به نام دوست

آزمون آزمایشی اول

سوال اول: گوگلیمو بوناچی! ....36 نمره

تعجب نکنید! این اسم پدر لئوناردو بوده...چی لئوناردو را نمی شناسید؟! پنجاه و پنج درصد عمرتون بر فناست! حالا ما این جا نه با خودش کار نداریم و نه پدرش، اینجا با دنباله عددی‌اش کار داریم. جهت یاد آوری عرض می کنم دنباله لئوناردو جان(که بیشتر به فیبوناچی مشهور هستش ولی چون من باهاش خیلی صمیمی هستم، لئوناردو صداش می زنم ☺) یک ساختار بازگشتی به شکل زیر داره:

$$f(1) = 1, f(1) = 2$$

$$i \geq 2: F(i) = f(i-1) + f(i-2)$$

به عضو iام این دنباله عدد iام لئوناردو می گویم!

ریکاردو، پسر عمویِ نوه‌ی لئوناردو چون خیلی به لئوناردو حسودیش می شد، دنباله عددی دیگری درست کرد به اسم دنباله راکی که در آن $r(i)$ نشان دهنده تعداد روش های نوشتن عدد i به صورت مجموعی از اعداد **متمایز** لئوناردو ای کوچک تر مساوی خودش است. به عنوان مثال $r(13)$ برابر با 3 است.

(13, 5+8, 2+3+8).

فرناندو هشتاد و نه ساله، که آخرین بازمانده خانواده بوناچی هست و فقط سه ساعت و دو دقیقه و یک ثانیه دیگر زنده است، از شما می خواهد که سوال های زیر رو براش حل کنید تا با آرامش به دنیای باقی بره و در اون جا با لئوناردو محشور بشه:

الف)باقی مانده $r(123)^{123}$ را بر Δ حساب کنید.(6 نمره)

ب)اگر $R = r(999999) + r(99999) + \mathrm{r}(9999) + \mathrm{r}(999) + \mathrm{r}(99) + \mathrm{r}(9)$ باقی مانده R^{94} را بر Δ حساب کنید. .(12 نمره)

ج)باقی مانده $r(9876543210123456789)^2$ را بر Δ را حساب کنید. .(18 نمره)

سوال دوم: چهارمین آسمون!...29 نمره

ایلیاد باور دارد ما همیشه برنده هستیم. بر همین اساس اعدادی که فقط شامل 4 و 7 هستند را ((اعداد خوش‌شانس)) می داند. او همچنین عقیده دارد که عددی مانند *n* گوگولی است اگر بتوان آن را به صورت جمع اعداد خوش شانس بنویسید(توجه کنید که **لزومی ندارد که اعداد ظاهر شده در جمع متمایز باشند**)(در این سوال ما فقط با اعداد گوگولی کار می کنیم). اگر این کار به t روش قابل انجام باشد، ما اعدادی که در روش *i* ام $(1 \leq i \leq t)$ جمع کردن به وجود می آید را به ترتیب صعودی در آرایه A_i ذخیره می کنیم.

ایلیاد که اصلن هم تنبل نیست(!) تمام این آرایه ها را مرتب می کند. آرایه A_i قبل از A_j می آید اگر تعداد اعضایش کمتر باشد و در صورتی که تعداد اعضا برابر باشد، آرایه‌ای زودتر می آید که در اولین جایی که دو آرایه با هم تفاوت دارند عدد کوچکتری داشته باشد.

آرایه های مرتب شده را به افتخار جان فشانی های ایلیاد با E نشان می دهیم. یعنی E_i ، i امین آرایه ما پس از مرتب سازی است.

حال آرایه E_1 را در نظر می گیریم و ضرب عضو های آن را *f(n)* می نامیم.

به عنوان مثال برای $\mathrm{n} = 51$ ، دو آرایه اول به شکل زیر خواهند بود:

$E_1 = \{4,47\}$

$E_2 = \{7,44\}$

الف)باقی مانده $\sum_{i=75}^{100} f(i)$ را بر Δ حساب کنید.(6 نمره)

ب) برای *n=939* عنصر اول E_1 را در نظر بگیرید و آن را e_1 بنامید. باقی مانده $f(939)^{1394}$ را بر e_1 امین عدد اول قبل از Δ پیدا کنید.(به عنوان مثال 3 امین عدد اول قبل از23، 13 می باشد).(9نمره)

ج) باقی مانده $(f(4743255) \quad - \Delta)^2$ را بر Δ حساب کنید. .(14 نمره)

سوال سوم: شامِ آخر با جان نَش!...35 نمره

اعداد 1 تا n را در نظر بگیرید. یک جایگشت$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از این اعداد را (((n,m,k)پیرونی)) می نامیم هرگاه طول بزرگترین زیردنباله صعودی آن m و طول بزرگترین زیردنباله نزولی آن k باشد. زیر دنباله از یک جایگشت با حذف صفر یا تعدادی از اعداد جایگشت به وجود می آید. (توجه کنید که بعد از حذف ترتیب اولیه حفظ می شود).

به شما n,k,m داده می شود. حال شما باید در بین تمام جایگشت (n,m,k)پیرونی کوچکترین آن ها از لحاظ الفبایی را بیابید. یک جایگشت از یک جایگشت دیگر از لحاظ الفبایی کوچکتر است اگر در اولین جایی که فرق می کنند جایگشت اول عدد کوچک تری داشته باشد. برای راحتی نام این کوچک ترین جایگشت از لحاظ الفبایی را ((کوچول)) قرار می دهیم.

حال مجموع زیر را روی جایگشت (n,m,k)پیرونی کوچول حساب کنید و آن را f(n,m,k) بنامید.

$$f(n,m,k) = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^i$$

اگر جایگشت (n,m,k)پیرونی ای با خواص گفته شده وجود نداشت f(n,m,k) برابر خواهد بود با:

$$f(n,m,k) = (n+m+k)^{(k+m)!}$$

الف) باقی مانده $\mathrm{f}(6,2,2) + \mathrm{f}(6,4,4)$ را بر Δ حساب کنید.(7 نمره)

ب) باقی مانده $\mathrm{f}(15,2,10) + \mathrm{f}(15,2,8) + \mathrm{f}(15,2,6)$ را بر Δ حساب کنید. .(12 نمره)

ج) باقی مانده $\sum_{i=7}^{13}\left[\sum_{j=7}^{13} f(50,i,j)\right]$را بر Δ حساب کنید. (16 نمره)