p:142

عملگر دیورژانس

div: {میدانهای برداری} ⟶ {میدانهای اسکالر}

$$\operatorname{div}(P\,i+Q\,j+R\,k)=P_x+Q_y+R_z$$

Ex

$$\begin{cases} F=(\overbrace{x^2y+e^z}^{P},\ \overbrace{y+1+\cos z}^{Q},\ \overbrace{2z+1}^{R}) \\ \operatorname{div}F=? \end{cases}$$

$$\operatorname{div}F=2xy+1+2=2xy+3$$

قضیه دیورژانس (یا واگرایی)

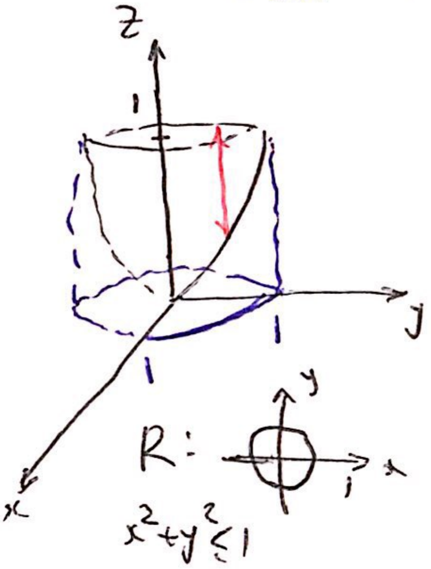
فرض کنید که یک سطح بسته قطعه‌ای هموار و $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی و T جسم داخل سطح S باشه، در این صورت

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint_T \operatorname{div}F\,dv$$

در دو مثال اخیر هر دو سطح داده شده بسته هستند، پس می توان آنها را با استفاده از قضیه واگرایی حل نمود.

Ex) شار میدان $F=(x,y,\overset{\text{در}}{2})$ خارج سطح سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ که $0\le z\le 1$ همراه با $z=1$ کدام است؟

1- π 2- 2π 3- $-\pi$ 4- -2π



$$\iint_S F\cdot n\, d\sigma \overset{\text{قضیه واگرایی}}{=} \iiint_T \operatorname{div} F\, dV = \iiint_T (1+0+1)\, dV$$

$$= 2\iint_R \int_{x^2+y^2}^{1} dz\, dA$$

$$= 2\iint_R 1-(x^2+y^2)\, dA$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

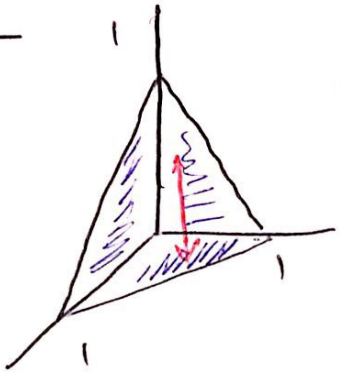
$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)(2\pi)$$

$$= \pi \quad \checkmark \text{ گزینه ۱}$$

Ex) شار میدان $F=(y,x,z)$ خارج سطح بسته S واقع در یک‌هشتم اول محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ کدام است؟

1- 0 2- $-\frac{1}{6}$ 3- $\frac{1}{6}$ 4- $\frac{1}{2}$

P:144

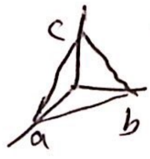


$$\iint_S F.n\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T (0+1+0)\,dV$$

$$= \iiint_T dV = \frac{1}{6}\times 1\times 1\times 1 = 1/6$$

گزینه 3

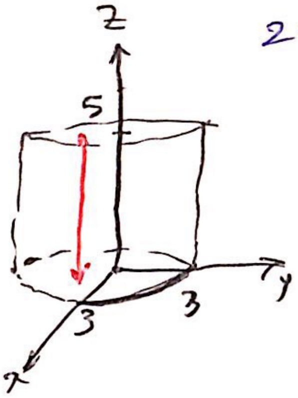
حجم چهاروجهی



$\frac{1}{6}abc$

Ex) اگر S سطح قسمتی از استوانه $x^2+y^2=9$ که $0\le z\le 5$ و صفحات $z=0$ ، $z=5$ و $F=(x+y)i+(y+z)j+(x+z)k$ آنگاه $\iint_S F.n\,d\sigma$ کدام است؟

1- 135   2- 135π 3) 270   4) 270π



حل:

$$\iint_S F.n\,d\sigma \underset{\text{واگرایی}}{\overset{\text{دیورژانس}}{=}} \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T (1+1+1)\,dV$$

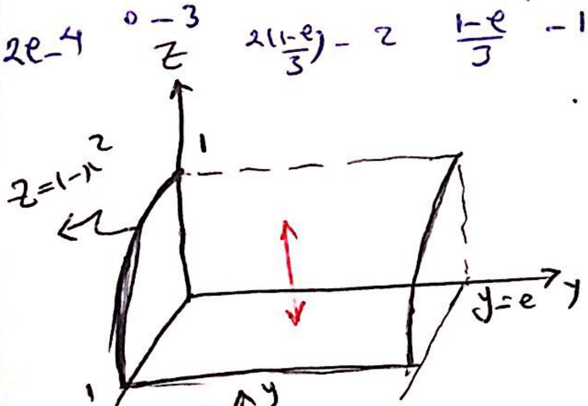
$$= 3\underbrace{\iiint_T dV}_{\text{حجم } T} = 3\times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = 3\times\pi\times 3^2\times 5$$

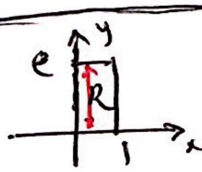
$= 135\pi$ گزینه 2

Ex) شار میدان $F=(x+\cos y, y+\sin x, z+e^x)$ خارج S کدام است؟ هرگاه S سطح

1- $\frac{1-e}{3}$ 2- $\frac{2(1-e)}{3}$ 3- 0   4- $2e$

استوانه $z=1-x^2$ ، محدود به صفحات مختصات و صفحه $y=e$ باشد.





$$\iint_S F.n\,d\sigma \underset{\text{واگرایی}}{\overset{\text{دیورژانس}}{=}} \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T (1+1+1)\,dV$$

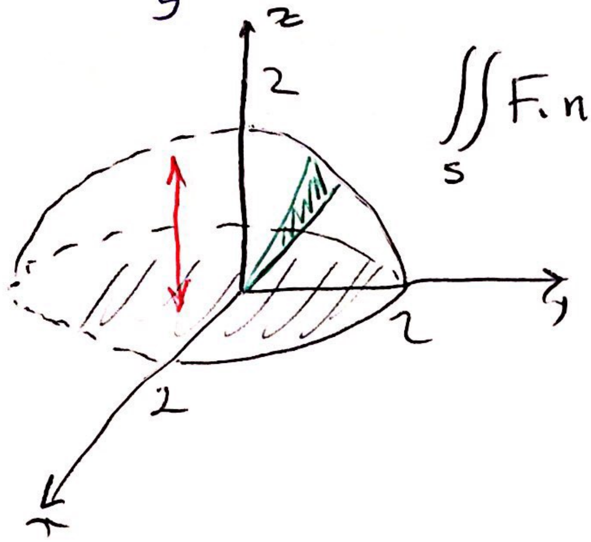
$$= 3\iint_R\int_0^{1-x^2} dz\,dA = 3\int_0^1\int_0^e (1-x^2)\,dy\,dx$$

$$= 3\int_0^1 e(1-x^2)\,dx = 3e\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2e$$ گزینه 4

p: 145

Ex) اگر S شامل نیمکره بالایی $x^2+y^2+z^2=4$ و صفحه $z=0$ و $F=(x^3,y^3,z^3)$، آنگاه شار میدان F خارج S کدام است؟

1- $\frac{96\pi}{3}$ 2- $\frac{192\pi}{3}$ 3- $\frac{96\pi}{5}$ 4- $\frac{192\pi}{5}$



$$\iint_S F\cdot n\, d\sigma \overset{\text{گاوس}}{=} \iiint_T \operatorname{div} F\, dV = \iiint_T (3x^2+3y^2+3z^2)\, dV$$

$$= 3\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

$$\overset{\text{کروی}}{=} 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 3\,\frac{2^5}{5}\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)(2\pi)$$

$$= \frac{192\pi}{5} \quad \text{گزینه 4}$$

5x) فرض کنید S قطعه‌ای از سطح که از پایین به صفحه $z=0$ و از بالا به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و از اطراف به استوانه $x^2+y^2=2x$ و $F=(x,z,y)$، در این صورت $\iint_S F\cdot n\, d\sigma$ کدام است؟

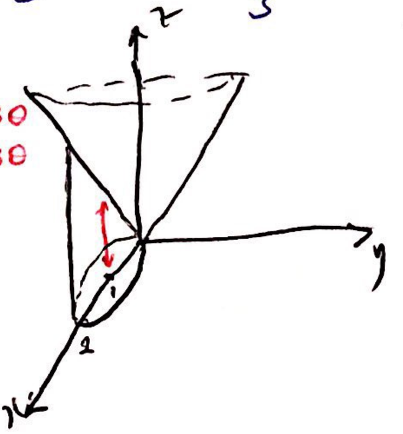
1- $\frac{3\pi}{2}$ 2- $\frac{8}{3}$ 3- $\frac{32}{9}$ 4- $\frac{16\pi}{3}$

حل:

$x^2+y^2=2x \to r^2=2r\cos\theta \to r=2\cos\theta$

$=?$

$(x-1)^2+y^2=1$



p: 146

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T (1+0+0)\,dV = \iint_R \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dA$$

$$= \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r=2\cos\theta} r\,r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\right) = \frac{16}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}-0\right) = \frac{32}{9}$$

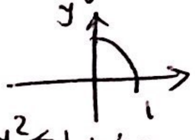
گزینه 3

مثال ۳: S قسمتی از سهمی گون $z=1-x^2-y^2$ در $\frac{1}{8}$ اول با قائم خارجی $\vec{n}$ و $F=(y,-x,4)$ در این صورت شار میدان F خارج سطح S کدام است؟

1- 0 ● 2- π 3- 2π 4- -2π

حل: دقت کنید S یک سطح بسته نیست، ~~بسته~~ نباشد $\operatorname{div}F=0$ و $\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iiint_T 0\,dV = 0$ در گزینه ها وجود دارد، ولی ما را مستقیم حساب می کنیم تا ببینیم صفر موجود در گزینه ها ما را به اشتباه بیاندازد.

$$S:\begin{cases} z=1-x^2-y^2=f(x,y) \\ N=-f_x i - f_y j + k = 2x i + 2y j + k \\ R: \end{cases}$$



$x^2+y^2\leq 1$ ربع دایره

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iint_R \overset{\text{فاقد z}}{F\cdot N}\,dA = \iint_R (2xy-2xy+4)\,dA = 4\overbrace{\iint_R dA}^{\text{مساحت ربع دایره}} = 4\left(\frac{\pi}{4}\times 1\right) = \pi$$

گزینه 2

یادآوری از ریاضی I

اگر f یک تابع فرد باشد (یعنی $f(-z)=-f(z)$) آنگاه:

$$\int_{-a}^{a} f(z)\,dz = 0$$

مثلا $f(z)=z$ یک تابع فرد است پس (*)

$$\int_{-\sqrt{2x-x^2-y^2}}^{\sqrt{2x-x^2-y^2}} z\,dz = 0$$

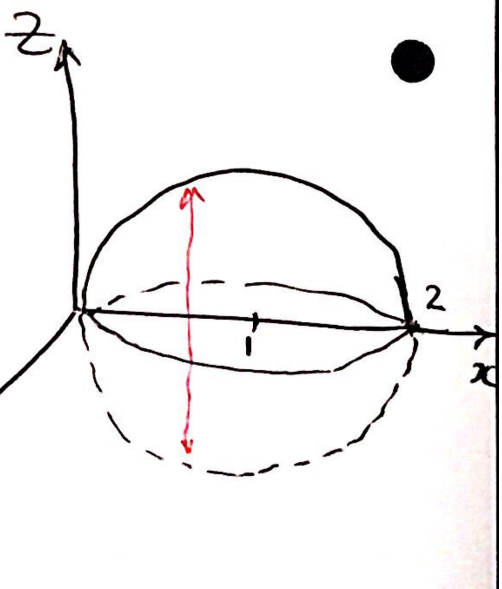
Ex 6) شار برونسوی میدان $F=(e^z+x,\ yz-x,\ x+y)$ از سطح S به معادله $x^2+y^2+z^2=2x$ برابر است با:

1- $\frac{4\pi}{3}$　　2- 4π　　3- $\frac{\pi}{3}$　　4- $\frac{2\pi}{3}$

حل:

$$x^2-2x+y^2+z^2=0 \rightarrow (x-1)^2-1+y^2+z^2=0 \rightarrow$$

$$\underbrace{(x-1)^2+y^2+z^2=1}_{\text{کره}}$$



$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T (1+z)\,dV$$

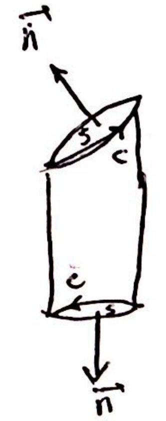
$$= \underbrace{\iiint_T dV}_{\text{حجم کره}} + \iiint_T z\,dV \rightarrow 0$$

(*) $\iint_R \int_{-\sqrt{2x-x^2-y^2}}^{\sqrt{2x-x^2-y^2}} z\,dz\,dA = 0$

$$= \frac{4}{3}\times\pi\times(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$ گزینه 1

ـ نکته: $\iiint_T z\,dV$ بدون استفاده از نکته بالا محاسبه‌اش 3 دقیقه وقت می‌گیرد.

تعریف: فرض کنید S یک سطح تکه تکه‌ای هموار و $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی آن و C مرز آن یک منحنی بسته ساده باشد. گوییم C در جهت مثبت پیموده شده است، هرگاه از قاعده دست راست پیروی کند. یعنی اگر انگشتان دست راست را در جهت مثبت C قرار دهیم، انگشت شست در راستای n قرار دارد.



قضیه استوکس: فرض کنید S یک سطح تکه تکه‌ای هموار و $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی آن و مرز آن

● منحنی بسته C در جهت مثبت پیموده شده، در این صورت

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F\cdot n \, d\sigma$$

انتگرال خطی میدان F بر C

شار میدان curlF خارج S

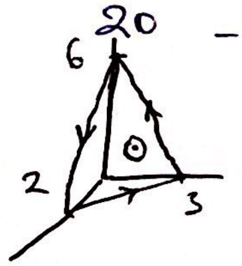
● که در آن

$$F=(P,Q,R)$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

مثال) $\int_C F\cdot dr$ کدام است؟ هرگاه $F=(x+y,2x-z,y+z)$ و C مثلثی به رئوس $(2,0,0)$، $(0,3,0)$ و $(0,0,6)$ باشد که پادساعتگرد پیموده شده است.

21 ‏(1 -21 ‏(2 0 ‏(3 20 ‏(4



حل:

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+y & 2x-z & y+z \end{vmatrix} = (1+1)i+(0-0)j+(2-1)k = 2i+k.$$

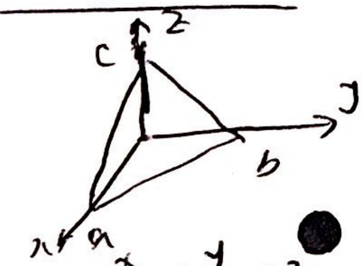
دقت شود که یک سطح تیه و مرز آن منحنی C در جهت مثبت پیموده شده است، پس

می توان بجای $\int_C F.dr$ بنابر قضیه استوکس $\iint_S \text{curl} F.n\, d\sigma$ را حساب کنیم؛ لذا باید رو سطح

S را توصیف می کنیم (شکل کاری که برای محاسبه تاکید می کنیم)

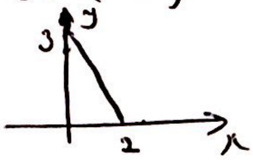
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$$

$$3x+2y+z=6$$



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$S:\begin{cases} z=6-3x-2y \\ N=3i+2j+k \\ R: \end{cases}$$



$$\iint_S \text{curl} F.n\, d\sigma = \iint_R \overbrace{\text{curl} F.N}^{\text{z از سطح}}\, dA$$

$$=\iint_R (6+1)\, dA = 7\iint_R dA = 7\times\frac{1}{2}\times 2\times 3 = 21.$$

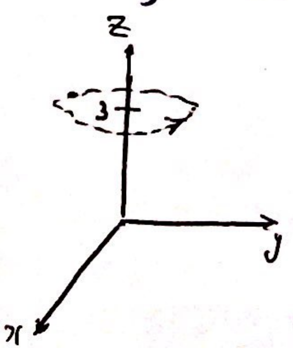
گزینه ۱

مساحت R

E4) انتگرال خط میدان $F=(xz+y)i+(yz-x)j-(x^2+y^2)k$ روی منحنی C را حساب کنید

برابر است با: $c:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$

$\frac{2\pi}{3}$ -1 $\quad$ 12 -2 $\quad$ -2π -3 $\quad$ صفر -4



$$\text{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz+y & yz-x & -x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2y-y)i+(x+2x)j+(-1-1)k$$

P:150

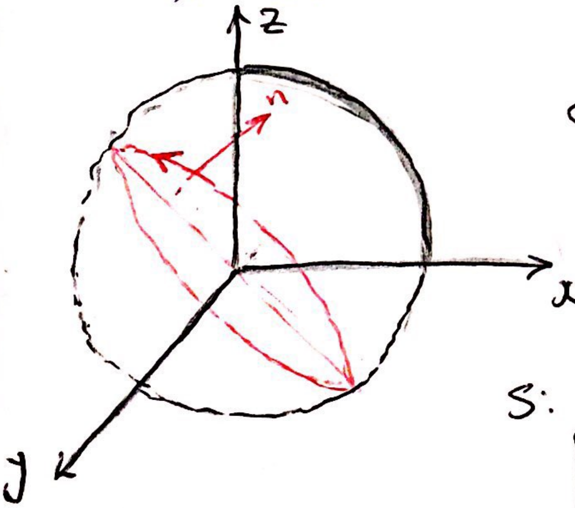
$$S:\begin{cases} z=3 \\ n=k \\ R: x^2+y^2\le 1\end{cases}$$

$$\int_C F\cdot dr \overset{\text{استوکس}}{=} \iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\, d\sigma = \iint_R \underbrace{\operatorname{curl} F\cdot N}_{z\ \text{رفع}}\, dA = \iint_R -2\, dA$$

$$= -2\iint_R dA = -2\times\pi\times 1^2 = -2\pi \quad \text{گزینه } 3$$

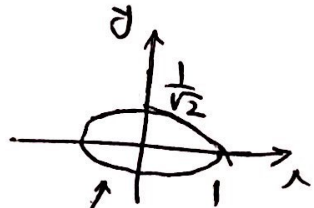
Ex) مقدار $\int_C -y\,dx + x\,dy - z\,dz$ کدام است؟ جهت C دایره‌ای با راستای مثبت است که صفحه $z=y$، کره $x^2+y^2+z^2=1$ را قطع می‌کند.

1- $\frac{\pi}{\sqrt2}$ 2- $-\frac{\pi}{\sqrt2}$ 3- $\pi\sqrt2$ 4- π



$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & -z \end{vmatrix} = 0i + 0j + (1+1)k$$

$$S:\begin{cases} z=y \\ N=-j+k \\ R: x^2+2y^2=1\end{cases}$$



سایه دایره قرمز در صفحه xy

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\, d\sigma = \iint_R \underbrace{\operatorname{curl} F\cdot N}_{z\ \text{رفع}}\, dA = \iint_R 2\, dA = 2\underbrace{\iint_R dA}_{R\,\text{بیضی}}$$

$$= 2\left(\pi\times 1\times\frac{1}{\sqrt2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt2} = \pi\sqrt2 \quad \text{گزینه } 3$$

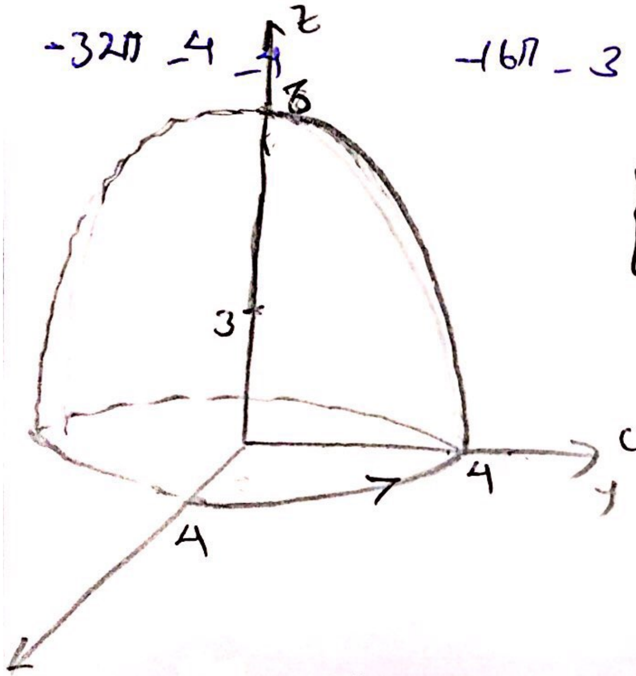
تمرین: $\int_C F\cdot dr$ را مستقیم حل کنید.

راهنمایی: $C:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt2}\sin t \\ z=\frac{1}{\sqrt2}\sin t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

p:151

Ex) میدان برداری $F=(x-z)i+(z+y)j+e^{xy}k$ مفروض است و S بخشی از کره $x^2+y^2+(z-3)^2=25$ است که $z\geq 0$ ، C مرز آن دایره‌ای پادساعتگرد در صفحه xy است. مقدار $\int_C F\cdot dr$ کدام است

-32π _4 $\qquad$ -16π _3 $\qquad$ 16π _2 $\qquad$ 0 _1



$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=25 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=16$$

$$C:\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \\ z=0 \\ 0\leq t\leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int F\cdot dr = \int_C (x-z)\,dx+(z+y)\,dy+e^{xy}\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}(4\cos t-0)(-4\sin t\,dt)+(0+4\sin t)(4\cos t\,dt)+\dots\times 0$$

$=0$ گزینه ۱

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x-z & z+y & e^{xy} \end{vmatrix}$$ داریم

$$=(xe^{xy}-1)i+(-1-ye^{xy})j+(0-0)k$$

p: 152

$$S:\begin{cases} z=0 \\ n=-k \\ R:\ x^2+y^2\le 16 \end{cases}$$

$$\oint_C F\cdot dr \overset{\text{استوکس}}{=} \iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\, d\sigma = \iint_R \overset{\text{z ندارد}}{\operatorname{curl} F\cdot n}\, dA = \iint_R 0\, dA = 0$$

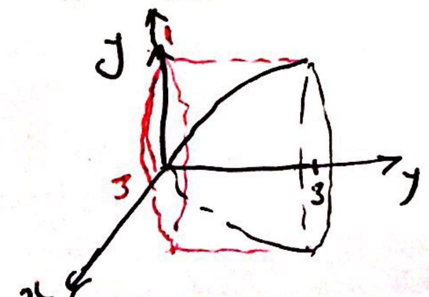
Ex) شار میدان $\operatorname{curl} F$ به طرف خارج s وقتی s بخشی از کره $x^2+y^2+(z-3)^2=25$ است که $z\ge 0$ و مرز آن دایره‌ای پادساعتگرد در صفحه xy باشد، $F=(x-z,\ z+y,\ e^{xy})$ کدام است؟

1- 16π 2- -16π 3- صفر 4- -32π

دقت شود همان تست قبلی است.

Ex) مقدار $\int_C F\cdot dr$ وقتی $F=(x+3yz,\ x+2y+z,\ x+y)$ و c منحنی پادساعتگرد $\begin{cases} x^2+9z^2=3y \\ y=3 \end{cases}$ باشد، کدام است؟

1- 16π 2- 20π 3- 18π 4- 24π



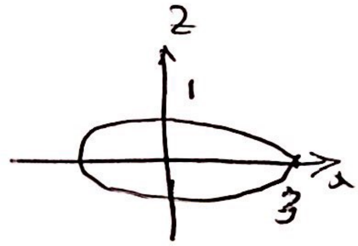
$$y=\frac{x^2}{3}+3z^2$$

P:153

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+3yz & x+2y+z & x+y \end{vmatrix}$$

$$= (1-1)\,i + (3y-1)\,j + (1-3z)\,k$$

$$S: \begin{cases} y = 3 \\ n = j \\ R: x^2 + 9z^2 = 9 \longrightarrow \dfrac{x^2}{9} + z^2 = 1 \end{cases}$$



$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr = \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot n\,d\sigma = \overbrace{\iint_R \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot n\,dA}^{\text{قائم بر } y}$$

$$= \iint_R \big(3(\overset{y}{\overset{\|}{3}}) - 1\big)\,dA = 8\overbrace{\iint_R dA}^{\text{تصویر } R} = 8(\pi \times 3 \times 1) = 24\pi$$

$\checkmark$ 4 نمره