قوانین :

۱) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ، $\int e^x dx = e^x$ ، $\int \frac{dx}{x} = Ln\,x$

۲) $\int \sin x\,dx = -\cos x$ $\int \cos x\,dx = \sin x$

$\int tg\,x\,dx = -Ln|\cos x|$ $\int \cot x\,dx = Ln|\sin x|$

۳) $\int \sec^2 x\,dx = tg\,x$ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

۵) $\int \sec x\,dx = Ln|\sec x + tg\,x|$ $\int \csc x\,dx = Ln|\csc x - \cot x|$

۶) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} tg^{-1}\frac{x}{a}$ ۷) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

روابط کاربردی مهم :

۱) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

۲) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

۳) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

۴) $(\sec x)' = \sec x . tg\,x$ $(\csc x)' = -\csc x . \cot x$

$(tg\,x)' = 1 + tg^2 x = \sec^2 x$ $(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$

۵) $Ln(A) + Ln(B) = Ln(AB)$

$Ln(A) - Ln(B) = Ln(\frac{A}{B})$

$Ln\,A^n = n\,Ln(A)$ $(Ln\,A)^n \neq n\,Ln(A)$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی : ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تکنیک ها:

۱) تغییر متغیر : ۱) نمک غذا ۳) وجود یک تابع + مشتق آن در انتگرال
۲) ایده کاربردی در اکثر انتگرال ها * ۵) ایده کاربردی در انتگرال گیری عبارت نیز دار.

۲) رادیکالی : رادیکال رو بزن به ترکوند ← زیر رادیکال = $u^{\text{فرجه}}$ (تغییر متغیر)

ابراهیم شاه ابراهیمی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر

۳) کسری :
- ۱) درجه صورت > درجه مخرج ← تقسیم اول دبیرستان
- ۲) درجه صورت = درجه مخرج ← * ایجاد مخرج در صورت + تفکیک
- ۳) * درجه صورت < درجه مخرج (بسیار مهم)
  - ۱) درجه ۱ ← ایجاد مشتق مخرج در صورت + تفکیک
  - ۲) ** درجه ۲ ← رجوع به تکنیک ۵ :)
  - ۳) درجات بالاتر ← رجوع به تکنیک ۴ :)

۴) تجزیه کسری : * (بسیار مهم)

۱) وجود عامل $(x+a)^n$ $\xleftarrow{\text{تجزیه}}$ $\dfrac{A}{(x+a)^n}+\dfrac{B}{(x+a)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{Z}{(x+a)^1}$

۲) وجود عامل $(ax^2+bx+c)^n$ $\xleftarrow{\text{تجزیه}}$ $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}+\dfrac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{Zx+Y}{(ax^2+bx+c)^1}$

۵) تغییر متغیر مثلثاتی : (بسیار پرکاربرد)

۱) وجود عبارت x^2+a^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\,tg\theta$ $(dx=a\sec^2\theta\, d\theta)$

۲) وجود عبارت x^2-a^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\sec\theta$ $(dx=a\sec\theta\, tg\theta\, d\theta)$

۳) وجود عبارت a^2-x^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\sin\theta$ $(dx=a\cos\theta\, d\theta)$

۶) جزء به جزء : انتگرال گیری از عبارات حاصل ضرب و توابع معکوس (وارون) مثلثاتی

$$\int u.dv = uv-\int v\,du$$

اولویت u گیری ← لوچمن ← ؟
لگاریتمی، وارون، چندجمله ای، مثلثاتی

۷) مثلثاتی

۱) $\sin^m.\cos^n$
- ۱) حداقل یکی فرد ← تبدیل عبارت دارای توان فرد به دیگری و استفاده از تغییر متغیر — $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ ، $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$
- ۲) جفت زوج ← روابط کاربردی + $\frac{\sin 2x}{2}=\sin x.\cos x$
- ۳) جفت منفی ← قرار دادن عبارت $\sin^2 x+\cos^2 x$ به جای ۱ و تفکیک

۲) $\sec^m.tg^n$ یا $(\csc^m.\cot^n)$
- ۱) * $\sec$ زوج ← تغییر متغیر $u=tg x$ و تبدیل $\sec$ ها به tg
- ۲) $\sec$ فرد ← همه تبدیل به $\sec$ و رجوع به تکنیک ۴ :) (نکته)
- ۳) هر دو فرد ← تغییر متغیر $u=\sec x$ کم کاربرد.

۳) * $\dfrac{a}{b\sin x+c\cos x+d}$ $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $dx=\dfrac{2dz}{1-z^2}$ $\cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ $\sin x=\dfrac{2z}{1+z^2}$

$\boxed{z=tg(x/2)}$

۴) $\dfrac{a}{b\sin^2 x+c\cos^2 x}$ $\xleftarrow{\text{ایده}}$ همه عبارات صورت و مخرج تقسیم بر $\cos^2 x$
ایجاد $tg x$ و استفاده از تغییر متغیر $u=tg x$

۵) $\dfrac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ مشابه کسری ← ایجاد خود مخرج و مشتق مخرج در صورت + تفکیک

تکنیک ۵ :
(تغییر متغیر)

۱) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} 1+\sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (حل با قانون ۱)

۲) $\int \underbrace{x^3}_{x^2\cdot x}\cos(x^2)\,dx \longrightarrow \begin{cases} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int u\cdot\cos(u)\,du$ (حل با تکنیک ۴)

۳) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ ، $\sin^3 x = \sin^2 x\cdot\sin x$ ، $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ $\longrightarrow \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\int \frac{(1-u^2)}{\sqrt{u}}du$ (حل با قانون ۱)

۴) $\int \sin(\ln x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \sin(u)\cdot e^u\,du$ (حل با تکنیک ۴)

$dx = x\,du$ ، $x = e^u$ $\mapsto dx = e^u\,du$

۵) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{du}{u^2}$ (حل با قانون ۱)

۶) $\int \sec^2 x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = u \\ \sec^2 x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \ln(u)\cdot du$ (حل با تکنیک ۴)

۷) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\sin(u)}{(e^u)^2}\cdot e^u\,du = \int \frac{\sin(u)}{e^u}du = \int e^{-u}\cdot\sin(u)\,du$ (حل با تکنیک ۴)

$dx = x\,du$ ، $x = e^u$ $\mapsto dx = e^u\,du$

۸) $\int \frac{dx}{e^x+1} \longrightarrow \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\frac{du}{u}}{u+1} = \int \frac{du}{u(u+1)}$ (حل با تکنیک ۳)

$dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$

۹) $\int \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \longrightarrow \begin{cases} e^{-x} = u \\ -e^{-x}dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{1-u}{1+u}\cdot\frac{-du}{u} = \int \frac{u-1}{u(1+u)}$ (حل با تکنیک ۳)

$dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u}$

تکنیک ۳ :

(رادیکالی)

۱) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{\text{زیر رادیکال}} \begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int e^u.(2u\,du) = 2\int ue^u\,du$

(حل با تکنیک ۶)

۲) $\int \sin(\sqrt{x-1})\,dx \longrightarrow \begin{cases} x-1 = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases} \longrightarrow \int \sin(u)\,(2u\,du) = 2\int u.\sin(u)$

(حل با تکنیک ۶)

۳) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} x = u^4 \\ dx = 4u^3\,du \end{cases} \longrightarrow \int \dfrac{u^2}{1+u^3}(4u^3\,du)$ (حل با تکنیک ۳)

۴) $\int \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} x = u^6 \\ dx = 6u^5\,du \end{cases} \longrightarrow \int \dfrac{1+u^2}{1+u^3}(6u^5\,du)$ (حل با تکنیک ۳)

۵) $\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} = u^2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} u^2 - xu^2 = 1+x \longrightarrow x + xu^2 = u^2 - 1 \\ \longrightarrow x(1+u^2) = u^2 - 1 \longrightarrow x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1} \\ dx = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \dfrac{u^2+1}{u^2-1}(u)\dfrac{4u}{(u^2+1)^2} = \int \dfrac{4u^2}{(u^2-1)(u^2+1)}$ (حل با تکنیک ۴)

تکنیک :

(کسری)

1) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx \xrightarrow[\text{ایجاد مشتق مخرج در صورت}]{\text{اضافه درج}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+8}\,dx$

$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x}\,dx}\; - \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+8}}_{\text{مربع کامل}}$

$\begin{cases} x^2+4x=u \\ (2x+4)\,dx=du \end{cases} \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$\frac{1}{2}\,Ln\,u$

$\boxed{\frac{1}{2}Ln(x^2+4x)}$

$\int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \quad \begin{cases} x+2=u \\ dx=du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u^2+4} \xrightarrow{\text{قانون ۴}} \frac{1}{2}tg^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{(x+2)}{2}}$

روش دیگر حل $\int \frac{du}{u^2+4}$ ← استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی تکنیک ۵

---

۲) $\int \frac{2-x}{(\sqrt{x^2-2x-3})^3}\,dx = \int \frac{2-x}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx \longrightarrow$ تکنیک: بازهم اضافه درج صورت و مخرج را می بینیم :)

$\xrightarrow{\text{ایجاد مشتق مخرج در صورت}} \int \frac{-\frac{1}{2}(2x-2)+1}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^{3/2}}}_{II}$

$\xrightarrow{\text{حل (I)}} \begin{cases} x^2-2x-3=u \\ (2x-2)\,dx=du \end{cases} \longrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,du$

$\xrightarrow{\text{قانون ۱}} -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-1/2}}{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}}$

$\xrightarrow{\text{حل (II)}}$ مربع کامل $\longrightarrow \int \frac{dx}{((x-1)^2-4)^{3/2}} \begin{cases} x-1=u \\ dx=du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{du}{(u^2-4)^{3/2}}$

$\xrightarrow{\text{تکنیک ۵}} \begin{cases} u=2\sec\theta \\ du=2\sec\theta\cdot tg\theta\, d\theta \end{cases}$

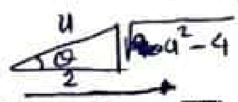
$= \int \frac{2\sec\theta\cdot tg\theta\, d\theta}{(\underbrace{4\sec^2\theta-4}_{\substack{4(\sec^2\theta-1) \\ tg^2\theta}})^{3/2}} = \int \frac{2\sec\theta\cdot tg\theta\, d\theta}{4^{3/2}\cdot tg^3\theta}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{tg^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta} \quad \begin{cases} \sin\theta=t \\ \cos\theta\, d\theta=dt \end{cases}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = \boxed{-\frac{1}{4t}+C} \xrightarrow{t=\sin\theta} -\frac{1}{4\sin\theta}$

$\sec\theta=\frac{u}{2}$

$\cos\theta=\frac{2}{u}$ = مجاور / وتر



$\xrightarrow{\sin\theta=\frac{\sqrt{u^2-4}}{u}} = \frac{-u}{4\sqrt{u^2-4}} \xrightarrow{x-1=u} \boxed{\frac{-x+1}{4\sqrt{(x-1)^2-4}}}$

تکلیف ۱۲ :

(تجزیه کسری)

$$1)\ \int \frac{dx}{x^3+1} \overset{\text{چاق و لاغر}}{=} \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

تجزیه : $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

A یافتن: $\xrightarrow[x=-1]{\text{طرفین}\times(x+1)} \dfrac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = A \to \boxed{A=\frac{1}{3}}$

B یافتن: $\xrightarrow[x\to\infty]{\text{طرفین}\times(x)} 0 = A+B \to \boxed{B=-\frac{1}{3}}$

C یافتن: $\xrightarrow[x=0]{\text{عددگذاری}} \dfrac{1}{(0+1)(0-0+1)} = A + \dfrac{0+C}{0-0+1}$

$\to 1 = A+C \to \boxed{C=\frac{2}{3}}$

$$\to \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \underbrace{\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx}_{(\text{جواب})\ \frac{1}{3}\ln(x+1)} + \underbrace{\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx}_{(\mathrm{I})}$$

(I) می‌رسیم → ایجاد مشتق مخرج در صورت

$$\to \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{3}{6}}{x^2-x+1}dx \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{-\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}}_{(\text{جواب})\ -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}}_{(\mathrm{II})}$$

(II) می‌رسیم → مربع کامل، چون اختلاف صورت و مخرج ... است

$$\to \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \quad \begin{cases} x-\frac{1}{2}=u \\ dx=du \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{تانژانت}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\xrightarrow[x-\frac{1}{2}=u]{\text{کاشت}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\underbrace{(x^3+3x^2+2x)}_{x(x^2+3x+2) \,=\, x(x+1)(x+2)}\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)}} \overset{\text{ساده سازی}}{=} \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)^2(x+2)}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x+2}\right)dx$$

$\boxed{\text{A یافتن}}$ $\xrightarrow[(x=0)]{\text{طرفین}\times x} \dfrac{1}{(0-1)(0+1)(0+2)} = A + 0+0+0+0 \longrightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{B یافتن}}$ $\xrightarrow[(x=1)]{\text{طرفین}\times(x-1)} \dfrac{1}{1(1+1)^2(1+2)} = 0+B+0+0+0 \to \boxed{B=\frac{1}{12}}$

$\boxed{\text{C یافتن}}$ $\xrightarrow[x=-1]{\text{طرفین}\times(x+1)^2} \dfrac{1}{-1(-1-1)(-1+2)} = 0+0+C+0+0 \to \boxed{C=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{E یافتن}}$ $\xrightarrow[x=-2]{\text{طرفین}\times(x+2)} \dfrac{1}{-2(-2-1)(-2+1)^2} = 0+0+0+0+E \to \boxed{E=\frac{1}{6}}$

$\boxed{\text{D یافتن}}$

راه اول: دادن عددگذاری $\xrightarrow[\text{دلخواه}]{x=2} \dfrac{1}{2(2-1)(2+1)^2(2+2)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} + \dfrac{\frac{1}{12}}{2-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(2+1)^2} + \dfrac{D}{2+1} + \dfrac{\frac{1}{6}}{2+2} \xrightarrow{\text{حل معادله}} \boxed{D=\frac{1}{4}}$

راه دوم: استفاده از صفر و بی‌نهایت $\xrightarrow[x\to\infty]{\text{طرفین}\times(x)} 0 = \overset{-\frac{1}{2}}{A} + \overset{\frac{1}{12}}{B} + 0 + D + \overset{\frac{1}{6}}{E} \longrightarrow \boxed{D=\frac{1}{4}}$

$$\xrightarrow{\text{حاصل انتگرال}} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{12}dx}{x-1} + \int \frac{\frac{1}{2}dx}{(x+1)^2} + \int \frac{\frac{1}{4}dx}{x+1} + \int \frac{\frac{1}{6}}{x+2}dx$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{12}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\ln(x+2)}$$

تکلیف ۵ :
(تغییر متغیر مثلثاتی)

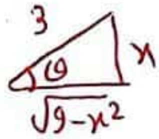
1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \xrightarrow{(a^2-x^2)} \begin{cases} x = 3\sin\theta \\ dx = 3\cos\theta\, d\theta \end{cases} \to \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{9\sin^2\theta \sqrt{\underbrace{9-9\sin^2\theta}_{\substack{9(1-\sin^2\theta) \\ \cos^2\theta}}}}$

$\to \int \frac{\cancel{3\cos\theta}\, d\theta}{9\sin^2\theta \cdot \cancel{3\cos\theta}}$

$= \int \frac{d\theta}{9\sin^2\theta} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta \overset{\text{قانون ۳}}{=\!=} -\frac{1}{9}\cot\theta$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ کامبک

$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$



$\sin\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{مقا}}{\text{وتر}}$

$= \boxed{-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}}$ یا $-\frac{1}{9}\cot\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

2) $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+\frac{17}{16}}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+4}} \xrightarrow{\text{تغ}} \begin{cases} x+\frac{1}{2} = u \\ dx = du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+4}} \xrightarrow{(u^2+a^2)} \begin{cases} u = 2\,tg\theta \\ du = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

$= \int \frac{\cancel{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\cancel{2}\,tg\theta \cdot \sqrt{\underbrace{4\,tg^2\theta+4}_{\substack{4(tg^2\theta+1) \\ \sec^2\theta}}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{tg\theta \cdot \sec\theta\, d\theta} = \int \frac{\sec\theta}{tg\theta}\, d\theta$

$= \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\, d\theta$

$= \int \frac{1}{\sin\theta} = \int \csc\theta \overset{\text{قانون ۵}}{=} \boxed{\ln|\csc\theta - \cot\theta|}$

$u = x+\frac{1}{2}$, $\theta = tg^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$ کامبک

تکنیک ۴ : (جزء به جزء)

مثال) $\int x e^{\arcsin x} dx \xrightarrow{\text{تغییر}} \begin{cases} \arcsin x = t \to \sin t = x \\ \cos t\, dt = dx \end{cases}$

$= \int \sin t\, e^t \cdot \cos t\, dt = \int \underbrace{\sin t \cdot \cos t}_{\frac{1}{2}\sin 2t} \cdot e^t dt = \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin 2t \cdot e^t dt}_{\text{نوع دوم}} \overset{*}{} \quad \begin{cases} \sin 2t = u \to 2\cos 2t\, dt = du \\ e^t dt = dv \to e^t = v \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v\, du} \sin 2t\, e^t - 2\underbrace{\int e^t \cdot \cos 2t\, dt}_{*} \quad \begin{cases} \cos 2t = u \to -2\sin 2t\, dt = du \\ e^t\, dt = dv \to e^t = v \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v\, du} = e^t \cdot \cos 2t + 2\int \sin 2t \cdot e^t dt$

$\xrightarrow{*} \int \sin 2t \cdot e^t dt = \sin 2t \cdot e^t - 2\left(e^t \cos 2t + 2\int \sin 2t\, e^t dt\right)$

$= \sin 2t \cdot e^t - 2e^t \cos 2t - 4\int \sin 2t \cdot e^t dt$

$\to 5\int \sin 2t \cdot e^t dt = e^t \sin 2t - 2e^t \cos 2t$

$\int \sin 2t \cdot e^t dt = \frac{1}{5}\left(e^t \cdot \sin 2t - 2e^t \cos 2t\right)$ ت : کامل کن
$t = \arcsin x$

مثال ۲) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \quad \begin{cases} u = \sin^{n-1} x \to du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \\ dv = \sin x\, dx \to v = -\cos x \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v\, du} I_n = \cancel{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2}}_{(0-0)} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} \sin^{n-2} x\, dx$

$(n-1)\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx}_{I_n}\right]$

$\to I_n = (n-1) I_{n-2} \underbrace{- (n-1) I_n}_{-n I_n + I_n} \to n I_n = (n-1) I_{n-2} \to \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

$\xrightarrow{n \to n+2} \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$ $\xrightarrow{\text{از صورت سوال}} I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \boxed{\pi/2}$

$\xrightarrow{\text{از صورت سوال}} I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1 x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -(0-1) = \boxed{1}$

$\xrightarrow[n=0]{\text{از فرمول}} I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi/4}$

$\xrightarrow{n=1} I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}(1) = \boxed{\frac{2}{3}}$ math-teacher.blog.ir

$\xrightarrow{n=2} I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{16}}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

تکنیک ۷: (مثلثات)

مثال ۱) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} \xrightarrow[\substack{\text{مورد ۳ از ۱} \\ \text{(جبت مثلثی)}}]{\text{تکنیک ۷}} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} dx$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x \cdot \cancel{\sin^2 x}} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x \cdot \cancel{\sin^2 x}} dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x} dx$

$= \underbrace{\int tg^2 x \cdot \sec^2 x \, dx}_{} + \underbrace{\int \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx}_{\text{قانون ۳} = \boxed{tg x}} + \underbrace{\int \csc^2 x \, dx}_{\boxed{-\cot x}}$

مورد ۲ از ۱ مثلثاتی $\begin{cases} tg x = u \\ \sec^2 x \, dx = du \end{cases}$

$= \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 = \boxed{\frac{1}{3} tg^3 x}$

math-teacher.blog.ir

مثال ۲) $\int \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx \xrightarrow[\substack{\text{مورد ۳} \\ \text{(کمکی)}}]{\text{تکنیک ۷}} \begin{cases} \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{cases} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$= \int \frac{\frac{2}{1+z^2} dz}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2}{\cancel{1+z^2}} dz}{\frac{2z^2 + 2z}{\cancel{1+z^2}}} = \int \frac{dz}{z^2 + z} \overset{\text{تکنیک ۳}}{=} \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$

تک $\Rightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{2} = u \\ dz = du \end{cases} = \int \frac{du}{u^2 - \frac{1}{4}} \overset{\text{قانون ۷}}{=} \frac{1}{2(\frac{1}{2})} Ln \left| \frac{u - \frac{1}{2}}{u + \frac{1}{2}} \right| = \boxed{Ln \left| \frac{2u-1}{2u+1} \right|}$

جاگذاری $z = tg \frac{x}{2}$, $u = z + \frac{1}{2}$

مثال ۳) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \xrightarrow[\text{مورد ۴}]{\text{تکنیک ۷}} \xrightarrow{\div \cos^2 x} \int \frac{\sec^2 x \, dx}{tg^2 x + 4}$ تغییر متغیر $\begin{cases} tg x = u \\ \sec^2 x \, dx = du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u^2 + 4} \overset{\text{قانون ۹}}{=} \frac{1}{2} tg^{-1}(\frac{u}{2}) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} u = tg x$

مثال ۴) $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x} dx \xrightarrow[\text{مورد ۵}]{\text{تکنیک ۷}} = \int \frac{A(2\sin x - \cos x) + B(2\cos x + \sin x)}{2\sin x - \cos x} dx$

$\begin{cases} 2A \sin x + B \sin x = \sin x \longrightarrow 2A + B = 1 \\ -A \cos x + 2B \cos x = \cos x \longrightarrow -A + 2B = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} B = 3/5 \\ A = 1/5 \end{cases}$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \int \frac{\frac{1}{5} \cancel{(2\sin x - \cos x)}}{\cancel{2\sin x - \cos x}} dx + \int \frac{\frac{3}{5}(2\cos x + \sin x)}{2\sin x - \cos x} dx$

$= \boxed{\frac{1}{5} x + \frac{3}{5} Ln |2\sin x - \cos x|}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی