$$

$$= (b f'(b) - f(b)) - (a f'(a) - f(a))$$

۱۴. نشان دهید اگر f در $[0,\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

طبق قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته درمورد تابع $f_1(x) = x,\ g(x) = f(\sin x)$ داریم:

$$\exists c \in (0,\pi) \qquad \int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = c\int_0^\pi f(\sin x)\,dx \tag{1}$$

حال هدف پیدا کردن c می باشد.

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

با تغییر متغیر $x = \pi - t$ درمورد $\int_{\pi/2}^{\pi} x f(\sin x)dx$ داریم:

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx - \int_{\pi/2}^{0} (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\,dx + \int_0^{\pi/2} (\pi - t) f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt \tag{2}$$

از طرفی

$$\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx \tag{3}$$

بنابراین روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می شود.

$$2c\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx \Rightarrow c = \pi/2$$

بنابراین

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi/2\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۵. انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{4}$$

$$2)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^b + \lim_{c\to 0^+}\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_c^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$3)\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b\to 4}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b\to 4}\frac{1}{2}\sqrt{4-x}\Big|_0^b = 1$$

$$4)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x} = t$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\,dt}{1+t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2\,dt}{1+t^2} = \lim_{b\to\infty} 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2(\operatorname{arctg} b) = \pi$$

۱۶. رفتار (همگرایی یا واگرایی) انتگرال های زیر را تعیین کنید.

$$1)\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{b\to\infty}\frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}\Big|_1^b = \infty$$

واگرا

$$2)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^3+2}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+2} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b = \frac{1}{2}$$

بنابراین $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+2}$ همگراست.

۳) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۲}+1}$ $\quad \sqrt[۳]{x}=t \Rightarrow x=t^۳ \quad dx=۳t^۲dt$

$$=\int_0^\infty \frac{۳t^۲dt}{1+t^۲} = ۳\int_0^\infty \left(1-\frac{1}{1+t^۲}\right)dt = \lim_{b\to\infty} ۳\int_0^b \left(1-\frac{1}{1+t^۲}\right)dt$$

$$=\lim_{b\to\infty} ۳\left(t-\text{arctg}\, t\right)\Big|_0^b = \infty$$ واگرا

۴) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} < \int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = 1$$

بنابراین $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$ همگراست.

۵) $\int_0^۲ \frac{dx}{1-x^۲} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^۲} + \int_1^۲ \frac{dx}{1-x^۲}$

$$=\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{1-x^۲} + \lim_{c\to 1^+}\int_c^۲ \frac{dx}{1-x^۲}$$

$$=\lim_{b\to 1^-}\frac{1}{۲}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_0^b + \lim_{c\to 1^+}\frac{1}{۲}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_c^۲$$

$$=\lim_{b\to 1^-}\frac{1}{۲}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| + \lim_{c\to 1^+}\frac{1}{۲}\left(\ln\left|\frac{1+c}{1-c}\right|+\ln(۳)\right)$$

حدها وجود ندارند بنابراین انتگرال واگراست.

۶) $\int_0^\infty x^۲e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^۲e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -x^۲e^{-x}-۲xe^{-x}-۲e^{-x}\Big|_0^b = ۲$

همگرا

۷) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^۲}dx$

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^۲}dx < \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+1}{x^۲}dx = \int_1^\infty \left(x^{-۳/۲}+\frac{1}{x^۲}\right)dx$$

$$=\lim_{b\to\infty} -\frac{۲}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\Big|_1^b = ۳$$

بنابراین $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^۲}dx$ همگراست.

حل تمرین ریاضی عمومی

۷) $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x}$ $\qquad \ln x = t \quad dx = e^t\,dt$

$$= \int_0^\infty t e^t\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b t e^t\,dt = \lim_{b \to \infty} t e^t - e^t \Big|_0^b = \infty$$

بنابراین انتگرال واگرا است .

۸) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^x - 2^x}$ $\qquad 2^x = t \rightarrow x\ln 2 = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\ln 2\, t}$

$$= \int_2^\infty \frac{1}{e^{\frac{1}{\ln 2}\ln t} - t} \times \frac{dt}{(\ln 2)t} = \frac{1}{\ln 2} \int_2^\infty \frac{dt}{t^2 \left(t^{\frac{1}{\ln 2}-1} - 1\right)}$$

$$> \frac{1}{\ln 2} \int_2^\infty \frac{dt}{t^2 \times t^{\frac{1}{\ln 2}-1}} = \frac{1}{\ln 2} \int_2^\infty \frac{dt}{t^{\frac{1+\ln 2}{\ln 2}}}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{\ln 2}\, t^{2-\frac{1}{\ln 2}} \Big|_2^b = \infty$$

بنابراین انتگرال واگراست.

۱۷. برای چه مقادیر r انتگرال‌های زیر همگرا اند؟

الف) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^r}$

$\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^r} = \frac{1}{1-r}\, t^{1-r} \Big|_0^{\ln 2}$$

اگر $r<1$ ، انتگرال همگرا به $\frac{1}{1-r}(\ln 2)^{1-r}$ است و اگر $r>1$ ، انتگرال واگرا است .

ب) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^r}$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^r} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-r}\, t^{1-r} \Big|_{\ln 2}^b$$

اگر $r>1$ باشد، انتگرال همگرا به $= \frac{1}{1-r}(\ln 2)^{1-r}$ و اگر $r<1$ باشد، انتگرال واگرا است

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱. مساحت محدود بین دو نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ و $x^۲+y^۲=۸$ را به دست آورید.

محل برخورد دو نمودار را بدست می آوریم.

$$۸-x^۲=\frac{۱}{۴}x^۴ \Rightarrow x^۴+۴x^۲-۳۲=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

$$A=\int_{-۲}^{۲}\left(\sqrt{۸-x^۲}-\frac{۱}{۲}x^۲\right)dx = ۲\int_{۰}^{۲}\left(\sqrt{۸-x^۲}-\frac{۱}{۲}x^۲\right)dx$$

$$x=۲\sqrt{۲}\sin t \qquad dx=۲\sqrt{۲}\cos t\; dt$$

$$A=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\left(\sqrt{۸(۱-\sin^۲ t)}-\frac{۱}{۲}\,۸\sin^۲ t\right)(۲\sqrt{۲}\cos t)\,dt$$

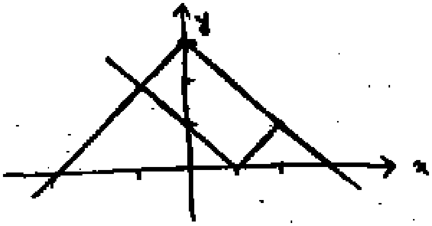
$$=۱۶\int_{۰}^{\pi/۴}\cos^۲ t\;dt-۱۶\sqrt{۲}\int_{۰}^{\pi/۴}\sin^۲ t\;\cos t\;dt$$

$$=۸\int_{۰}^{\pi/۴}(۱+\cos ۲t)\,dt-\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳}\sin^۳ t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$=۸\left(t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t\right)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}-\frac{۸}{۳}$$

$$=۲\pi+۴-\frac{۸}{۳}=۲\pi+\frac{۴}{۳}$$

۲. مساحت محدود به منحنی‌های $y=|x-1|$ و $y=-|x|+۳$ را پیدا کنید.



$$۳-|x|=|x-۱| \Rightarrow \begin{cases} ۳-|x|=x-۱ \Rightarrow |x|=۴-x \Rightarrow \begin{cases} x=۴-x \Rightarrow x=۲ \\ x=x-۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \\ ۳-|x|=۱-x \Rightarrow |x|=۲+x \Rightarrow \begin{cases} x=۲+x \quad \text{غ ق ق} \\ x=-۲-x \Rightarrow x=-۱ \end{cases} \end{cases}$$

$$A=\int_{-۱}^{۲}(۳-|x|-|x-۱|)\,dx$$

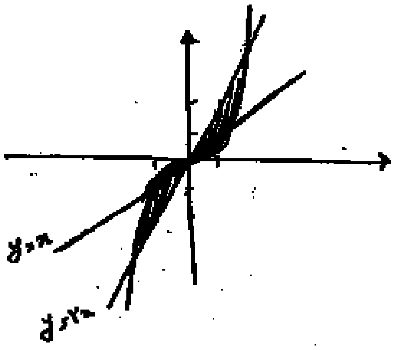
بازه را به سه بازه $[-۱,۰]$ و $[۰,۱]$ و $[۱,۲]$ تقسیم می‌کنیم

$$A=\int_{-۱}^{۰}[۳+x-(۱-x)]\,dx+\int_{۰}^{۱}[۳-x-(۱-x)]\,dx+\int_{۱}^{۲}[(۳-x)-(x-۱)]\,dx$$

$$=۲+۲+۱=۵$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۳. تمام مساحتی را که شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خطوط $y=2x$, $y=x$ دارد به دست آورید.



کافی است مساحت محدود به منحنی و خطوط را در ربع اول به دست آوریم. برای این منظور ابتدا مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خط $y=2x$ را در ربع اول به دست می‌آوریم

$$y=x^3,\ y=2x \Rightarrow y=2x=x^3 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx = x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\sqrt{2}}=1$$

سپس مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و $y=x$ را بدست می‌آوریم (در ربع اول)

$$A\ \ y=x^3,\ y=x \Rightarrow x^3=x \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,1$$

$$A_2=\int_0^1(x-x^3)\,dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

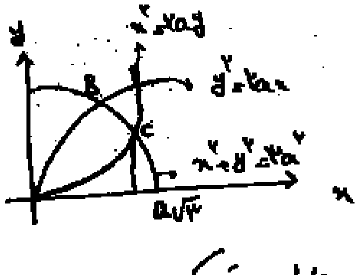
بنابراین در ربع اول داریم:

$$A=A_1-A_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

در نتیجه مساحت کل عبارت است از

مساحت کل $=2A=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

۴. مساحت قسمتی از دایره $x^2+y^2=3a^2$ واقع در ربع اول و محدود به منحنی‌های $y^2=2ax$, $x^2=2ay$ را بیابید $(a>0)$



محل تلاقی دایره با هر یک از منحنی‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۳a^۲ \\ y^۲=۲ax \end{cases} \Rightarrow x^۲-۲ax-۳a^۲=۰ \Rightarrow x=a$$

$$\begin{cases} x^۲y^۲=۳a^۲ \\ x^۲=۲ay \end{cases} \Rightarrow y^۲+۲ay-۳a^۲=۰ \Rightarrow y=a$$

$$B=\left|\begin{matrix} x=a \\ y=\sqrt{۲ax}=\sqrt{۲a(a)} \end{matrix}\right. \Rightarrow B=\left|\begin{matrix} a \\ \sqrt{۲}\,a \end{matrix}\right.$$

$$C=\left|\begin{matrix} x=\sqrt{۲ay}=\sqrt{۲a\times a} \\ y=a \end{matrix}\right. \Rightarrow C=\left|\begin{matrix} \sqrt{۲}\,a \\ a \end{matrix}\right.$$

بنابراین

$$A=\int_۰^a \left(\sqrt{۲ax}-\frac{x^۲}{۲a}\right)dx+\int_a^{\sqrt{۲}a}\left(\sqrt{۳a^۲-x^۲}-\frac{x^۲}{۲a}\right)dx$$

$$=\sqrt{۲a}\times\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{1}{۶a}x^۳\Big|_۰^a-\frac{1}{۶a}x^۳\Big|_a^{\sqrt{۲}a}+\int_a^{\sqrt{۲}a}\sqrt{۳a^۲-x^۲}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}}\sqrt{۳a^۲-۳a^۲\sin^۲\theta}\;\sqrt{۳}a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+۳a^۲\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}}\cos^۲\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+\frac{۳}{۲}a^۲\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}}(1+\cos۲\theta)\,d\theta$$

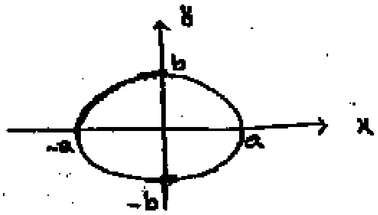
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+\frac{۳}{۲}a^۲\left(\theta+\frac{1}{۲}\sin۲\theta\right)\Big|_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}}^{\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+\frac{۳}{۲}a^۲\left(\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}+\frac{1}{۲}\sin\left(۲\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}-\frac{1}{۲}\sin۲\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۳}a^۲+\frac{۳}{۲}a^۲\left(\arcsin\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{۳}}\right)$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۵. مساحت ناحیه‌ای که با منحنی $x=a\cos t$ ، $y=b\sin t$ محدود شده است را محاسبه کنید.

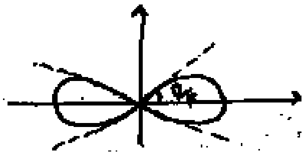


$$A=۲\int_{-a}^{a} y\,dx=۲\int_{a}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt=-۲ab\int_{\pi}^{0}\sin^{۲}t\,dt$$

$$=۲ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos ۲t}{۲}dt=۲ab\left[\frac{t}{۲}-\frac{\sin ۲t}{۴}\right|_{0}^{\pi}=\pi ab$$

۶. مساحت ناحیه‌ای که به $\rho=a\sqrt{\cos ۲\theta}$ محدود شده است بدست آورید.

چون از تبدیل θ به $\pi-\theta$ و $۲\pi-\theta$ ، $\rho=a\sqrt{\cos ۲\theta}$ تغییر نمی‌کند پس محورهای y ها و x ها هر دو محور تقارن شکل هستند.



در ناحیه اول صفحه تغییرات θ بین ۰ و $\frac{\pi}{۴}$ است. بنابراین

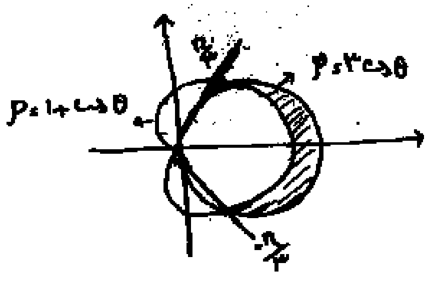
$$S=۴\times\frac{1}{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}\rho^{۲}d\theta$$

$$S=۴\times\frac{1}{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}a^{۲}\cos ۲\theta\,d\theta=۲a^{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}\cos ۲\theta\,d\theta$$

$$=a^{۲}\sin ۲\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}}=a^{۲}$$

۷. مساحت ناحیه خارج $\rho=1+\cos\theta$ و داخل دایره $\rho=۳\cos\theta$ را بدست آورید.

از روی دایره $\rho=۳\cos\theta$ داریم $\rho^{۲}=۳\rho\cos\theta$ یعنی $x^{۲}+y^{۲}=۳x$ که دایره‌ای به مرکز $(\frac{۳}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۳}{۲}$ است.



حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$3\cos\theta = 1+\cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \to \cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \pm\frac{\pi}{3}$

برای $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ، $3\cos\theta \geq 1+\cos\theta$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]\,d\theta$$

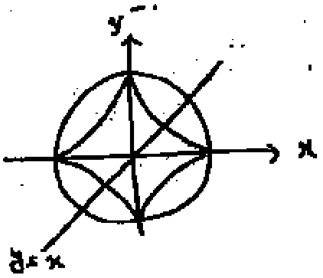
چون ناحیه نسبت به محور xها تقارن دارد.

$$A = 2\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}(8\cos^2\theta-2\cos\theta-1)\,d\theta = \int_{0}^{\pi/3}(8\times\frac{1+\cos2\theta}{2}-2\cos\theta-1)\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/3}(4\cos2\theta-2\cos\theta+3)\,d\theta = 2\sin2\theta-2\sin\theta+3\theta\Big|_{0}^{\pi/3} = \pi$$

۸. محیط آستروئید $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ را بیابید.

آستروئید نسبت به محورهای مختصات و نیمسازهای ربع اول و سوم و نیز دوم و چهارم متقارن است. بنابراین کافی است طول قوسی از منحنی از آستروئید را که بین خط $y=x$ و محور xها قرار دارد محاسبه نموده و حاصل را هشت برابر نماییم.



در ربع اول صفحه، $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$

$y=0 \Rightarrow x=a$

$y=x \Rightarrow x=\frac{a}{2^{3/2}}$

همچنین

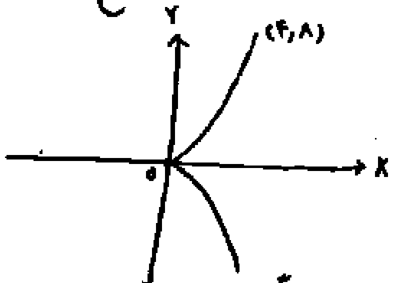
$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}(-\frac{2}{3})x^{-1/3} = -x^{-1/3}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})} = (\frac{a}{x})^{1/3}$$

$$L = 8\int_{\frac{a}{2^{3/2}}}^{a} a^{1/3}x^{-1/3}\,dx = 6a$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۹. طول قوسی از منحنی $y^{۲}=x^{۳}$ را که بین نقاط $(۰,۰)$ ، $(۴,۸)$ واقع است محاسبه کنید.



چون نقاط داده شده در ربع اول صفحه قرار دارند، $y=x^{۳/۲}$ ، بنابراین

$$y'=\frac{۳}{۲}\sqrt{x} \qquad \sqrt{۱+y'^{۲}}=\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}x}$$

$$L=\int_{۰}^{۴}\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}x}\,dx=\frac{۴}{۹}\cdot\frac{۲}{۳}(۱+\frac{۴}{۹}x)^{۳/۲}\Big|_{۰}^{۴}=\frac{۸}{۲۷}(۱۰\sqrt{۱۰}-۱)$$

۱۰. طول قوس منحنی $y=\sin^{۵}t$ ، $x=\cos^{۵}t$ را از $t_{۱}=۰$ تا $t_{۲}=\frac{\pi}{۲}$ بدست آورید.

$$\frac{dx}{dt}=-۵\cos^{۴}t\sin t \qquad \frac{dy}{dt}=۵\sin^{۴}t\cos t$$

$$L=\int_{۰}^{\pi/۲}\sqrt{(-۵\cos^{۴}t\sin t)^{۲}+(۵\sin^{۴}t\cos t)^{۲}}\,dt=۵\int_{۰}^{\pi/۲}\sin t\cos t\sqrt{\sin^{۶}t+\cos^{۶}t}\,dt$$

$$=\frac{۵}{۲}\int_{۰}^{\pi/۲}\sin ۲t\sqrt{(\frac{۱-\cos ۲t}{۲})^{۳}+(\frac{۱+\cos ۲t}{۲})^{۳}}\,dt$$

$$=\frac{۵}{۲}\int_{۰}^{\pi/۲}\sin ۲t\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\cos^{۲}۲t}\,dt$$

$$A=\frac{۱}{۴}\int\sin ۲t\sqrt{۱+۳\cos^{۲}۲t}\,dt=\frac{-۱}{۴}\int\sqrt{۱+۳u^{۲}}\,du \qquad \cos ۲t=u$$

$$u=\frac{۱}{\sqrt{۳}}tg\,\theta \quad , \quad du=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\sec^{۲}\theta\,d\theta$$

$$A=\frac{-۱}{۴\sqrt{۳}}\int\sqrt{۱+tg^{۲}\theta}\times\sec^{۲}\theta\,d\theta=-\frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\int\sec^{۳}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{-۱}{۴\sqrt{۳}}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos ۲t\sqrt{۱+۳\cos^{۲}۲t}+\frac{۱}{۳}\ln(\sqrt{۳}\cos ۲t+\sqrt{۱+۳\cos^{۲}۲t}))$$

$$L=\frac{۵}{۸}\left[۲-\frac{\ln(۲-\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}}\right]$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۱. طول قوس منحنی $\rho=\frac{1}{1+\cos\theta}$ را در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ محاسبه کنید.

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left[\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right]^2+\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{(1+\cos\theta)^3}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{8\cos^6\frac{\theta}{2}}}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos^3\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\,d\theta$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=u\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=du$$

$$A=\frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2}=\int\frac{du}{(1-u^2)^2}=\int\frac{du}{(1-u)^2(1+u)^2}$$

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}\right]$$

$$A=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u}-\ln(1-u)-\frac{1}{1+u}+\ln(1+u)\right]$$

$$L=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\sin\frac{\theta}{2}}+\ln\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\right]-\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}-\ln\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$L=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]\right]$$

۱۲. محیط منحنی بسته $\rho=a\sin^4\frac{\theta}{4}$ را محاسبه نمائید.

چون تابع ρ یک تابع زوج است، منحنی نسبت به محور x ها تقارن دارد چون تابع $\sin^4(\frac{\theta}{4})$ دارای دوره تناوب 4π است، در طول نصف دوره تناوب از ۰ تا 2π، شعاع قطبی از ۰ تا a افزایش می‌یابد.

$$\rho'=a\sin^3\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}$$

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{a^2\sin^8\frac{\theta}{4}+a^2\sin^6(\frac{\theta}{4})\cos^2\frac{\theta}{4}}=a\sin^3(\frac{\theta}{4})$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

$$L=۲\int_۰^{۲\pi}\sqrt{\rho^۲+\rho'^۲}\,d\theta=۲\int_۰^{۲\pi}a\sin^۳\frac{\theta}{۴}\,d\theta=۲a\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos^۲\frac{\theta}{۴})\sin\frac{\theta}{۴}\,d\theta$$

$$=۲a\left(-۴\cos\frac{\theta}{۴}+\frac{۴}{۳}\cos^۳\frac{\theta}{۴}\right)\Big|_۰^{۲\pi}=\frac{۱۶}{۳}a$$

۱۳. حجم بیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ را محاسبه نمائید.

$$\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱-\frac{x^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{y^۲}{\left(b\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}\right)^۲}+\frac{z^۲}{\left(c\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}\right)^۲}=۱$$

با نیم‌قطرهای $b_۱=b\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}$, $c_۱=c\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}$

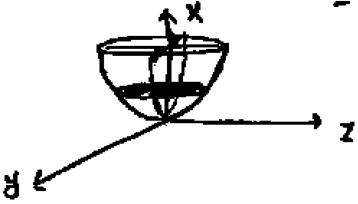
مساحت این بیضی مساوی با $\pi b_۱c_۱$ است. بنابراین $Q(x)=\pi bc(۱-\frac{x^۲}{a^۲})$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc(۱-\frac{x^۲}{a^۲})dx=\pi bc(x-\frac{x^۳}{۳a^۲})\Big|_{-a}^{a}=\frac{۴}{۳}\pi abc$$

۱۴. حجم جسمی را که محدود به سهموی بیضی‌گون $x=\frac{y^۲}{۲p}+\frac{z^۲}{۲q}$ $(p,q>۰)$ و صفحه $x=a$ است محاسبه نمائید.

$$\begin{cases}x=a\\ x=\frac{y^۲}{۲p}+\frac{z^۲}{۲q}\end{cases}\Rightarrow\frac{y^۲}{۲ap}+\frac{z^۲}{۲qa}=۱$$

محل تقاطع صفحهٔ موازی صفحه OYZ و به فاصله x از آن جسم $(۰\leq x\leq a)$، بیضی $\frac{y^۲}{۲px}+\frac{z^۲}{۲qx}=۱$ است که نیم‌قطرهای آن $b_۱=\sqrt{۲px}$ و $c_۱=\sqrt{۲qx}$ می‌باشند.



مساحت بیضی فوق

$$Q(x)=\pi b_۱c_۱=۲\pi x\sqrt{pq}$$

$$V=\int_۰^{a}۲\pi x\sqrt{pq}\,dx=\pi a^۲\sqrt{pq}$$

۱۵. شکل محدود به یک قوس سیکلوئید

$x=a(t-\sin t)$

$y=a(۱-\cos t)$

به دور محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را بدست آورید.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۸۵

$x=a(t-\sin t)$ $\qquad dx=a(1-\cos t)\,dt$

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^۲dx=\pi\int_۰^{۲\pi a} y^۲(x)\,dx=\pi\int_۰^{۲\pi} a^۲(1-\cos t)^۲\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^۳\int_۰^{۲\pi}(1-\cos t)^۳dt=\pi a^۳\int_۰^{۲\pi}\left[1-\cos^۳t-۳\cos t+۳\cos^۲t\right]dt$$

$$=\pi a^۳\int_۰^{۲\pi}\left[1-\cos t(1-\sin^۲t)-۳\cos t+۳\left(\frac{1+\cos ۲t}{۲}\right)\right]dt$$

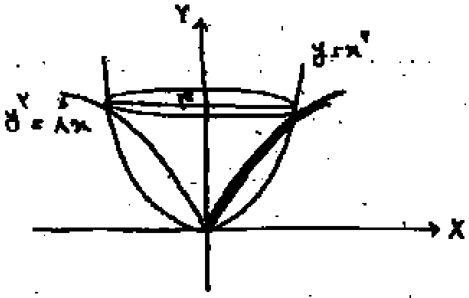
$$=\pi a^۳\left(\frac{۵}{۲}t-۴\sin t-\frac{1}{۳}\sin^۳t+\frac{۳}{۴}\sin ۲t\right)\Big|_۰^{۲\pi}$$

$$=۵\pi^۲a^۳$$

۱۶. حجم جسمی را که از دوران شکل محدود به منحنی های $y=x^۲$ ، $۸x=y^۲$ به دور محور Yها بدست می‌آید محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y=x^۲ \\ y^۲=۸x \end{cases} \Rightarrow y_1=۰,\ y_۲=۴$$

در بازه $[۰,۴]$ ، $x_۲(y)=\sqrt{y}\geq x_1(y)=\frac{y^۲}{۸}$



$$V=\pi\int_۰^۴\left(x_۲^۲(y)-x_1^۲(y)\right)dy=\pi\int_۰^۴\left(y-\frac{y^۴}{۶۴}\right)dy=\frac{۲۴}{۵}\pi$$

۱۷. سطح کره ای به شعاع R را محاسبه کنید.

$y=f(x)=\sqrt{R^۲-x^۲}$

اگر نمودار فوق را حول محور xها دوران دهیم کره مورد نظر بدست می‌آید.

$$P=۲\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^۲(x)}\,dx=۲\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^۲-x^۲}\sqrt{1+\frac{x^۲}{R^۲-x^۲}}\,dx$$

$$=۲\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=۴\pi R^۲$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۸. سطح رویه حاصل از دوران یک شاخه از سیکلوئید

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

به دور محور ox را محاسبه نمائید.

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$P=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\left(-\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{64}{3}\pi a^2$$

۱۴. مساحت رویه ای را که از دوران دایره $x^2+(y-b)^2=a^2$ ، که در آن $b\geq a$ ، به دور محور ox حاصل می‌آید محاسبه نمائید.

$$x=a\cos t \qquad y=b+a\sin t$$

$$P=2\pi\int_0^{2\pi}(b+a\sin t)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=2\pi a\int_0^{2\pi}(b+a\sin t)\,dt=4\pi^2 ab$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۸۲

سری‌ها

الف. در هر یک از تمرینات زیر تعیین کنید که آیا سری همگرای مطلق، مشروط یا واگرا است.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$a_n > a_{n+1}$ دنباله نزولی $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

طبق آزمون لایب‌نیتز، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ همگرا است.

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$، چون $\forall n \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است، بنابراین بنا به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ همگرای مشروط است.

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2}$

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ داریم:

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = \lim_{n \to \infty} n \times \frac{2n+1}{n^2} = 2$$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ واگرا است.

$a_{n+1} < a_n$ دنباله نزولی $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$

بنابراین بنا به آزمون لایب‌نیتز سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2}$ سری همگرا است.

پس در کل سری یک سری همگرای مشروط است.

۳. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

$a_n = \frac{1}{n \ln n}$ $\qquad a_n > a_{n+1}$ دنباله نزولی $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

طبق آزمون لایب‌نیتز، سری همگرا است.

در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$، بنا به آزمون انتگرال یک سری واگرا است.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \ln \ln x \Big|_2^b = \infty$$

بنابراین سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ همگرای مشروط است.

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{(-1)^n e^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{ne}{n+1} = e > 1$$

سری در کل واگرا است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n^2}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5(n+1)^2}{(n+2)!}\times\frac{(n+1)!}{5n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\times\frac{1}{n+2}\right| = 0 < 1$$

همگرای مطلق

۶. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ دنباله نزولی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ بنابراین طبق آزمون لایب نیتز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ همگراست

در مورد سری قدر مطلق ،

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ ، داریم

$$\lim_{n\to\infty} n^{\overset{\textcircled{X}}{1}} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad p = \frac{1}{2} < 1$$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ ، واگراست در نتیجه سری قدر مطلق واگراست .

در کل سری همگرای مشروط است .

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ دنباله نزولی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ همگراست

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ ، داریم

$$\lim_{n\to\infty} n\times\frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)} = \infty$$

سری واگراست .

در نتیجه سری به طور مشروط همگراست.

۸. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{e^k}$

در مورد سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ ،

$F(x) = \frac{x}{e^x} \qquad F'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

F در بازه $[1,\infty)$ نزولی و پیوسته است

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x}{e^x}\,dx = \lim_{b\to\infty} xe^{-x}-e^{-x}\Big|_1^b = 0$$

بنابراین سری طبق آزمون انتگرال همگراست . در نتیجه سری همگرای مطلق است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۲

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n - \sum \frac{(-1)^n 2}{n+2}$$

با فرض $a_n = \frac{(-1)^n 2}{n+2}$ ، $b_n = (-1)^n$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یک سری واگرا است بنابراین

در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$ ؛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$ یک سری واگرا است.

در مورد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n+2}\right|$ ، داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$

پس این سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ واگرا است.

10. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{(n-2)!}$

در مورد همگرایی قدر مطلق :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-1)!} \times \frac{(n-2)!}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n-1} = 0 < 1$$

پس سری همگرای مطلق است.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ نزولی است $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad n \geqslant 4 \quad n! > 2^n \Rightarrow \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$

چون سری $\sum \frac{1}{2^n}$ یک سری همگراست ، بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ نیز همگراست.

12. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2}\right)^k$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{n}{2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^n} = \infty$$

سری واگراست.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 > 1$$

سری واگراست.

حل تمرین‌های بخش سوم

۸۵

ب) همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+3)} = 1 \Rightarrow$ سری همگراست.

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n(n+1)}} = 1$ سری واگراست.

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \qquad p = \frac{2}{3} < 1$ سری واگراست.

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

$$A(n+1)(n+2) + B\,n(n+2) + C\,n(n+1) = 4 \Rightarrow A = 2,\ B = -4,\ C = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$S_n = 2\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$ پس سری همگراست.

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^{-n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+2^{-n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ سری واگراست.

۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \lim_{b\to\infty} -2t^{-1/2}\Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}}$$

سری همگراست. (بنا بر آزمون انتگرال)

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

[illegible]

۸۲

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۸. $\sum \frac{n^۲}{\sqrt{n^۸+۴n^۳}}$

$\lim_{n\to\infty} n^۲ \times \frac{n^۲}{\sqrt{n^۸+۴n^۳}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۴}{n^۴\sqrt{1+\frac{۴}{n^۵}}} = ۱$ سری همگرا است.

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+۲}\right)$

$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n+۲}\right) = \infty$ سری واگرا است.

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(۲n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)!}{(۲n+۳)!} \times \frac{(۲n+1)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+۲}{(۲n+۳)(۲n+۲)} = ۰ < ۱$

سری همگرا است.

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{(۲n+۳)(n-۵)}$

$\lim_{n\to\infty} n^۲ \times \frac{\pi}{(۲n+۳)(n-۵)} = \frac{\pi}{۲}$ سری همگرا است.

۱۲. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n(1+n^۲)}{n^۳-۲}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n^۲)}{n^۳-۲} = ۱ \neq ۰$ سری واگرا است.

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{۲^n ۳^n}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{۶^{n+1}} \times \frac{۶^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{۶} = \infty$ سری واگرا است.

۱۴. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^۲}$ آزمون انتگرال $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^۲}$ بر بازه $[۲,\infty)$ نزولی و پیوسته و مثبت است

$\lim_{b\to\infty}\int_{۲}^{b} \frac{1}{x(\ln x)^۲}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln ۲}^{\ln b} \frac{1}{t^۲}\,dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{t}\Big|_{\ln ۲}^{\ln b} = \frac{1}{\ln ۲}$ سری همگرا است

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

$\int^{b} \quad -\sqrt{x} \quad -\sqrt{x}\Big|^{n} = \frac{۲}{}$ سری همگرا است.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۱۶. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n+۳}{(\ln n)^۲}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+۳}{(\ln n)^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲\ln n \times \frac{۱}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{۲\ln n} = \infty$ سری واگراست.

۱۷. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n}{\ln n} + \frac{۳}{۴^n}$

سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$ ، چون $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$. سری واگراست.

سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۳}{۴^n}$ چون سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{۴^n}$ همگراست ایک سری همگراست. $\Leftarrow$ $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n}{\ln n} + \frac{۳}{۴^n}$ واگراست.

۱۸. $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\text{arctg}\, n}{۱+n^۲}$

$f(x) = \frac{\text{arctg}\, x}{۱+x^۲}$ $f'(x) = \frac{۱-۲x\,\text{arctg}\, x}{(۱+x^۲)^۲}$ $x \geq ۱ \Rightarrow f'(x) < ۰$

پس f در بازه $[۱,\infty)$ نزولی است.

$\int_۱^{\infty} \frac{\text{arctg}\, x}{۱+x^۲}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_۱^b \frac{\text{arctg}\, x}{۱+x^۲}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{۲} (\text{arctg}\, x)^۲ \Big|_۱^b = \infty$

سری واگراست.

۱۹. $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n(n-۱)}{(n+۱)(n+۲)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-۱)}{(n+۱)(n+۲)} = ۱ \neq ۰$ سری واگراست.

۲۰. $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{(۲n)!}$

از آزمون نسبت:

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n+۱}}{(۲n+۲)!} \times \frac{(۲n)!}{۲^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲}{(۲n+۲)(۲n+۱)} = ۰ < ۱$

سری همگراست

۲۱. $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n+n}$

$۲^n + n > ۲^n \Rightarrow \frac{۱}{۲^n+n} < \frac{۱}{۲^n}$

چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n}$ همگراست، بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n+n}$ همگراست (بنا بر آزمون مقایسه)

۲۲. $\sum_{n=۱}^{\infty} (۱+\frac{k}{n})^n$

$\lim (۱+\frac{k}{n})^n = \lim \left((۱+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}\right)^k = e^k \neq ۰$ سری واگراست

حل تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

$f(x) = x e^{-x^2} \quad f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2) e^{-x^2} \quad x > 1 \quad f'(x) < 0$

تابع نزولی است.

$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$

سری همگراست.

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

بنا به آزمون نسبت

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$

سری همگراست.

۲۵. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$

سری همگراست

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$

(آزمون ریشه)

سری همگراست.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

سری واگراست.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e n^3}{(n+1)^3} = e > 1$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

سری واگراست

۳. شعاع همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x| = |x|$

سری به ازای $|x|<1$ همگراست، بنابراین شعاع همگرایی برابر $R=1$.

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (x+2)^n$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left| \frac{(-1)^n (x+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{(-1)^n (x+2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{2} = \frac{|x+2|}{2} < 1$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۸۹

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^۲}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^۲} \times \frac{(\ln n)^۲}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^۲ = |x| \Rightarrow r=۱$$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x-\frac{۱}{۲})^n}{۲^n\, n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-\frac{۱}{۲})^{n+1}}{۲^{n+1}\,(n+1)^{n+1}} \times \frac{۲^n\, n^n}{n!\,(x-\frac{۱}{۲})^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-\frac{۱}{۲}|}{۲}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-\frac{۱}{۲}|}{۲}\left(۱-\frac{۱}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{|x-\frac{۱}{۲}|}{۲e} < ۱ \quad\Rightarrow\quad |x-\frac{۱}{۲}| < ۲e \Rightarrow r=۲e$$

۴. سری تیلور توابع داده شده را در c بنویسید و سپس شعاع همگرایی سری حاصل را مشخص کنید.

۱. $f(x)=e^x \qquad c=0$

$f(0)=۱ \qquad f'(x)=e^x \qquad f'(0)=۱$

$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(0)=۱$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

سری برای همه x همگراست.

۲. $f(x)=\frac{۱}{۳+x}+\frac{۱}{۲-x} \qquad c=0$

$f(0)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲+۳}{۳\times۲}$

$f'(x)=\frac{-۱}{(۳+x)^۲}-\frac{۱}{(۲-x)^۲} \qquad f'(0)=-\frac{۳^۲+۲^۲}{۳^۲\times۲^۲}$

$f''(x)=\frac{۲}{(۳+x)^۳}+\frac{۲}{(۲-x)^۳} \qquad f''(0)=۲\times\frac{۳^۳+۲^۳}{۳^۳\times۲^۳}$

$\vdots$

$f^{(n)}(0)=(-۱)^n\, n! \times \frac{۳^{n+1}+۲^{n+1}}{۳^{n+1}\times۲^{n+1}}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-۱)^n\,\frac{۳^{n+1}+۲^{n+1}}{۶^{n+1}}\times x^n$$

$\quad ^{n+1} \quad ^{n+1} \quad ^{n+1} \quad ^{n} \quad |x| \quad ۳^{n+1}+۲^{n+1}$

حل تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{۲} \times \frac{۳^{n+1}\left(1+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n+1}\right)}{۳^{n}\left(1+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n}\right)} = \frac{|x|}{۲} < 1$$

پس سری به ازای $|x|<۲$ همگراست.

۵. نشان دهید سری‌های توانی زیر در بازه داده شده همگرایند.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(۲n)!}$ $\qquad I = [-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(۲n+۲)!} \times \frac{(۲n)!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(۲n+۲)(۲n+1)} = 0$$

سری به ازای هر x همگراست.

۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-۲)^n}{۳^{n+1}}$ $\qquad I = [1,۳]$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-۲)^{n+1}}{۳^{n+۲}} \times \frac{۳^{n+1}}{(x-۲)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-۲|}{۳} = \frac{|x-۲|}{۳} < 1$$

$$\Rightarrow |x-۲| < ۳ \Rightarrow -1 < x < ۵$$

۳. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)}{j!} (x+۳)^j$ $\qquad I = [-۵,-1]$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)!} (x+۳)^{n+1} \times \frac{n!}{n(n+1)(x+۳)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+۲}{n(n+1)} |x+۳| = 0$$

سری به ازای هر x همگراست.

۶. شعاع همگرایی سری‌های توانی زیر را بیابید. همگرایی آنها را در ±1 بررسی کنید.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^۲}$

$x=1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^۲}$ $\qquad p=۲$ سری همگراست.

$x=-1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K!}$ $\qquad$ سری همگراست.

۲. $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$ $\qquad x=1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} k$ $\qquad$ واگراست.

$x=-1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$

طبق آزمون کلی چون $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ واگراست پس به ازای $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$ نیز واگراست.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

۷. یک سری توانی حول x=۵ با شعاع همگرایی R=۲ بنویسید

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(x-۵)^n}{۲^n}$$

۸. به ازای چه مقادیری از x سری‌های زیر همگرایند

۱. $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{x^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+۱}{x^{n+۱}}\times\frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}\times|x| = |x| < ۱$$

سری به ازای $|x|<۱$ همگراست

به ازای $x=۱$ ، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} n$ را داریم که یک سری واگرا است.

به ازای $x=-۱$ ، سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n n$ خواهد بود که یک سری واگراست، بنابراین سری به ازای $|x|<۱$ همگراست.

۲. $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(n+۱)۳^n}{(x-۲)^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+۲)۳^{n+۱}}{(x-۲)^{n+۱}}\times\frac{(x-۲)^n}{(n+۱)۳^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+۲}{n+۱}\times\frac{۳}{|x-۲|} = \frac{۳}{|x-۲|}<۱$$

$$\Rightarrow |x-۲|>۳ \Rightarrow x>۵ ,\ x<-۱$$

به ازای $x=۵$ ، سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} n+۱$ خواهد بود که یک سری واگراست.

به ازای $x=-۱$ ، سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(n+۱)$ خواهد بود که باز یک سری واگراست.

بنابراین سری به ازای $x<-۱$ ، $x>۵$ ، همگرا خواهد بود

۹. محاسبه حد به کمک سری توانی

۳. $\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{۲x}$

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{۲x} = \lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{x^۲}{۱۲} + \cdots\right) = \frac{۱}{۲}$$

۴. $\lim_{x\to۰}\frac{\ln(۱+ax)}{x}$ $a>۰$

$f(x)=\ln(۱+ax)$ $f(۰)=۰$ $f'(x)=\frac{۱}{۱+ax}$ $f'(۰)=۱$