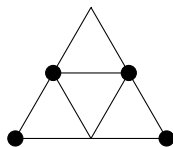
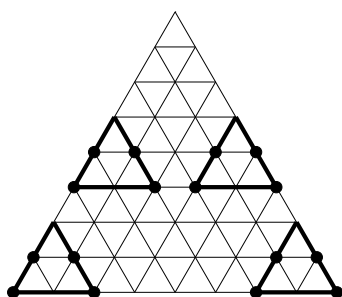


فایل کمکی ۲

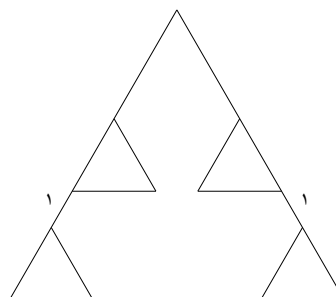
□ ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای هر k ، می‌توان از مثلث مشبک به ضلع $3^k - 1$ ، 3^k نقطه انتخاب کرد؛ طوری که هیچ سه تا از آن‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع نسازند. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. برای $k = 1$ ، شکل زیر را در نظر بگیرید.



فرض کنید حکم برای $k = l$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $k = l + 1$ نیز برقرار است. ساختار شکل (۱) را در نظر بگیرید:



شکل ۲

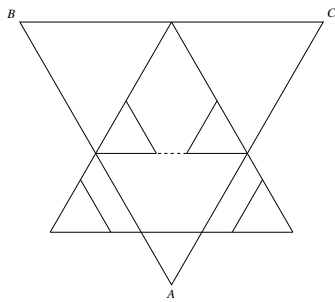


شکل ۱

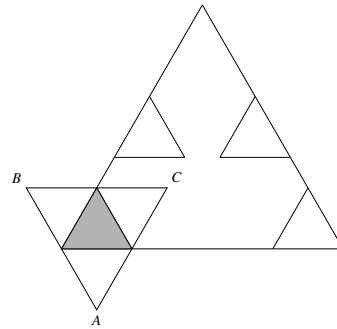
در این ساختار، در هر یک از چهار مثلث کوچک‌تر (به ضلع $3^l - 1$ که هر یک از آن‌ها را یک مثلث ریز می‌نامیم)، نقاط را بر طبق ساختار فرض استقرا انتخاب کرده‌ایم و هیچ نقطه‌ی دیگری را انتخاب نکرده‌ایم. برای مثال، شکل (۲) روند استقرا را برای انتخاب ۱۶ نقطه از مثلث مشبک به ضلع ۸ نشان می‌دهد. درون هر یک از چهار مثلث ریز، طبق فرض استقرا هیچ سه نقطه‌ی انتخاب شده، مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌سازند. حال سه نقطه از نقاط انتخاب شده در نظر بگیرید؛ طوری که هم‌زمان هر سه نقطه در یک مثلث ریز نباشند. سه حالت داریم:

- دو تا از آن‌ها در یک مثلث ریز قرار دارند. در این صورت طبق لم اثبات شده در راه‌نمایی همین سوال، اگر نقطه‌ی سوم با این دو نقطه مثلث متساوی‌الاضلاع بسازد، نمی‌تواند در هیچ یک از سه مثلث ریز دیگر باشد که تناقض است؛ پس چنین حالتی امکان ندارد. برای مثال اگر دو نقطه از نقاط انتخاب شده، در مثلث ریز مشخص شده در شکل (۳) باشند، نقطه‌ی سوم باید در مثلث ABC قرار بگیرد (طبق لم)؛ پس نمی‌تواند در هیچ مثلث ریز دیگر باشد.
- سه نقطه از سه مثلث ریز متفاوت باشند و هر یک دو مثلث ریز بالایی شامل یکی از این سه نقطه باشند. در این صورت اگر نقطه‌ی سوم با این دو نقطه مثلث متساوی‌الاضلاع بسازد، باید طبق لم در مثلث ABC قرار بگیرد و نمی‌تواند در هیچ یک از دو مثلث ریز دیگر باشد که تناقض است (شکل (۴)). پس چنین حالتی نیز امکان ندارد.

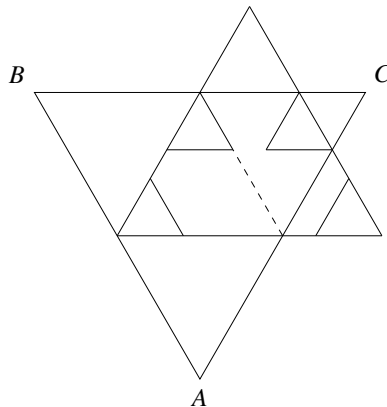
• سه نقطه از سه مثلث ریز متفاوت باشند و هر یک از دو مثلث ریز پایینی شامل یکی از این سه نقطه باشند. در این صورت دقیقن یکی از دو مثلث ریز بالایی، شامل یکی از سه نقطه است؛ بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید مثلث ریز بالا-چپ این چنین باشد. در این صورت اگر نقطه‌ی سوم با این دو نقطه مثلث متساوی‌الاضلاع بسازد، باید طبق لم در مثلث ABC قرار بگیرد و نمی‌تواند در مثلث ریز پایین-راست باشد (شکل (۵))؛ پس چنین حالتی نیز امکان ندارد.



شکل ۴



شکل ۳



شکل ۵

پس هیچ سه نقطه از نقاط انتخاب شده، تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌دهند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

□ حال کافی است یک $n = 3^k - 1$ پیدا کنیم؛ طوری که

$$4^k \geq 1993n = 1993 \times (3^k - 1)$$

باشد. اگر $k \geq \log_4 1993$ باشد، آنگاه $\left(\frac{4}{3}\right)^k \geq 1993$ خواهد بود؛ پس

$$4^k \geq 1993 \times 3^k \geq 1993 \times (3^k - 1)$$

و مسئله حل می‌شود. ■