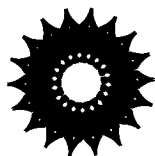




گروه مهندسی عمران دانشگاه صنعتی قم



مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی

جلد اول

ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریمما

ترجمه محمد رضا سلطانیپور، بیژن شمس



Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems
William E. Boyce, Richard C. DiPrima
Third Edition
John Wiley & Sons, 1977

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی

جلد اول

تألیف ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما

ترجمه دکتر محمدرضا سلطانیور، بیژن شمس

ویراسته دکتر منوچهر وصال

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۶

چاپ یازدهم ۱۳۸۳

تعداد ۴۰۰۰

حروفچینی: عبدی

لیتوگرافی: بهزاد

چاپ: مازیار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

بویس، ویلیام
مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی / ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما؛ ترجمه محمدرضا سلطانیور، بیژن شمس. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.
ج. : مصور، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۳۲۴: ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۳۷)
فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی: Elementary differential equations.
واژه نامه.
کتابنامه.
نمایه.
ج. ۱. (چاپ یازدهم: ۱۳۸۳).
ISBN 964-01-0324-7
۱. معادله های دیفرانسیل. ۲. مسئله های مقدار مرزی. الف. دیپریما، ریچارد C. DiPrima ب. سلطانیور، محمدرضا، ۱۳۱۴ - ، مترجم. ج. شمس، بیژن، ۱۳۱۰ - ، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. ه. عنوان.
۵۱۵/۳۵ QA۳۷۱/۹م۷
۱۳۶۷
۶۸ - ۱۷۷
کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۵	۱. مقدمه
۷	۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی
۱۵	۲.۱ نگاهی به تاریخ
۱۷	۲. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۱۷	۱.۲ معادلات خطی
۲۷	۲.۲ بحث دیگری از معادلات خطی
۳۳	۳.۲ معادلات غیر خطی
۴۲	۴.۲ معادلات جدایی پذیر
۴۸	۵.۲ معادلات کامل
۵۵	۶.۲ عامل انتگرال ساز
۵۹	۷.۲ معادلات همگن
۶۳	۸.۲ مسائل گوناگون
۶۶	۹.۲ کاربردهای معادلات مرتبه اول
۸۵	۱۵.۲ مکانیک مقدماتی
۹۱	۱۱.۲ قضیه وجود و یکتایی
۱۵۲	ضمیمه. تعیین معادله حرکت يك جسم با جرم متغیر
۱۵۷	۳. معادلات خطی مرتبه دوم
۱۵۷	۱.۳ مقدمه

۱۱۳	۲.۳۷ جوابهای اساسی معادله همگن
۱۲۴	۳.۳۱ استقلال خطی بردارهای
۱۲۸	۴.۳۵-۴ کاهش مرتبه بردارهای
۱۳۳	۵.۳۱-۵ معادلات همگن با ضرایب ثابت
۱۳۸	۶.۳۷-۶ ریشه‌های مختلط
۱۴۴	۶.۳۷ معادله ناهمگن
۱۴۷	۶.۳۷-۶ روش ضرایب نامعین
۱۵۵	۶.۳۷-۶ روش تغییر پارامترها
۱۶۲	۷.۳۸-۷ ارتعاشات مکانیکی
۱۶۶	۱.۷.۳ ارتعاشات آزاد
۱۷۲	۲.۷.۳ ارتعاشات تقویت شونده
۱۷۷	۸.۳ شبکه‌های الکتریکی

۴. سریهای جواب معادلات خطی مرتبه دوم

۱۸۵	۱.۴ مقدمه. مروری بر سریهای توانی
۱۸۵	۲.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه عادی، بخش اول
۱۹۳	۱.۲.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه عادی، بخش دوم
۲۰۴	۳.۴ نقاط غیرعادی منظم
۲۱۴	۴.۴ معادلات اویلر
۲۲۰	۵.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیرعادی منظم، بخش اول
۲۲۷	۱.۵.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیرعادی منظم، بخش دوم
۲۳۵	۶.۴* سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیرعادی منظم؛ $r_1 = r_2$ و
۲۴۲	$N = r_1 - r_2$
۲۴۷	۷.۴* معادله بسل

۵. معادلات خطی مرتبه بالاتر

۲۶۳	۱.۵ مقدمه
۲۶۳	۲.۵ نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه n ام
۲۶۵	۳.۵ معادلات همگن با ضرایب ثابت
۲۷۱	۴.۵ روش ضرایب نامعین
۲۷۹	۵.۵ روش تغییر پارامترها
۲۸۴	

۶. تبدیل لاپلاس

۲۸۹	۱.۶ مقدمه. تعریف تبدیل لاپلاس
۲۸۹	۲.۶ حل مسائل مقدار اولیه
۲۹۷	

صفحه	عنوان
۳۰۹	۳.۶ توابع پله‌ای
۳۱۷	۱.۳.۶ يك معادلهٔ دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته
۳۲۱	۴.۶ توابع ضرب‌دهی
۳۲۷	۵.۶ انتگرال تلفیقی
۳۳۳	۶.۶ بحث کلی و خلاصه
	۷. دستگاه‌های معادلات مرتبهٔ اول
۳۳۷	۱.۷ مقدمه
۳۴۵	۲.۷ حل دستگاه‌های خطی با روش حذفی
۳۵۲	۳.۷ یادآوری مبحث ماتریسها
۳۶۵	۴.۷ دستگاه‌های معادلات جبری خطی؛ استقلال خطی، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه
۳۷۹	۵.۷ نظریهٔ اساسی دستگاه‌های معادلات خطی مرتبهٔ اول
۳۸۶	۶.۷ دستگاه‌های خطی همگن با ضرایب ثابت
۳۹۶	۷.۷ مقادیر ویژهٔ مختلط
۴۰۲	۸.۷ مقادیر ویژهٔ مکرر
۴۱۰	۹.۷ ماتریس‌های اساسی
۴۱۷	۱۰.۷ دستگاه‌های خطی ناهمگن
۴۲۵	جوابهای مسائل
۴۷۹	واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی
۴۸۴	واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی
۴۸۹	فهرست راهنما

بسم الله الرحمن الرحيم

یادداشت مترجمان

این کتاب ترجمه هفت فصل اول از یازده فصل کتاب مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی تألیف ویلیام ا. بویس و ریچارد ک. دیپیرما است. چون هفت فصل اول شامل موادی است که در دانشگاه‌های ایران به عنوان درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی تدریس می‌شود، به ترجمه در آمد. امیدواریم این کتاب برای دانشجویان و خوانندگان علاقه‌مند به آشنایی با مقدمات معادلات دیفرانسیل مفید باشد.

محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

شش

پیشگفتار

درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی وسیله‌ای است بسیار عالی برای اینکه دانشجوی بتواند ارتباط بین ریاضیات محض و علوم فیزیکی یا مهندسی را درک کند. پیش از آنکه مهندس یا دانش‌پژوهی بتواند با اعتماد به کاربرد معادلات دیفرانسیل بپردازد، باید به روشهای حل آنها تسلط پیدا کند، و حداقل از نظریه زیربنایی این مبحث اطلاع مجملی داشته باشد. از سوی دیگر، آگاهی بر اینکه چگونه ضرورت حل مسائلی خاص، انگیزه پژوهشهای مجردتری شده است، برای يك دانشجوی ریاضیات محض غالباً بسیار سودمند است.

این کتاب را از دید شخصی که کارش ریاضیات کاربرده است و ممکن است هم به قسمتهای نظری و هم به جنبه‌های عملی بسیار علاقه‌مند باشد نوشته‌ایم، یعنی با دیدی بینابین نظری و عملی. بنابراین درصدد بوده‌ایم که نظریه مقدماتی کامل و دقیق (اما نه مجرد) معادلات دیفرانسیل را با مطالب قابل توجهی درباره روشهایی که در بسیاری از کاربردهای گوناگون سودمندی آنها به ثبوت رسیده است ترکیب کنیم. توجه اصلی به روشهایی معطوف بوده است که دارای کاربرد وسیع‌اند و می‌توان آنها را به مسائل خارج از محدوده این کتاب نیز تعمیم داد. تأکید می‌شود که این روشها دارای ساختاری مرتب و منظم‌اند، و تنها يك کلکسیون متنوع از شگردهای ریاضی نامرتبط نمی‌باشند. البته در برخی از موارد، دانشجوی تشخیص می‌دهد که بسیاری از مسائل را نمی‌توان با روشهای تحلیلی مقدماتی به گونه‌ای رضایت‌بخش حل کرد. از این رو موضوعاتی را درباره جنبه‌های کیفی جوابها و روشهای عددی تقریب آنها مورد بحث قرار داده‌ایم.

هنگامی که با مسئله‌ای مواجه شویم که جواب آن به آسانی پیدا نشود، سؤالاتی از قبیل وجود و یکتایی جواب مطرح می‌شود. برای پاسخ به این سؤالات قضایای مربوطه را، البته نه به عامترین صورت آن، بیان می‌کنیم، و مفاد آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. به‌ویژه، به بررسی تفاوتهایی که بین معادلات خطی و غیرخطی، و مسائل مقدار مرزی و شرایط اولیه وجود دارد می‌پردازیم.

گرچه اغلب دانشجویان، در این سطح، قادرند که اهمیت و کاربردهای قضایای گوناگون مذکور را به‌خوبی درک کنند، اما اثبات آنها در بسیاری از موارد متضمن مفاهیمی

است، مانند همگرایی یکنواخت، که هنوز با آنها آشنایی ندارند. در چنین وضعیتی اثبات آنها صرف نظر شده است. چنان که در اثبات قضیه اساسی وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه از روش تقریبات متوالی استفاده کرده و مسائل مربوطه را مورد بحث قرار داده ایم و برای اجتناب از وارد شدن در جزئیات تحلیلی دشوارتری، تا اندازه ای از راه شهودی رفته ایم.

این کتاب را اساساً برای دانشجویانی نوشته ایم که دوره حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطابق برنامه های معمول در دو و یا سه نیم سال گذرانده اند؛ قسمت اعظم کتاب در خور توانایی چنین دانشجویانی است. در فصل هفتم، «دستگاه معادلات خطی مرتبه اول»، آشنایی با جبر ماتریسی مفید است، گرچه درباره ماتریسها طی دو بند به اختصار اطلاعات لازم برای مطالعه بقیه فصل را آورده ایم. بندهایی که با ستاره مشخص شده است، محتملاً مستلزم قدرت استدلال ریاضی بیشتر (نه معلومات بیشتر) است.

چون غالباً در دانشجویان این احساس وجود دارد که دروس و کتب معادلات دیفرانسیل به «کتاب آشپزی» شبیه اند، از این رو کوشش خاصی در مبارزه با این تمایل به کار برده ایم. هر جا ممکن بوده است معلومات قبلی دانشجو را به کار گرفته ایم و او را به طرح روشی برای حل مسائل تازه هدایت کرده ایم. علاوه بر این، در بحث کار بردها معمولاً طرز تشکیل معادلات مربوطه را دقیقاً بیان کرده ایم. برای يك کتاب مقدماتی نمی توان ایجاز را جزو محسنات اولیه به شمار آورد، و ما کوشش کرده ایم وضوح را بر اختصار مقدم داریم. امید است که سهولت مطالعه، نقصان ظرافت را جبران کند.

گرچه مندرجات کتاب را با مراجعه به فهرست می توان به خوبی بررسی کرد، در اینجا برخی از ویژگیهای آن را بیان می کنیم. فصل اول مقدمه مختصری است بر اصطلاحات و تاریخچه معادلات دیفرانسیل. فصل دوم به معادلات مرتبه اول اختصاص دارد. تفاوت بین معادلات خطی و غیرخطی را در سه بند نخست بررسی کرده ایم. سپس به بحث درباره روشهای مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل پرداخته ایم و کاربرد آنها را در دینامیک جمعیت، اختلاط، رشد و استهلاك، هندسه، و مکانیک، مشتمل بر حرکت مستقیم الخط جسم با جرم متغیر، بیان کرده ایم. در پایان فصل قضیه پیکار را درباره وجود و یکتایی شرح داده ایم.

فصلهای سوم تا هفتم به معادلات دیفرانسیل خطی اختصاص دارند. در فصل سوم معادلات خطی مرتبه دوم را بررسی می کنیم. مفاهیم مجموعه های اساسی جواب، استقلال خطی، و انطباق همراه با روشهای حل، مورد تأکید قرار گرفته است. مثالها را از ارتعاشات مکانیکی و شبکه های الکتریکی انتخاب کرده ایم. مطالب این فصل در فصل پنجم به معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم یافته است. در فصل چهارم که بدسریهای توانی جواب اختصاص دارد، نشان می دهیم که طبقه بندی نقاط به عنوان عادی، غیرعادی منظم، یا غیرعادی غیرمنظم يك تقسیم بندی ضروری و طبیعی است نه دلخواه. از معادله اوایلر به عنوان مدلی برای حالت کلیتر معادلاتی که دارای نقطه غیرعادی منظم اند استفاده کرده ایم. بحث در حالتها ی دشوارتر را که در آنها ریشه های معادله شاخص برابرند، یا تفاضل آنها عدد صحیح است، با

شکلهای مناسبی از معادلهٔ بسل توضیح داده‌ایم. در فصل ششم به معرفی تبدیل لاپلاس پرداخته‌ایم و فواید آن را در حل مسائل مقدار اولیه که در آنها تابع نیرو پیوستهٔ قطعه‌ای یا ضرب‌های است تأکید کرده‌ایم. در فصل هفتم به بررسی دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ اول اختصاص دارد. دو بند نخست به معرفی دستگاهها و حل آنها به روشهای حذفی می‌پردازد و بدون اطلاعی از ماتریسها می‌توان آن را مطالعه کرد. در بقیهٔ فصل از نماد بردار-ماتریس استفاده کرده‌ایم. بدین‌سان ارتباط نزدیک بین مبحث يك معادلهٔ تنها و مبحث دستگاهها روشن می‌شود. کاربردهای متعددی با تأکید بر تحلیل شبکه‌های الکتریکی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در فصلهای هشتم و نهم مسائلی را که با روشهای پیش نمی‌توان حل کرد، به‌ویژه مسائل غیرخطی را بررسی کرده‌ایم. در فصل هشتم روشهای عددی گسسته حل مسائل مقدار اولیه مورد توجه و دقت قرار گرفته‌اند. دامنهٔ این بحث از روش خط مماس اوایل تا روشهای پیش‌بینی و تصحیح رونگه-کوتا^۱ و آدامس-مولتون^۲ را شامل می‌شود، که آنها را توضیح داده و مقایسه کرده‌ایم. تأکید و توجه بسیاری بر اصول حاکم بر روشهای عددی، پیرایش آنها و در نظر گرفتن نوع، منبع و کنترل خطاها به عمل آمده‌است. فصل نهم مقدمه‌ای بر نظریهٔ کیفی معادلات دفرانسیل است و در آن بر مسائل پایداری دستگاههای آزاد تأکید شده است. موضوعات این فصل را با کاربردهای آن در اکولوژی در مواردی که متضمن تنازع انواع و روابط صیاد-صید می‌باشند توضیح داده و توجیه کرده‌ایم. نقاط بحرانی دستگاههای خطی را طبقه‌بندی کرده‌ایم و دستگاههای تقریباً خطی را به وسیلهٔ مقایسه با يك دستگاه خطی مجاور آن بررسی کرده‌ایم. روش لیاپونوف^۳ را از دیدگاه فیزیکی مطرح نموده‌ایم، این فصل را با بررسی مختصری دربارهٔ سیکلهای حدی به پایان برده‌ایم.

در دو فصل آخر به معادلات با مشتقهای جزئی، سری فوریه، و مسائل مقدار مرزی استورم-لیوویل^۴ پرداخته‌ایم. در فصل دهم، حل معادلهٔ حرارت با استفاده از روش جداسازی متغیرها به بحث دربارهٔ خواص اولیهٔ سری فوریه انجامیده است. همین روشها برای حل مسائل مربوط به معادلهٔ موج و معادلهٔ پتانسیل به کار رفته‌اند. در فصل یازدهم به بررسی مسائل مقدار مرزی استورم-لیوویل در حالتی کلیتر، منظم و غیرعادی پرداخته‌ایم. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ این نوع مسائل را مورد بحث قرار داده و با استفاده از سری توابع ویژه روش جداسازی متغیرها را به مسائل کلی همگن یا ناهمگن در معادلات با مشتقهای جزئی تعمیم داده‌ایم.

این کتاب برای استفاده در کلاس درس دارای انعطاف بسیار زیادی است. از فصل چهارم به بعد فصول از یکدیگر اساساً مستقل‌اند، گرچه فصل یازدهم دنبالهٔ منطقی فصل دهم است. علاوه بر این، در بیشتر فصول موضوعات پایداری را در بندهای اولیه شرح داده‌ایم، و بندهای دیگر به تعمیم و کاربردها اختصاص دارد. بدین‌سان معلم برای انتخاب و تنظیم مواد

1. Runge-Kutta

2. Adams-Moulton

3. Liapounov

4. Sturm-Liouville

و عمق مطلوب برای هر يك از مباحث، حداكثر آزادی و کنترل را دارد. ما در تدریس خود در رنسلر مشاهده کرده ایم که در يك نیمسال با سه ساعت درس در هفته می توان تقریباً بندهای زیر را تدریس کرد.

۴.۵ تا ۱۰.۵	۲۰.۱ ، ۱۰.۱
۱۵.۷ تا ۵.۷ ، ۱۰.۷	۹.۲ تا ۴.۲ ، ۱۰.۲
۷.۸ تا ۱۰.۸	۸.۳ تا ۱۰.۳
۸.۱۵ تا ۱۰.۱۵	۵.۴ تا ۱۰.۴

ترتیبهای دیگری نیز ممکن است. مثلاً اگر روشهای عددی در درسهای دیگر تدریس می شود، طبعاً باید به جای فصل هشتم بخشهایی از فصل نهم را جایگزین کرد. در درسهایی که توجه به تحلیل دستگاههاست محتملاً باید فصلهای ششم، هفتم و نهم را مورد تأکید قرار داد. بالاخره اگر دانشجویان در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با معادلات دیفرانسیل آشنا شده اند، می توان موضوعات مقدماتی در فصلهای دوم و سوم را حذف کرد، و فصلهای دیگر را کاملتر تدریس نمود.

بندها را به روش دهدهی شماره گذاری کرده ایم. قضایا و اشکال در يك فصل به ترتیب شماره گذاری شده اند. بدین سان قضیه ۷.۳ نمایشگر قضیه هفتم در فصل سوم است؛ اما لزومی ندارد که در بند ۷.۳ باشد. در پایان هر فصل مآخذ و مراجع ذکر شده است. در پایان اکثر بندها مجموعه مسائلی برای دانشجو آورده ایم، و جواب همه آنها در پایان کتاب داده شده است. برخی از مسائل دشوارتر را با ستاره مشخص کرده ایم. برخی از بندها نیز ستاره دارند؛ این بندها حاوی موضوعات پیشرفته تری می باشند، و دانشجوی مبتدی در دور اول مطالعه می تواند آنها را حذف کند.^۱

ویلیام ای. بویس
ریچارد سی. دیپیرما
تروی، نیویورک
نوامبر ۱۹۷۶

۱. در ترجمه پیشگفتار قسمت مربوط به توضیح تغییراتی که در چاپ دوم داده شده است و همچنین سپاسگزاری از افرادی که با مؤلفین کتاب به نحوی همکاری و اظهار علاقه کرده اند، حذف شده است. مترجمین.

مقدمه

بسیاری از مسائل مهم و شایان توجه در مهندسی، علوم تجربی، و علوم اجتماعی را چون به صورت ریاضی بیان کنیم، به تعیین تابعی منجر می‌شود که باید در معادله‌ای که شامل مشتق‌های این تابع مجهول است صدق کند. چنین معادله‌ای را معادله دیفرانسیل می‌نامند. محتملاً آشنا ترین مثال قانون نیوتن است:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = F \left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

که در آن $u(t)$ موضع نقطه مادی تحت اثر نیروی F را نشان می‌دهد، این نیرو به نوبه خود می‌تواند تابعی از زمان t ، از موضع $u(t)$ و از سرعت $du(t)/dt$ باشد. برای تعیین حرکت یک نقطه مادی تحت اثر نیروی مفروض F ، لازم است تابع u را که در معادله (۱) صدق کند، بیابیم. اگر F نیروی ناشی از ثقل باشد، آنگاه

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -mg \quad (2)$$

با انتگرال گیری معادله (۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -gt + c_1 \\ u(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت اند. برای آنکه $u(t)$ کاملاً معین شود لازم است دو شرط اضافی، مانند موضع و سرعت نقطه در يك لحظه مفروض، مشخص گردد. از این شرایط برای تعیین ثابتهای c_1 و c_2 استفاده می‌شود.

برای آنکه شرح و بسط نظریه معادلات دیفرانسیل به‌طور منظم بیان شود، مفید است که انواع گوناگون معادلات طبقه‌بندی شود. یکی از رایجترین طبقه‌بندیها مبتنی است بر اینکه آیا تابع مجهول به يك متغیر مستقل بستگی دارد و یا به چند متغیر مستقل. در حالت اول فقط مشتقهای معمولی در معادله دیفرانسیل وجود دارند، و آن را معادله دیفرانسیل معمولی می‌گویند. در حالت دوم مشتقها، مشتقهای جزئی اند، و معادله را معادله با مشتقهای جزئی می‌نامند.

علاوه بر معادله (۱) دو مثال دیگر برای معادلات دیفرانسیل معمولی می‌آوریم. یکی

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t) \quad (۴)$$

است که در آن $Q(t)$ بار يك خازن با ظرفیت C ، مقاومت R ، و ضریب خودالقائی L ، در مداري با ولتاژ $E(t)$ است، و دیگری معادله‌ای است که قانون کاهش مقدار $R(t)$ از يك ماده رادیو اکتیو مانند رادیوم را برحسب زمان t بیان می‌کند،

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \quad (۵)$$

که در آن k ثابت معلومی است. نمونه‌های اصلی معادلات با مشتقهای جزئی عبارتند از معادله پتانسیل

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (۶)$$

معادله انتشار یا حرارت

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (۷)$$

و معادله موج

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (۸)$$

در اینجا α^2 و a^2 مقادیری ثابت اند. معادله پتانسیل، معادله انتشار، و معادله موج در مسائل گوناگونی در زمینه‌های الکتریسیته و مغناطیس، کشسانی و مکانیک سیالات پدید می‌آیند. هریک از آنها مبین يك پدیده مشخص فیزیکی است (به نام آنها توجه شود)، و هریک نماینده طبقه وسیعی از معادلات با مشتقهای جزئی است. گرچه توجه اصلی ما به معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف است، اما معادلات با مشتقهای جزئی را نیز در نظر خواهیم گرفت، بدویژه

سه معادله مهم مزبور را در فصول ۱۵ و ۱۱ بررسی خواهیم کرد.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

مرتبه يك معادله دیفرانسیل معمولی عبارت است از، بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن معادله. بدین سان معادلات (۱) و (۴) بند پیش معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم اند، و معادله (۵) يك معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است. به طور کلی، معادله

$$F[x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)] = 0 \quad (1)$$

يك معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام است. معادله (۱) نمایشگر يك رابطه بین متغیر مستقل x و مقادیر تابع u و نخستین n مشتق آن u' ، u'' ، \dots ، $u^{(n)}$ می باشد. از لحاظ سهولت و رعایت علامت گذاری متداول در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی، $u(x)$ را با y ، و $u'(x)$ ، $u''(x)$ ، \dots ، $u^{(n)}(x)$ را به ترتیب با y' ، y'' ، \dots ، $y^{(n)}$ نشان می دهیم. بدین سان معادله (۱) به صورت زیر نوشته می شود

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

به عنوان مثال،

$$y''' + 2e^x y'' + y y' = x^4 \quad (3)$$

يك معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم برای $y = u(x)$ است. گاهی حروف دیگر نیز به جای y به کار خواهد رفت، که معنی آن از متن عبارت روشن می شود.

همواره فرض می کنیم که معادله دیفرانسیل معمولی مفروض را بتوان بر حسب بالاترین مشتق موجود حل کرد و نوشت

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4)$$

ما فقط به بررسی معادلاتی به صورت (۴) می پردازیم. این نکته اساساً برای اجتناب از ابهامی است که می تواند پیش آید، زیرا يك معادله به صورت (۲) ممکن است با چندین معادله به صورت (۴) متناظر باشد. مثلاً معادله

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

به دو معادله زیر منجر می گردد

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y}}{2} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y}}{2}$$

جواب. البته نوشتن معادله به صورت (۴)، بدان معنی نیست که لزوماً تابع $y = \phi(x)$ که در آن صدق کند، وجود دارد. در واقع، این یکی از مسائلی است که می خواهیم مورد بررسی قرار دهیم. مقصود از جواب معادله دیفرانسیل معمولی (۴) در فاصله $\alpha < x < \beta$ تابعی است مانند ϕ به طوری که دارای مشتقات ϕ' ، ϕ'' ، \dots ، $\phi^{(n)}$ باشد،

و به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\phi^{(n)}(x) = f[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)] \quad (5)$$

تابع f در معادله (۴) را همواره يك تابع يا مقدار حقیقی فرض می کنیم، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود، و همواره می خواهیم جوابهای با مقدار حقیقی $y = \phi(x)$ را بیابیم. به آسانی با جایگذاری مستقیم می توان تحقیق کرد که معادله مرتبه اول

$$\frac{dR}{dt} = -kR \quad (6)$$

دارای جواب

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}, \quad -\infty < t < \infty \quad (7)$$

است، که در آن c مقدار ثابت دلخواهی است. به همین طریق دیده می شود که توابع $y_2(x) = \sin x$ و $y_1(x) = \cos x$ به ازای همه مقادیر x جوابهای معادله

$$y'' + y = 0 \quad (8)$$

هستند. مثال نسبتاً پیچیده تری تحقیق این نکته است که تابع $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ يك جواب معادله زیر است

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad x > 0 \quad (9)$$

داریم

$$\phi_1(x) = x^2 \ln x$$

$$\phi_1'(x) = x^2 \frac{1}{x} + 2x \ln x = x + 2x \ln x$$

$$\phi_1''(x) = 1 + 2x \frac{1}{x} + 2 \ln x = 3 + 2 \ln x$$

با جایگزینی در معادله دیفرانسیل (۹) به دست می آید

$$x^2(3 + 2 \ln x) - 3x(x + 2x \ln x) + 4(x^2 \ln x) =$$

$$3x^2 - 3x^2 + (2 - 6 + 4)x^2 \ln x = 0$$

که نشان می دهد $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ يك جواب معادله (۹) است. همچنین می توان تحقیق کرد که $\phi_2(x) = x^2$ يك جواب دیگر این معادله است، و آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

سؤالی که ممکن است به ذهن آید این است که آیا معادلات (۶)، (۸)، و (۹) علاوه بر جوابهای مزبور، می توانند جوابهای دیگری نیز داشته باشند. سؤال دیگری که امکان دارد حتی قبل از آن مطرح شود عبارت است از: هنگامی که معادله به صورت (۴) داده

شده است، چگونه می‌توان دانست که این معادله اصلاً دارای جوابی هست؟ این مسئله وجود جواب است. نه همه معادلات دیفرانسیل دارای جواب‌اند، و نه مسئله وجود به طور محض ریاضی است. اگر مسئله فیزیکی معنی‌داری را به طور صحیح به صورت ریاضی با یک معادله دیفرانسیل بیان کنیم، آنگاه این مسئله ریاضی باید دارای جوابی باشد. از این لحاظ مهندس ویا فیزیکدان نظارتی بر اعتبار فرمول‌بندی ریاضی خود دارد.

دومین سؤال آنکه فرض کنیم معادله دارای یک جواب است، آیا دارای جوابهای دیگری نیز هست؟ و اگر چنین است، چه نوع شرایط اضافی باید مشخص شود، تا به تعیین یک جواب خاص بینجامد؟ این مسئله یکتایی است. توجه شود که برای معادله مرتبه اول (۶) یک دسته نامتناهی جواب متناظر به امکانات نامتناهی انتخاب ثابت c در معادله (۷) وجود دارد. اگر R به ازای یک مقدار r مشخص باشد، این شرط مقدار c را معین می‌کند، اما هنوز نمی‌دانیم که معادله (۶) دارای جوابهای دیگری که در این شرط اخیر صدق کنند، هست یا نه. مسائل وجود و یکتایی، مسائلی دشوارند، بحث درباره آنها و مسائل مربوطه به تدریج مطرح خواهد شد.

سومین سؤال، که بیشتر جنبه عملی دارد، عبارت است از: معادله دیفرانسیلی به صورت (۴) داده شده است، چگونه واقعاً جوابی برای آن به دست می‌آوریم؟ روشن است که اگر برای معادله مفروض جوابی بیابیم، همزمان با آن مسئله وجود جواب را نیز پاسخ گفته‌ایم. از طرف دیگر، بدون شناخت نظریه وجود ممکن است، مثلاً، از کامپیوتر برای یافتن تقریب عددی «جوابی» اقدام کنیم و حال آنکه معادله اصلاً دارای جوابی نباشد. حتی هنگامی که بدانیم جوابی وجود دارد، ممکن است این جواب قابل بیان بر حسب توابع مقدماتی، یعنی توابع چند جمله‌ای، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، و هذلولی نباشد. متأسفانه وضع بیشتر معادلات دیفرانسیل چنین است. در هر صورت، پیش از آنکه به مسائل دشوار پردازیم کسب مهارت در بخشی از نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل معمولی از ضروریات اولیه است.

معادلات خطی و غیر خطی. یک طبقه بندی اساسی در معادلات دیفرانسیل معمولی بر طبق خطی و یا غیر خطی بودن آنها انجام می‌گیرد. معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

را خطی گویند، هرگاه F تابعی خطی از متغیرهای $y, y', \dots, y^{(n)}$ باشد. بدین سان صورت کلی معادله دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه n چنین است

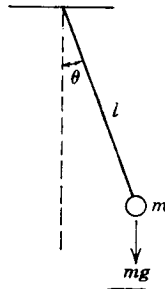
$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x) \quad (10)$$

معادلات (۲)، (۴) و (۵) در بند پیش و معادلات (۶)، (۸)، و (۹) در این بند معادلات خطی‌اند. معادله‌ای که به صورت (۱۰) نباشد، معادله‌ای است غیر خطی. معادله (۳) بدعلت جمله $y y'$ غیر خطی است. یک مسئله ساده فیزیکی که به یک معادله دیفرانسیل غیر خطی می‌انجامد، مسئله آونگ است. اگر l طول آونگ باشد، زاویه θ که آونگ در هر لحظه با

امتداد شاغول می‌سازد (شکل ۱.۱) در معادله غیرخطی

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (11)$$

صدق می‌کند.



شکل ۱.۱

نظریه ریاضی و روشهای حل معادلات خطی توسعه و گسترش بسیار یافته‌اند. برعکس، در مورد معادلات غیرخطی وضع رضایت بخش نیست. برای حل معادلات غیرخطی روش کلی در دست نداریم، و نظریه وابسته به این معادلات نیز بسیار پیچیده‌تر از نظریه معادلات خطی است. خوشبختانه بسیاری از مسائل مهم به معادلات دیفرانسیل معمولی خطی، یا اقلاً، در تقریب اول به معادلات دیفرانسیل معمولی خطی می‌انجامند. مثلاً، در مورد مسئله آونگ، اگر زاویه θ کوچک باشد، آنگاه $\sin \theta \cong \theta$ و به جای معادله (۱۱) می‌توان معادله خطی زیر را در نظر گرفت

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (12)$$

از طرف دیگر، پدیده‌های فیزیکی مهمی، مانند جریان در لامپ الکترونی، وجود دارند که در آن نمی‌توان معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر آن را با معادله خطی تقریب کرد، زیرا غیرخطی بودن آن اساسی است.

در یک کتاب مقدماتی طبیعی است که بحث معادلات خطی مورد تأکید قرار گیرد. بنابراین بخش اعظم این کتاب به معادلات خطی و روشهای گوناگون حل آنها اختصاص یافته است. اما فصول ۸ و ۹، و بخش قابل توجهی از فصل ۲، به معادلات غیرخطی تعلق دارد. در سراسر کتاب کوشش شده است، که نشان دهیم چرا معادلات غیرخطی عموماً دشوارترند، و چرا بسیاری از روشها که در حل معادلات خطی مفیدند، در مورد معادلات غیرخطی به کار نمی‌روند.

۲.۱ نگاهی به تاریخ

بدون آنکه چیزی درباره معادلات دیفرانسیل و روشهای حل آنها بدانیم، بحث راجع

به تاریخ و گسترش این شاخهٔ مهم از ریاضیات دشوار است. علاوه بر این، رشد نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با رشد عمومی ریاضیات درهم بافته شده است و نمی‌تواند از آن جدا شود. در این شرح مختصر فقط می‌خواهیم به ذکر بعضی از ریاضیدانان مشهور قرن هفدهم و هیجدهم که تحقیقات مهمی در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل داشته‌اند پردازیم. در این باره از بررسی تاریخی مختصری که اینس^۱ در ضمیمهٔ الف کتاب^۲ مفصل و موثق خود دربارهٔ معادلات دیفرانسیل آورده است پیروی می‌کنیم.

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل در همان زمان آغاز حساب دیفرانسیل و انتگرال به وسیلهٔ آیزک نیوتن^۳ و گوتفرید ویلهلم لایبنیتز^۴ در قرن هفدهم پدید آمده است، چنان که اینس آورده است:

با وجود این، اطلاع مبهم ما از تولد و کودکی دانش معادلات دیفرانسیل به روزتاریخی یازدهم نوامبر ۱۶۷۵ تمرکز می‌یابد، در این روز لایبنیتز برای اولین بار معادلهٔ

$$\int y dy = \frac{1}{2} y^2$$

را روی کاغذ نوشت، مقصود حل يك معادلهٔ دیفرانسیل ساده که خود حائز اهمیتی نبوده است نیست، آنچه در این لحظهٔ بزرگ انجام شد، ابداع ابزار پرتوان علامت انتگرال بود.

گرچه نیوتن در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، به این عنوان، نسبتاً کارزیادی انجام نداده است، اما توسعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال و توضیح اصول بنیادی مکانیک اساس گسترش و کاربردهای این نظریه را فراهم ساخت، این کار در قرن هیجدهم و بیش از همه به وسیلهٔ اوایلر^۵ انجام گرفت. نیوتن معادلات مرتبهٔ اول را طبق صورتهای $dy/dx = f(x)$ ، $dy/dx = f(x, y)$ و $dy/dx = f(x, y)$ طبقه‌بندی کرد. در مورد معادلهٔ اخیر هنگامی که $f(x, y)$ يك چند جمله‌ای از x و y است، روش حلی با استفاده از سری به دست داد. وی نسبت به انتقاد بسیار حساس بود و در نتیجه نسبت به انتشار بسیاری از اکتشافات خود سستی می‌کرد.

لایبنیتز، نتایج بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقلاً^۶ گرچه اندکی بعد از نیوتن، به دست آورد. علامت گذارهای جدید که برای مشتق (dy/dx) و انتگرال به کار می‌بریم، از لایبنیتز می‌باشند. او روش جدا کردن متغیرها (بند ۴.۲) و روشهای حل معادلات همگن مرتبهٔ اول (بند ۷.۲) و معادلات مرتبهٔ اول خطی (بند ۱۰.۲) را به دست آورد. وی مکاتبات پرکاری را با ریاضیدانان دیگر به ویژه برادران برنولی^۶ ادامه داد. در جریان این مکاتبات بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل در اواخر قرن هفدهم حل شدند.

1. Ince

۲. فهرست منابع در پایان هر فصل آمده است.

3. Isaac Newton (1642-1727)

4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

5. Euler

6. Bernoulli

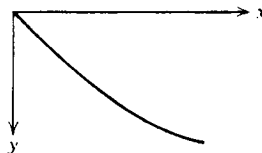
بعد از نیوتن و لایبنیتز نوبت به برادران برنولی می‌رسد، یاکوب^۱، و یوهان^۲، و دانیل^۳ فرزند یوهان. اینان سه تن از هشت عضو خانواده برنولی‌اند که همه در عصر خود ریاضیدان و دانشمند برجسته‌ای بوده‌اند. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال بسیاری از مسائل مکانیک را به صورت معادله دیفرانسیل بیان کرده و حل نمودند. یکی از مسائلی (۱۶۹۶-۱۶۹۷) که هر دو برادر درباره آن به تحقیق پرداختند، و موجب برخورد زیادی بین آنها شد، مسئله خم با کوتاهترین زمان^۴، تعیین خم با سریع‌ترین فرود است. در مسئله^{۱۳}، بند ۱۵۰۲، خواهیم دید که این مسئله (شکل ۲۰۱) به معادله مرتبه اول غیرخطی

$$y[1+(y')^2]=c$$

که در آن c مقداری ثابت است منجر می‌شود. نیوتن نیز این مسئله را در ۱۶۹۷ حل کرد. روایت مشکوکی حاکی است که نیوتن این مسئله را (به عنوان مجادله) در عصر یک روز خسته‌کننده در ضرابخانه شنید، و همان شب بعد از شام آن را حل کرد. حل مسئله را بدون ذکر نام منتشر کرد، اما یوهان برنولی با دیدن آن با شگفتی فریاد برآورد: «من شیر را از پنجه‌اش می‌شناسم». معادله مشهور برنولی در مکانیک سیالات از دانیل است. دره ۱۶۹۰ یاکوب برنولی حل معادله دیفرانسیلی را که به صورت دیفرانسیلی $(b^2y^2 - a^2)^{1/2} dy = a^{3/2} dx$ نوشته شده است منتشر کرد. امروز این یک تمرین ساده است، اما در آن ایام معادله $y' = [a^3/(b^2y^2 - a^2)]^{1/2}$ را به صورت دیفرانسیلی درآوردن، و بیان آنکه انتگرال دوطرف جز در مقدار ثابت اختلافی ندارند، گامی بزرگ بود. چنان‌که، مثلاً، یوهان برنولی می‌دانست که $dx/x = d(\ln x)$ با وجود این توانست نشان دهد که معادله $dy/dx = y/ax$ (که می‌توان آن را با نوشتن به صورت

$$a \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

حل کرد) دارای جواب $y^a/x = c$ است، که در آن c مقدار ثابت انتگرال‌گیری است (بند ۴۰۲).



شکل ۲۰۱

1. Jakob (1654-1705)

2. Johann (1667-1748)

3. Daniel (1700-1782)

4. brachistochrone

۵. به نظر می‌رسد که یاکوب برنولی، نخستین کسی است که اصطلاح انتگرال را به کار برده است.

در اواخر قرن هفدهم بیشتر روشهای مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (فصل ۲) شناخته شده بود، و توجه به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاتر، و معادلات با مشتقهای جزئی تمرکز یافته بود. ریاضیدان ایتالیایی، یا کوپو ریکاتی^۱، معادلاتی به صورت $f(y, y', y'') = 0$ (مسئله ۲، بند ۱۰۳) را در نظر گرفت. وی نیز معادله غیرخطی مهمی را که به معادله ریکاتی $dy/dx = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$ معروف است، البته نه بدین کلیت، مورد بررسی قرار داد (مسائل ۳۵ و ۳۶، بند ۸۰۲).

لئونارد اویلر^۲ یکی از بزرگترین ریاضیدانان تمام ازمه، نیز در قرن هیجدهم می زیست. او ریاضیدانی پر بار بود، مجموعه آثار وی را در هفتاد مجلد جمع آوری کرده اند. با وجود آنکه در هفده سال آخر زندگی خود کور بود، تحقیقاتش را مانند سابق ادامه داد. موضوعی که در اینجا شایان توجه خاص است، کار وی در بیان مسائل مکانیک به زبان ریاضی و بسط روشهای حل این مسائل ریاضی است. لاگرانژ درباره اثر اویلر در مکانیک، گفته است «نخستین اثر بزرگی است که آنالیز را در دانش حرکت به کار گرفته است». اویلر مسائلی از قبیل امکان تحویل معادلات مرتبه دوم به معادلات مرتبه اول با تعویض متغیرهای مناسب را بررسی کرده است. وی مفهوم عامل انتگرال ساز (بند ۶۰۲) را معرفی کرد، روش عمومی بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت (فصول ۳ و ۵) را در ۱۷۳۹ به دست داد، روش حل به وسیله سریهای توانی (فصل ۴) را مورد پژوهش قرار داد، و روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل (بند ۲۰۸) را ابداع کرد. وی همچنین تحقیقات مهمی درباره نظریه سری فوریه (فصل ۱۵) انجام داد، و برای نخستین بار نیز نظریه حساب تغییرات را عرضه کرد.

بعداً در قرن هیجدهم ریاضیدان بزرگ فرانسوی ژوزف-لوئی لاگرانژ^۳ و پیر-سیمون لاپلاس^۴ تحقیقات مهمی درباره نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی نمودند، و نخستین بررسی علمی معادلات با مشتقهای جزئی را ارائه کردند. محتملاً مشهورترین معادله با مشتقهای جزئی در فیزیک ریاضی معادله پتانسیل $u_{xx} + u_{yy} = 0$ است، که در آن اندیسه نمایشگر مشتقهای جزئی اند، و به معادله لاپلاس نیز معروف است. مکانیک تحلیلی اثر عظیم لاگرانژ حاوی معادلات عمومی حرکت یک دستگاه دینامیکی است، که امروز به معادلات لاگرانژ معروف اند. کتاب مکانیک سمادی لاپلاس که در پنج مجلد تدوین یافته است، عنوان «نیوتن فرانسه» را برای وی تحصیل کرد. آخرین مجلدات آن در سالهای ۱۷۸۹ تا ۱۸۲۵ انتشار یافت، و شامل تمام مکانیک آن عصر است. بینش لاگرانژ و لاپلاس در ریاضی در دو فلسفه خلاصه می شود. از نظر لاپلاس طبیعت اساسی و ذاتی است، و ریاضیات ابزاری برای شناخت اسرار آن است، اما لاگرانژ ریاضیات را هنری می داند که خود توجیه گر خویش

1. Jacopo Riccati (1676-1754)
2. Leonhard Euler (1707-1783)
3. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
4. Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

است. در هر صورت، این دو ریاضیدان پیشرفتهای پر دامنه و گسترده‌ای را هم در نظریه و هم در کاربرد ریاضیات به وجود آوردند.

دانشجویی که به تاریخ ریاضیات (و معادلات دیفرانسیل) علاقه‌مند باشد، می‌تواند به یکی از کتنبه‌های مربوط به گسترش ریاضیات که در پایان این فصل فهرست آنها را آورده‌ایم مراجعه کند.

درس‌های اخیر، بخشی از کوشش ریاضیدانان در زمینه‌های معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتق‌های جزئی به فراهم آوردن نظریه‌ای، عمومی، منتظم و متقن اختصاص داشته است. هدف یافتن و بسط روشهای مناسب برای بررسی طبقات معادلات دیفرانسیل است، نه آنکه معادلات دیفرانسیل خاصی را حل کنیم.

این تاریخچه کوتاه را با تبصره‌ای که برای دانشجویی که با نگرانی، و فور کاربرد اصطلاحات «واضح است که...» یا «به آسانی می‌توان نشان داد...» را در متون ریاضی ملاحظه کرده است، می‌تواند خوش آیند باشد، پایان می‌دهیم. ناتانیل باودیج^۱ ریاضیدان و منجم آمریکایی که در سالهای اوایل ۱۸۵۰ به ترجمه مکانیک سماوی لاپلاس اشتغال داشته است، می‌گوید «هرگز به یکی از (کاملاً واضح است) های لاپلاس برخورددم، مگر آنکه می‌دانستم ساعتها کار شاق در پیش دارم تا این شکاف را پر کرده و این وضوح کامل را بیابم و چگونگی روشنی آن را نشان دهم».

مسائل

۰۱. مرتبه هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید و معلوم کنید که کدامیک خطی است.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x \quad (\text{الف})$$

$$(1+y^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0 \quad (\text{د})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin(x+y) = \sin x \quad (\text{ه})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x) y = x^2 \quad (و)$$

۲. در هر يك از حالت‌های زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است.

$$y'' - y = 0; y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cosh x \quad (\text{الف})$$

$$y''' + 2y' - 2y = 0; y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = e^x \quad (\text{ب})$$

$$y'''' + 4y''' + 3y = x; y_1(x) = \frac{x}{3}, y_2(x) = e^{-x} + \frac{x}{3} \quad (\text{ج})$$

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, x > 0; y_1(x) = x^{1/2}, y_2(x) = x^{-1} \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0; y_1(x) = x^{-2}, y_2(x) = x^{-2} \ln x \quad (\text{ه})$$

$$y'' + y = \sec x, 0 < x < \frac{\pi}{2}; y = \phi(x) = (\cos x) \ln \cos x + x \sin x$$

$$y' - 2xy = 1; y = \phi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \quad (\text{ز})$$

۳. تعیین کنید برای چه مقادیری از r ، هر يك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به صورت $y = e^{rx}$ است.

$$y'' - y = 0 \quad (\text{ب}) \quad y' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0 \quad (\text{د}) \quad y'' + y' - 6y = 0 \quad (\text{ج})$$

۴. تعیین کنید برای چه مقادیری از r ، هر يك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به صورت $y = x^r$ به ازای $x > 0$ است.

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad (\text{ب}) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

۵. هر قبه يك معادله با مشتقات جزئی عبارت است از بالاترین مرتبهٔ مشتق جزئی موجود در آن معادله، همچنین معادله را خطی گویند اگر بر حسب تابع مربوطه و مشتقات آن خطی باشد. برای هر يك از معادلات زیر مرتبه، و خطی یا غیرخطی بودن آن را تعیین کنید.

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad (\text{ب}) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0 \quad (\text{د}) \quad \alpha^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (\text{ج})$$

$$u_t + uu_x = 1 + u_{xx} \quad (\text{و}) \quad u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \quad (\text{ه})$$

۶. در مورد هر يك از معادلات با مشتقات جزئی زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع

داده شده جواب معادله است.

(الف)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; u_1(x, y) = \cos x \cosh y, u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t; u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin x, u_2(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x \quad (\text{ب})$$

λ عددی حقیقی است.

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}; u_1(x, t) = \sin \lambda x \sin \lambda at, u_2(x, t) = \sin(x - at) \quad (\text{ج})$$

λ عددی حقیقی است.

۷. درمورد هریک از معادلات با مشتقهای جزئی زیر تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادله است.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0; u = \phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad (\text{الف})$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t; u = \phi(x, t) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}, t > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}; u = f(x - at) + g(x + at) \quad (\text{ج})$$

که در آن توابع f و g دارای مشتقهای مرتبه اول و دوم اند.

مراجع

- Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.
- Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.
- Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, Second Edition, Macmillan New York, 1919.
- Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Third Edition, Holt, New York, 1964.
- Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.
- Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, Third Edition, Dover, New York, 1967.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۲ معادلات خطی

در این فصل به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می پردازیم، این معادلات به صورت

$$y' = f(x, y) \quad (۱)$$

می باشند، که در آن f تابع مفروضی از دو متغیر است. هر تابع $y = \phi(x)$ را که خود و مشتقش در معادله (۱) متحداً صدق کنند يك جواب می نامند، و هدف ما بررسی مسئله وجود این گونه توابع، و در صورت وجود طرز یافتن آنها است. ساده ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول آن است که در آن f فقط به x بستگی داشته باشد. در این حالت

$$y' = f(x) \quad (۲)$$

و باید تابع $y = \phi(x)$ را طوری تعیین کرد که مشتق آن، تابع مفروض f باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که ϕ تابع اولیه f است، و می نویسیم

$$y = \phi(x) = \int^x f(t) dt + c \quad (۳)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. مثلاً، اگر

$$y' = \sin 2x$$

آنگاه

$$y = \phi(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

در معادله (۳) و به طور کلی در این کتاب از علامت $\int^x f(t) dt$ برای نشان دادن تابع

اولیه تابع f استفاده می کنیم، یعنی $F(x) = \int^x f(t) dt$ نماینده خاصی است از طبقه توابعی که مشتق آنها برابر f است. عبارت $F(x) + c$ که در آن c ثابت دلخواهی است شامل همه عضوهای این طبقه می باشد.

ما بیش از این در معادلات به صورت (۲) بحث نمی کنیم و فقط به دو نکته از ویژگیهای مهم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول اشاره می کنیم. اول آنکه برای حذف مشتق y و به دست آوردن خود y فقط به یک عمل انتگرال گیری نیاز داریم. دوم آنکه عبارتی که به عنوان جواب از عمل انتگرال گیری حاصل می شود شامل یک ثابت دلخواه است.

اکنون توجه خود را به معادله (۱) معطوف می کنیم. متأسفانه روش کلی رضایت بخشی برای تعیین جوابهای این معادله در دست نیست. در عوض روشهای متعددی را که هر یک درباره طبقه خاصی از معادلات به صورت (۱) قایل اجراست بیان می کنیم. نخست، به بررسی معادله مرتبه اول خطی

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (4)$$

می پردازیم، که در آن p و g در فاصله ای مانند $\alpha < x < \beta$ توابعی پیوسته هستند. در این بند روشهای حل معادله (۴) را بررسی می کنیم. مسائلی که بیشتر جنبه نظری دارند و به طور کلی متضمن وجود و یکتایی جوابها می باشند در بند ۲.۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت. نخست معادله

$$y' + ay = 0 \quad (5)$$

را که در آن a یک ثابت حقیقی است در نظر می گیریم. این معادله را می توان با جستجو حل کرد. باید یک تابع y پیدا کرد که مشتق آن y' مساوی با $(-a)y$ برابر خود y باشد. روشن است که، $y = e^{-ax}$ این خاصیت را دارد، و نتیجتاً در معادله (۵) صدق می کند. علاوه بر این

$$y = ce^{-ax} \quad (6)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است نیز همین خاصیت را دارد. چون c دلخواه است، رابطه (۶) بینهایت جواب برای معادله دیفرانسیل (۵) به دست می دهد. طبعاً این سؤال پیش می آید که آیا برای معادله (۵) جوابهایی غیر از آنچه از رابطه (۶) حاصل می شود وجود

دارد؟ در بند بعد نشان خواهیم داد که جوابهای دیگری وجود ندارد، اما فعلاً این سؤال همچنان باقی است.

به تعبیر هندسی، رابطه (۶) يك خانواده يك پارامتری از خمها را نمایش می‌دهد، که خمهای انتگرال معادله (۵) نامیده می‌شوند. در شکل ۱۰۲ چند عضو این خانواده به ازای $a = 1$ نشان داده شده است. هر خم انتگرال نمایش هندسی جواب متناظر معادله دیفرانسیل است. مشخص کردن يك جواب خاص، با انتخاب يك خم انتگرال خاص از خانواده يك پارامتری مزبور، هم‌ارز است. غالباً مناسب است که این کار با تعیین يك نقطه (x_0, y_0) که خم انتگرال باید از آن بگذرد انجام شود، یعنی باید جواب $y = \phi(x)$ را طوری تعیین کرد که

$$\phi(x_0) = y_0.$$

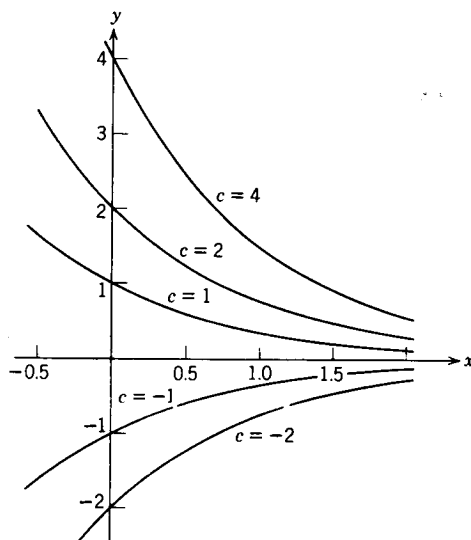
چنین شرطی را شرط اولیه می‌نامند. چون y همان $\phi(x)$ را نشان می‌دهد، این شرط را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$x = x_0 \quad \text{در} \quad y = y_0.$$

اما، در عمل متداول است که شرط اولیه به صورت

$$y(x_0) = y_0 \quad (7)$$

بیان شود، و ما در این کتاب معمولاً از همین نماد استفاده می‌کنیم. هر معادله دیفرانسیل



شکل ۱۰۲

مرتبه اول همراه با يك شرط اوليه، يك مسئله مقدار اوليه^۱ را تشكيل می دهند.

مثلاً معادله دیفرانسیل (۵)

$$y' + ay = 0.$$

و شرط اوليه

$$y(0) = 2, \quad (۸)$$

يك مسئله مقدار اوليه است. چنان که در بالا اشاره شد همه جوابهای معادله دیفرانسیل (۵) از رابطه (۶) به دست می آیند. برای پیدا کردن جوابی که در شرط اوليه (۸) صدق می کند، در رابطه (۶)، $x = 0$ و $y = 2$ می گذاریم. آنگاه $c = 2$ و جواب مطلوب عبارت است از

$$y = \phi(x) = 2e^{-ax} \quad (۹)$$

این جواب یکنای مسئله مقدار اوليه مفروض است. به طور کلیتر می توان نشان داد که مسئله مقدار اوليه متشکل از معادله دیفرانسیل (۴) و شرط اوليه (۷)، هرگاه ضرایب p و g توابع پیوسته ای باشند، دارای جوابی یکتاست. این مطلب در بند بعد مورد بحث قرار می گیرد. اکنون معادله

$$y' + ay = g(x) \quad (۱۰)$$

را در نظر می گیریم. اگر $a = 0$ ، آنگاه طرف اول معادله (۱۰) درست مشتق y است، و جواب از رابطه (۳) با قرار دادن g به جای f به دست می آید. اگر $a \neq 0$ ، آنگاه طرف اول معادله (۱۰) ترکیبی از جمله هایی است که متضمن y و y' می باشند. باید دید که آیا می توان این جمله ها را با مشتق تابعی متحد گرفت. به عبارت دیگر، آیا می توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} + ay = \frac{d}{dx} (\quad)? \quad (۱۱)$$

اگر چنین باشد، آنگاه معادله (۱۰) به صورت

$$\frac{d}{dx} (\quad) = g(x)$$

درمی آید، و می توان فوراً آن را با انتگرال گیری از دو طرف حل کرد. بررسی مجدد جواب (۶) معادله (۵) ما را به چگونگی عملی که باید انجام داد هدایت می کند. اگر $y = ce^{-ax}$ را به صورت

۱. این اصطلاح ناشی از این نکته است که اغلب متغیر مستقل، زمان است، شرط اوليه وضعیت را در لحظه ثابتی معین می کند، و جواب مسئله مقدار اوليه، آنچه را که بعداً واقع می شود بیان می کند.

$$ye^{ax} = c \quad (۱۲)$$

بنویسیم، و از دوطرف رابطه (۱۲) مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx}e^{ax} + ae^{ax}y = e^{ax}\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = 0$$

بدین سان، اگر معادله (۱۰) را در e^{ax} ضرب کنیم، آنگاه می توان طرف اول معادله حاصل را به صورت مشتق تابع ye^{ax} نوشت

$$\underbrace{e^{ax}y' + ae^{ax}y}_{\frac{d}{dx}(e^{ax}y)} = e^{ax}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = e^{ax}g(x) \quad (۱۳)$$

از معادله (۱۳) می توان انتگرال گرفت، و بدست آورد

$$e^{ax}y = \int^x e^{at}g(t)dt + c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. بنابراین معادله (۱۰) دارای جواب زیر است

$$y = \phi(x) = e^{-ax} \int^x e^{at}g(t)dt + ce^{-ax} \quad (۱۴)$$

بدین سان، هنگامی که تابع g داده شده باشد، مسئله تعیین جواب معادله (۱۰) به محاسبه تابع اولیه ای که در رابطه (۱۴) است می انجامد. دشواری این روش بستگی به g دارد، با وجود این، معادله (۱۴) فرمول صریحی برای جواب $y = \phi(x)$ به دست می دهد. اگر شرط اولیه ای مشخص شده باشد، ثابت c را می توان معین کرد.

مثال ۱. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$y' + 2y = e^{-x} \quad (۱۵)$$

$$y(0) = 3 \quad (۱۶)$$

از مقایسه معادلات (۱۵) و (۱۰)، دیده می شود که در این مسئله $a = 2$. بدین سان، معادله (۱۵) را در e^{2x} ضرب می کنیم، و در نتیجه

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x}e^{-x} \quad (۱۷)$$

طرف اول معادله (۱۷) مشتق $e^{2x}y$ است، بنا براین می‌توان آن را به صورت

$$(e^{2x}y)' = e^x \quad (18)$$

نوشت. با انتگرال گیری از معادله (۱۸) به دست می‌آید

$$ye^{2x} = e^x + c$$

و بنا براین

$$y = e^{-x} + ce^{-2x} \quad (19)$$

به ازای هر مقدار c يك جواب معادله (۱۵) است. برای برقراری شرط اولیه (۱۶)، در معادله (۱۹)، $x = 0$ و $y = 3$ می‌گذاریم. از اینجا $c = 2$ به دست می‌آید، و بدین ترتیب جواب مسئله مقدار اولیه (۱۵)، (۱۶) عبارت خواهد بود از

$$y = e^{-x} + 2e^{-2x} \quad (20)$$

اکنون برگردیم به معادله خطی مرتبه اول کلی (۴)

$$y' + p(x)y = g(x)$$

با روشی مشابه آنچه در بالا به کار رفت، باید تابع μ را طوری انتخاب کرد که اگر معادله (۴) در $\mu(x)$ ضرب شود، آنگاه طرف اول آن به صورت مشتق $\mu(x)y$ تابع $\mu(x)y$ در آید. یعنی، در صورت امکان می‌خواهیم μ را طوری انتخاب کنیم که

$$\begin{aligned} \mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y. \end{aligned}$$

بدین سان $\mu(x)$ باید در

$$\mu(x)p(x)y = \mu'(x)y$$

صدق کند. موقتاً فرض کنیم که $\mu(x) > 0$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$$

چون $\mu'(x)/\mu(x)$ مشتق $\ln \mu(x)$ است، داریم

$$\ln \mu(x) = \int^x p(t) dt$$

۱. هر تابع μ که دارای این خاصیت باشد، عامل انتگرال ساز نامیده می‌شود. در بند ۶.۲ بحث مشروحتری دربارهٔ عاملهای انتگرال ساز خواهیم داشت.

و بالاخره

$$\mu(x) = \exp \left[\int^x p(t) dt \right] \quad (21)$$

دیده می شود که $\mu(x)$ به صورتی که با رابطه (۲۱) تعریف شده است، واقعاً مثبت است. علاوه بر این، چون $\int^x p(t) dt$ فقط با تقریب يك ثابت جمعی دلخواه معین شده است، $\mu(x)$ نیز فقط با تقریب يك ثابت ضربی دلخواه معین خواهد شد.

اکنون چون معادله (۴) را در $\mu(x)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x)$$

بنا بر این

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s) ds + c$$

یا

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(s)g(s) ds + c \right] \quad (22)$$

که در آن $\mu(x)$ از رابطه (۲۱) به دست می آید. رابطه (۲۲) فرمول صریح جواب معادله خطی مرتبه اول کلی (۴) را که در آن p و g توابعی پیوسته اند به دست می دهد. در اینجا به دو بار انتگرال گیری نیاز داریم، یکی برای به دست آوردن $\mu(x)$ از رابطه (۲۱)، و دیگری برای تعیین y از رابطه (۲۲). از ثابت دلخواه c می توان برای برقراری شرط اولیه استفاده کرد.

در باره روشی که برای حل معادله (۴) بیان شد، دو نکته اضافی را باید مورد توجه قرار داد. اولاً قبل از محاسبه سازه انتگرال کننده μ از رابطه (۲۱)، لازم است اطمینان حاصل کرد که معادله دیفرانسیل دقیقاً به صورت (۴) باشد، به ویژه، ضریب y' باید برابر ۱ باشد. ثانیاً، پس از تعیین $\mu(x)$ و ضرب در معادله (۴) باید مطمئن شد که جمله های شامل y ، حقیقتاً مشتق $y \mu(x)$ هستند. این خود آزمونی از صحت محاسبه μ است. البته، هنگامی که جواب y به دست آمد، می توان صحت محاسبات را نیز با جایگزین کردن آن در معادله دیفرانسیل و شرط اولیه بررسی کرد.

مثال ۲. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 1 \quad (23)$$

برای این معادله تابع μ عبارت است از

$$\mu(x) = \exp \left(- \int^x 2t dt \right) = e^{-x^2}$$

پس

$$e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = xe^{-x^2}$$

به طوری که

$$(e^{-x^2} y)' = xe^{-x^2}$$

بنابراین

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2} dt + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

و بالاخره

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

برای برقراری شرط اولیه $y(0) = 1$ باید c را برابر $3/2$ اختیار کرد. پس جواب مسئله مقدار اولیه مزبور چنین است

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2} \quad (24)$$

مثال ۳. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 1 \quad (25)$$

مانند مثال پیش $\mu(x) = e^{-x^2}$ ، و

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2} dt + c \quad (26)$$

به دست می آید. برای محاسبه c مناسب است حد پایین انتگرال گیری^۱ را همان نقطه اولیه $x=0$ انتخاب کنیم. آنگاه، با ضرب رابطه (۲۶) در e^{x^2} خواهیم داشت

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + ce^{x^2}$$

شرط اولیه $y(0) = 1$ مستلزم آن است که $c = 1$ ، و از این رو

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \quad (27)$$

۱. انتخاب حد پایین انتگرال گیری در واقع اهمیتی ندارد، زیرا اختلاف بین $\int_a^x e^{-t^2} dt$ و

$\int_b^x e^{-t^2} dt$ فقط مقدار ثابتی است که می توان آن را با c جمع کرد.

جواب مسئله داده شده می باشد.

توجه شود که انتگرال تابع e^{-t^2} در حل مثال ۳ را نمی توان بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد. از اینجا این نکته روشن می شود که ممکن است به ناچار جواب حتی يك مسئله بسیار ساده به صورت انتگرال باقی بماند. اما، تابع

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (28)$$

که به تابع خطا مشهور است، به طور گسترده ای جدول بندی شده و می توان آن را به عنوان يك تابع شناخته شده در نظر گرفت. بنابراین از نظر محاسباتی، رابطه (۲۷) عبارت کاملاً رضایت بخشی برای جواب مسئله مقدار اولیه (۲۵) است. در واقع این عبارت به اندازه

جواب $y = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{x^2}$ مربوط به مسئله مقدار اولیه (۲۳) رضایت بخش است. معمولاً

برای محاسبه e^{x^2} به ازای مقدار مفروض x به جدول مراجعه می شود (یا از ماشین حساب الکترونیکی استفاده می شود)، و محاسبه $erf(x)$ نیز با مراجعه به جدولی دیگر به همان سادگی به دست می آید.

شق دیگر، به کار بردن عبارت انتگرالی مانند رابطه (۲۷) برای آغاز محاسبات عددی جواب مسئله مقدار اولیه است. به ازای هر مقدار داده شده x ، انتگرال در رابطه (۲۷)، يك انتگرال معین است، و می توان مقدار آن را با روشهای عددی مانند دستور سیمپسون، به دست آورد. با تکرار انتگرال گیری عددی به ازای مقادیر مختلف x می توان جدولی از مقادیر جواب y تشکیل داد. روشهای عددی دیگری نیز وجود دارد که در آنها برای محاسبه مقادیر تقریبی جواب به ازای مجموعه مفروضی از مقادیر x مستقیماً از خود معادله دیفرانسیل استفاده می شود، این روشها را در فصل ۸ مورد بحث قرار می دهیم.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۶ معادله دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$y' - 2y = x^2 e^{x^2} \quad (2) \quad y' + 3y = x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = 3 \cos 2x, \quad x > 0 \quad (4) \quad y' + y = x e^{-x} + 1 \quad (3)$$

$$x y' + 2y = \sin x, \quad x > 0 \quad (6) \quad y' - y = 2e^x \quad (5)$$

در هر يك از مسائل ۷ تا ۱۲ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

$$y' - y = 2x e^{x^2}, \quad y(0) = 1 \quad (7)$$

$$y' + 2y = x e^{-2x}, \quad y(1) = 0 \quad (8)$$

$$y' + y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0 \quad (۹)$$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0 \quad (۱۰)$$

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 2 \quad (۱۱)$$

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (۱۲)$$

(۱۳) جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x - x}$$

دانهایی: x را به جای y به عنوان تابع در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $\phi(x) = e^{2x}$ يك جواب معادله

$$y' - 2y = 0$$

است، و $y = c\phi(x)$ نیز به ازای هر مقدار ثابت c جواب این معادله می باشد.

(ب) نشان دهید که $\phi(x) = 1/x$ به ازای $x > 0$ يك جواب معادله

$$y' + y^2 = 0$$

است، اما $y = c\phi(x)$ جواب این معادله نیست. توجه شود که در قسمت (ب) معادله، خطی نیست، در صورتی که در قسمت (الف) معادله خطی است.

(۱۴) نشان دهید که اگر $y = \phi(x)$ يك جواب معادله

$$y' + p(x)y = 0$$

باشد، آنگاه $y = c\phi(x)$ نیز به ازای هر مقدار ثابت c جواب است.

(۱۵) فرض کنیم $y = y_1(x)$ يك جواب معادله

$$y' + p(x)y = 0 \quad (\text{يك})$$

و $y = y_2(x)$ يك جواب معادله

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (\text{دو})$$

باشد. نشان دهید که $y = y_1(x) + y_2(x)$ نیز يك جواب معادله (دو) است.

(۱۷) روش زیر را برای حل معادله خطی کلی مرتبه اول

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (\text{يك})$$

در نظر می گیریم.

(الف) اگر $g(x)$ متحد با صفر باشد، نشان دهید که جواب معادله عبارت است از

$$y = A \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (\text{دو})$$

که در آن A ثابت است.

(ب) اگر $g(x)$ متحد با صفر نباشد، فرض می کنیم که جواب آن به صورت

$$y = A(x) \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (\text{سه})$$

باشد، و A در اینجا تابعی از x است. در معادله دیفرانسیل داده شده این مقدار را به جای y بگذارید و نشان دهید که $A(x)$ باید در شرط زیر صدق کند

$$A'(x) = g(x) \exp \left[\int^x p(t) dt \right] \quad (\text{چهار})$$

(ج) $A(x)$ را از معادله (چهار) بیابید. آنگاه آن را به جای $A(x)$ در رابطه (سه) قرار دهید و y را تعیین کنید. تحقیق کنید جوابی که با این روش به دست آمده است با رابطه (۲۲) در متن مطابقت دارد. این روش تغییر پارامترها موسوم است، و در بند ۲۰۶.۳ در ارتباط با معادلات خطی مرتبه دوم دقیقاً مورد بحث قرار خواهد گرفت.

(۱۸) با استفاده از روش مسئله ۱۷ هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' + \left(\frac{1}{x} \right) y = 3 \cos 2x, \quad x > 0 \quad (\text{ب}) \quad y' - 2y = x^2 e^{2x} \quad (\text{الف})$$

۲۰۲ بحث دیگری از معادلات خطی

در بند ۱۰۲ نشان دادیم که چگونه جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول را می توان ساخت. در اینجا به بررسی چند مسئله که بیشتر جنبه نظری دارند می پردازیم. نخست قضیه اساسی را بیان می کنیم، ایسن قضیه شرایطی را که تحت آن مسئله مقدار اولیه مربوط به معادله خطی مرتبه اول دارای يك و فقط يك جواب است به دست می دهد. بقیه این بند به بررسی برخی از نتایج این قضیه اختصاص یافته است.

قضیه ۱۰۲. اگر توابع p و g دوی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ که حاوی نقطه x_0 است پیوسته باشند، آنگاه تابع یکتایی مانند $y = \phi(x)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (۱)$$

به اِزای $\alpha < x < \beta$ صدق می‌کند، و شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

دا که در آن y مقدار اولیه دلخواهی است که از پیش داده شده است برقرار می‌کند.

اثبات این قضیه اساساً در ضمن بحث بند پیش که به فرمول

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(s)g(s) ds + c \right] \quad (3)$$

با

$$\mu(x) = \exp \int^x p(t) dt \quad (4)$$

انجامید، آمده است. اگر فرض کنیم که معادله (۱) دارای جوابی باشد، بررسی بند ۱۰۲ نشان می‌دهد که باید جواب مزبور به صورت (۳) باشد. دیده می‌شود که چون p به اِزای $\alpha < x < \beta$ پیوسته است، در نتیجه μ در این فاصله تابعی معین، مشتق پذیر و مخالف صفر است. با این توجیه معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \quad (5)$$

نوشت. چون μ و g پیوسته‌اند، تابع μg دارای تابع اولیه است، و رابطه (۳) از معادله (۵) نتیجه می‌شود. فرضی که در اول کردیم، یعنی وجود حداقل یک جواب برای معادله (۱)، اکنون با گذاشتن عبارت y از رابطه (۳) در معادله دیفرانسیل محقق می‌شود. سرانجام، شرط اولیه (۲) مقدار c را به طور یکتا معین می‌کند، بدین سان اثبات کامل می‌شود. چون رابطه (۳) شامل همه جوابهای معادله (۱) است، به طور معمول آن را جواب عمومی معادله (۱) می‌نامند.

باید جنبه‌های متعددی از قضیه بالا مورد توجه قرار گیرد. نخست این قضیه مبین آن است که مسئله مقدار اولیه داده شده جوابی دارد و نیز مسئله مزبور فقط یک جواب دارد. بدعبارت دیگر، قضیه مزبور هم وجود و هم یکتایی مسئله مقدار اولیه (۱) و (۲) را نشان می‌دهد. دیگر آنکه جواب $y = \phi(x)$ تابعی مشتق پذیر است، و در واقع چون $y' = -p(x)y + g(x)$ ، مشتق $y' = \phi'(x)$ پیوسته است. به علاوه، جواب مزبور در سراسر فاصله $\alpha < x < \beta$ که در آن ضرایب p و g پیوسته‌اند در معادله دیفرانسیل (۱) صدق می‌کند. این بدان معنی است که اگر نقاطی یافت شوند که p یا g در آنها ناپیوسته باشند، جواب مزبور فقط در این نقاط ممکن است معتبر نباشد. بدین سان فقط با مشخص کردن نقاط ناپیوستگی p و g مقداری اطلاعات کیفی درباره جواب به دست می‌آید. بدعنوان مثال مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$xy' + 2y = 4x^2 \quad (6)$$

$$y(1) = 2 \quad (7)$$

مانند بند ۱۰۲ عمل می‌کنیم، و معادله (۶) را به صورت

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x \quad (8)$$

می‌نویسیم، و به جستجوی جوابی در یک فاصله حاوی $x=1$ می‌پردازیم. چون ضرایب معادله (۸) بجز در $x=0$ پیوسته‌اند، بنا بر قضیه ۱۰۲ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده حداقل در فاصله $0 < x < \infty$ معتبر است. برای یافتن جواب، نخست $\mu(x)$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left(\int_1^x \frac{2}{t} dt\right) = e^{2\ln x} \\ &= x^2 \end{aligned} \quad (9)$$

چون معادله (۸) را در $\mu(x) = x^2$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$x^2 y' + 2xy = 4x^3$$

یا

$$(x^2 y)' = 4x^3$$

پس $x^2 y = x^4 + c$ ، و

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2} \quad (10)$$

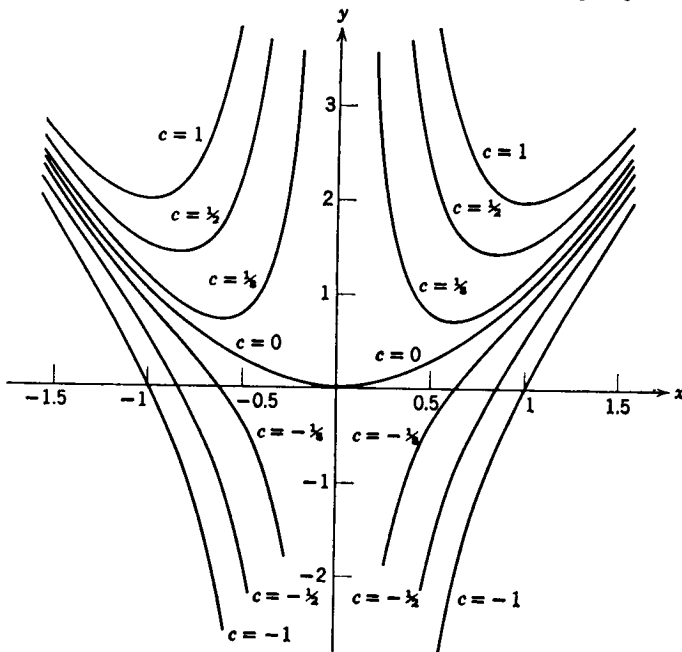
که در آن c دلخواه است، جواب عمومی معادله (۶) می‌باشد. خمهای انتگرال معادله (۶) به‌ازای چند مقدار c در شکل ۲۰۲ رسم شده است. برای برقراری شرط اولیه (۷)، لازم است که $c=1$ باشد، بدین‌سان جواب مسئله مقدار اولیه (۶) و (۷) عبارت است از

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (11)$$

دیده می‌شود که جواب (۱۱) هنگامی که $x \rightarrow 0$ بی‌کران می‌شود. این چندان شکفت‌آور نیست. زیرا $x=0$ نقطه ناپیوستگی ضریب y' در معادله دیفرانسیل (۸) است. اما، اگر شرط اولیه (۷) به صورت

$$y(1) = 1 \quad (12)$$

تغییر کند. آنگاه از رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود که $c=0$. بنابراین جواب مسئله مقدار اولیه (۶) . (۱۲)



شکل ۲.۲

$$y = x^2$$

(۱۳)

خواهد بود که وقتی $x \rightarrow 0$ کاملاً خوش رفتار است. این مثال نشان می‌دهد که قضیه ۱۰.۲ مدعی آن نیست که جواب مسئله مقدار اولیه حتماً باید در نقاط ناپیوستگی توابع p و g غیر عادی شود، بلکه قضیه مزبور می‌بیند آن است که جواب در نقاط دیگری نمی‌تواند غیر عادی گردد.

وضعیت جوابهای مسائل مقدار اولیه برای معادلات خطی مرتبه اول در همسایگی نقاط ناپیوستگی p و g از آنچه در بحث بالا به نظر می‌رسد پیچیده‌تر است. بررسی نسبتاً مبسوطی از این امکانات در مسائل ۹ تا ۱۲ و ۱۵ به عمل آمده است، بحث مشروح‌تری در فصل ۴ در ارتباط با معادلات خطی مرتبه دوم خواهد آمد.

گاهی، معادلات غیر خطی را می‌توان با تعویض متغیر به معادله خطی برگرداند و آن را حل کرد. نوعی از این معادلات به معادله برنولی مشهور است (مسائل ۱۶ و ۱۷ را ببینید).

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$y' + (1/x)y = \sin x, \quad x > 0$$

(۰.۱)

$$x^2 y' + 3xy = (\sin x)/x, \quad x < 0$$

(۰.۲)

$$y' + (\operatorname{tg} x) y = x \sin 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (۳)$$

$$xy' + 2y = e^x, \quad x > 0 \quad (۴)$$

در هر يك از مسائل ۵ تا ۸ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید. فاصله‌ای را که در آن جواب معتبر است معین کنید.

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = \frac{1}{4} \quad (۵)$$

$$xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1 \quad (۶)$$

$$y' + (\operatorname{cotg} x) y = 2 \csc x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad (۷)$$

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad (۸)$$

در هر يك از معادلات مسائل ۹ تا ۱۲ حداقل يك ضریب در $x = 0$ ناپیوسته است. هر معادله را به ازای $x > 0$ حل کنید و وضعیت جواب را هنگامی که $x \rightarrow 0$ به ازای مقادیر مختلف ثابت انتگرال گیری بررسی کنید. چند عضو از خانواده خمهای انتگرال را رسم کنید.

$$y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x \quad ۱۰ \quad y' + \left(\frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2} \quad (۹)$$

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \frac{(\cos x)}{x} \quad (۱۲) \quad y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x^{1/2} \quad ۱۱$$

۱۳. (الف) نشان دهید که جواب (۳)ی معادله خطی کلی (۱) را می‌توان بدصورت

$$y = cy_1(x) + y_2(x) \quad (\text{يك})$$

نوشت. که در آن c ثابت دلخواهی است. توابع y_1 و y_2 را مشخص کنید.

(ب) نشان دهید که y_1 جواب معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = 0 \quad (\text{دو})$$

است که متناظر به $g(x) = 0$ می‌باشد.

(ج) نشان دهید که y_2 جواب معادله خطی کامل (۱) است. بعداً خواهیم دید (مثلاً، در بند ۶.۳) که جوابهای معادلات خطی مرتبه بالاتر نیز طرحی مشابه رابطه (يك) دارند. ۱۴. نشان دهید که اگر a و λ ثابتهای مثبت، و b عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه هر جواب معادله

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

دارای این خاصیت است که $y \rightarrow 0$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$.

دوهمایی: حالت‌های $a = \lambda$ و $a \neq \lambda$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۵. ضرایب ناپیوسته. گاهی در معادلات دیفرانسیل خطی توابع p و g و یا یکی از آنها دارای ناپیوستگی جهشی است. اگر x_0 چنین نقطه ناپیوستگی باشد، آنگاه لازم است که معادله به ازای $x < x_0$ و به ازای $x > x_0$ جداگانه حل شود. سپس باید دو جواب را طوری به هم پیوند داد که y در x_0 پیوسته شود، این کار با انتخاب مناسب ثابت‌های دلخواه انجام می‌گیرد. دو مسئله زیر این وضعیت را روشن می‌کند. در هر حالت به این نکته توجه شود که نمی‌توان y' را نیز در x_0 پیوسته ساخت.

(الف) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' + 2y = g(x), \quad y(0) = 0$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

(ب) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' + p(x)y = 0, \quad y(0) = 1$$

که در آن

$$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

* معادلات برنولی. گاهی می‌توان معادله غیرخطی را با تعویض تابع به معادله خطی برگرداند. مهمترین طبقه این گونه معادلات به صورت

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

است، این معادلات را معادلات برنولی می‌نامند (منسوب به یاکوب برنولی ۱۶۵۴-۱۷۰۵). در مسائل ۱۶ و ۱۷ این نوع معادلات بررسی می‌شود.

(الف) معادله برنولی را به ازای $n = 0$ و $n = 1$ حل کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $n \neq 0, 1$ ، آنگاه با گرفتن $v = y^{1-n}$ معادله برنولی به معادله خطی بدل می‌شود. این روش حل را لاینیتز در ۱۶۹۶ یافته است.

۱۷. با استفاده از روش مسئله ۱۶، قسمت (ب) هریک از معادلات دیفرانسیل زیر

را حل کنید.

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$$

(الف)

$$y' = \epsilon y - \sigma y^2; \quad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$$

(ب)

$$y' = \epsilon y - \sigma y^3; \quad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$$

(ج)

$$y' = \epsilon y - f(x)y^2; \quad \epsilon > 0 \quad (د)$$

تبصره: معادله (ب) در بررسی دینامیک جمعیت دارای اهمیت است. معادله (ج) :
و تعمیم آن (د)، در پایداری تیدرودینامیکی به کار می‌رود. معادلات (ب) و (ج) را نیز
می‌توان با روشهای بند ۴.۲ حل کرد. برای بحث بیشتر درباره معادله (ب) مسئله ۱۹،
بند ۴.۲، مسئله ۱۱، بند ۹.۲ و بند ۱۰.۹ را ببینید.

۳.۲ معادلات غیر خطی

در اینجا به بررسی معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$y' = f(x, y) \quad (۱)$$

مقید به شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (۲)$$

می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه (۲) با هم تشکیل يك مسئله مقدار اولیه می‌دهند. سؤالات اساسی که باید مورد توجه قرار گیرند عبارتند از اینکه آیا جوابی برای این مسئله مقدار اولیه وجود دارد؟ آیا چنین جوابی یکتاست؟ جواب در چه فاصله‌ای معین است، و چگونه می‌توان فرمول مناسبی برای جواب ساخت؟ به همه این سؤالات در بند ۱۰.۲ و ۲.۲ در حالتی که معادله (۱) خطی است به آسانی پاسخ داده شد. اما، اگر f نسبت به متغیر وابسته y تابعی خطی نباشد، بررسی پیش دیگر به کار نمی‌آید. در این بند چند نوع از مسائل مقدار اولیه غیر خطی را به روشی کلی مورد بحث قرار می‌دهیم. به ویژه، تفاوت‌های مهم متعددی را بین مسئله غیر خطی (۱) و (۲) و مسئله خطی متشکل از معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (۳)$$

و شرط اولیه (۲) مورد توجه قرار خواهیم داد.

۹ علت آنکه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبتاً ساده‌ترند این است که فرمولی وجود دارد که جواب چنین معادله‌ای را در همه حالتها به دست می‌دهد. برعکس، برای حل معادلات غیر خطی مرتبه اول يك چنین روش کلی وجود ندارد. در واقع، تعیین جواب $y = \phi(x)$ برای معادله غیر خطی به روش تحلیلی معمولاً دشوار و اغلب غیرممکن است. فقدان روش کلی برای جواب معادله غیر خطی حداقل دارای دو نتیجه مهم است. اول آنکه، روشهای تقریب جواب، مانند روش عددی، و اطلاعات کیفی درباره جوابها در معادلات غیر خطی اهمیت بیشتری از مورد معادلات خطی پیدا می‌کنند. مقدمه‌ای بر برخی از این روشها در فصول (۸) و (۹) آمده است. دوم آنکه، برای بررسی سؤالات وجود و یکتایی جواب باید از روشهای غیرمستقیم استفاده کرد، زیرا عموماً نمی‌توان مستقیماً به ساختن جواب پرداخت.

وجود و یکتایی. قضیه اساسی وجود و یکتایی زیرین نظیر قضیه ۱۰.۲ مربوط به معادلات خطی است. اما، اثبات آن بسیار پیچیده تر است، و آن را به بند ۱۱.۲ موقوف می کنیم.

قضیه ۲۰.۲. فرض کنیم توابع f و $\partial f / \partial y$ در مستطیل $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$ که حاوی نقطه (x_0, y_0) است پیوسته باشند. آنگاه، در یک فاصله $x_0 - h < x < x_0 + h$ مشمول در $\alpha < x < \beta$ یک جواب یکتای $y = \phi(x)$ برای مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

وجود دارد.

شرایطی که در قضیه ۲۰.۲ بیان شد برای تضمین وجود و یکتایی جواب مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲) در یک فاصله $x_0 - h < x < x_0 + h$ کافی است. اما، امکان دارد که تعیین مقدار h دشوار باشد. علاوه بر این امکان دارد که حتی اگر f در فرضهای قضیه صدق نکند، باز هم یک جواب یکتا وجود داشته باشد. در واقع، اگر به جای فرض پیوستگی $\partial f / \partial y$ شرایطی ضعیفتر بگذاریم، نتیجه قضیه همچنان برقرار می ماند. به علاوه، می توان وجود جواب (اما نه یکتایی آن) را تنها بر اساس پیوستگی f بدون هیچ گونه فرض اضافی اثبات کرد. اما، صورت فعلی قضیه برای اکثر مقاصد رضایت بخش است.

با مثالهایی می توان نشان داد که برای به دست آوردن نتایج مذکور در قضیه، برخی شرایط مربوط به f ضروری هستند. مثلاً، در مثال زیر می بینیم که اگر فرضهای قضیه ۲۰.۲ نقض شود، مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲) می تواند دارای بیش از یک جواب باشد.

مثال ۱. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به ازای $x \geq 0$ بیابید

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

این مسئله را می توان به آسانی با روش بند ۴.۲ حل کرد. اما دیده می شود که تابع

$$y = \phi(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$$

در روابط (۴) صدق می کند. از طرف دیگر، تابع

$$y = \psi(x) = 0$$

نیز یک جواب مسئله مقدار اولیه مزبور است. بنابراین مسئله دارای جواب یکتا نیست. این نکته، قضیه وجود و یکتایی را نقض نمی کند، زیرا

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (y^{1/3}) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

و این تابع در هر نقطه ای که y آن صفر باشد، پیوسته و حتی معین نیست. بنابراین قضیه را

در ناحیه‌ای که شامل بخشی از محور x باشد نمی‌توان به‌کار برد. اما به ازای هر نقطه (x_0, y_0) که بر محور x واقع نباشد، معادله دیفرانسیل $y' = y^{1/3}$ دارای جوابی یکتاست که از (x_0, y_0) می‌گذرد.

فاصله تعریف. جواب مسئله خطی (۲)؛ (۳). در سراسر هر فاصله حول $x = x_0$ که در آن توابع p و g پیوسته باشند وجود دارد. از سوی دیگر، برای مسئله مقدار اولیه غیر خطی (۱)، (۲) ممکن است به دشواری بتوان فاصله‌ای را که در آن جوابی وجود دارد تعیین کرد. مادامی که نقطه $[x, \phi(x)]$ در ناحیه‌ای واقع باشد که در آن فرضهای قضیه برقرارند جواب $y = \phi(x)$ وجود خواهد داشت، اما چون معمولاً $\phi(x)$ در دست نیست، امکان دارد که تشخیص وضع نقطه $[x, \phi(x)]$ نسبت به این ناحیه غیر ممکن باشد. به هر حال، ممکن است فاصله‌ای که در آن جوابی وجود دارد، ارتباط ساده‌ای با تابع f معادله (۱) نداشته باشد. مثال زیر این مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۲. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \quad (5)$$

به آسانی با جایگزینی مستقیم می‌توان تحقیق کرد که تابع

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (6)$$

جواب این مسئله مقدار اولیه است. روشن است که این جواب هنگامی که $x \rightarrow 1$ بی‌کران می‌شود، و فقط به ازای $-\infty < x < 1$ معین خواهد بود. اما در خود معادله دیفرانسیل نشانه‌ای وجود ندارد که بر اهمیت نقطه $x = 1$ دلالت کند. علاوه بر این، اگر به جای شرط اولیه قرار دهیم

$$y(0) = 2 \quad (7)$$

باز به آسانی می‌توان تحقیق کرد که جواب معادله دیفرانسیل (۵) که در شرط اولیه (۷) صدق کند، عبارت است از

$$y = \frac{2}{1-2x} \quad (8)$$

و این جواب هنگامی که $x \rightarrow 1/2$ بی‌کران می‌شود. این مثال دشواری دیگری از مسائل مقدار اولیه معادلات غیر خطی را نشان می‌دهد، بدین معنی که، امکان دارد نقاط غیر عادی جواب بر حسب شرط اولیه تغییر کنند.

جواب عمومی. معادلات خطی و غیر خطی از جنبه دیگری نیز تفاوت دارند که مربوط به مفهوم جواب عمومی است. برای معادله مرتبه اول می‌توان جوابی یافت که شامل يك ثابت دلخواه باشد، و از آن همه جوابهای ممکن با مشخص کردن مقادیر این ثابت

به دست می آیند. درباره معادلات غیرخطی ممکن است وضع چنین نباشد؛ حتی اگر بتوان جوابی شامل يك ثابت دلخواه پیدا کرد، ممکن است جوابهایی وجود داشته باشند که نتوان آنها را به ازای هیچ مقداری از این ثابت به دست آورد. در این باره مثالهایی در مسائل ۳ و ۶ می آوریم. بنابراین واژه «جواب عمومی» را فقط در بحث معادلات خطی به کار خواهیم برد.

جوابهای ضمنی. بار دیگر یادآوری می کنیم که معادله خطی مرتبه اول دارای فرمول صریح [رابطه (۲۲)، بند ۱۰.۲] برای جواب $y = \phi(x)$ می باشد. مادامی که توابع اولیه لازم را بتوان به دست آورد، در هر نقطه مقدار جواب را می توان تنها با گذاشتن مقدار مناسب x در فرمول مزبور به دست آورد. برای معادله غیرخطی به ندرت می توان چنین جواب صریحی پیدا کرد. در بیشتر موارد حداکثر می توان مشتق موجود در معادله (۱) را حذف کرد و به جای معادله دیفرانسیل، معادله ای فاقد مشتق به صورت

$$\psi[x, \phi(x)] = 0 \quad (9)$$

به دست آورد که همه، یا برخی از جوابهای $y = \phi(x)$ معادله (۱) در آن صدق می کنند. در حالتیهای بسیاری از معادلات غیرخطی حتی همین کار را هم نمی توان انجام داد. اما، هنگامی که بتوان رابطه ای مانند رابطه (۹) به دست آورد، معمولاً آن را فرمول ضمنی جواب معادله (۱) می گویند. هر رابطه به صورت (۹) را نیز يك انتگرال (یا انتگرال اول) معادله (۱) می نامند.

به عنوان مثال، معادله غیر خطی ساده

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (10)$$

را در نظر می گیریم. با استفاده از روشهای بند بعد، به آسانی می توان نشان داد که تمام جوابهای معادله (۱۰) در معادله جبری

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (11)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است نیز صدق می کنند. برای تحقیق صحت این گزاره می توان از معادله (۱۱) نسبت به x مشتق گرفت و به دست آورد $2x + 2yy' = 0$ ، یا $y' = -x/y$ که همان معادله (۱۰) می باشد. بنا بر این معادله (۱۱) يك فرمول ضمنی برای جوابهای معادله (۱۰) است. به ازای $c^2 \leq x^2$ ، توابع $y = \phi(x)$ بسیاری وجود دارد که در معادله (۱۱) صدق می کنند. برخی از آنها به قرار زیر است

$$y = \phi_1(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad -c \leq x \leq c \quad (12)$$

$$y = \phi_2(x) = -\sqrt{c^2 - x^2} \quad -c \leq x \leq c \quad (13)$$

$$y = \phi_r(x) = \begin{cases} \sqrt{c^2 - x^2} & -c \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{c^2 - x^2} & 0 < x \leq c \end{cases} \quad (14)$$

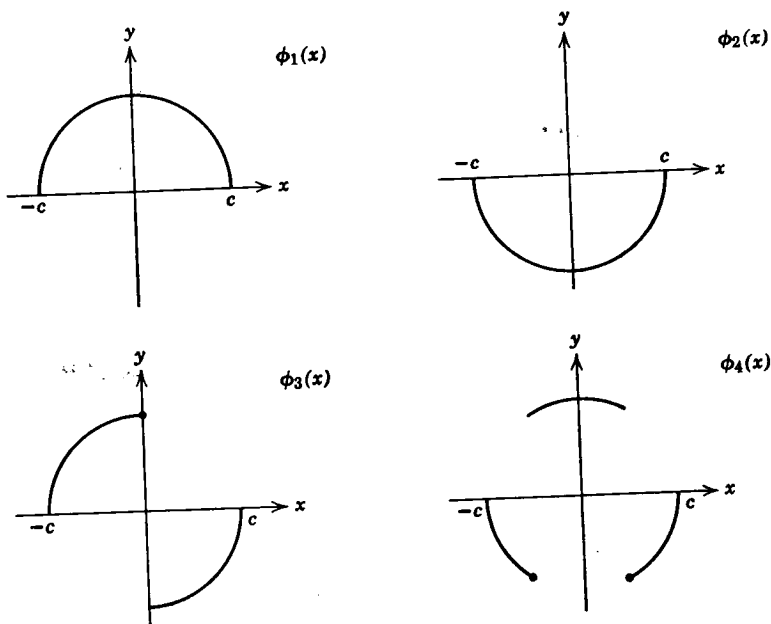
$$y = \phi_f(x) = \begin{cases} -\sqrt{c^2 - x^2} & -c \leq x \leq -c/2 \\ \sqrt{c^2 - x^2} & -c/2 < x < c/2 \\ -\sqrt{c^2 - x^2} & c/2 \leq x \leq c \end{cases} \quad (15)$$

در شکل ۳.۲ نمودار توابع (۱۲) تا (۱۵) را ببینید. اما، از آنها فقط دو تابع، یعنی، توابع (۱۲) و (۱۳) در تمام فاصله $-c < x < c$ در معادله دیفرانسیل (۱۰) صدق می‌کند. اگر شرط اولیه‌ای نیز داده شده باشد، آنگاه باید هر کدام از توابع ϕ_1 و ϕ_2 را که در شرط مزبور صدق می‌کند و همچنین مقدار بخصوص c را انتخاب کنیم. مثلاً، اگر شرط اولیه عبارت باشد از

$$y(0) = 3 \quad (16)$$

آنگاه باید ϕ_2 را کنار گذاشت، و ϕ_1 را حفظ نمود و مقدار c را برابر ۳ انتخاب کرد. بنابراین

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -3 < x < 3 \quad (17)$$



شکل ۳.۲

يك جواب مسئله مقدار اولیه (۱۵) و (۱۶) است. بنابر قضیه ۲.۲ این مسئله روی فاصله $3 < x < 3 -$ جواب دیگری ندارد.

در مثال پیش، به علت آنکه رابطه ضمنی (۱۱) نسبت به y از درجه دوم بود، جوابهای صریح (۱۲) و (۱۳) به آسانی به دست آمد. اما، با کمی تأمل دیده می شود که رابطه ضمنی (۹)، به فرضی که بتوان آن را پیدا کرد اغلب پیچیده تر از معادله (۱۱) است. در این صورت، احتمالاً حل آن (به طور تحلیلی) نسبت به y غیر ممکن خواهد بود، و حتی تعیین فواید اصلی که جوابها در آن وجود دارند ممکن است بسیار دشوار باشد. علاوه بر این باید به خاطر سپرد که ممکن است جوابهایی از رابطه ضمنی (۹) در معادله دیفرانسیل صدق نکنند، و نیز در برخی از حالتها ممکن است معادله دیفرانسیل جوابهایی داشته باشد که در رابطه ضمنی مزبور صدق نکنند.

ساختن خمهای انتگرال به روش ترسیمی. چون روشی کلی برای به دست آوردن جوابهای تحلیلی دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود ندارد ممکن است روشهایی که جوابهای تقریبی یا اطلاعات کیفی دیگری درباره جوابها به دست می دهند دارای اهمیت بسیاری باشند. یکی از این روشها مبتنی بر تقریب ترسیمی خمهای انتگرال است. در هر نقطه از صفحه xy که در آن $f(x, y)$ معین باشد، معادله دیفرانسیل (۱)

$$y' = f(x, y)$$

مقداری برای y' به دست می دهد، که می توان آن را به عنوان شیب قطعه خطی که از این نقطه می گذرد در نظر گرفت. همه این قطعه خطها به طور کلی يك میدان امتدادی برای معادله دیفرانسیل مزبور تشکیل می دهند. خمهای انتگرال عبارتند از خمهایی که در هر نقطه به عنصری از میدان امتدادی که به آن نقطه وابسته است مماس باشند.

شکل کلی يك خم انتگرال را می توان گاهی با رسم عناصر میدان امتدادی در تعداد زیادی نقاط، مجسم کرد. به عنوان مثال، معادله ساده

$$y' = 4y(1 - y) \quad (18)$$

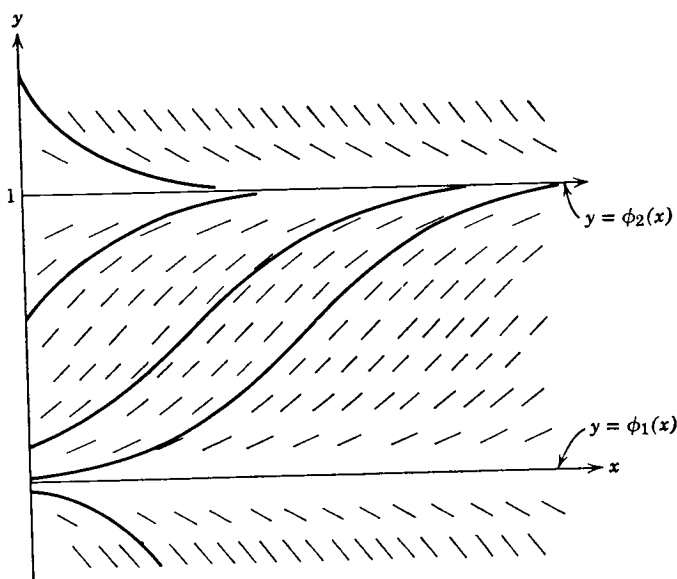
را که در عین حال نوع مهمی از معادلات غیرخطی است در نظر می گیریم. ساختن میدان امتدادی، با توجه به اینکه طرف دوم معادله (۱۸) مستقل از x است بسیار ساده می شود. بنابراین، عناصر میدان امتدادی در همه نقاط هر خط موازی محور x خود متوازی اند. علاوه بر این، با جستجو می توان برای معادله (۱۸) دو جواب خصوصی، یعنی جوابهای ثابت $y = \phi_1(x) = 1$ و $y = \phi_2(x) = 0$ را به دست آورد. این جوابهای خصوصی صفحه xy را به سه منطقه تقسیم می کنند، که در هر يك از آنها y' دارای علامت ثابتی است. در واقع

$$\text{اگر } y < 0, \text{ آنگاه } y' < 0$$

$$\text{اگر } 0 < y < 1, \text{ آنگاه } y' > 0$$

اگر $y > 1$ ، آنگاه $y' < 0$

با استفاده از این اطلاعات به آسانی می‌توان شکل ۴.۲ را که نمایشگر میدان امتدادی معادله (۱۸) است رسم کرد.



شکل ۴.۲

از این طرح به آسانی می‌توان برخی از خواص کیفی جوابها را استنباط کرد. نخست، جواب متناظر به شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ با $1 < y_0 < \infty$ را در نظر می‌گیریم. چنین جوابی صعودی است، زیرا در مجاورت نقطه اولیه داریم $y' > 0$. اما، این جواب نمی‌تواند از $y=1$ فراتر رود، زیرا اگر به $y=1$ برسد، شیب آن صفر می‌شود (وصف باقی می‌ماند). در واقع، جواب مزبور نمی‌تواند به‌ازای هیچ مقدار متناهی x به $y=1$ برسد، زیرا اگر برسد، از این نقطه به‌عنوان نقطه اولیه دو جواب خواهد گذشت [یکی جواب مورد بحث و دیگری جواب $y = \phi_2(x) = 1$] و این با قضیه ۲.۲ در تناقض است. بدین ترتیب هر جوابی که نقطه آغاز آن در فاصله $1 < y < \infty$ باشد، هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به $y=1$ میل می‌کند. به‌همین طریق هر جوابی که نقطه آغاز آن بالای $y=1$ باشد، نزولی است و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به $y=1$ میل می‌کند. بالاخره، هر جوابی که نقطه آغاز آن در زیر $y=0$ باشد باز هم تنزل می‌کند و سرانجام به $-\infty$ میل می‌کند. معادله (۱۸) را با روش مذکور در بند ۴.۲، یا تشخیص آن به‌عنوان معادله برنولی (مسائل ۱۶ و ۱۷، بند ۲.۲) می‌توان حل کرد. در شکل ۴.۲ چند جواب رسم شده است.

اما، تأکید می‌شود که رفتار کیفی جوابهای معادله (۱۸) بدون حل آن تعیین شده است. موضوعاتی که در اینجا مطرح شد، با مفاهیم پایداری و ناپایداری جوابهای معادلات دیفرانسیل ارتباط دارند، و در فصل (۹) مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل

۱. برای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر، ناحیه‌ای از صفحه xy را بیابید که در هر نقطه آن وجود یکتایی جواب، بنا بر قضیه اساسی وجود و یکتایی تضمین می‌شود.

$$y' = \frac{x-y}{2x+5y} \quad (\text{الف}) \quad y' = (1-x^2-y^2)^{1/2} \quad (\text{ب})$$

$$y' = 2xy/(1+y^2) \quad (\text{ج}) \quad y' = 2(x+y)^{-2} \quad (\text{د})$$

$$y' = \frac{\ln |xy|}{1-x^2+y^2} \quad (\text{ه}) \quad y' = (x^2+y^2)^{3/2} \quad (\text{و})$$

۲. نشان دهید که $y = \phi(x) = (1-x^2)^{-1}$ يك جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1$$

است. در چه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۳. نشان دهید که $y = \phi(x) = [2(x+c)]^{-1/2}$ که در آن c يك ثابت دلخواه است، در معادله دیفرانسیل

$$y' + y^3 = 0$$

صدق می‌کند. جوابی را که در شرط اولیه $y(1) = 2$ صدق می‌کند بیابید. در چه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟ توجه شود که $y = 0$ نیز يك جواب این معادله دیفرانسیل است، اما آن را نمی‌توان از $y = \phi(x)$ به‌ازای مقداری از c به‌دست آورد.

۴. تحقیق کنید که

$$y = \phi(x) = \left[1 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) \right]^{3/2}$$

يك جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^2)}, \quad y(0) = 1$$

می‌باشد. در چه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۵. تحقیق کنید که

$$y = (c^2 - 4x^2)^{1/2}, \quad y = -(c^2 - 4x^2)^{1/2}$$

جوابهای معادله دیفرانسیل

$$y' = -4x/y$$

می باشند. در چه بخشهایی از صفحه xy این جوابها معتبرند؟ جوابهای خصوصی متناظر به نقاط $(4, 0)$ و $(-1, 1)$ را بیابید.

۶. (الف) تحقیق کنید که $y_1(x) = 1 - x$ و $y_2(x) = -x^2/4$ هر دو جوابهای مسئله مقدار اولیه

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1$$

می باشند. در چه فواصلی این جوابها معتبرند؟

(ب) توضیح دهید که چرا وجود دو جواب برای مسئله مزبور با بخش یکتایی قضیه ۲.۲ در تناقض نیست.

(ج) نشان دهید که $y = cx + c^2$ که در آن c ثابت دلخواهی است به ازای $x \geq -2c$ در معادله دیفرانسیل قسمت (الف) صدق می کند. اگر $c = -1$ ، شرط اولیه نیز برقرار است، و همان جواب $y = y_1(x)$ به دست می آید. نشان دهید که نمی توان مقدار c را طوری انتخاب کرد که جواب دوم، $y = y_2(x)$ به دست آید.

۷. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، میدان امتدادی را طوری بسازید، که بتوان رفتار عمومی خانواده خمهای انتگرال را به خوبی تجسم کرد.

$$y' = x^2 + y^2 \quad (\text{الف}) \quad y' = x^2 - xy + y^2 - 1 \quad (\text{ب})$$

$$y' = \frac{xy}{1+x^2} \quad (\text{ج}) \quad y' = \frac{2x-3y}{x+y} \quad (\text{د})$$

۸. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، با در نظر گرفتن میدان امتدادی الگوی کلی خمهای انتگرال را معین کنید. فرض کنیم $y = \phi(x, y_0)$ جواب متناظر به شرط اولیه $y(0) = y_0$ باشد. $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y_0)$ به ازای چه مقادیری از y_0 متناهی است؟ این حد را در هر یک از حالت های مزبور حساب کنید.

$$y' = y(1 - y^2) \quad (\text{الف}) \quad y' = -y(1 + y^2) \quad (\text{ب})$$

$$y' = \varepsilon y - \sigma y^2 \quad \sigma > 0, \varepsilon > 0 \quad (\text{د}) \quad y' = (1-y)(2-y) \quad (\text{ج})$$

در هر یک از مسائل ۹ تا ۱۲:

(الف) طرح اجمالی میدان امتدادی را رسم کنید.

(ب) چند عضو خانواده خمهای انتگرال را بدون حل معادله دیفرانسیل رسم کنید.

(ج) مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

(د) جوابی را که در (ج) به دست آورده اید رسم کنید، و آن را با آنچه در

(ب) یافتید مقایسه کنید.

$$y' = x + 1, y(0) = 1 \quad ۱۰ \quad y' = -1, y(1) = 2 \quad ۹$$

$$y' - y = 1 - e^x, y(0) = 0 \quad ۱۲ \quad y' + xy = 1, y(1) = 0 \quad ۱۱$$

۴.۲ معادلات جدایی پذیر

اغلب مناسبتر است که معادله

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۱)$$

را به صورت زیر بنویسیم

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۲)$$

این عمل را می توان همواره با قراردادن $N(x, y) = 1$ و $M(x, y) = -f(x, y)$ انجام داد، اما امکان دارد راههای دیگری نیز وجود داشته باشد. در حالتی که M فقط تابع x و N فقط تابع y باشد، آنگاه معادله (۲) به صورت زیر درمی آید

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۳)$$

مثلاً، معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$$

را می توان به صورت زیر نوشت

$$-x^2 + (1+y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

هر معادله دیفرانسیلی را که بتوان به صورت (۳) نوشت، جدایی پذیر می گویند؛ علت این نامگذاری، با نوشتن معادله (۳) به صورت دیفرانسیلی

$$M(x)dx = -N(y)dy \quad (۴)$$

روشن می شود. اکنون فرض کنیم که توابع H_1 و H_2 به گونه ای باشند که

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y) \quad (۵)$$

آنگاه معادله (۳) به صورت زیر درمی آید

$$H'_1(x) + H'_r(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۶)$$

اگر $y = \phi(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد، آنگاه طبق قاعده زنجیری داریم

$$H'_r(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_r[\phi(x)] \quad (۷)$$

در نتیجه. اگر $y = \phi(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل (۳) باشد، آنگاه معادله (۶) به صورت

$$H'_1(x) + \frac{d}{dx} H_r[\phi(x)] = 0$$

یا

$$\frac{d}{dx} \{H_1(x) + H_r[\phi(x)]\} = 0 \quad (۸)$$

نوشته می شود. با انتگرال گیری از معادله (۸) به دست می آید

$$H_1(x) + H_r[\phi(x)] = c \quad (۹)$$

یا

$$H_1(x) + H_r(y) = c \quad (۱۰)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. بدین سان برای معادله دیفرانسیل (۳) جواب $y = \phi(x)$ به صورت ضمنی (۱۰) به دست آمده است. توابع H_1 و H_r عبارتند از توابعی که در معادلات (۵) صدق کنند، یعنی به ترتیب توابع اولیه M و N باشند. در عمل جواب (۱۰) معمولاً از معادله (۴) با انتگرال گیری از طرف اول نسبت به x و از طرف دوم نسبت به y به دست می آید، استدلال بالا این عمل را توجیه می کند.

اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل، شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (۱۱)$$

داده شده باشد، برای تعیین جواب معادله (۳) که در این شرط صدق کند، در معادله (۱۰) قرار می دهیم $x = x_0$ و $y = y_0$. از آنجا

$$c = H_1(x_0) + H_r(y_0) \quad (۱۲)$$

با گذاشتن این مقدار c در معادله (۱۰)، و توجه به رابطدهای

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(t) dt, \quad H_r(y) - H_r(y_0) = \int_{y_0}^y N(t) dt$$

به دست می آید

$$\int_{x_0}^x M(t) dt + \int_{y_0}^y N(t) dt = 0 \quad (13)$$

معادله (۱۳) جواب معادله دیفرانسیل (۳) را که در شرط اولیه (۱۱) نیز صدق می‌کند، به‌طور ضمنی نمایش می‌دهد. خواننده باید به‌خاطر بسپارد که تعیین جواب به‌صورت صریح، یا حتی تعیین دقیق فاصله‌ای که در آن جواب وجود دارد، عموماً مستلزم آن است که معادله (۱۳) را نسبت به y به‌عنوان تابعی از x حل کنیم. این عمل ممکن است دشواریهای بزرگی دربرداشته باشد.

مثال ۱. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1 \quad (14)$$

این معادله دیفرانسیل را می‌توان به‌صورت

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx$$

نوشت. چون از طرف اول نسبت به y و از طرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم به‌دست می‌آید

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c \quad (15)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. برای تعیین جوابی که در شرط اولیه مزبور صدق کند، در معادله (۱۵) قرار می‌دهیم $x=0$ و $y=-1$ ، از آنجا $c=3$. بنابراین جواب مسئله مقدار اولیه (۱۴) به‌صورت ضمنی

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \quad (16)$$

داده می‌شود. برای آنکه جواب را به‌صورت صریح به‌دست آوریم، باید از معادله (۱۶)، y را بر حسب x به‌دست آورد. این عمل را در اینجا به‌آسانی می‌توان انجام داد، زیرا معادله (۱۶) نسبت به y از درجه دوم است، و داریم

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (17)$$

بدین‌سان رابطه (۱۷) برای معادله دیفرانسیل مزبور دو جواب به‌دست می‌دهد، که فقط یکی از آنها در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند. این جواب متناظر به‌علامت منفی در رابطه (۱۷) است. پس بالاخره جواب مسئله مقدار اولیه (۱۴) عبارت است از

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (18)$$

توجه شود که اگر اشتباهاً در رابطه (۱۷) علامت مثبت را انتخاب کنیم، در این صورت برای همان معادله دیفرانسیل جوابی به‌دست می‌آید که در شرط اولیه $y(0)=3$ صدق

می‌کند. بالاخره، برای تعیین فاصله‌ای که در آن جواب (۱۸) معتبر است، باید به تعیین فاصله‌ای که در آن مقدار زیر رادیکال مثبت است بپردازیم. با ترسیم این عبارت به عنوان تابعی از x ، خواننده می‌تواند نشان دهد که فاصله مطلوب $x > -2$ است.

مثال ۲. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + y^2}, \quad y(0) = 1 \quad (19)$$

نخست معادله دیفرانسیل را به صورت

$$\frac{1 + y^2}{y} dy = \cos x dx \quad (20)$$

می‌نویسیم و چون از طرف اول نسبت به y و از طرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + c \quad (21)$$

برای برقراری شرط اولیه، مقادیر $x=0$ و $y=1$ را در معادله (۲۱) جایگزین می‌کنیم، $c=1$ به دست می‌آید. از این رو جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) به طور ضمنی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + 1 \quad (22)$$

چون نمی‌توان y را از رابطه (۲۲) به صورت تابع صریحی از x به دست آورد، تحلیل بیشتر این مسئله دشوارتر می‌گردد. نکته‌ای که به خوبی روشن است این است که هیچ جوابی محور x را قطع نمی‌کند، یعنی نقطه‌ای که مختص y آن صفر باشد و در رابطه (۲۲) صدق کند وجود ندارد. برای ذلك این مطلب، توجه شود که طرف اول رابطه (۲۲) به ازای $y=0$ بینهایت می‌شود، در حالی که طرف دوم هیچگاه بینهایت نمی‌شود، از این رو هیچ نقطه‌ای از محور x در رابطه (۲۲) صدق نمی‌کند. بدین سان، نتیجه می‌شود که برای جواب معادلات (۱۹) همواره $y > 0$ است. در نتیجه، می‌توان برای این مسئله از علامت قدر مطلق در رابطه (۲۲) صرف نظر کرد. همچنین می‌توان نشان داد که فاصله تعریف جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) تمام محور x ، $-\infty < x < \infty$ می‌باشد. در مسئله ۲۵ طرز اثبات آن را می‌بینیم.

در مثال ۱ تعیین y به عنوان تابعی صریح از x و مشخص کردن دقیق فاصله‌ای که جواب مزبور در آن وجود دارد دشوار نبود. اما، این يك وضعیت استثنایی است، و اغلب لازم می‌آید که جواب را به همان صورت ضمنی مانند مثال ۲ رها کنیم. بدین ترتیب، در مسائل این بند و بندهای ۵.۲ تا ۸.۲، اصطلاح «معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید» بدان

معنی است که اگر دشوار نباشد جواب را به صورت صریحی به دست آوریم، و در غیر این صورت يك فرمول ضمنی برای جواب بیاوریم.

مسائل

هريك از معادلات مسائل ۱ تا ۸ را حل کنید. نواحی صفحه xy را که در آنها شرایط قضیه اساسی وجود و یکتایی برقرارند بیاورید.

$$\begin{array}{ll} \textcircled{۰۲} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^2)} & \textcircled{۰۱} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \\ \textcircled{۰۴} \quad y' = 1+x+y^2+xy^2 & \textcircled{۰۳} \quad y' + y^2 \sin x = 0 \\ \textcircled{۰۶} \quad xy' = (1-y^2)^{1/2} & \textcircled{۰۵} \quad y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y) \\ \textcircled{۰۸} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} & \textcircled{۰۷} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^x} \end{array}$$

جواب هريك از مسائل مقدار اولیه ۹ تا ۱۴ را به صورت صریح بیاورید، و فاصله تعریف جواب را (حداقل به طور تقریب) تعیین کنید.

$$\sin 2x dx + \cos 3y dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \textcircled{۰۹}$$

$$x dx + ye^{-x} dy = 0, \quad y(0) = 1 \quad \textcircled{۱۰}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r, \quad r(0) = 2 \quad \textcircled{۱۱}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+x^2y}, \quad y(0) = -2 \quad \textcircled{۱۲}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1 \quad \textcircled{۱۳}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y}, \quad y(2) = 0 \quad \textcircled{۱۴}$$

۱۵. معادله زیر را در فاصله $1 < x < 2$ حل کنید

$$y^2(1-x^2)^{1/2} dy = \sin^{-1} x dx$$

۱۶. معادله زیر را که در آن a, b, c و d مقادیر ثابت اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+b}{cy+d}$$

۱۷. معادله زیر را که در آن a, b, c و d مقادیر ثابت اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d}$$

۱۸. نشان دهید که معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{x-y}$$

جدایی پذیر نیست؛ اما اگر به جای y متغیر جدید v را که با رابطه $v = y/x$ تعریف شده است بگذاریم، آنگاه معادله نسبت به x و v جدایی پذیر است. جواب معادله داده شده را با این روش بیابید.

۱۹. (الف) مسئله مقدار اولیه $y' = \epsilon y$ ، $y(0) = y_0$ را که در آن ϵ ثابت مثبتی است حل کنید. نشان دهید که حد جواب $y = \phi(x)$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$ دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \infty \quad \text{اگر } y_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \quad \text{اگر } y_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = -\infty \quad \text{اگر } y_0 < 0$$

(ب) اکنون فرض کنیم که معادله دیفرانسیل را با افزودن جمله $-\sigma y^2$ که در آن σ عدد مثبت (کوچک) است تغییر دهیم. با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' = \epsilon y - \sigma y^2, \quad y(0) = y_0$$

نشان دهید که در اینجا حد $y = \phi(x)$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$ دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \text{اگر } y_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \quad \text{اگر } y_0 = 0$$

نشان دهید که اگر $y_0 < 0$ ، آنگاه هنگامی که x به يك مقدار متناهی که به y_0 بستگی دارد می گراید، $\phi(x)$ بی کران می شود. معادله غیر خطی قسمت (ب) در کاربردهای بسیاری دارای اهمیت است (بندهای ۹.۲ و ۱۰.۹ را ببینید). توجه شود که این معادله يك معادله برنولی است، و می توان آن را با روش مسئله ۱۶ در بند ۲.۲ حل کرد.

۲۰. مسئله مقدار اولیه (۱۹) مثال ۲ را دوباره در نظر می گیریم. طرف دوم معادله دیفرانسیل را با $f(x, y)$ نشان می دهیم. و مشاهده می کنیم که

$$|f(x, y)| = \left| \frac{y}{1+2y^2} \right| |\cos x|$$

(الف) با پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم $y/(1+2y^2)$ ، نشان دهید که به ازای همه مقادیر y داریم

$$\left| \frac{y}{1+2y^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و بنابراین به ازای همه مقادیر x و y خواهیم داشت $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(ب) با به کار بردن نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که فاصله تعریف جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) عبارت است از $-\infty < x < \infty$.

۵.۲ معادلات کامل

نخست معادله

$$\psi(x, y) = c \quad (1)$$

را که در آن c مقدار ثابتی است در نظر می گیریم. با فرض اینکه معادله (۱)، y را به طور ضمنی به عنوان تابعی مشتق پذیر از x معین می کند، از آن نسبت به x مشتق می گیریم بدست می آید^۱

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = 0 \quad (2)$$

معادله (۲) معادله دیفرانسیلی است که جواب آن به وسیله معادله (۱) معین می شود. برعکس. معادله دیفرانسیل

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (3)$$

را در نظر می گیریم. اگر بتوان تابع ψ را طوری تعیین کرد که

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y) \quad (4)$$

و $\psi(x, y) = c$ به طور ضمنی $y = \phi(x)$ را به عنوان تابعی مشتق پذیر از x معین کند، آنگاه

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)y' &= \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' \\ &= \frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] \end{aligned} \quad (5)$$

۱. اندیشه مشتقهای جزئی نسبت به آن متغیر را نشان می دهند.

در نتیجه معادله (۳) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] = 0 \quad (۴)$$

در این حالت معادله (۳) را معادله دیفرانسیل کامل می گویند. جواب معادله (۳)، یا معادله هم ارز آن (۴)، به صورت ضمنی با معادله (۱)

$$\psi(x, y) = c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است معین می گردد.

در عمل معادله دیفرانسیل (۳) را اغلب به صورت متقارن دیفرانسیلی زیر می نویسند

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (۷)$$

مثال ۰۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

با جستجو می توان دید که طرف اول، مشتق x^2y^3 است. بدین سان معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 0$$

و جواب به صورت ضمنی $x^2y^3 = c$ و صریح $y = kx^{-2/3}$ به دست می آید.

در این مثال ساده تشخیص آنکه معادله دیفرانسیل مزبور کامل است آسان بود، درواقع با توجه به اینکه طرف اول مشتق x^2y^3 است جواب به آسانی بدست آمد. امکان دارد که در مورد معادلات پیچیده تر نتوان به این طریق عمل کرد. قضیه زیر روش منظمی برای تشخیص کامل بودن يك معادله دیفرانسیل را فراهم می سازد.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم توابع M, N, M_x و N_y در ناحیه مستطیلی^۱

$$R: \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$$
 پیوسته باشند. آنگاه معادله (۳)

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

در R يك معادله دیفرانسیل کامل است اگر فقط اگر

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (۸)$$

در نقطه R برقرار باشد. یعنی، شرط لازم و کافی برای وجود يك تابع ψ که در معادلات (۴)

۱. ضرورتی ندارد که ناحیه R مستطیلی باشد، بلکه تنها باید همبسته ساده باشد، برای بحث در معنای این اصطلاح مسئله ۱۶ را ببینید.

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

صدق کند، آن است که معادله (۸) به اذای M و N برقرار باشد.

اثبات این قضیه شامل دو قسمت است. نخست نشان می‌دهیم که اگر يك تابع ψ وجود داشته باشد به طوری که معادلات (۴) برقرار باشند، آنگاه معادله (۸) نیز برقرار است. با محاسبه M_y و N_x از معادلات (۴) داریم

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y) \quad (۹)$$

چون M_y و N_x پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که ψ_{yx} و ψ_{xy} نیز پیوسته می‌باشند، بنابراین متساوینداً و معادله (۸) برقرار می‌گردد.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر M و N در معادله (۸) صدق کنند، آنگاه معادله (۳) کامل است. برای اثبات يك تابع ψ که در معادلات (۴)

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

صدق کند می‌سازیم. با انتگرال‌گیری از معادله اول (۴) نسبت به x ، با فرض ثابت بودن y ، به دست می‌آید

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y) dt + h(y) \quad (۱۰)$$

h تابع دلخواهی از y است، و نقش مقدار ثابت دلخواه را ایفا می‌کند. اکنون باید نشان دهیم که می‌توان همواره $h(y)$ را طوری انتخاب کرد که $\psi_y = N$. از معادله (۱۰) داریم

$$\begin{aligned} \psi_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(t, y) dt + h'(y) \\ &= \int^x M_y(t, y) dt + h'(y) \end{aligned}$$

با قراردادن $\psi_y = N$ و استخراج $h'(y)$ خواهیم داشت

$$h'(y) = N(x, y) - \int^x M_y(t, y) dt \quad (۱۱)$$

برای آنکه بتوان $h(y)$ را از معادله (۱۱) تعیین کرد، ضروری است که طرف دوم معادله، علیرغم ظاهرش، فقط تابع y باشد. برای اثبات این مطلب می‌توان از آن نسبت به x مشتق گرفت و به دست آورد.

$$N_x(x, y) - M_{yx}(x, y)$$

۱. فرض پیوستگی ضروری است، زیرا در غیر این صورت ψ_{yx} و ψ_{xy} همواره مساوی نیستند. موارد استثنای توابع بخصوصی می‌باشند که بندرت به آنها برمی‌خوریم.

که با توجه به معادله (۸) صفر است. بنابراین برخلاف شکل ظاهری آن، طرف دوم معادله (۱۱) در واقع به x بستگی ندارد، و با يك انتگرال گیری $h(y)$ به دست می آید. چون $h(y)$ را در معادله (۱۰) بگذاریم، جواب معادلات (۴) به صورت

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y) dt + \int^y \left[N(x, s) - \int^x M_s(t, s) dt \right] ds \quad (۱۲)$$

به دست می آید.

باید توجه داشت که این اثبات شامل روشی برای محاسبه $\psi(x, y)$ و در نتیجه حل معادله دیفرانسیل اصلی (۳) می باشد. معمولاً بهتر است به جای اینکه کوشش کنیم معادله (۱۲) را به خاطر بسپاریم، در هر مورد مستقیماً این روش را به کار گیریم. همچنین باید توجه داشت که جواب به صورت ضمنی به دست آمده است. مانند بند پیش امکان دارد که بتوان و یا نتوان جواب را به صورت صریح به دست آورد.

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0 \quad (۱۳)$$

روشن است که

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y)$$

و معادله داده شده کامل است. بنابراین تابع $\psi(x, y)$ وجود دارد به طوری که

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y$$

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + 2$$

با انتگرال گیری از معادله اول خواهیم داشت

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + h(y) \quad (۱۴)$$

از $\psi_y = N$ به دست می آید

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y + 2$$

پس

$$h'(y) = 2$$

و

$$h(y) = 2y$$

در اینجا می توان ثابت انتگرال گیری را حذف کرد، زیرا هر جواب این معادله دیفرانسیل برای منظور ما کافی است، و نیازی به عامترین جواب آن نیست. با گذاشتن عبارت $h(y)$ در معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + 2y$$

بنابراین جواب معادله اصلی به صورت ضمنی با رابطه زیر داده می شود

$$y \sin x + x^2 e^y + 2y = c \quad (15)$$

مثال ۳. معادله زیر را حل کنید

$$(3x^2 + 2xy) + (x + y^2)y' = 0 \quad (16)$$

در اینجا

$$M_y(x, y) = 2x, \quad N_x(x, y) = 1$$

و چون $M_y \neq N_x$ ، معادله داده شده کامل نیست. برای آنکه ببینیم این معادله را نمی توان با روش بالا حل کرد، به جستجوی يك تابع ψ می پردازیم به طوری که

$$\psi_x(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \psi_y(x, y) = x + y^2 \quad (17)$$

با انتگرال گیری از معادله اول به دست می آید

$$\psi(x, y) = x^3 + x^2 y + h(y) \quad (18)$$

که در آن تابع دلخواه h فقط به y بستگی دارد. برای آنکه معادله دوم (۱۷) نیز برقرار گردد، ψ_y را از معادله (۱۸) محاسبه می کنیم و آن را برابر با N قرار می دهیم

$$\psi_y(x, y) = x^2 + h'(y) = x + y^2$$

یا

$$h'(y) = x + y^2 - x^2 \quad (19)$$

چون طرف دوم معادله (۱۹) هم به x و هم به y بستگی دارد، بنابراین تعیین $h(y)$ از معادله (۱۹) غیر ممکن است. بنابراین نمی توان تابع $\psi(x, y)$ را طوری تعیین کرد که در هر دو معادله (۱۷) صدق کند.

مسائل

تعیین کنید که آیا هر يك از معادلات مسائل ۱ تا ۱۲ کامل است یا نه. اگر کامل باشد، جواب آن را بیابید.

$$(2x+3) + (2y-2)y' = 0 \quad (1)$$

$$(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0 \quad (2)$$

$$(9x^2+y-1) - (4y-x)y' = 0 \quad (3)$$

$$(2xy^2+2y) + (2x^2y+2x)y' = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy} \quad (۰.۶)$$

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0 \quad (۰.۷)$$

$$(e^x \sin y + 3y)dx - (3x - e^x \sin y)dy = 0 \quad (۰.۸)$$

$$(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0 \quad (۰.۹)$$

$$\left(\frac{y}{x} + e^x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0, \quad x > 0 \quad (۰.۱۰)$$

$$(x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (۰.۱۱)$$

$$\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \quad (۰.۱۲)$$

۰.۱۳. در هر يك از معادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنید که معادله کامل باشد، و سپس بد ازای این مقدار b معادله را حل کنید.

$$(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0 \quad (\text{ب})$$

۰.۱۴. معادلهٔ دیفرانسیل کامل زیر را در نظر می گیریم

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

به جای انتگرال گیری از $\psi_x = M$ که در متن آمده است، نخست از معادلهٔ $\psi_y = N$ انتگرال بگیرید و يك فرمول ضمنی $\psi(x, y) = c$ نظیر رابطهٔ (۱۲) برای جواب بیابید.

۰.۱۵. نشان دهید که هر معادلهٔ جدایی پذیر، یعنی معادله‌ای به صورت

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

يك معادلهٔ دیفرانسیل کامل است.

۰.۱۶*. در این مسئله به توضیح علت لزوم قیدی دربارهٔ ناحیهٔ R در قضیهٔ ۳.۲ می پردازیم. معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(الف) نشان دهید که در همهٔ نقاط به استثنای مبدأ داریم $M_y - N_x = 0$.

(ب) نشان دهید که، معادلهٔ داده شده را به جز در $(0, 0)$ می توان به صورت

$$d[\operatorname{tg}^{-1}(y/x)] = 0$$

و یا درمختصات قطبی به صورت زیر نوشت

$$d\theta = 0$$

(ج) اکنون جواب معادله داده شده را در ناحیه R' (شکل ۵.۲ را ببینید) داخل مربع محدود به $|x| = 2$ و $|y| = 2$ و خارج دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نظر می گیریم. شرط کامل بودن در همه نقاط این ناحیه برقرار است. از قسمت (ب) به دست می آید

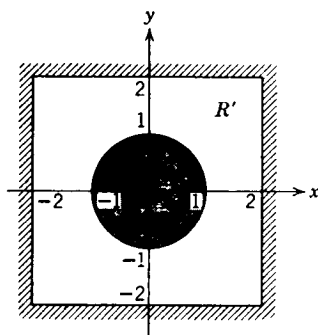
$$\psi(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) = c$$

یا

$$\theta = c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. اما، عبارت $\psi(x, y)$ يك مقداری نیست، و بنا بر این تابعی را تعریف نمی کند. مثلاً، $\psi(1, 1) = (\pi/4) + 2n\pi$ ، که در آن n می تواند هر عدد صحیحی باشد. بنابراین با وجود آنکه در تمام ناحیه R' معادلات (۸) صادقند، هیچ تابع ψ وجود ندارد که معادلات (۴) را در R' برقرار کند. توضیح آنکه R' ، ناحیه ای از نوع مناسب نیست، و فرضی که درباره ناحیه R در قضیه گنجانده شده است دقیقاً به منظور حذف نواحی مانند R' است. اما در واقع لزومی ندارد که R ناحیه مستطیلی باشد، بلکه کافی است R تنها به يك خم بسته پیوسته ای که خود را قطع نکند محدود باشد. این گونه نواحی را همبسته ساده می نامند.

نواحی همبسته ساده را همچنین می توان به عنوان ناحیه هایی که از تغییر شکل يك ورقه دایره ای لاستیکی کاملاً مرتجع در اثر کشیدن بدون ایجاد پارگی به دست می آیند، یا ناحیه هایی که دایره با تغییر شکل پیوسته به آنها تبدیل می شود، تصور کرد. به عبارت دیگر، نواحی همبسته ساده، نواحی بدون سوراخ می باشند. این مطالب در شاخه ای از ریاضیات موسوم به توپولوژی بررسی می شوند.



شکل ۵.۲

۶.۲ عامل انتگرال ساز

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روشهای بند ۵.۲ را درباره مسائل طبقه وسیعتری تعمیم داد. معادله‌ای به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

اگر این معادله کامل نباشد، سعی می‌کنیم یک تابع μ ، که می‌تواند به x و y هر دو بستگی داشته باشد، طوری انتخاب کنیم که معادله

$$\mu(M dx + N dy) = 0 \quad (2)$$

کامل باشد. تسایع μ را عامل انتگرال ساز می‌نامند. بنابراین می‌توان معادله (۲) را با روشهای بند ۵.۲ حل کرد، وجوابهای آن در معادله اصلی (۱) نیز صدق خواهند کرد. این روش تعمیم روشی است که در بند ۱.۲ درباره معادلات خطی بیان شد. برای بررسی امکان اجرای این روش، یادآوری می‌کنیم که با توجه به بند ۵.۲، معادله (۲) کامل است اگر و فقط اگر

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad (3)$$

چون M و N توابع داده شده‌ای می‌باشند، عامل انتگرال ساز μ باید در معادله با مشتقهای جزئی مرتبه اول

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \quad (4)$$

صدق کند. اگر بتوان یک تابع μ که در معادله (۴) صدق کند به دست آورد، آنگاه معادله (۲) کامل خواهد بود. بدینسان جواب معادله (۲) با استفاده از روش بند ۵.۲ به صورت ضمنی

$$\psi(x, y) = c$$

به دست خواهد آمد. این رابطه معرف جواب معادله (۱) نیز می‌باشد. زیرا می‌توان عامل انتگرال ساز μ را از جمله‌های معادله (۲) حذف کرد.

معادله با مشتقهای جزئی (۴) می‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد، اگر چنین بود، هر یک از جوابها را می‌توان به عنوان عامل انتگرال ساز معادله (۱) به کار برد. در مثال ۳، این امکان عدم یکنایی عامل انتگرال ساز را توضیح داده‌ایم.

متأسفانه، معادله (۴) که باید عامل انتگرال ساز را به دست دهد معمولاً حداقل به همان دشواری معادله اصلی (۱) است. بنابراین، هر چند عاملهای انتگرال ساز اصولاً ابزارهای نیرومندی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشند اما در عمل فقط در حالتیهای خاص می‌توان آنها را به دست آورد. برخی از این حالتها در مثالهای زیر و مسائل ۱۵ و ۱۱ در پایان این بند مشخص شده‌اند.

مثال ۱. تحقیق کنید که $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ یک عامل انتگرال ساز معادله

دیفرانسیل

$$(y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0 \quad (5)$$

است، و آنگاه جواب آن را بیابید.

چون $M(x, y) = y^2 + xy$ و $N(x, y) = -x^2$ ، در نتیجه

$$M_x(x, y) = 2y + x \quad \text{و} \quad M_y(x, y) = 2y + x$$

پس معادله داده شده کامل نیست. برای نشان دادن آنکه $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ يك عامل انتگرال ساز این معادله است، معادله (۵) را در $\mu(x, y)$ ضرب می کنیم، بدین سان به دست می آید

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

به آسانی می توان تحقیق کرد که این معادله کامل است. با روش بند ۵.۲ جواب آن به صورت ضمنی زیر به دست می آید

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c; \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad (6)$$

توجه شود که $y = 0$ نیز يك جواب معادله (۵) است، اما از رابطه (۶) به دست نمی آید.

مثال ۲. مهمترین دو حالتی که در آن به آسانی می توان عاملهای انتگرال ساز را به دست آورد، هنگامی است که μ به جای آنکه تابع هردو متغیر x و y باشد، فقط تابع یکی از آنها باشد. اکنون درباره M و N شرایط لازم را طوری تعیین می کنیم که μ عامل انتگرال ساز معادله $M dx + N dy = 0$ فقط تابع x باشد. با فرض آنکه μ فقط تابعی از x باشد، خواهیم داشت

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \quad (\mu N)_x = \mu N_x + N \frac{d\mu}{dx}$$

بدین سان، از تساوی $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ لازم می آید که

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu \quad (7)$$

اگر $(M_y - N_x)/N$ فقط تابعی از x باشد، آنگاه يك عامل انتگرال ساز μ که فقط تابع x است وجود خواهد داشت، علاوه بر این $\mu(x)$ را می توان از حل معادله خطی مرتبه اول (۷) به دست آورد.

به روش مشابهی می توان به تعیین شرطی پرداخت که تحت آن عامل انتگرال ساز معادله (۱) فقط تابع y باشد (مسئله ۱۰ را ببینید).

مثال ۳. يك عامل انتگرال ساز برای معادله

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (8)$$

بیابید، و آنگاه معادله را حل کنید.

با محاسبه مقدار $(M_y - N_x)/N$ به دست می آید که

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

بدین سان، بنابر مثال ۲، يك عامل انتگرال ساز μ وجود دارد که فقط تابع x است، و در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

صدق می کند. پس

$$\mu(x) = x \quad (9)$$

با ضرب معادله (۸) در این عامل انتگرال ساز خواهیم داشت

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (10)$$

که يك معادله کامل است. جواب آن به آسانی با روش بند ۵.۲ به صورت ضمنی زیر به دست می آید

$$x^2y + \frac{1}{4}x^2y^2 = c \quad (11)$$

توجه شود که می توان معادله درجه دوم (۱۱) را حل کرد و y را بر حسب x به دست آورد. خواننده می تواند تحقیق کند که مانند مثال ۱، $\mu(x, y) = 1/xy(2x + y)$ نیز يك عامل انتگرال ساز معادله (۸) است. اگر این عامل انتگرال ساز را به کار ببریم همان جواب، اما با دشواری بیشتر، به دست می آید (مسئله ۱۲ را ببینید).

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۳ کامل نیستند، اما با ضرب در عامل انتگرال ساز داده شده کامل می شوند. آنگاه معادلات را حل کنید.

$$x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0; \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$$

(۱)

$$\left(\frac{\sin y}{y} - ye^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + ye^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0; \quad (۲)$$

$$\mu(x, y) = ye^x$$

$$y dx + (2x - ye^x) dy = 0; \quad \mu(x, y) = y \quad (۳)$$

در هر يك از مسائل ۴ تا ۹ يك عامل انتگرال ساز پياييد، و معادله را حل كنيد.

$$(3x^2y + 2xy + y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = 0 \quad (۴)$$

$$y' = e^{2x} + y - 1 \quad (۵)$$

$$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right) dy = 0 \quad (۶)$$

$$y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0 \quad (۷)$$

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0 \quad (۸)$$

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۹)$$

۱۰. نشان دهيد كه اگر $(N_x - M_y)/M = Q$ و فقط تابع y باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل

$$M + Ny' = 0$$

دارای يك عامل انتگرال ساز به صورت زیر است

$$\mu(y) = \exp \int Q(t) dt$$

۱۱*. نشان دهيد كه اگر $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$ و فقط به مقدار xy بستگی داشته باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل

$$M + Ny' = 0$$

دارای يك عامل انتگرال ساز به صورت $\mu(xy)$ است. يك فرمول کلی برای این عامل انتگرال ساز پياييد.

۱۲*. معادله دیفرانسیل

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

را با استفاده از عامل انتگرال ساز

$$\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$$

حل کنید. تحقیق کنید که این جواب همان جوابی است که در مثال ۳ با عامل انتگرال ساز دیگری به دست آمده است.

۷.۲ معادلات همگن

دو نوع اصلی معادلات مرتبه اول غیرخطی که می توان آنها را مستقیماً با انتگرال گیری حل کرد عبارتند از معادلات جدایی پذیر و معادلات کامل. در بند ۶.۲ کار برد عاملهای انتگرال ساز را برای حل برخی از انواع معادلات با تبدیل آنها به معادلات کامل مورد بحث قرار دادیم. در این بند به معرفی روش دیگری می پردازیم، و آن تعویض متغیرهاست، که گاهی با استفاده از آن معادله دیفرانسیل ساده می شود و بدین سان حل آن ممکن (یا آسانتر) می گردد. به طور کلی از ترکیبات متغیرها که در معادله تکرار شده اند، یا از ویژگیهای دیگر ساختمان معادله به تبدیل مناسب پی می بریم.

مهمترین طبقه معادلات که می توان برای آن قاعده صریحی وضع کرد، طبقه معادلات دیفرانسیل همگن^۱ است. معادله ای به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

را هنگامی همگن می گویند که در آن تابع f به طور جداگانه بستگی به x و y نداشته و فقط تابعی از نسبت y/x یا x/y باشد. پس معادلات همگن به صورت زیر می باشند

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (۱)$$

مثالهای زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln \frac{1}{y/x} + \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad (\text{ج})$$

بدین سان (الف) و (ب) همگن اند، زیرا طرف دوم هر يك از آنها را می توان به صورت تابعی از y/x بیان کرد، و چون (ج) را نمی توان به این صورت نوشت از این رو همگن نیست. معمولاً با جستجو به آسانی می توان تشخیص داد که معادله همگن است یا نه، در مورد

۱. واژه همگن در بررسی معادلات دیفرانسیل به معانی گوناگونی به کار می رود. خواننده باید در هر مورد معنی مناسب آن را تشخیص دهد.

معادلات پیچیده‌تر می‌توان از ملاک مذکور در مسئله ۱۵ استفاده کرد. از شکل معادله همگن به این نکته پی می‌بریم که ممکن است با در نظر گرفتن متغیر جدید v که نمایشگر نسبت y/x است معادله ساده شود. بدین سان

$$y = xv \quad (۲)$$

و معادله (۱) به صورت

$$\frac{dy}{dx} = F(v) \quad (۳)$$

در می‌آید. چون v را به عنوان متغیر وابسته جدید (به جای y) در نظر می‌گیریم، باید آن را تابع x فرض کرد و به جای dy/dx در معادله (۳) عبارت مناسبی بر حسب v قرارداد. از رابطه (۲) مشتق می‌گیریم، به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

و از آنجا معادله (۳) به صورت

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v) \quad (۴)$$

در می‌آید. نکته شایان توجه در معادله (۴) آن است که شکل تابع F هر چه باشد، متغیرهای x و v را همواره می‌توان جدا کرد و نوشت

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v} \quad (۵)$$

چون معادله (۵) را حل کنیم و در آن y/x را به جای v بگذاریم جواب معادله اصلی به دست می‌آید.

بدین سان هر معادله همگن را می‌توان با تعویض متغیر (۲) به معادله‌ای که در آن متغیرها جدا می‌شوند تبدیل کرد. البته در عمل ممکن است نتوان انتگرال لازم برای حل معادله (۵) را به روشهای مقدماتی محاسبه کرد. علاوه بر این، امکان دارد که يك معادله همگن به یکی از طبقه‌هایی که قبلاً بررسی شد نیز تعلق داشته باشد، مثلاً، کامل یا حتی خطی باشد. در این حالتها برای یافتن جواب روشهای متعددی در اختیار داریم.

مثال. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad (۶)$$

با نوشتن این معادله به صورت

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

دیده می شود که همگن است. این معادله، نه کامل است و نه در آن متغیرها جدا می شوند و نه دارای عامل انتگرال ساز واضحی است. بدین سان به تعویض متغیر (۲) متوجه می شویم، و معادله داده شده به صورت زیر تبدیل می شود

$$x \frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v$$

از آنجا

$$x \frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

و با جدا کردن متغیرها

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}$$

طرف دوم را به کسره های ساده بسط می دهیم، به دست می آید

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv$$

از هر دو طرف انتگرال می گیریم، حاصل می شود

$$\ln |x| + \ln |c| = \ln |v| - \ln |v+1|$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. از آنجا، با ترکیب لگاریتمها و گرفتن آنتی لگاریتم از دو طرف، به دست می آید

$$cx = \frac{v}{v+1}$$

بالاخره، چون y/x را به جای v قرار دهیم، جواب معادله (۶) به صورت

$$cx = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{y+x}$$

به دست می آید، که چون آن را نسبت به y حل کنیم، خواهیم داشت

$$y = \frac{cx^2}{1-cx}$$

گاهی لازم می‌آید که هم متغیر مستقل و هم متغیر وابسته را تغییر دهیم. مثلاً در مسائل ۹، ۱۰ و ۱۱ برای آنکه معادله همگن شود باید هر دو متغیر را تعویض کرد و پس از آن بار دیگر به تعویض تابع پرداخت تا جواب مسئله بدست آید.

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۸ همگن‌اند، و جواب آنها را بیابید.

$$2y dx - x dy = 0 \quad (2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} \quad (4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y} \quad (6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y} \quad (5)$$

$$(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0 \quad (8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y} \quad (7)$$

(الف) جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{2x-y}$$

(ب) جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$$

راهنمایی: برای تبدیل معادله قسمت (ب) به معادله قسمت (الف)، جایگزینی مقدماتی به صورت $y = Y - k$ ، $x = X - h$ را در نظر می‌گیریم. ثابتهای h و k را طوری انتخاب می‌کنیم که معادله بر حسب متغیرهای Y و X همگن شود.

$$(10) \quad \text{معادله } \frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y+15}{2x+y+7} \quad \text{را حل کنید. راهنمایی مسئله ۹ قسمت (ب)}$$

را ببینید.

$$(11) \quad \text{معادله } \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1} \quad \text{را حل کنید. راهنمایی مسئله ۹ قسمت (ب)}$$

را ببینید.

۱۲. جواب معادله

$$(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

را با روش این بند بیابید، و آن را با جوابی که بدروشهای دیگر در مثال ۳ و مسئله ۱۲ بند ۶.۲ بدست آمده است مقایسه کنید.

۱۳. نشان دهید که اگر

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

یک معادله همگن باشد، آنگاه دارای عامل انتگرال ساز زیر است

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

۱۴. با بدکار بردن نتیجه مسئله ۱۳ هر یک از معادلات زیر را حل کنید

(الف) معادله مسئله ۲. (ب) معادله مسئله ۴.

۱۵. نشان دهید که معادله $y' = f(x, y)$ همگن است، اگر $f(x, y)$ بدگونهای

باشد که

$$f(x, tx) = f(1, t)$$

که در آن t یک پارامتر حقیقی است. با استفاده از این نکته همگنی هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید.

$$y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} \quad (\text{ب}) \quad y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 y + x y^2} \quad (\text{الف})$$

$$y' = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (\text{د}) \quad y' = \frac{(x^2 + 3xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y} \quad (\text{ج})$$

۸.۲ مسائل گوناگون

این بند شامل مجموعه‌ای از مسائل است. ۳۲ مسئله اول را می‌توان پس از روشهای بندهای پیش حل کرد. این مسائل را به منظور کسب مهارت خواننده در تشخیص روش یا روشهای قابل اجرا در مورد معادله داده شده‌ای آورده‌ایم. در پایان چند مسئله که مستلزم روشهای خاصی می‌باشند آمده است، این روشها در مورد برخی از انواع معادلات بدکار می‌روند. به‌ویژه، مسائل ۳۵ و ۳۶ مربوط به معادله ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴) است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y}{x}$$

۱۱

$$(x+y) dx - (x-y) dy = 0$$

۱۲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2+2y^2-x}, y(0) = 0$$

۰۳

$$(x+e^y) dy - dx = 0$$

۰۴

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$$

۰۵

$$x \frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, y(1) = 0$$

۰۶

$$u = x^2 \text{ بگذاریم: فرض کنید } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 y + y^2}$$

۰۷

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{\sin x}{x}, y(2) = 1$$

۰۸

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+1}{x^2+2y}$$

۰۹

$$(2y^2+2xy) dx - (2xy+x^2) dy = 0$$

۱۰

$$(x^2+y) dx + (x+e^x) dy = 0$$

۱۱

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^x}$$

۱۲

$$x dy - y dx = (xy)^{1/2} dx$$

۱۳

$$(x+y) dx + (x+2y) dy = 0, y(2) = 2$$

۱۴

$$(e^x+1) \frac{dy}{dx} = y - ye^x$$

۱۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2}$$

۱۶

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2y$$

۱۷

$$(2y+3x) dx = -x dy$$

۱۸

$$x dy - y dx = 2x^2 y^2 dy, y(1) = -2$$

۱۹

$$y' = e^{x+y}$$

۲۰

$$xy' = y + xe^{y/x}$$

(۲۱)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$$

(۲۲)

$$xy' + y - y^2 e^{yx} = 0$$

(۲۳)

$$2 \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy = 0$$

(۲۴)

$$\left(2 \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2} \right) dy = 0$$

(۲۵)

$$(2y + 1) dx + \left(\frac{x^2 - y}{x} \right) dy = 0$$

(۲۶)

$$(\cos 2y - \sin x) dx - 2 \operatorname{tg} x \sin 2y dy = 0$$

(۲۷)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^2}{2x + 3xy^2}$$

(۲۸)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$$

(۲۹)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$$

(۳۰)

$$(x^2 y + xy - y) dx + (x^2 y - 2x^2) dy = 0$$

(۳۱)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y + y^2}{2x^2 + 3xy}, \quad y(1) = -2$$

(۳۲)

۳۳. نشان دهید که هر معادله به صورت

$$y = G(p)$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، می توان به طریق زیر حل کرد.

(الف) نسبت به x مشتق می گیریم،

(ب) با حل معادله قسمت (الف) x را به صورت تابعی از p به دست می آوریم.

این رابطه و معادله اصلی $y = G(p)$ ، جواب را به صورت پارامتری نشان می دهند.

۳۴. معادله دیفرانسیل

$$y - \ln p = 0$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، با روش مسئله ۳۳ حل کنید. این معادله را مستقیماً نیز

حل کنید، و تحقیق کنید که هر دو جواب یکی است.

۳۵. معادله

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

مشهور به معادله دیکاتی است. فرض کنیم که يك جواب خصوصی y_1 این معادله معلوم باشد. جواب عمومی را که شامل يك ثابت دلخواه است، می توان با تبدیل زیر به دست آورد

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

نشان دهید که $v(x)$ در معادله خطی مرتبه اول

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3 y_1)v - q_3$$

صدق می کند. توجه شود که $v(x)$ تنها شامل يك ثابت دلخواه است.

۳۶. با استفاده از روش مسئله ۳۵ و جواب خصوصی داده شده، هر يك از معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \quad y_1(x) = 1/x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}; \quad y_1(x) = \sin x \quad (\text{ج})$$

۹.۲ کاربردهای معادلات مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل اصولاً به علت امکان استفاده از آنها در پژوهش مسائل بسیار گوناگون در علوم فیزیک، زیست شناسی، و اجتماعی مورد توجه غیر ریاضیدانان می باشند. در این خط مشی می توان بدون توجه به حوزه خاص کاربرد، سه مرحله تشخیص داد.

نخست لازم است که وضعیت طبیعی را به عبارت ریاضی برگردانیم. برای این کار عموماً درباره آنچه اتفاق می افتد فرضیاتی می شود که ظاهراً با پدیده مشاهده شده سازگارند. مثلاً، مشاهده شده است که میزان از بین رفتن مواد رادیواکتیو با مقدار ماده موجود متناسب است، میزان عبور حرارت از يك جسم گرمتر به يك جسم سردتر با اختلاف دما متناسب است، حرکت اجسام در فضا طبق قوانین حرکت نیوتن انجام می گیرد، و میزان رشد جمعیت های مجزای حشرات با جمعیت موجود متناسب است. هر يك از این گزاره ها متضمن يك میزان تغییر (مشتق) می باشند، و در نتیجه هنگامی که با عبارت ریاضی بیان شوند،

به صورت معادله دیفرانسیل درمی آیند.

این نکته مهم را باید در نظر داشت که تقریباً همیشه معادلات ریاضی فرایند واقعی را فقط به طور تقریب توصیف می کنند، زیرا این معادلات مبتنی بر تجربیات اند که نتیجه آنها تقریبی است. مثلاً، حرکت اجسامی که سرعت آنها با سرعت نور قابل مقایسه باشد، از قوانین نیوتن پیروی نمی کند، جمعیت های حشرات به علت محدودیت های احتمالی منابع تغذیه دارای رشد نامتناهی بدان صورت که گفته شد نیستند، و در انتقال حرارت عوامل دیگری به غیر از اختلاف دما مؤثرند. علاوه بر این، هنگامی که یک مسئله فیزیکی را به صورت ریاضی فرمول بندی می کنیم، اغلب لازم می آید که به جای فرایندی منفصل به طور مجازی فرایند پیوسته ای را در نظر بگیریم. به عنوان مثال، در یک جمعیت حشره تغییر تعداد آنها کمیته ای است منفصل، اما اگر جمعیت بزرگ باشد، بد نظر معقول است که آن را به عنوان متغیری پیوسته در نظر بگیریم و حتی درباره مشتق آن بحث کنیم. از سوی دیگری می توان این دیدگاه را پذیرفت که معادلات ریاضی دقیقاً بیانگر عمل مدل ساده ای است که به منظور در برداشتن مهمترین جنبه های فرایند واقعی ساخته (یا تصور) شده است.

به هر حال، هنگامی که مسئله به صورت ریاضی فرمول بندی شد اغلب با مسئله حل یک یا چند معادله دیفرانسیل مواجه می شویم. در صورت عدم امکان حل، مسئله تعیین بیشترین خاصیت های جواب مطرح می شود. ممکن است اتفاقاً مسئله از لحاظ ریاضی کاملاً دشوار باشد، و اگر چنین باشد، در این مرحله به منظور راهیابی به مسئله از لحاظ ریاضی تقریبات دیگری در دستور قرار می گیرند. به عنوان مثال، امکان دارد به جای یک معادله غیر خطی به طور تقریب یک معادله خطی گذاشته شود، یا به جای تابعی با تغییرات بطبیعی مقدار متوسط آن در نظر گرفته شود. طبعاً، هر تقریبی از این نوع را باید از دیدگاه طبیعی نیز مورد بررسی قرار داد، تا اطمینان حاصل شود که این مسئله ریاضی ساده شده باز هم جنبه های اصلی فرایند طبیعی مورد پژوهش را منعکس کند. در همین مرحله با شناخت نزدیکی از طبیعت مسئله، می توان تقریبات ریاضی معقولی را به دست آورد، تا مسئله ریاضی بهتر قابل تحلیل گردد. این ارتباط متقابل بین درک پدیده طبیعی و شناخت روش های ریاضی و محدودیت های آنها به بهترین وجه خصیصه ریاضیات کاربردها را نشان می دهد، و در ساختن مدل های ریاضی موفقیت آمیز برای فرایندهای پیچیده طبیعی ضروری است.

بالاخره، پس از آنکه جواب (یا حداقل اطلاعاتی درباره آن) به دست آمد، باید بر حسب اصطلاحات متنی که مسئله را مطرح کرده است تعبیر شود. به ویژه، همواره باید بررسی کرد که آیا جواب ریاضی به دست آمده از لحاظ طبیعی هم به نظر معقول است. این کار حداقل مستلزم آن است که جواب وجود داشته باشد، یکتا باشد، و نسبت به داده های مسئله پیوسته باشد. اهمیت قید اخیر در این است که ضرایب معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه اغلب در نتیجه اندازه گیری کمیتهای طبیعی به دست آمده اند و از این رو در آنها امکان خطاهای کوچک وجود دارد. اگر این خطاهای کوچک در جواب مسئله ریاضی متناظر تغییراتی بزرگ (یا ناپیوسته) به وجود آورند که در طبیعت مشاهده نشده اند، باید ارتباط

مدل ریاضی را با مسئله طبیعی مجدداً مورد بررسی قرار داد. البته، این نکته که جواب ریاضی به نظر معقول باشد، صحت آن را تضمین نمی‌کند. اما، اگر با مشاهدات دقیق دستگاه طبیعی مزبور به طور جدی ناسازگار باشد، بدان علت است که یا در حل مسئله ریاضی خطاهایی صورت گرفته و یا این مدل ریاضی بسیار ناهنجار است. در مثالهای این بند و بند بعد نمونه کاربردهایی آمده است که به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول منجر می‌گردد.

مثال ۱ (تجزیه اتم رادیواکتیو). ایزوتوپ رادیواکتیو توریم ۲۳۴ به میزان متناسب با مقدار موجود تجزیه می‌شود. اگر ۱۰۰ میلی گرم این ماده در یک هفته بعد ۸۲۰۰۴ میلی گرم تقلیل یافته باشد، عبارتی تعیین کنید که مقدار موجود در هر زمان را به دست دهد. همچنین زمان لازم را برای اینکه ماده اولیه به نصف تقلیل یابد، بیابید.

فرض کنیم $Q(t)$ مقدار توریم ۲۳۴ موجود در هر زمان t باشد، که در آن Q بر حسب میلی گرم و t بر حسب روز است. مشاهده فیزیکی که توریم ۲۳۴ به میزان متناسب با مقدار موجود تجزیه می‌شود بدان معنی است که میزان تغییر بر حسب زمان، یعنی dQ/dt ، با Q متناسب است. بنابراین Q در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad (1)$$

صدق می‌کند، که در آن ضریب تناسب k ثابتی است منفی و باید آن را تعیین کرد. اکنون به جستجوی جوابی از معادله (۱) می‌پردازیم که در شرط اولیه

$$Q(0) = 100 \quad (2)$$

و همچنین در شرط

$$Q(7) = 82004 \quad (3)$$

صدق کند. معادله (۱) را می‌توان به عنوان یک معادله خطی یا با جدا کردن متغیرها حل کرد، و جواب عمومی آن عبارت است از

$$Q(t) = ce^{kt} \quad (4)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. از شرط اولیه (۲) به دست می‌آید $c = 100$ ، بنابراین

$$Q(t) = 100e^{kt} \quad (5)$$

و برای آن که شرط (۳) برقرار گردد، $t = 7$ و $Q = 82004$ را در رابطه (۵) می‌گذاریم؛ به دست می‌آید

$$82004 = 100e^{7k}$$

و بنابراین

$$(۶) \quad k = \frac{\ln ۰.۸۲۰۲}{۷} = -۰.۰۵۲۸۲۸ (\text{روز})^{-۱}$$

بدین سان ضریب کاهش k تعیین گردید. چون این مقدار k را در رابطه (۵) قرار دهیم، به دست می آید

$$(۷) \quad Q(t) = ۱۰۰e^{-۰.۰۵۲۸۲۸t} \text{ میلی گرم}$$

که مقدار $Q(t)$ را در هر زمان به دست می دهد.

مدت زمانی که جرمی به نصف مقدار اولیه تقلیل می یابد، نیمه عمر ماده مزبور نام دارد. گیریم τ زمانی باشد که $Q(t)$ برابر ۵۰ میلی گرم است. در این صورت، از رابطه (۵) داریم

$$۵۰ = ۱۰۰e^{k\tau}$$

یا

$$(۸) \quad k\tau = -\ln ۲$$

رابطه (۸) بین ضریب کاهش و نیمه عمر نه تنها برای توریم ۲۳۴ معتبر است بلکه در مورد هر ماده ای که از معادله دیفرانسیل (۱) تبعیت کند نیز صادق است، و چون به جای k مقدار آن را از رابطه (۶) قرار دهیم در مورد توریم ۲۳۴ خواهیم داشت

$$(۹) \quad \tau = \frac{\ln ۲}{۰.۰۵۲۸۲۸} \cong ۲۴۵ \text{ روز}$$

مثال ۲ (بج هوکب). فرض کنیم که S مبلغ پولی باشد که با نرخ بهره ۶ درصد به بانک سپرده شده است. مقدار سرمایه $S(t)$ پس از مدت t سال بستگی به تعداد دفعاتی دارد که بهره به آن اضافه شده است. در این مثال به بررسی تأثیر تعداد دفعات اضافه شدن بهره می پردازیم.

اگر بهره یک بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t) = S_0(1 + ۰.۰۶)^t$$

اگر بهره دو بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t) = S_0 \left[\left(1 + \frac{۰.۰۶}{۲}\right) \left(1 + \frac{۰.۰۶}{۲}\right) \right]^t = S_0 \left(1 + \frac{۰.۰۶}{۲}\right)^{2t}$$

و به طور کلی اگر بهره k بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$(۱۰) \quad S(t) = S_0 \left(1 + \frac{۰.۰۶}{k}\right)^{kt}$$

اکنون این وضعیت را با یک مدل ریاضی با فرض آنکه بهره به طرد پیوسته به

سرمایه اضافه می شود تقریب می زنیم. با این فرض می توان قانون رشد سرمایه را به صورت معادله دیفرانسیل

$$S'(t) = 0.06 S(t)$$

نوشت. جواب این معادله، همراه با شرط اولیه $S(0) = S_0$ عبارت است از

$$S(t) = S_0 e^{0.06t} \quad (11)$$

توجه شود که چون $k \rightarrow \infty$ طرف دوم رابطه (۱۰) به طرف دوم رابطه (۱۱) میل می کند. در ستون دوم جدول ۲۰۱ مقادیر $S(t)/S_0$ را که به ازای مقادیر مختلف t از رابطه (۱۱) به دست می آید درج کرده ایم. مقادیر $S(t)/S_0$ در ستون سوم و چهارم از رابطه (۱۰) با استفاده از $k = 4$ و $k = 365$ به ترتیب متناظر با اضافه کردن بهره هر سه ماه یک بار و روزانه به دست آمده اند.

نتایج جدول نشان می دهد که تعداد دفعاتی که بهره به سرمایه اضافه می شود در بیشتر حالتها اهمیت چندانی ندارد. مثلاً، بعد از یک دوره ده ساله، اختلاف بین اضافه کردن بهره به سرمایه هر سه ماه یک بار و به طور پیوسته کمتر از نیم درصد می باشد، یعنی در حدود ۸ ریال در ۱۰۰۰ ریال یا در حدود ۸۰۰ ریال در سال است. به ازای نرخهای بالاتر این اختلاف بیشتر خواهد بود، و البته، هنگامی که S_0 بسیار بزرگ باشد حتی تفاوتی که به صورت درصد بسیار کوچک اند می توانند قابل توجه باشند. بهر حال اگر فاصله زمانی زیاد باشد (چند قرن یا بیشتر)، در این صورت این تفاوت بزرگ خواهد بود.

از جدول نیز دیده می شود که نرخ واقعی بهره سالانه در مورد اضافه کردن بهره هر سه ماه یک بار برابر ۱۴ درصد و در مورد روزانه یا پیوسته برابر ۱۸ درصد می باشد. در بسیاری از بانکها نرخ واقعی سالانه ای رایج است که حتی از ۱۸ درصد متناظر به اضافه شدن بهره به طور پیوسته، بالاتر است. برای این کار نرخ بهره روزانه را بر اساس سال اسمی ۳۶۰ روز محاسبه می کنند و سپس اضافه کردن بهره را در طول سال واقعی تقویمی منظور می نمایند. با استفاده از این روش برای نرخ ۶ درصد و صرف نظر از کیسه ها، خواهیم داشت

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{0.06}{360}\right)^{365t} \quad (12)$$

نتایج حاصل از رابطه (۱۲) در ستون آخر جدول ۱۰۲ آمده است. در این روش، نرخ واقعی سالانه ۲۷ درصد است. در حدود دقت محاسبات موجود می توان همین نتیجه را با ضرب عامل $365/360$ در نرخ واقعی متناظر به فرض اضافه شدن بهره به طور پیوسته به دست آورد. بدین سان $27 = (365/360) \times 18$. در مورد نرخهای بهره بالاتر این اثر شدیدتر است، مثلاً، یک نرخ بهره سالانه ۷۵ درصد در حالت اضافه شدن به طور پیوسته، نرخ واقعی بهره برابر ۷۷۹ درصد و با استفاده از رابطه (۱۲) نرخ بیشتر ۷۹۰ درصد را به دست می دهد.

جدول ۱۰۲

سالها	$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۱)	$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۰) $k = ۲$	$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۰) $k = ۳۶۵$	$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۲)
۱	۱۰۵۶۱۸	۱۰۵۶۱۴	۱۰۵۶۱۸	۱۰۵۶۲۷
۲	۱۰۱۲۷۵	۱۰۱۲۶۵	۱۰۱۲۷۵	۱۰۱۲۹۴
۵	۱۰۳۴۹۹	۱۰۳۴۶۹	۱۰۳۴۹۸	۱۰۳۵۵۵
۱۰	۱۰۸۲۲۱	۱۰۸۱۴۰	۱۰۸۲۲۰	۱۰۸۳۷۳
۲۰	۳۰۳۲۰۱	۳۰۲۹۰۷	۳۰۳۱۹۸	۳۰۳۷۵۶
۴۰	۱۰۱۰۲۳ × ۱۰	۱۰۰۸۲۸ × ۱۰	۱۰۱۰۲۱ × ۱۰	۱۰۱۳۹۵ × ۱۰
۸۰	۱۰۲۱۵۱ × ۱۰ ^۲	۱۰۱۷۲۶ × ۱۰ ^۲	۱۰۲۱۴۶ × ۱۰ ^۲	۱۰۲۹۸۴ × ۱۰ ^۲
۲۰۰	۱۰۶۲۷۵ × ۱۰ ^۵	۱۰۴۸۸۸ × ۱۰ ^۵	۱۰۶۲۶۰ × ۱۰ ^۵	۱۰۹۲۰۸ × ۱۰ ^۵
۴۰۰	۲۰۶۴۸۹ × ۱۰ ^{۱۰}	۲۰۲۱۶۵ × ۱۰ ^{۱۰}	۲۰۶۴۳۹ × ۱۰ ^{۱۰}	۳۰۶۸۹۵ × ۱۰ ^{۱۰}

مثال ۳ (اختلاط). مخزنی در زمان $t=0$ ، حاوی Q_0 پوند نمک محلول در ۱۰۰ گالن آب است. فرض کنیم که آبی که $1/4$ پوند در گالن نمک دارد با سرعت ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌شود، و محلول خوب بهم زده شده با همان سرعت از مخزن خارج می‌شود. عبارتی که مقدار نمک $Q(t)$ موجود در مخزن را در زمان t نشان می‌دهد به دست آورید.

میزان تغییر نمک موجود در مخزن در زمان t ، یعنی $Q'(t)$ باید برابر تفاضل مقدار نمک وارده و مقدار نمکی که خارج می‌شود باشد. میزان ورود نمک برابر

$$\frac{1}{4} \text{ lb/gal} \times 3 \text{ gal/min}$$

است. میزان خروج نمک برابر است با $(Q(t)/100) \text{ lbs/gal} \times 3 \text{ gal/min}$. بدین‌سان فرایند مزبور از معادله دیفرانسیل

$$Q'(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{100} Q(t) \quad (13)$$

تبعیت می‌کند. معادله (۱۳) خطی است و جواب آن عبارت است از

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t} \quad (14)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. شرط اولیه

$$Q(0) = Q_0 \quad (15)$$

مستلزم آن است که $c = Q_0 - 25$ ، از آنجا

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_0 e^{-0.03t} \quad (16)$$

جمله دوم طرف دوم رابطه (۱۶) نمایشگر آن قسمت از نمک اولیه است که در زمان t در مخزن باقی مانده است. این جمله با گذشت زمان با خارج شدن محلول اولیه از مخزن بسیار کوچک می شود. جمله اول طرف دوم رابطه (۱۶) مقدار نمکی را که در اثر این جریان در زمان t در مخزن به وجود آمده است نشان می دهد. هنگامی که t بزرگ شود، این جمله به مقدار ثابت ۲۵ پوند نزدیک می شود. از لحاظ فیزیکی نیز روشن است که حد Q هنگامی که محلول اولیه به تدریج جای خود را به محلول وارده با غلظت $1/4$ پوند بر گالن می دهد برابر همین مقدار است.

مثال ۴ (اپیدمی). برای اپیدمیها نظریه ریاضی مبسوطی وجود دارد که براساس نکات کلی زیر است. فرض کنیم جامعه ای از n عضو تشکیل شده که شامل p نفر مبتلا و q نفر دیگر در معرض ابتلا می باشند، و $p + q = n$. از طرف دیگر، فرض کنیم x نسبت افراد بیمار و y نسبت افراد سالم باشد. در این صورت $x = p/n$ ، $y = q/n$ و $x + y = 1$. اگر n بزرگ باشد می توان x و y را به عنوان متغیرهای پیوسته در نظر گرفت، در این صورت میزان شیوع بیماری برابر dx/dt خواهد بود. براساس این فرض معقول که بیماری در اثر تماس بین افراد بیمار و سالم جامعه شیوع پیدا می کند، dx/dt با تعداد این تماسها متناسب خواهد بود. اگر افراد هر دو گروه آزادانه بین هم در حرکت باشند، تعداد تماسها به نوبه خود متناسب با حاصل ضرب x و y می شود. بدین سان به معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1-x) \quad (17)$$

می رسمیم، که در آن β ضریب تناسب و مثبت است. شرط اولیه عبارت است از

$$x(0) = x_0 \quad (18)$$

که در آن x_0 نسبت افراد بیمار در $t = 0$ است.

معادله (۱۷) جدایی پذیر است، و می توان آن را به صورت

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \beta dt$$

یا با استفاده از بسط به کسرها، به صورت

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \beta dt$$

نوشت. بنابراین

$$\ln x - \ln(1-x) = \beta t + C \quad (19)$$

توجه شود که x و $1-x$ اساساً مثبت اند و نیازی به قدر مطلق نیست. از رابطه (۱۹) نتیجه می شود که

$$\frac{x}{1-x} = ce^{\beta t} \quad (20)$$

که در آن $c = e^C$. شرط اولیه مستلزم آن است که $c = x_0 / (1-x_0)$. چون این مقدار c را در رابطه (۲۰) قرار دهیم. و آن را نسبت به x حل کنیم، خواهیم داشت

$$x = \frac{x_0 e^{\beta t}}{1-x_0 + x_0 e^{\beta t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\beta t}} \quad (21)$$

اگر $x_0 > 0$. آنگاه مقدار واقعی x_0 هر چه باشد، $x \rightarrow 1$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$. بدین سان، هر قدر هم که تعداد بیماران اولیه کم باشد، سرانجام اپیدمی در سراسر کل جامعه شیوع می یابد.

روشن است که این مدل ریاضی از برخی جنبه ها با واقعیت مطابقت ندارد. یکی آنکه، اگر بیماری مزبور مهم تلقی شود، طبعاً با ایجاد قرنطینه ای مناسب، فعالیت افراد بیمار را محدود می کنند. از طرف مقامات بهداشتی هم برای محدود کردن امکان تماس بین افراد بیمار و سالم قرنطینه دیگری نیز در نظر گرفته می شود. دیگر آنکه، هر بیماری فقط برای مدت محدودی مسری است، اما در این مدل فرض شده است که افراد بیمار به طور نامحدودی به همین وضع باقی می مانند. همه این عوامل موجب می شوند که شیوع بیماری از میزانی که در بالا پیش بینی شده است بطیتر باشد.

برخی از بیماریها (مانند مالاریا) با تماس مستقیم شیوع نمی یابد، و به توسط حشره یا حیوانی انتقال پیدا می کند. مدل ریاضی شیوع این بیماریها از آنچه در این مثال آمد بسیار پیچیده تر است. حالت دیگری را که از نوع تب تیفوئید است در مسئله ۱۹ بررسی کرده ایم. بالاخره اغلب لازم می آید که تأثیرات تصادفی را در بررسی اپیدمیها منظور کنیم و از مفاهیم مناسب نظریه احتمالات استفاده کنیم.

مسائل

۱. فرض کنیم که مبلغ S_0 را با نرخ بهره سالانه r بدانک سپرده ایم، و بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه می شود.

(الف) مطلوب است مدت T به صورت تابعی از نرخ بهره r برای آنکه مبلغ اولیه دو برابر شود.

(ب) اگر $r = 5$ درصد باشد، T را بیابید.

(ج) اگر سرمایه اولیه ظرف ۱۰ سال دو برابر شود، نرخ بهره را بیابید.

۲. جوانی بدون سرمایه اولیه سالانه k ریال با نرخ بهره سالانه r سرمایه گذاری می کند. فرض کنیم که بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه شود و سرمایه گذاریها نیز به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) مبلغ اندوخته $S(t)$ را در زمان t بیابید.

(ب) اگر $r = 5\%$ درصد باشد، k را طوری تعیین کنید که اندوخته پس از چهل سال يك میلیون ریال شود.

۳. در هر يك از برنامه های سرمایه گذاری زیر مبلغ اندوخته را پس از ۲۰ سال تعیین کنید. فرض می کنیم که نرخ بهره ۵ درصد و به طور پیوسته به سرمایه اضافه شود. و سرمایه گذاریها به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) بدون سرمایه اولیه، و ۱۵۰۰۰۰۰ ریال در سال به مدت ۲۰ سال.

(ب) سرمایه اولیه ۱۰۰۰۰۰۰۰ ریال، و ۱۰۰۰۰۰۰ ریال در سال به مدت ۲۰ سال.

(ج) سرمایه اولیه ۲۰۰۰۰۰۰۰ ریال، و ۵۰۰۰۰۰ ریال در سال به مدت ۲۰ سال.

(د) سرمایه اولیه ۳۰۰۰۰۰۰۰ ریال، و بدون سرمایه گذاری اضافی دیگر.

توجه شود که در هر حالت مبلغ کل سرمایه گذاری شده ۳۰۰۰۰۰۰۰ ریال است.

۴. بازنشسته ای مبلغ $S(t)$ ریال را با نرخ بهره سالانه r سرمایه گذاری کرده است، و بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه می شود. برای هزینه های زندگی به میزان k ریال در سال برداشت می کند. فرض کنیم که برداشتها به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) اگر مقدار اولیه سرمایه گذاری S_0 باشد، مقدار $S(t)$ را در زمان t بیابید.

(ب) فرض کنیم که S_0 و r داده شده اند، در این صورت میزان برداشت k را طوری

تعیین کنید که $S(t)$ ثابت باقی بماند.

(ج) اگر k از مقدار k_0 که در قسمت (ب) تعیین شد بزرگتر باشد، آنگاه $S(t)$

تنزل می کند و سرانجام صفر می شود. مطلوب است تعیین زمان T که در آن $S(t) = 0$.

(د) مطلوب است تعیین T اگر $r = 5\%$ درصد و $k = 3k_0$ باشد.

(ه) فرض کنیم که مقدار اولیه سرمایه گذاری در هنگام بازنشستگی شخصی S_0 باشد،

و بخواهد که برداشت سالانه به میزان k از T سال تجاوز نکند. ماکزیمم میزان برداشت

ممکن را بیابید.

(و) فرض کنیم که نرخ بهره ۵ درصد است. مقدار سرمایه گذاری اولیه چقدر باید

باشد، تا بتوان به مدت ۲۰ سال سالانه مبلغ ۵۰۰۰۰۰۰ ریال برداشت کرد؟

۵. فرض کنیم که میزان افزایش ثروت شخصی متناسب با مجذور مقدار موجود آن

است. اگر ثروتش در سال گذشته ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ریال و امروز ۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ریال باشد،

ثروت او در شش ماه بعد و همچنین دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

۶. تجزیه ایزوتوپ رادیواکتیو پلوتونیم ۲۴۱ به گونه ای است که در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = -0.0525Q$$

صدق می‌کند، و در آن Q بر حسب میلی گرم و t بر حسب سال است.

(الف) τ ، نیمه عمر پلوتونیم ۲۴۱ را تعیین کنید.

(ب) اگر امروز ۵۰ میلی گرم پلوتونیم موجود باشد، پس از ده سال چقدر از آن باقی خواهد ماند؟

۷. میزان تجزیه ایشثانیوم ۲۵۳ با مقدار موجود آن متناسب است. مطلوب است تعیین نیمه عمر τ این ماده در صورتی که بدانیم در ۱۹۷۷ روز ثلث جرم خود را از دست می‌دهد.

۸. نیمه عمر رادیوم ۲۲۶ برابر ۱۶۲۰ سال است. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه این ماده به $3/4$ مقدار اولیه خود تقلیل یابد.

۹. تاریخ یابی به وسیله رادیو کربن. یکی از وسایل مهم در پژوهشهای باستانشناسی تاریخ یابی با رادیو کربن است. بدین وسیله عمر برخی از بقایای گیاهی و چوبی را تعیین می‌کنند و از آنجا عمر استخوانهای انسانی و حیوانی یا مصنوعاتی را که در همان سطوح مدفون اند به دست می‌آورند. این روش را شیمیدان آمریکایی ویلارد لیبی^۱ در اوایل ۱۹۵۰ به وجود آورد و بدین سبب جایزه نوبل شیمی در ۱۹۶۰ به او تعلق گرفت. تاریخ یابی با رادیو کربن مبتنی بر این حقیقت است که در برخی از بقایای چوبی و گیاهی مقداری کربن ۱۴ که ایزوتوپ رادیو اکتیو کربن است باقی مانده است. این ایزوتوپ در طول حیات گیاه اندوخته می‌شود و از هنگام مرگ او شروع به تجزیه شدن می‌کند. چون کربن ۱۴ دارای نیمه عمر طولانی (تقریباً ۵۷۴۵ سال) است، در نتیجه بعد از هزاران سال باز هم مقداری از آن که قابل اندازه گیری باشد باقی می‌ماند. لیبی نشان داد که اگر تقریباً ۲۰۰۰۰۰ یا بیشتر از مقدار اولیه کربن ۱۴ هنوز وجود داشته باشد، با اندازه گیریهای آزمایشگاهی مناسب می‌توان دقیقاً نسبتی از مقدار اولیه کربن ۱۴ را که باقی مانده است تعیین کرد. به عبارت دیگر، اگر Q_0 مقدار اولیه کربن ۱۴ و $Q(t)$ مقدار آن در زمان t باشد، آنگاه می‌توان نسبت $Q(t)/Q_0$ را حداقل هنگامی که بسیار کوچک نباشد تعیین کرد.

(الف) فرض کنیم که Q در معادله دیفرانسیل $Q' = kQ$ صدق می‌کند، k ضریب ثابت تجزیه را برای کربن ۱۴ بیاورد.

(ب) اگر $Q_0 = Q(0)$ ، عبارت $Q(t)$ را بر حسب t بیاورد.

(ج) فرض کنیم که بقایای کشف شده است که مقدار کربن ۱۴ موجود در آن ۲۰ درصد مقدار اولیه است. عمر این بقایا را تعیین کنید.

۱۰. فرض کنیم که میزان تغییر جمعیت زمین متناسب با جمعیت موجود باشد. (فرض دقیقتری درباره قانون رشد جمعیت در مسئله ۱۱ آمده است.) علاوه بر این برآورد شده است که در زمان $t = 0$ (۱۶۵۰ بعد از میلاد) جمعیت زمین ۶۰۰ میلیون (6×10^8) بوده است، و در زمان $t = 3000$ (۱۹۵۰ بعد از میلاد) جمعیت آن به ۲۸۸ میلیون (2.88×10^9) رسیده است. مطلوب است تعیین عبارتی که جمعیت زمین را بر حسب زمان به دست دهد.

فرض کنیم که امکانات زمین حداکثر برای ۲۵ بیلیون (2.5×10^9) نفر کفایت کند، چه زمانی این حد فرا می‌رسد؟

۱۱. در يك جمعیت مجزا شده $p(t)$ ، میزان رشد جمعیت dp/dt تابعی از جمعیت است، یعنی

$$\frac{dp}{dt} = f(p)$$

(الف) ساده‌ترین عبارتی که می‌توان برای $f(p)$ در نظر گرفت، $f(p) = \epsilon p$ است، که در آن ϵ ثابت مثبتی است. در این حالت $p(t)$ را اگر $p(0) = p_0$ ، بیابید. حد $p(t)$ را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ پیدا کنید.

(ب) فرض دیگری که در بسیاری از موارد بهتر است $f(p) = \epsilon p - \sigma p^2$ می‌باشد، که در آن ϵ و σ دو ثابت مثبت‌اند. ممکن است در مواردی جمله $-\sigma p^2$ لازم باشد، مثلاً، هنگامی که شرایط تراکم به‌ازای مقادیر بزرگ p موجب افزایش میزان مرگ و میر و کاهش میزان مولید گردد. اگر $p(0) = p_0$ ، برای جمعیت عبارتی بر حسب t بیابید. جمعیت حدی را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ ، بیابید. این نتایج را با آنچه در قسمت (الف) به‌دست آمده است مقایسه کنید. توجه شود. حتی اگر σ بسیار کوچک باشد، به‌محض آنکه جمله درجه دوم در $f(p)$ منظور شود، طبیعت جواب به‌طور اساسی تغییر می‌کند (به‌ازای مقادیر بزرگ p). این بدان علت است که dp/dt با افزایش p تنزل می‌کند و حد آن هنگامی که p از طرف چپ به ϵ/σ میل می‌کند برابر صفر است. بدین‌سان p نمی‌تواند از این مقدار حدی تجاوز کند.

۱۲. براساس مشاهدات تجربی معلوم شده است با تقریبی که در بسیاری موارد رضایت‌بخش است، میزان تغییرات حرارت سطحی شیئی با اختلاف حرارت آن با حرارت محیط اطراف، متناسب است. گاهی این ارتباط را قانون سرد شدن نیوتن می‌نامند. بدین‌سان اگر $u(t)$ حرارت شیئی در زمان t و u_0 حرارت ثابت محیط باشد، رابطه

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0)$$

که در آن k ضریب ثابت تناسب است برقرار می‌باشد.

(الف) جوابی را که در شرط اولیه $u(0) = u_1$ صدق می‌کند بیابید.

(ب) فرض کنیم در اتاقی که حرارت آن $70^\circ F$ است، يك فنجان قهوه در آغاز $200^\circ F$ باشد، و يك دقیقه بعد حرارت آن به $190^\circ F$ برسد. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه قهوه به‌حرارت $150^\circ F$ برسد (با این فرض که می‌توان قانون سرد شدن نیوتن را به‌کار برد).

۱۳. فرض کنیم که قطره باران کروی به‌میزانی متناسب با مساحت سطح آن تبخیر شود. اگر شعاع آن در آغاز ۳ میلی‌متر باشد، و يك ساعت بعد به ۲ میلی‌متر تقلیل یابد، مطلوب

است تعیین عبارتی برای شعاع قطره باران برحسب زمان.

۱۴. مخزنی که در بعضی آزمایشهای هیدرودینامیکی به کار می رود، بعد از يك آزمایش، حاوی ۲۰۰ لیتر محلول رنگی با غلظت ۱ گرم در لیتر است. برای آنکه مخزن را برای آزمایش بعدی تمیز و آماده کنیم، جریان آب تازه ای به میزان ۲ لیتر در دقیقه وارد مخزن می کنیم و درحالی که آن را خوب به هم می زنیم به همین میزان از مخزن خارج می شود. مطلوب است تعیین مدت زمان لازم برای آنکه غلظت رنگ در مخزن به ۱ درصد مقدار اولیه برسد.

۱۵. مخزنی در آغاز حاوی ۱۰۰ گالن آب خالص است. آبی که حاوی ۱/۲ پوند نمک در گالن است به میزان ۲ گالن در دقیقه وارد مخزن می شود، و مخلوط به همین میزان از مخزن خارج می شود. بعد از ۱۰ دقیقه این عمل را متوقف کرده و آب خالص به میزان ۲ گالن در دقیقه وارد مخزن می کنیم و مخلوط به همان میزان از مخزن خارج می شود. مقدار نمکی را که پس از ۲۰ دقیقه در مخزن باقی می ماند بیابید.

۱۶. مخزنی به ظرفیت ۵۰۰ گالن، در آغاز حاوی ۲۰۰ گالن آب و ۱۰۰ پوند نمک محلول می باشد. آبی که حاوی ۱ پوند نمک در گالن است به میزان ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن شده و مخلوط به میزان ۲ گالن در دقیقه خارج می شود. مقدار نمک موجود در مخزن را برای هر زمان، قبل از پر شدن مخزن بیابید. غلظت نمک موجود در مخزن را (بر حسب پوند در گالن) در لحظه لبریز شدن آن پیدا کنید. این غلظت را با غلظت حدی نظری مربوط به حالتی که ظرفیت مخزن بینهایت باشد مقایسه کنید.

۱۷. در يك واكنش شیمیایی رتبه دوم با تأثیر متقابل (بر خورد) يك مولکول از ماده P و يك مولکول از ماده Q يك مولکول از ماده جدید X ایجاد می شود، با نماد $P+Q \rightarrow X$. فرض کنیم که غلظت اولیه مواد P و Q به ترتیب p و q باشد، و غلظت X در زمان t را $x(t)$ می گیریم. آنگاه غلظت P و Q در زمان t برابر $p-x(t)$ و $q-x(t)$ است، و پیشرفت واكنش با معادله

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p-x)(q-x)$$

بیان می شود، که در آن α ثابت مثبتی است.

(الف) اگر $x(0) = 0$ ، $x(t)$ را بیابید.

(ب) اگر مواد P و Q یکی باشند، آنگاه

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p-x)^2$$

اگر $x(0) = 0$ ، $x(t)$ را بیابید.

۱۸. فرض کنیم که در واكنش شیمیایی معینی ماده P به ماده X تبدیل می شود. فرض کنیم غلظت اولیه P برابر p و غلظت X در زمان t برابر $x(t)$ باشد. در این صورت غلظت P در زمان t برابر $p-x(t)$ است. علاوه بر این فرض کنیم که واكنش، خود

کاتالیزور باشد، یعنی، واکنش با ماده‌ای که ایجاد می‌شود تشدید شود. بنابراین dx/dt هم با x و هم با $p-x$ متناسب است، و

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(p-x)$$

که در آن α ثابت مثبتی است. اگر $x(0) = x_0$ ، $x(t)$ را بیابید.
 ۱۹. برخی از بیماریها (مانند تیفوئید) عموماً به وسیله حاملین (یعنی، افرادی که علامت بیماری در آنها دیده نمی‌شود بیماری را انتقال می‌دهند) شیوع پیدا می‌کنند. فرض کنیم x و y به ترتیب چگالی افراد حامل و سالم مستعد در جامعه در زمان t باشد. فرض کنیم که میزان جدا کردن حاملین از جامعه برابر β باشد، به طوری که

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x \quad (\text{یک})$$

همچنین فرض کنیم که میزان شیوع بیماری با حاصل ضرب x و y متناسب است. یعنی

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy \quad (\text{دو})$$

(الف) با حل معادله (یک) که مقید به شرط اولیه $x(0) = x_0$ است، x را بر حسب t تعیین کنید.

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، y را با حل معادله (دو)، مقید به شرط اولیه $y(0) = y_0$ ، بر حسب t بیابید.

(ج) نسبت افرادی از جامعه را که به این اپیدمی مبتلا نمی‌شوند، یعنی، مقدار حدی y را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ تعیین کنید. همچنین تغییرات آن را بر حسب α و β بررسی کنید.
 ۲۰. فرض کنیم اطاقی که ۱۲۰۰ فوت مکعب هوا دارد، در ابتدا فاقد منواکسید کربن است. از لحظه $t = 0$ دود سیگاری که دارای ۴ درصد منواکسید کربن است به میزان ۱۰۵ فوت مکعب در دقیقه وارد اطاق می‌شود، و با هوای اطاق خوب مخلوط شده به همان میزان از اطاق خارج می‌شود.

(الف) مطلوب است تعیین عبارت $x(t)$ غلظت منواکسید کربن در اطاق در هر زمان $t > 0$.

(ب) قرار گرفتن مدت طولانی در معرض منواکسید کربن حتی با غلظت اندک ۰۰۰۰۱۲ برای بدن انسان مضر است. زمان τ را که غلظت به این مقدار می‌رسد، بیابید.
 ۲۱. دریاچه‌ای با حجم ثابت V را که در زمان t مقدار آلودگی آن برابر $Q(t)$ است در نظر می‌گیریم. این آلودگی در سراسر دریاچه به طور یکنواخت توزیع شده و غلظت آن برابر $c(t) = Q(t)/V$ است. فرض کنیم که آبی با غلظت آلودگی k به میزان m وارد دریاچه می‌شود، و به همین میزان آب از دریاچه خارج می‌گردد. همچنین فرض می‌کنیم که آلودگیها به میزان ثابت P مستقیماً به دریاچه افزوده می‌شود. توجه شود که در این

فرضها از عوامل متعددی که ممکن است در بعضی حالتها مهم باشند صرف نظر کرده ایم، مثلاً افزایش و کاهش آب در اثر بارندگی، جذب، و تبخیر، طبقه طبقه شدن آب در اثر اختلاف حرارت در دریاچه های عمیق، تمایل بی نظمیهای خط ساحلی در ایجاد دهانه های باحفاظ، و این نکته که رسوب آلودگیها در سراسر دریاچه یکنواخت نیست، و (معمولاً) در نقاط مجزایی در اطراف سواحل صورت می گیرد. نتایج زیر باید با توجه به حذف این گونه عوامل تعبیر شوند.

(الف) اگر در زمان $t = 0$ غلظت آلودگی برابر c_0 باشد، عبارت غلظت $c(t)$ را بر حسب زمان بیابید. غلظت حدی هنگامی که $t \rightarrow \infty$ چقدر است؟

(ب) اگر افزایش آلودگیها به دریاچه متوقف شود ($k = 0$ و $P = 0$) به ازای $t > 0$ ، فاصله زمانی T را برای آنکه غلظت آلودگی به ۵۰ درصد مقدار اولیه، به ۱۰ درصد مقدار اولیه تقلیل یابد تعیین کنید.

(ج) جدول ۲۰۲ حاوی داده های^۱ درباره چند دریاچه بزرگ است. از قسمت (ب) با استفاده از این داده ها زمان T را برای آنکه آلودگی هر یک از این دریاچه ها به ۱۰ درصد مقدار اولیه تقلیل یابد بیابید.

جدول ۲۰۲

دریاچه	$V(\text{km}^3 \times 10^{-3})$	$r(\text{km}^3/\text{yr})$
سوپریور ^۲	۱۲۰۲	۶۵۰۲
میشیگان ^۳	۴۰۹	۱۵۸
اری ^۴	۵۰۴۶	۱۷۵
انتاریو ^۵	۱۰۶	۲۰۹

۲۲. مسیرهای قائم. يك مسئله هندسی متداول تعیین خانواده خمهایی است که در هر نقطه خانواده مفروضی از خمها را به طور قائم قطع کند. در این صورت خمهای هر خانواده را مسیرهای قائم خانواده دیگر می نامند.

(الف) خانواده سهمیهایی

$$y = kx^2 \quad (\text{يك})$$

۱. این مسئله مبتنی بر مقاله «جابه جا شدن طبیعی آلودگیهای دریاچه های بزرگ» از R.H. Rainey در مجله Science، ۱۵۵، ۱۹۶۷، صفحه های ۱۲۴۲-۱۲۴۳ می باشد. اطلاعات جدول از این منبع است.

2. Superior

3. Michigan

4. Erie

5. Ontario

راکه در آن k يك مقدار ثابت است در نظر می گیریم. نمودار معادله $(يك)$ را به ازای چند مقدار k رسم کنید. عبارتی برای شیب سهمی ماربر نقطه مفروض (x, y) بیابید که شامل مختصات (x, y) نقطه باشد، و به پارامتر k بستگی نداشته باشد.

دانهایی: از معادله $(يك)$ مشتق بگیرید و k را حذف کنید.

(ب) با استفاده از این نکته که شیبهای خمهای عمود برهم منفی معکوس یکدیگرند، معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم معادله $(يك)$ را بنویسید.

(ج) معادله ای را که در قسمت (ب) به دست آمد حل کنید، و مسیرهای قائم را تعیین کنید. تعدادی از خمهای این خانواده را رسم کنید.

۲۳. در هر يك از حالت های زیر با استفاده از روش مسئله ۲۲ مسیرهای قائم خانواده خمهای داده شده را بیابید. طرح اجمالی خانواده داده شده و مسیرهای قائم آنها را رسم کنید.

(الف) خانواده هذلولیهای $xy = c$.

(ب) خانواده دایره های $(x-c)^2 + y^2 = c^2$

(ج) خانواده بیضیهای $x^2 - xy + y^2 = c^2$

(د) خانواده سهمیهای $2cy + x^2 = c^2, c > 0$

۲۴. اگر در صفحه xy دو خط مستقیم بترتیب با شیبهای m_1 و m_2 یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند، نشان دهید که

$$(\operatorname{tg} \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1$$

با استفاده از این نکته، خانواده خمهایی را که هر يك از خانواده های زیر را به زاویه 45° قطع می کنند بیابید. در هر حالت طرح اجمالی دو خانواده خمهای مزبور را رسم کنید.

$$(الف) \quad x - 2y = c \quad (ب) \quad x^2 + y^2 = c^2$$

۲۵. در صفحه همه خمهایی را که در هر نقطه (x, y) آنها، خط مماس از نقطه ثابت (a, b) می گذرد، بیابید.

۲۶. خط قائم در هر نقطه (x, y) خم مفروضی از نقطه $(2, 0)$ می گذرد. اگر این خم شامل نقطه $(2, 3)$ باشد، معادله آن را بیابید.

۲۷. در صفحه همه خمهایی را که در هر نقطه خم، قطعه مماس محصور بین نقطه تماس و محور x ها به وسیله محور y ها نصف می شود بیابید.

۱۰.۲ مکانیک مقدماتی

برخی از مهمترین کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در حوزه مکانیک مقدماتی دیده می شوند. در این بند به بررسی مسائلی مربوط به تغییر مکان جسم در امتداد خط مستقیم می پردازیم. فرض می کنیم که این اجسام از قانون حرکت نیوتن $(1642-1727)$ تبعیت

می‌کنند: حاصل ضرب جرم در شتاب برابر است با نیروی خارجی. به بیان نمادی

$$F = ma \quad (۱)$$

که در آن F نیروی خارجی، m جرم جسم، و a شتاب جسم در امتداد F است. اگر جرم جسم ثابت باشد، معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dP}{dt} \quad (۲)$$

نوشت، که در آن v سرعت، و $P = mv$ اندازه خطی حرکت یا اندازه حرکت است. برای واحدها دو دستگاه متداول است. در دستگاه متری، یا cgs واحدهای اساسی عبارتند از سانتی‌متر (طول)، گرم (جرم)، و ثانیه (زمان). دین واحد نیرو، از معادله (۱) به صورت نیروی لازم برای ایجاد شتابی برابر ۱ سانتی‌متر بر مجذور ثانیه در جرمی برابر ۱ گرم تعریف می‌شود. از طرف دیگر، در دستگاه انگلیسی واحدهای اساسی عبارتند از فوت (طول)، پوند (نیرو)، و ثانیه (زمان). واحد جرم، یعنی اسلاگ از معادله (۱) به عنوان جرمی که تحت ۱ پوند نیرو شتابی برابر ۱ فوت بر مجذور ثانیه پیدا می‌کند تعریف می‌شود.

اکنون سقوط آزاد جسمی را در خلأ و در مجاورت سطح زمین در نظر می‌گیریم به طوری که تنها نیروی قابل توجه مؤثر بر آن همان وزن جسم ناشی از میدان جاذبه زمین باشد. آنگاه معادله (۱) به صورت

$$w = mg \quad (۳)$$

درمی‌آید، که در آن w وزن جسم و g شتاب ناشی از جاذبه را نشان می‌دهد. حتی اگر جرم جسم ثابت بماند، وزن و شتاب ثقلی آن بر حسب مسافت جسم از مرکز میدان جاذبه زمین تغییر می‌کند. در سطح دریا مقدار g به طور تجربی و تقریبی، برابر ۳۲ فوت بر مجذور ثانیه (دستگاه انگلیسی)، یا ۹۸۰ سانتی‌متر بر مجذور ثانیه (دستگاه متری) تعیین شده است. معمول بر این است که شتاب ثقلی در سطح دریا را با g نشان می‌دهند، بدین سان g یک مقدار ثابت است. با این تعبیر، فقط در سطح دریا می‌توان معادله (۳) را دقیق دانست.

می‌توان عبارت کلی وزن جسمی به جرم m را از قانون مجذور عکس مسافت نیوتن به دست آورد. اگر شعاع زمین، و x ارتفاع از سطح دریا باشد، آنگاه

$$w(x) = \frac{K}{(x+R)^2}$$

که در آن K مقدار ثابتی است. در $x = 0$ (سطح دریا)، داریم $w = mg$ ، در نتیجه $K = mgR^2$ ، و

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad (4)$$

چون $(x+R)^{-2}$ را در حول $x=0$ به سری تیلر بسط دهیم، خواهیم داشت

$$w(x) = mg \left(1 - 2\frac{x}{R} + \dots \right) \quad (5)$$

در نتیجه اگر بتوان از جمله‌های معادل با x/R در مقایسه با واحد صرف نظر کرد، آنگاه می‌توان به جای معادله (۴) تقریبی ساده‌تر یعنی معادله (۳) را قرار داد. بدین‌سان، در مورد حرکت در مجاورت سطح زمین یا هنگامی که دقت بسیار زیاد لازم نباشد، معمولاً کافی است از معادله (۳) استفاده شود. در حالت‌های دیگر مانند مسائلی که مربوط به پروازهای فضایی می‌باشند ممکن است لازم آید که معادله (۴) یا حداقل تقریب بهتری از معادله (۳) مورد استفاده قرار گیرد.

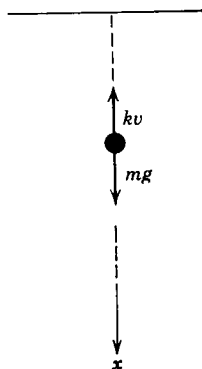
در بسیاری از حالت‌ها نیروی خارجی F علاوه بر وزن جسم شامل عوامل دیگری نیز می‌باشد. مثلاً ممکن است لازم آید که نیروهای اصطکاک ناشی از مقاومت هوا یا محیط‌های فراگیرنده دیگر را در نظر گرفت. همچنین، ممکن است تأثیر تغییرات جرم مهم باشد، مانند حالتی که سفینه فضایی سوخت خود را در حین پرواز مصرف می‌کند.

در مسائلی که اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد باید حرکت جسم را در مقایسه با دستگاه مختصات مناسبی بیان کرد. ما همواره خطی را که حرکت در امتداد آن انجام می‌گیرد به عنوان محور x ها انتخاب می‌کنیم، جهت مثبت محور x را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. هنگامی که جهت مثبت محور x مشخص شد، هر مقدار مثبت x نمایشگر تغییر مکانی در این جهت است، هر مقدار مثبت $v = dx/dt$ بیان آن است که جسم در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، هر مقدار مثبت نیروی F نشان‌دهنده آن است که نیروی مزبور در جهت مثبت محور x اثر می‌کند، و غیره. چند مسئله نمونه در مثال‌های زیر آمده است.

مثال ۱. جسمی به جرم m در محیطی که مقاومت آن متناسب با $|v|$ ، یعنی قدر مطلق سرعت لحظه‌ای جسم^۱ است از حالت سکون به طور آزاد سقوط می‌کند. فرض کنیم که نیروی جاذبه ثابت باشد، موضع و سرعت جسم را در هر زمان t بیابید.

در این حالت مناسب است که جهت مثبت محور x را به طرف پایین و موضع اولیه جسم را به عنوان مبدأ اختیار کنیم (شکل ۶.۲ را ببینید). در این صورت mg وزن جسم در جهت پایین (مثبت) اثر می‌کند، اما مقاومت $k|v|$ که در آن k ثابت مثبتی است موجب کندی حرکت می‌شود. هنگامی که $v > 0$ ، مقاومت در جهت بالا (منفی) است، و بدین‌سان

۱. به‌طور کلی، مقاومت تابعی از تندی، یعنی، قدر مطلق سرعت است. فرض خطی بودن رابطه فقط در مورد تندیهای نسبتاً کم می‌تواند موجه باشد. در مورد تندیهای زیاد ممکن است لازم آید که مقاومت را متناسب با بالاتری از v یا حتی به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای از $|v|$ فرض کنیم.



شکل ۶.۲

برابر $-kv$ می باشد. هنگامی که $v < 0$ ، مقاومت در جهت پایین اثر می کند، و باز هم برابر $-kv$ است. بدین سان در همه حالتها قانون نیوتن را می توان به صورت

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

یا

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (۶)$$

نوشت. معادله (۶) يك معادله خطی مرتبه اول است، و دارای عامل انتگرال ساز $e^{kt/m}$ می باشد. جواب معادله (۶) عبارت است از

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m} \quad (۷)$$

شرط اولیه $v(0) = 0$ مستلزم آن است که $c_1 = -mg/k$ ، بدین سان

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) \quad (۸)$$

برای به دست آوردن موضع جسم، یعنی x ، در رابطه (۸) به جای v می گذاریم dx/dt ، و با انتگرال گیری و استفاده از شرط اولیه دوم $x(0) = 0$ خواهیم داشت

$$x = \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} (1 - e^{-kt/m}) \quad (۹)$$

موضع و سرعت جسم در هر زمان t به ترتیب با روابط (۹) و (۸) داده می شود. شایان توجه است که در رابطه (۷) هنگامی که $t \rightarrow \infty$ سرعت به مقدار حدی

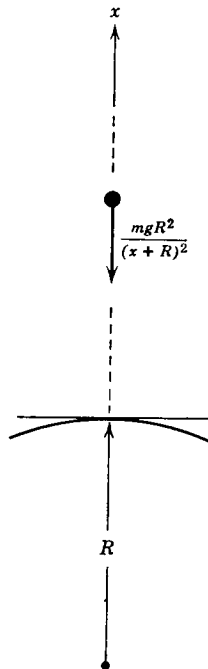
$$v_1 = \frac{mg}{k} \quad (10)$$

می‌گراید. v_1 سرعت حدى در سقوط آزاد از شرایط اولیه مستقل است، و فقط به جرم جسم و ضریب مقاومت محیط بستگی دارد. با داشتن یکی از مقادیر v_1 یا k می‌توان از معادله (۱۰) دیگری را محاسبه کرد. هنگامی که k به صفر نزدیک شود (یعنی، مقاومت کاهش یابد)، سرعت حدى به طور نامحدود افزایش می‌یابد.

مثال ۲. جسمی به جرم ثابت m با سرعت اولیه v_0 از سطح زمین به طرف بالا پرتاب شده است. فرض می‌کنیم که مقاومت هوا وجود نداشته باشد. اما تغییرات میدان جاذبه زمین را بر حسب ارتفاع در نظر می‌گیریم، مطلوب است تعیین کوچکترین سرعت اولیه‌ای که به ازای آن جسم دیگر به زمین برنگردد. این همان سرعتی است که آن را «سرعت فرار» می‌نامند.

جهت مثبت محور x را به طرف بالا، و مبدأ را بر سطح زمین اختیار می‌کنیم (شکل ۷.۲ را ببینید). تنها نیروی مؤثر بر جسم وزن آن است که از رابطه (۴) به دست می‌آید. و در جهت پایین اثر می‌کند. بدینسان معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad (11)$$



شکل ۷.۲

و شرط اولیه

$$v(0) = v_0 \quad (12)$$

است. چون نیروی موجود در طرف دوم معادله (۱۱) فقط تابعی از x است، مناسبتر است که به جای t ، x را متغیر مستقل بگیریم. این کار مستلزم آن است که dv/dt را با استفاده از قاعده زنجیری مشتق گیری بر حسب dv/dx بیان کنیم، بدین سان

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (13)$$

و معادله (۱۱) به صورت زیر درمی آید

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{gR^2}{(x+R)^2} \quad (14)$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c \quad (15)$$

چون هنگامی که $t = 0$ ، داریم $x = 0$ ، بنابراین می توان به جای شرط اولیه (۱۲) که متناظر به $t = 0$ است، شرط $v = v_0$ به ازای $x = 0$ را قرار داد. این مستلزم آن است که

$$c = \frac{1}{2} v_0^2 - gR$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \quad (16)$$

برای تعیین سرعت فرار باید قید کرد که سرعت v حاصل از معادله (۱۶) بدایزای همه مقادیر (مثبت) x مثبت بماند. این شرط هنگامی برقرار است که داشته باشیم $v_0^2 \geq 2gR$. بدین سان سرعت فرار v_e با رابطه

$$v_e = (2gR)^{1/2} \quad (17)$$

داده می شود. اندازه v_e تقریباً برابر ۶۹ میل بر ثانیه است.

در محاسبه سرعت فرار $v_e = (2gR)^{1/2}$ از مقاومت هوا صرف نظر شده است. سرعت فرار واقعی، که شامل تأثیر مقاومت هوا است، تا اندازه ای بزرگتر است. از طرف دیگر، اگر جسم را قبل از پرتاب به ارتفاع قابل ملاحظه ای از سطح دریا بالا ببریم سرعت فرار مؤثر به طور قابل توجهی کاهش می یابد. بدین وسیله نیروی جاذبه و اصطکاک هردو تقلیل پیدا می کند، به ویژه، مقاومت هوا با افزایش ارتفاع سریعاً کاهش می یابد.

اجسام با جرم متغیر. در مورد برخی از سفینه‌های فضایی، جرم اولیه m_0 شامل ذخیره مهمی سوخت است که در حین پرواز مصرف می‌شود و لازم است تغییر جرم سفینه را در نظر گرفت. برای آن که معادله (۲) را در این مورد به کار ببریم باید علاوه بر مقدار حرکت موشک، خروج گازهای حاصل از مصرف سوخت را نیز به حساب آورد. فرض می‌شود که گازهای خروجی نسبت به سفینه دارای سرعت ثابت u باشند، و جرم کل دستگاه سفینه و سوخت (با احتساب گازهای خروجی) ثابت باقی می‌ماند. اگر در لحظه t جرم سفینه و محموله آن $m(t)$ و جرم گازهای خروجی $m_e(t)$ باشد، داریم

$$m(t) + m_e(t) = m_0. \quad (18)$$

با به کار بردن معادله (۲) در مورد دستگاه سفینه و گاز خواهیم داشت^۱

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \quad (19)$$

که در آن v سرعت موشک است. جمله دوم طرف دوم معادله (۱۹) تأثیر گازهای خروجی بر مقدار حرکت دستگاه را نشان می‌دهد.

مثال ۳. يك سفینه فضایی با جرم اولیه m_0 از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا پرتاب شده است. فرض کنیم که قسمتی از این جرم $m_f < m_0$ جرم سوختی باشد که به میزان ثابت β در فاصله زمانی $0 \leq t \leq t_1$ مصرف می‌شود. همچنین تسدی خروج $s = |u| = -u$ را نیز ثابت فرض می‌کنیم. از مقاومت هوا صرف نظر می‌شود، و نیروی جاذبه را ثابت فرض می‌کنیم. سرعت سفینه را به صورت تابعی از زمان t به ازای $0 \leq t \leq t_1$ بیابید.

شرایط مذکور مستلزم آن است که جرم سفینه با رابطه

$$m(t) = m_0 - \beta t \quad t < t_1 \quad (20)$$

مشخص شود. در زمان t_1 جرم سفینه به مقدار

$$m_1 = m_0 - \beta t_1 = m_0 - m_f$$

تقلیل می‌یابد. به ازای $t < t_1$ معادله حرکت (۱۹) به صورت

$$-(m_0 - \beta t)g = (m_0 - \beta t) \frac{dv}{dt} - s\beta$$

یا

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{s\beta}{m_0 - \beta t} \quad (21)$$

درمی‌آید. با انتگرال‌گیری از معادله (۲۱) خواهیم داشت

۱. جزئیات تعیین این معادله در ضمیمه پایان همین فصل آمده است.

$$v = -gt - s \ln(m_0 - \beta t) + c$$

شرط اولیه $v(0) = v_0$ مستلزم آن است که

$$c = v_0 + s \ln m_0$$

و از آنجا

$$v = v_0 - gt + s \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (22)$$

هنگامی که سوخت در $t = t_1 = (m_0 - m_1)/\beta$ تمام می‌شود، سفینه دارای سرعت v_1 به صورت زیر است

$$v_1 = v_0 - \frac{gm_0}{\beta} \left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) + s \ln \frac{m_0}{m_1} \quad (23)$$

اگر v_1 حداقل برابر سرعت فرار متناظر به ارتفاعی که به آن رسیده است باشد، سفینه در آن لحظه می‌تواند از میدان جاذبه زمین بیرون رود. در غیر این صورت، سرانجام به زمین برمی‌گردد مگر آن که شامل طبقات دیگری باشد. از معادله (۲۲) همچنین نتیجه می‌شود که سرعت v با تندی خروجی s و میزان مصرف β افزایش می‌یابد.

مسائل

۱. جسمی به جرم ثابت m در امتداد قائم به طرف بالا با سرعت اولیه v_0 پرتاب شده است. فرض می‌کنیم که جاذبه زمین ثابت باشد، و از نیروهای دیگری که بر جسم اثر می‌کنند صرف نظر می‌کنیم، مطلوب است

(الف) ارتفاع ماکزیممی که جسم به آن می‌رسد.

(ب) زمانی که جسم به این ارتفاع ماکزیمم می‌رسد.

(ج) زمانی که جسم به نقطه آغازی خود برمی‌گردد.

۲. جسمی در امتداد قائم به طرف پایین با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن متناسب با اندازه سرعت است پرتاب می‌شود. سرعت v را به عنوان تابعی از زمان بیابید. سرعت حده v_1 را پیدا کنید.

۳. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با اندازه سرعت است رها می‌شود. مطلوب است مدت زمان لازم برای آنکه سرعت جسم برابر ۹۰ درصد سرعت حده آن گردد.

۴. وزن یک قایق موتوری با سر نشین آن ۳۲۵ پوند است. اگر کشش موتور در امتداد حرکت معادل نیروی ثابت ۱۰ پوند باشد، و اندازه عددی مقاومت آب در برابر حرکت مساوی با دو برابر تندی بر حسب فوت بر ثانیه، و قایق در ابتدا در حالت سکون باشد مطلوب است

(الف) سرعت قایق در زمان t .

(ب) سرعت حدی.

۵. جسمی به جرم m در امتداد قائم به طرف پایین با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن با جذر اندازه سرعت متناسب است پرتاب می‌شود. رابطه بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۶. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با مجذور سرعت است سقوط می‌کند. رابطه بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۷. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با $|v|^2$ است، و در آن ثابت مثبتی است سقوط می‌کند. با فرض آنکه نیروی جاذبه ثابت باشد، سرعت حدی جسم را بیابید.

۸. جسمی به جرم ثابت m در امتداد قائم با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن برابر $|v|k$ است، و در آن k ثابت مثبتی است به طرف بالا پرتاب می‌شود. از تغییرات نیروی جاذبه صرف نظر می‌کنیم، مطلوب است تعیین

(الف) ارتفاع ماکزیمم x_m که جسم به آن می‌رسد.

(ب) زمان t_m متناظر به این ارتفاع ماکزیمم. همچنین نشان دهید که می‌توان t_m و x_m را به صورت زیر بیان کرد

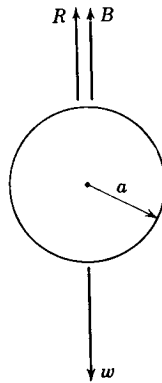
$$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{4} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

هنگامی که $kv_0/mg < 1$ باشد، هر دوسری همگرا می‌باشند.

۹. جسمی که در سیال نسبتاً غلیظی مانند روغن سقوط می‌کند، تحت سه نیرو قرار دارد (شکل ۸.۲ را ببینید): نیروی مقاومت R ، نیروی ارشمیدس B ، و وزن آن w که ناشی از ثقل است. نیروی ارشمیدس برابر است با وزن سیالی که به وسیله جسم جابه‌جا می‌شود. در مورد یک جسم کروی به شعاع a که به کندی حرکت کند نیروی مقاومت از قانون استوکس^۱ $R = 6\pi\mu a|v|$ به دست می‌آید، که در آن v سرعت جسم و μ ضریب چسبندگی محیط سیال است.

۱. جرج گابریل استوکس (George Gabriel Stokes)، (۱۸۱۹-۱۹۰۳) استاد کمبریج یکی از بزرگترین ریاضیدانان کار بسته قرن نوزدهم بوده است. معادلات اساسی مکانیک سیالات (معادلات ناویر-استوکس) را به افتخار او و ناویر نامگذاری کرده‌اند، و یکی از قضایای اساسی آنالیز برداری به نام اوست. وی نیز یکی از بنیانگذاران کاربرد سریهای (مجانبی) و اگر می‌باشد، موضوعی که امروز دارای اهمیت و فواید بسیاری است.



شکل ۸.۲

(الف) مطلوب است تعیین سرعت حدی کره صلبی به شعاع a و چگالی ρ که به طور آزاد در محیطی به چگالی ρ' و ضریب چسبندگی μ سقوط می کند.

(ب) در ۱۹۱۰ فیزیکدان آمریکایی ر. ا. میلیکان^۱ باریک الکترون را از بررسی حرکت قطرات ریز روغن در یک میدان الکتریکی تعیین کرد. نیرویی که از طرف یک میدان به شدت E بر یک قطره با بار e وارد می شود برابر Ee است. فرض کنیم که E طوری تنظیم شده باشد که قطره را در توقف نگاه دارد ($v=0$)، و w و B به همان صورت قسمت (الف) باشند. فرمولی برای e بیابید. میلیکان توانست e را به عنوان باریک الکترون شناسایی کند، و مقدار آن را برابر $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$ تعیین کند.

۱۰. (الف) اگر وزن جسمی در سطح دریا ۱۰۰ پوند باشد، در ۱۰۰۰ میلی بالای سطح زمین وزن آن چقدر است؟

(ب) شعاع ماه تقریباً $27/100$ شعاع زمین است، و چگالی متوسط ماه در حدود $5/8$ چگالی متوسط زمین می باشد. اگر جسمی در سطح زمین ۱۰۰ پوند وزن داشته باشد، وزن آن را در سطح ماه بیابید.

۱۱. جسمی به جرم ثابت m از سطح دریا با سرعت اولیه v_0 که از سرعت فرار $v_e = (2gR)^{1/2}$ تجاوز نمی کند در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می شود. با صرف نظر کردن از مقاومت هوا و با در نظر گرفتن تغییرات جاذبه بر حسب ارتفاع، ماکزیمم ارتفاعی را که جسم به آن می رسد بیابید (مثال ۲ را ببینید).

۱۲. سرعت فرار جسمی را که از نقطه $x_0 = \xi R$ در بالای سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا پرتاب شده است بیابید، R شعاع زمین و ξ مقدار ثابتی است. از مقاومت هوا صرف نظر کنید. تعیین کنید جسم از چه ارتفاعی باید پرتاب شود تا سرعت

1. R. A. Millikan (1868–1953)

فرار به ۸۵ درصد مقدار آن در سطح زمین تقلیل یابد.

۱۳. مسئله کوتاهترین زمان. مسئله کوتاهترین زمان یکی از مسائل مشهور در تاریخ ریاضیات است: مطلوب است تعیین خمی که يك نقطه مادی در امتداد آن در کوتاهترین زمان از نقطه مفروض P به نقطه دیگر Q بدون اصطكاك بلغزد. نقطه دوم پایتتر از نقطه اول قرارداد، اما مستقیماً در زیر آن واقع نیست (شکل ۹.۲ را ببینید).

این مسئله را یوهان برنولی در ۱۶۹۶ برای زور آزمایی با ریاضیدانان عصر خود طرح کرد. جوابهای صحیح آن را خود یوهان برنولی و همچنین برادرش یاکوب برنولی، آیزک نیوتن، گوتهارد لایبنیتز، و مارکی لوپیتال به دست آوردند. مسئله کوتاهترین زمان به عنوان یکی از مسائل آغازگر حساب تغییرات، در توسعه ریاضیات دارای اهمیت است. برای حل این مسئله مناسب است که نقطه بالاتر یعنی P را به عنوان مبدأ بگیریم، و محورها را مطابق شکل ۹.۲ توجیه کنیم. Q نقطه پایتتر دارای مختصات (x_0, y_0) است. می توان نشان داد که خم کوتاهترین زمان با تابع $y = \phi(x)$ که در معادله دیفرانسیل

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = k^2 \quad (\text{يك})$$

صدق می کند معین می گردد، k^2 ثابت مثبتی است که بعداً تعیین خواهد شد.

(الف) معادله (يك) را نسبت به y' حل کنید. چرا باید ریشه مثبت را انتخاب کرد؟

(ب) متغیر جدید t را با رابطه

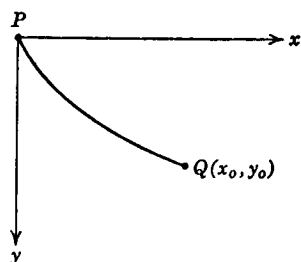
$$y = k^2 \sin^2 t \quad (\text{دو})$$

تعریف می کنیم. نشان دهید که معادله قسمت (الف) به صورت زیر درمی آید

$$2k^2 \sin^2 t \, dt = dx \quad (\text{سه})$$

(ج) با قراردادن $\theta = 2t$ ، نشان دهید که جواب معادله (سد) که با شرط $x = 0$ و

$y = 0$ متناظر است با رابطه



شکل ۹.۲

1. Brachistochrone Problem

$$x = \frac{k^2}{4}(\theta - \sin \theta) \quad (\text{چهار})$$

داده می‌شود، وبا استفاده از معادله (دو) نشان دهید که

$$y = \frac{k^2}{4}(1 - \cos \theta) \quad (\text{پنج})$$

معادلات (چهار) و (پنج) معادلات پارامتری جواب معادله (یک) می‌باشند که از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد. نمودار معادلات (چهار) و (پنج) سیکلوئید نام دارد. اگر ثابت k را به‌طور مناسب انتخاب کنیم، این سیکلوئید از نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد، و جواب مسئله کوتاهترین زمان خواهد بود. می‌توان θ را حذف کرد و جواب را به‌صورت $y = \phi(x)$ به دست آورد، اما استفاده از معادلات پارامتری آسانتر است.

۱۴. وزن موشکی قبل از پرتاب ۱۲۰۰ پوند است، که شامل ۹۰۰ پوند سوخت می‌باشد. فرض کنیم که سوخت در مدت ۶۰ ثانیه به‌طور یکنواخت مصرف می‌شود، و تندی خروج از موشک ۵۰۰۰ فوت بر ثانیه است. اگر موشک دارای سرعت اولیه نباشد، سرعت آن را در پایان ۶۰ ثانیه بیابید. از مقاومت هوا و تغییرات میدان جاذبه زمین صرف نظر کنید.

۱۵. یک سفینه فضایی به جرم اولیه m_0 از سطح زمین از حالت سکون به حرکت درمی‌آید. فرض کنیم که میزان مصرف سوخت در فاصله زمانی $0 < t < t_1$ برابر مقدار ثابت $\beta = -dm/dt$ و تندی خروج گاز نیز مقدار ثابت s باشد. علاوه بر این فرض کنیم که مقاومت هوا با اندازه سرعت $v(t)$ سفینه متناسب است، از تأثیر مقاومت هوا بر گازهای خروجی و همچنین از تغییر میدان جاذبه بر حسب ارتفاع صرف نظر می‌شود. نشان دهید که سرعت سفینه در معادله دیفرانسیل

$$m \frac{dv}{dt} + kv = -mg + s\beta \quad t < t_1$$

صدق می‌کند، که در آن $m(t) = m_0 - \beta t$. این معادله را حل کنید و v را بر حسب t ، $t < t_1$ ، بیابید.

۱۱.۲۰ قضیه وجود و یکتایی

در این بند به بحث درباره اثبات قضیه ۲.۲ یعنی قضیه اساسی وجود و یکتایی درباره مسائل مقدار اولیه مرتبه اول می‌پردازیم. این قضیه مبین آن است که اگر $f(x, y)$ در شرایطی صدق کند، آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y) \quad (الف)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (ب)$$

در فاصله‌ای حاوی نقطه x_0 دارای جواب یکتاست.

وجود جواب مسئله مقدار اولیه (۱) را در برخی از حالتها (مثلاً، هنگامی که معادله دیفرانسیل خطی است) می‌توان مستقیماً با حل مسئله وارائه فرمولی برای جواب آن اثبات کرد. اما، در حالت کلی نمی‌توان از این روش استفاده کرد، زیرا برای حل معادله (۱الف) روشی که در همه حالتها به کار رود وجود ندارد. بنابراین، در مورد حالت کلی برای اثبات وجود جواب معادلات (۱) لازم است از روش غیرمستقیمی استفاده کنیم. معمولاً با این روش، در عمل نمی‌توان جواب را به آسانی به دست آورد. اساس این روش ساختن دنباله‌ای از توابع است که حد آن در مسئله مقدار اولیه صدق کند، هرچند که جمله‌های دنباله منفرداً دارای این خاصیت نیستند. عموماً نمی‌توان بیش از چند جمله دنباله را صریحاً محاسبه کرد، بنابراین، به ندرت می‌توان تابع حدی را به طور صریح به دست آورد. با وجود این، تحت قیودی که در قضیه ۲.۲ درباره $f(x, y)$ بیان شد می‌توان نشان داد که دنباله مزبور همگراست و تابع حدی دارای خواص مطلوب است. استدلال این قضیه بفرنج است و مبتنی به روشها و نتایجی است که نخستین بار در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود. بنابراین، ما وارد تمام جزئیات اثبات نمی‌شویم، و تنها به تعیین خطوط اصلی آن می‌پردازیم، و به برخی از دشواریها اشاره می‌کنیم.

نخست، دیده می‌شود که کافی است مسئله‌ای را در نظر بگیریم که در آن نقطه اولیه (x_0, y_0) مبدأ باشد، یعنی مسئله

$$y' = f(x, y) \quad (2 \text{ الف})$$

$$y(0) = 0 \quad (2 \text{ ب})$$

را. اگر نقطه اولیه دیگری داده شده باشد، همواره می‌توان متغیرها را با تبدیلی که متناظر به انتقال دستگاه مختصات است تعویض کرد و نقطه داده شده (x_0, y_0) را مبدأ گرفت. بدینا، دیگر، تابع و متغیر جدید w و s را به ترتیب با معادلات زیر تعریف می‌کنیم

$$w = y - y_0, \quad s = x - x_0 \quad (3)$$

چون w را به عنوان تابعی از s بگیریم، بنا بر قاعده زنجیری خواهیم داشت

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_0) \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}$$

اگر $f(x, y) = f(s + x_0, w + y_0)$ را با $F(s, w)$ نشان دهیم، مسئله مقدار اولیه (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$w'(s) = F[s, w(s)] \quad (4 \text{ الف})$$

$$w(0) = 0 \quad (4 \text{ ب})$$

معادلات (۴) همان معادلات (۲) می‌باشند، تنها نام متغیرها عوض شده است. از این به بعد به جای مسئله اصلی (۱) مسئله (۲) را که اندکی ساده‌تر است در نظر می‌گیریم.

اکنون می توان قضیه وجود و یکتایی را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۴.۲. اگر f و $\partial f / \partial y$ در مستطیل $|x| \leq a, |y| \leq b$ پیوسته باشند، آنگاه فاصله $a \leq h \leq |x|$ را می توان طوری تعیین کرد که در آن مسئله مقدار اولیه (۲)

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

دارای جواب یکتای $y = \phi(x)$ باشد.

برای اثبات قضیه لازم است که مسئله مقدار اولیه (۲) را به صورت مناسبتری در آوریم. اگر موقتاً فرض کنیم که تابعی مانند $y = \phi(x)$ وجود دارد که در مسئله مقدار اولیه صدق می کند، آنگاه $f[x, \phi(x)]$ فقط تابعی از x و پیوسته می باشد. بنابراین می توان از معادله (۲ الف) از نقطه اولیه $x = 0$ تا مقدار دلخواه x انتگرال گرفت. و به دست آورد

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt \quad (5)$$

که در آن از شرط اولیه $\phi(0) = 0$ استفاده شده است.

چون معادله (۵) شامل انتگرال تابع مجهول ϕ است آن را معادله انتگرالی می نامند. این معادله انتگرالی فرمول جواب مسئله مقدار اولیه نیست، اما معرف رابطه دیگری است که هر جواب معادلات (۲) در آن صدق می کند. برعکس، فرض کنیم که یک تابع پیوسته $y = \phi(x)$ وجود دارد که در معادله انتگرالی (۵) صدق می کند، این تابع در مسئله مقدار اولیه (۲) نیز صدق می کند. برای اثبات این مطلب نخست در معادله (۵) به جای x صفر می گذاریم، بدین سان معادله (۲ ب) به دست می آید. علاوه بر این، چون تابعی که در معادله (۵) زیر علامت انتگرال قرار دارد پیوسته است، از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می شود که $\phi'(x) = f[x, \phi(x)]$. بنابراین مسئله مقدار اولیه و معادله انتگرالی هم ارزند، بدین معنی که هر جواب یکی از آنها جواب دیگری نیز می باشد. آسانتر است ثابت کنیم که این معادله انتگرالی در یک فاصله $|x| \leq h$ دارای جوابی یکتاست. آنگاه همین نتیجه درباره مسئله مقدار اولیه نیز برقرار خواهد بود.

یکی از روشهای اثبات اینکه معادله انتگرالی (۵) دارای جواب یکتاست، به روش تقریبیات متوالی یا روش تکرار پیکار (۱۸۵۶-۱۹۴۱) موسوم است. در این روش نخست یک تابع ϕ_0 به طور دلخواه یا تقریبی از جواب مسئله مقدار اولیه انتخاب می کنیم. ساده ترین انتخاب عبارت است از

$$\phi_0(x) = 0 \quad (6)$$

آنگاه ϕ_0 حداقل در شرط اولیه (۲ ب) صدق می کند، هر چند ممکن است که در معادله دیفرانسیل (۲ الف) صدق نکند. تقریب بعدی که آن را ϕ_1 می نامیم از گذاشتن $\phi_0(t)$ به جای $\phi(t)$ در طرف دوم معادله (۵) به دست می آید. بدین سان

$$\phi_1(x) = \int_0^x f[t, \phi_0(t)] dt \quad (7)$$

به همین طریق ϕ_2 را از ϕ_1 به دست می آوریم

$$\phi_2(x) = \int_0^x f[t, \phi_1(t)] dt \quad (8)$$

و به طور کلی

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt \quad (9)$$

بدین سان دنباله توابع

$$\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$$

به وجود می آید. هر جمله این دنباله در شرط اولیه (۲) صدق می کند، اما عموماً هیچ يك از آنها در معادله دیفرانسیل صادق نیست. اما، اگر در مرحله ای مثلاً به ازای $n=k$ ، داشته باشیم $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)$ ، آنگاه ϕ_k جواب معادله انتگرالی (۵) خواهد بود. بنا بر این ϕ_k جواب مسئله مقدار اولیه (۲) نیز می باشد، و دنباله در این نقطه متوقف می شود. عموماً، این حالت پیش نخواهد آمد، و لازم است که يك دنباله نامتناهی به طور کامل، در نظر گرفته شود.

برای اثبات قضیه ۴.۲ باید به چهار سؤال اصلی پاسخ گفت:

۱. آیا همه جمله های دنباله $\{\phi_n\}$ وجود دارند، یا آنکه ممکن است جریان در مرحله ای مختل شود؟
۲. آیا این دنباله همگراست؟
۳. خواص تابع حدی چیست، به ویژه، آیا در معادله انتگرالی (۵) و در نتیجه در مسئله مقدار اولیه (۲) صدق می کند؟
۴. آیا این تنها جواب است یا آنکه جوابهای دیگری نیز وجود دارد؟

نخست با مثال نسبتاً ساده ای نشان می دهیم که چگونه می توان به این پرسشها پاسخ گفت، و سپس به شرح برخی از دشواریها که در حالت کلی پیش می آید می پردازیم.

مثال. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0 \quad (10)$$

برای حل این مسئله بدروش تقریبات متوالی، نخست توجه می کنیم که اگر $y = \phi(x)$ ، آنگاه معادله انتگرالی متناظر چنین است

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1+\phi(t)] dt \quad (11)$$

اگر تقریب اولیه را $\phi_0(x) = 0$ انتخاب کنیم، نتیجه می شود که

$$\phi_1(x) = \int_0^x t[1 + \phi_0(t)] dt = \int_0^x t dt = x^2 \quad (12)$$

بد همین طریق

$$\phi_2(x) = \int_0^x t[1 + \phi_1(t)] dt = \int_0^x t[1 + t^2] dt = x^2 + \frac{x^4}{4} \quad (13)$$

و

$$\phi_3(x) = \int_0^x t[1 + \phi_2(t)] dt = \int_0^x t \left[1 + t^2 + \frac{t^4}{4} \right] dt = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4} \quad (14)$$

معادلات (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) دال بر این است که به ازای هر $n \geq 1$

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \quad (15)$$

و این نتیجه را می توان با استقرای ریاضی اثبات کرد. روشن است که رابطه (۱۵) به ازای $n=1$ برقرار است، و باید نشان دهیم که اگر رابطه به ازای $n=k$ ، برقرار باشد، به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است. داریم

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(x) &= \int_0^x t[1 + \phi_k(t)] dt \\ &= \int_0^x t \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{2k}}{k!} \right) dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \end{aligned} \quad (16)$$

و بدین وسیله اثبات کامل می شود.

از رابطه (۱۵) دیده می شود که $\phi_n(x)$ عبارت است از n امین حاصل جمع جزئی سری نامتناهی

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k! \quad (17)$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ وجود داشته باشد این است که سری

(۱۷) همگرا باشد. با استفاده از آزمون نسبت دیده می شود که به ازای هر x

$$\left| \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{k+1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{هنگامی که} \quad (18)$$

بنابر این سری (۱۷) به ازای همه مقادیر x همگراست، و مجموع آن $\phi(x)$ حد دنباله $\{\phi_n(x)\}$ می باشد. علاوه بر این چون سری (۱۷) یک سری تیلر است، می توان از آن جمله به جمله مشتق و انتگرال گرفت به شرط آنکه x در فاصله همگرایی، که در اینجا همه محور x است، باقی بماند. بنابراین با محاسبه مستقیم می توان تحقیق کرد که $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!$ یک جواب معادله انتگرالی (۱۱) است. همچنین می توان با گذاشتن $\phi(x)$ به جای y در معادله (۱۰) تحقیق کرد که این تابع در مسئله مقدار اولیه نیز صدق می کند. بالاخره، برای بررسی یکنایی جواب، فرض کنیم که مسئله مقدار اولیه دارای یک جواب دیگر ψ متمایز از ϕ باشد. این فرض چنان که نشان خواهیم داد به تناقض می انجامد. چون ϕ و ψ هر دو در معادله انتگرالی (۱۱) صدق می کنند، داریم

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)] dt$$

چون از هر دو طرف قدر مطلق بگیریم، به ازای $x > 0$ خواهیم داشت

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x 2t |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

اگر برای x فاصله $0 \leq x \leq A/2$ را که در آن A ثابت دلخواه است در نظر بگیریم، آنگاه $2t \leq A$ ، و

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (19)$$

در اینجا مناسب است که تابع U را به صورت زیر تعریف کنیم

$$U(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (20)$$

بلافاصله نتیجه می شود که

$$U(0) = 0 \quad (21)$$

$$U(x) \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (22)$$

علاوه بر این، U مشتق پذیر است و داریم $U'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$. بنا بر این با توجه به رابطه (۱۹)،

$$U'(x) - AU(x) \leq 0 \quad (23)$$

۱. در این حالت می توان ϕ را بر حسب توابع مقدماتی به صورت $\phi(x) = e^{x^2} - 1$ نوشت. اما، این نکته هیچ ارتباطی با بحث وجود و یکنایی ندارد.

چون رابطه (۲۳) را در مقدار مثبت e^{-Ax} ضرب کنیم، بدست می آید

$$[e^{-Ax}U(x)]' \leq 0 \quad (24)$$

آنگاه، با انتگرال گیری از معادله (۲۴) از صفر تا x و با استفاده از معادله (۲۱) خواهیم داشت

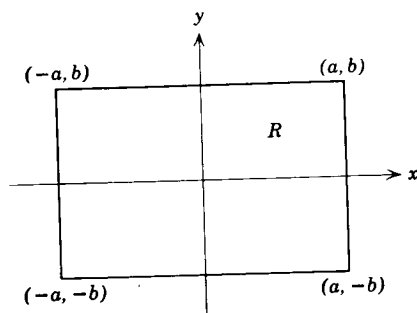
$$e^{-Ax}U(x) \leq 0, \quad x \geq 0$$

بنابراین به ازای $x \geq 0$ داریم $U(x) \leq 0$ و با در نظر گرفتن رابطه (۲۲) به ازای هر $x \geq 0$ نتیجه می شود که $U(x) = 0$. بدین سان $U'(x) \equiv 0$ و بنابراین $\psi(x) \equiv \phi(x)$ ، که متناقض با فرض اصلی است. در نتیجه، به ازای $x \geq 0$ مسئله مقدار اولیه نمی تواند دارای دو جواب متمایز باشد. پس اندک تغییری در این استدلال می توان همین نتیجه را در مورد $x \leq 0$ به دست آورد.

اکنون به مسئله کلی حل معادله انتگرالی (۵) برمی گردیم و هر يك از سؤالاتی را که در پیش مطرح شد به اختصار بررسی می کنیم.

۱. آیا همه جمله های دنباله $\{\phi_n\}$ وجود دارند؟ در مثال بالا f و $\partial f / \partial y$ در تمام صفحه xy پیوسته بودند، و هر جمله دنباله صریحاً قابل محاسبه بود. اما، در حالت کلی f و $\partial f / \partial y$ فقط در يك مستطیل $R: |x| \leq a, |y| \leq b$ (شکل ۱۰.۲) پیوسته فرض می شوند. علاوه بر این، جمله های دنباله را معمولاً نمی توان به طور صریح معین کرد. این خطر وجود دارد که در مرحله ای مثلاً "به ازای $n = k$ ، نمودار $y = \phi_k(x)$ شامل نقاطی واقع در خارج مستطیل R باشد. بنابراین در مرحله بعد، یعنی در محاسبه $\phi_{k+1}(x)$ ، لازم می آید که $f(x, y)$ را در نقاطی که معلوم نیست در آنها پیوسته و یا حتی وجود داشته باشد محاسبه کرد. بدین سان امکان دارد که محاسبه $\phi_{k+1}(x)$ غیر ممکن باشد.

ممکن است برای اجتناب از این خطر لازم آید که x را در فاصله کوچتری از $|x| \leq a$ محدود کنیم. برای تعیین چنین فاصله ای از این مطلب که هر تابع پیوسته روی يك ناحیه بسته، کراندار است استفاده می کنیم. بنابراین f روی R کراندار است و می توان



شکل ۱۰.۲

عدد مثبت M را طوری تعیین کرد که

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in R \quad (25)$$

قبلاً بیان شد که به ازای هر n داریم

$$\phi_n(0) = 0$$

چون $f[x, \phi_k(x)]$ با $\phi'_{k+1}(x)$ برابری است، ماکزیمم قدر مطلق شیب نمودار $y = \phi_{k+1}(x)$ خواهد بود. از آنجا که نمودار مزبور شامل نقطه $(0, 0)$ است، باید نمودار در ناحیه سایه زده شده شکل ۱۱.۲ واقع باشد. بنابراین حداقل مادامی که R شامل ناحیه سایه زده شده باشد که برای آن $|x| \leq b/M$ است، نقطه $[x, \phi_{k+1}(x)]$ در R باقی می ماند. از اینجا به بعد فقط مستطیل $D: |x| \leq h, |y| \leq b$ را در نظر می گیریم، که در آن h یکی از دو مقدار a و b/M را که کوچکتر است نشان می دهد. با این تحدید همه جمله های دنباله $\{\phi_n(x)\}$ وجود خواهند داشت. توجه شود که اگر $b/M < a$ ، آنگاه می توان با تعیین کران دقیقتری برای $|f(x, y)|$ مقدار بزرگتری برای h به دست آورد، البته در صورتی که M از پیش برابر مقدار ماکزیمم $|f(x, y)|$ اختیار نشده باشد.

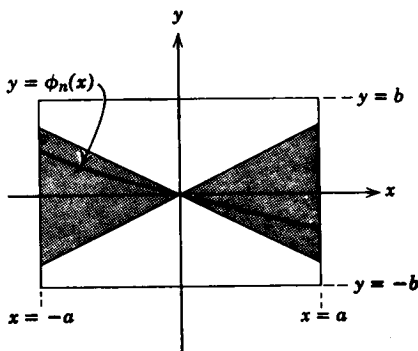
۲. آیا دنباله $\{\phi_n(x)\}$ همگراست؟ همان گونه که در مثال داشتیم می توان

$$\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \dots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

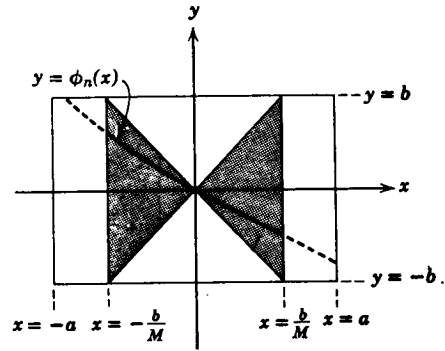
را به عنوان n امین حاصل جمع جزئی سری

$$\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)] \quad (26)$$

در نظر گرفت. برای اثبات همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ کافی است نشان دهیم که سری (۲۶)



(ب) $b/M > a$.



(الف) $b/M < a$.

شکل ۱۱.۲

همگراست. برای این کار لازم است که مقدار جمله عمومی $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|$ را برآورد کنیم. طرز عمل را در مسائل ۳ تا ۶ نشان داده ایم و در اینجا از آن صرف نظر می کنیم. با فرض آنکه دنباله همگرا باشد، تابع حدی را با ϕ نشان می دهیم، و بدین سان

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad (27)$$

۳. خواص تابع حدی ϕ چیست؟ نخست باید دانست که ϕ پیوسته است. این نتیجه لزوماً از همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ با وجود آنکه هر جمله آن تابع پیوسته ای است حاصل نمی شود. در فصل ۱۰ به برخی از مسائل برمی خوریم که در آنها دنباله ای از توابع پیوسته به یک تابع حدی ناپیوسته می گراید. مثال ساده ای از این پدیده را در مسئله ۱ آورده ایم. یک راه برای نشان دادن پیوستگی ϕ آن است که نه تنها همگرایی دنباله $\{\phi_n\}$ را اثبات کنیم بلکه نشان دهیم که همگرایی بدطرز خاصی که به همگرایی یکنواخت موسوم است انجام می گیرد. در اینجا بدین موضوع نمی پردازیم و فقط متذکر می شویم که همان استدلال قسمت ۲ برای اثبات همگرایی یکنواخت دنباله $\{\phi_n\}$ و در نتیجه پیوستگی تابع حدی ϕ در فاصله $|x| \leq h$ کافی است. اکنون برمی گردیم به رابطه (۹)،

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt$$

اگر n به ∞ بگراید، خواهیم داشت

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt \quad (28)$$

اگر بتوانیم در طرف دوم رابطه (۲۸) ترتیب اعمال انتگرال گیری و حدگیری را تعویض کنیم، به دست می آید

$$\phi(x) = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} f[t, \phi_n(t)] dt \quad (29)$$

در حالت کلی این تعویض مجاز نیست (برای مثال، مسئله ۲ را ببینید)، اما چون دنباله $\{\phi_n(x)\}$ نه تنها همگراست بلکه همگرایی یکنواخت است بنابراین می توان عمل حدگیری را به داخل علامت انتگرال برد. اکنون می خواهیم حد را به داخل تابع f ببریم تا به دست آید

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)] dt \quad (30)$$

و از آنجا

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt \quad (31)$$

گزاره $\lim_{n \rightarrow \infty} f[t, \phi_n(t)] = f[t, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)]$ با گزاره f نسبت به متغیر دوم پیوسته است هم‌ارز می‌باشد، و این گزاره بنا بر فرض راست است. بنابراین رابطه (۳۱) برقرار است و تابع ϕ در معادله انتگرالی (۵) صدق می‌کند. از این‌رو ϕ جواب مسئله مقدار اولیه (۲) نیز می‌باشد.

۴. آیا معادله انتگرالی (۵) علاوه بر $y = \phi(x)$ دارای جوابهای دیگر نیز هست؟ برای اثبات یکنایی جواب $y = \phi(x)$ می‌توان به همان نحو که در مثال بیان شد عمل کرد. نخست فرض می‌کنیم که یک جواب دیگر $y = \psi(x)$ وجود داشته باشد. آنگاه می‌توان نشان داد (مسئله ۷ را ببینید) که تفاضل $\phi(x) - \psi(x)$ به‌ازای $0 \leq x \leq h$ در نامساوی

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (32)$$

صدق می‌کند، که در آن A عدد مثبت مناسبی است. از اینجا به بعد استدلال با آنچه در مثال آمد یکسان است، و به این نتیجه می‌رسیم که برای مسئله مقدار اولیه (۲) جواب دیگری به‌جز جوابی که بدروش تقریبات متوالی بدست آمد وجود ندارد.

مسائل

۱. فرض کنیم $\phi_n(x) = x^n$ به‌ازای $0 \leq x \leq 1$ ، نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

این مثال نشان می‌دهد که ممکن است حد دنباله‌ای از توابع پیوسته تابعی ناپیوسته باشد.

۲. دنباله $\phi_n(x) = nxe^{-nx^2}$ ، $0 \leq x \leq 1$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = 0$ ، $0 \leq x \leq 1$ و از آنجا

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx = 0$$

(ب) نشان دهید که $\int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = 1 - e^{-n}$ و از آنجا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n(x) dx = 1$$

این مثال مبین آن است که حتی اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ وجود داشته و پیوسته باشد لزومی ندارد

که تساوی زیر برقرار باشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx$$

در مسائل ۳ تا ۶ طرز اثبات همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ را که با روابط ۶ تا ۹ تعریف شد بیان می‌کنیم.

۰۳. اگر $\partial f / \partial y$ در مستطیل D پیوسته باشد، نشان دهید که عدد ثابت مثبت K را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

که در آن (x, y_1) و (x, y_2) دو نقطه دلخواه D با طول برابر x می‌باشند. راهنمایی: x را ثابت بگیرید و از قضیه مقدار متوسط درباره f به عنوان تابعی از y تنها استفاده کنید. K را برابر مقدار ماکزیمم $|\partial f / \partial y|$ در D اختیار کنید.

۰۴. اگر $\phi_n(x)$ و $\phi_{n-1}(x)$ دو جمله از دنباله $\{\phi_n(x)\}$ باشند، با استفاده از نتیجه مسئله ۳ نشان دهید که

$$|f[x, \phi_n(x)] - f[x, \phi_{n-1}(x)]| \leq K |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|$$

۰۵. (الف) نشان دهید که اگر $|x| \leq h$ ، آنگاه

$$|\phi_1(x)| \leq M|x|$$

که در آن M طوری انتخاب شده است که به ازای هر (x, y) در D داشته باشیم $|f(x, y)| \leq M$.

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۴ و قسمت (الف) مسئله ۵ نشان دهید که

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \frac{MK|x|^2}{2}$$

(ج) با استقرای ریاضی نشان دهید که

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}|x|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}$$

۰۶. با توجه به

$$\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \dots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

(الف) نشان دهید که

$$|\phi_n(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x) - \phi_1(x)| + \dots + |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|$$

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۵ نشان دهید که

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{M}{K} \left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \dots + \frac{(Kh)^n}{n!} \right]$$

(ج) نشان دهید که حاصل جمع قسمت (ب) هنگامی که $n \rightarrow \infty$ همگراست، و از آنجا نشان دهید که حاصل جمع قسمت (الف) نیز هنگامی که $n \rightarrow \infty$ همگراست. بدین سان همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ را که دنباله حاصل جمعهای جزئی يك سری نامتناهی همگراست نتیجه بگیرید.

۷. در این مسئله بدموضوع یکنایی جواب معادله انتگرالی (۵)،

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt$$

می پردازیم. (الف) فرض کنیم که ϕ و ψ دوجواب معادله (۵) باشد. نشان دهید که

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]\} dt$$

(ب) نشان دهید که

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]| dt$$

(ج) با استفاده از نتیجه مسئله ۳ نشان دهید که

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

که در آن K يك کران بالای $|\partial f / \partial y|$ در D است. این همان رابطه (۳۲) است، و بقیه اثبات را می توان به همان گونه که در متن اشاره شد تکمیل کرد.

ضمیمه

تعیین معادله حرکت يك جسم با جرم متغیر. برای بدست آوردن معادله (۱۹) بند ۱۰۲، می توان به روش زیر عمل کرد. فرض کنیم که جرم کل دستگاه متشکل از سفینه، سوخت و گاز خروجی همواره برابر مقدار ثابت m_0 باشد، در این صورت داریم

$$m(t) + m_e(t) = m_0 \quad (۱)$$

که در آن $m(t)$ و $m_e(t)$ به ترتیب عبارتند از جرم سفینه (با احتساب سوخت) و جرم گازهای خروجی. با به کار بردن قانون نیوتن درباره کل دستگاه، خواهیم داشت

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dP_r}{dt} + \frac{dP_e}{dt} \quad (۲)$$

که در آن $P_r(t)$ ، $P_e(t)$ و $P(t)$ به ترتیب اندازه خطی حرکت سفینه، گازهای خروجی و کل دستگاه می باشند. در این بحث فرض می کنیم که تنها نیروی خارجی مؤثر بر کل دستگاه، نیروی ثقل است. چون از نیروهای مقاومت و تغییرات میدان جاذبه صرف نظر کنیم، نتیجه می شود که

$$F = -m_0 g \quad (۳)$$

اگر $v(t)$ نمایشگر سرعت سفینه در زمان t باشد، آنگاه $P_r(t) = m(t)v(t)$ ، و

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \quad (۴)$$

از طرف دیگر، محاسبه اندازه حرکت گازهای خروجی یعنی P_e پیچیده تر است، زیرا قسمتهای مختلف گازهای خروجی دارای سرعتهای متفاوتی می باشند. فرض کنیم که گاز به طور پیوسته با سرعت u نسبت به سفینه بیرون رانده می شود، و گیریم $\Delta m_e(\tau)$ نمایشگر جرم گاز خروجی در مدت زمان کوتاه $(\tau, \tau + d\tau)$ باشد. سرعت اولیه این عنصر جرم تقریباً برابر $v(\tau) + u$ است. معادله حرکت عنصر جرم $\Delta m_e(\tau)$ با فرض آنکه از هنگام خروج به بعد تنها تحت تأثیر نیروی ثقل می باشد عبارت است از

$$\Delta m_e \frac{dv_e}{dt} = -g \Delta m_e$$

که در آن $v_e(t, \tau)$ سرعت عنصر گازی را که در لحظه τ ایجاد شده است، در زمان t نشان می دهد. بنابراین

$$v_e(t, \tau) = -gt + c(\tau)$$

مقدار $c(\tau)$ از این شرط که در زمان $t = \tau$ سرعت v_e برابر $v(\tau) + u$ است تعیین می شود. از آنجا

$$c(\tau) = v(\tau) + u + g\tau$$

و

$$v_e(t, \tau) = -(t - \tau)g + v(\tau) + u$$

بدین سان اندازه حرکت عنصر جرم Δm_e برابر است با $\Delta m_e v_e(t, \tau)$ ، و $P_e(t)$ اندازه حرکت کل مربوط به تمام گاز خروجی با انتگرال زیر داده می شود

$$P_e(t) = \int v_e(t, \tau) dm_e$$

اگر عمل خروج از زمان $t = 0$ آغاز شده، و تا زمان حاضر t ادامه یافته باشد، آنگاه $P_e(t)$ را می توان بایک انتگرال زمانی روی فاصله $(0, t)$ نیز نمایش داد. بدین سان

$$P_e(t) = \int_0^t v_e(t, \tau) \frac{dm_e}{d\tau}(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t [-(t-\tau)g + v(\tau) + u] \frac{dm_e}{d\tau}(\tau) d\tau$$

و چون با توجه به معادله (۱) داریم $dm_e/dt = -dm/dt$ ، از آنجا

$$P_e(t) = \int_0^t [(t-\tau)g - v(\tau) - u] \frac{dm}{d\tau}(\tau) d\tau \quad (5)$$

برای محاسبه dP_e/dt باید از انتگرال (۵) مشتق گرفت. با توجه به این که پارامتر t هم در حد بالایی و هم در زیر علامت انتگرال موجود است، dP_e/dt مساوی است با

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{dt}(t) &= g \int_0^t \frac{dm}{d\tau}(\tau) d\tau - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \\ &= g[m(t) - m(0)] - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \\ &= g[m(t) - m_0] - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

در آخرین مرحله از این نکته که جرم اولیه سفینه شامل جرم کل دستگاه می باشد استفاده شده است.

معادله حرکت سفینه فضایی با جرم متغیر از گذاشتن عبارتهای (۳)، (۴) و (۶) به ترتیب به جای F ، dP_e/dt و dP_e/dt در معادله (۲) به دست می آید. نتیجه پس از ساده کردن عبارت است از

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \quad (7)$$

مراجع

برای بحث کاملتری در باره اثبات قضیه وجود و یکتایی می توانید به کتابهای پیشرفته تر معادلات دیفرانسیل رجوع کنید. دو کتاب زیر برای خواننده مبتدی قابل استفاده هستند.

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Brauer, F. and Nohel, J., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Benjamin, New York, 1973.

مراجع ۱۰۵

کتاب زیر شامل فهرست مفیدی از معادلات دیفرانسیل و جوابهای آنها است:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*,
Chelsea, New York, 1948.

متن کتاب آلمانی است، اما برای مراجعه به فهرست مسائل حل شده اطلاع بسیار
اندکی از زبان آلمانی کافی است.

معادلات خطی مرتبه دوم

۱.۳ مقدمه

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به طور کلی به صورت زیر است

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (۱)$$

نظریه مربوط به این معادلات بسیار پیچیده است. بنابراین در آغاز معادلاتی را مورد توجه قرار می دهیم که بتوان آنها را نسبت به y'' حل کرد، و به صورت زیر نوشت

$$y'' = f(x, y, y') \quad (۲)$$

چنان که دیدیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ دارای جوابی است که در آن يك ثابت دلخواه وجود دارد. چون معادله دیفرانسیل مرتبه دوم متضمن مشتق دوم است. بنابراین، به بیان اجمالی، تعیین جواب آن مستلزم دو انتگرال گیری است، طبعاً می توان انتظار داشت که برای معادله (۲) جوابهایی حاوی دو ثابت دلخواه به دست آید. به عنوان مثال، جواب معادله

$$y'' = g(x) \quad (۳)$$

عبارت است از

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x + \int^x \left[\int^s g(s) ds \right] dt \quad (۴)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی می باشند. درمورد معادله مرتبه اول برای تعیین يك

خم انتگرال یکتا کافی بود مقدار جواب را در يك نقطه مشخص كنیم. چون امکان دارد كه جواب معادله مرتبه دوم حاوی دو ثابت دلخواه باشد، بنابراین برای تعیین يك جواب یكتا لازم است دو شرط، مثلاً y_0 و y_0' مقدار جواب و مشتق آن در نقطه x_0 ، مشخص شود. این شرایط را شرایط اولیه می نامند. بدین سان برای آنكه يك خم انتگرال معادله مرتبه دوم به طور یكتا معین گردد، ندهنها باید نقطه ای را كه از آن می گذرد مشخص كرد بلکه باید شیب خم را نیز در نقطه مزبور تعیین نمود.

برای آنكه نسبت به وجود جواب معادله (۲) بسا شرایط اولیه مفروض اطمینان حاصل شود، لازم است فرض كنیم كه تابع f واجد چند خاصیت است. این نکته در قضیه وجود و یكتایی زیر بیان شده است.

قضیه ۱۰۳. اگر توابع $f, f_y, f_{y'}$ در يك ناحیه باز R از فضای سه بعدی xyy' پیوسته باشند، و اگر نقطه (x_0, y_0, y_0') به R متعلق باشد، آنگاه در يك فاصله حول x_0 برای معادله دیفرانسیل (۲)،

$$y'' = f(x, y, y')$$

جواب یكتای $y = \phi(x)$ وجود دارد كه در شرایط اولیه مفروض

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \quad (5)$$

صدق می كند.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه مربوط به معادله مرتبه اول است كه در بند ۱۱۰۲ آمد. برای اثبات معمولاً مناسبتر است كه به جای معادله مرتبه دوم يك دستگاه متشکل از دو معادله مرتبه اول هم ارز بسا آن را بگذاریم (فصل ۷ را ببینید). این قضیه در بسیاری از كتابهای پیشرفته تر، مانند كادیگتون (فصل ۶) یا اینس (فصل ۳) اثبات شده است. گرچه وجود جواب معادله (۲) تحت شرایط قضیه ۱۰۳ تضمین شده است، اما امکان دارد كه نتوان عبارت تحلیلی مناسبی برای جواب به دست آورد، مگر آنكه تابع f به قدر کافی ساده باشد. درست مانند معادلات مرتبه اول برای معادلات مرتبه دوم نیز دو حاسالت خطی و غیر خطی در نظر می گیریم. صورت کلی معادله خطی مرتبه دوم چنین است

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad (6)$$

كه در آن P, Q, R و G توابع معلومی هستند.

مثال ساده و مهمی از معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، معادله حرکت جرمی است كه به فیزی بسته شده باشد.

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t), \quad (7)$$

كه در آن m, c و k مقادیر ثابت و F تابع مفروضی است. این معادله را در بند ۷۰۳

به دست می آوریم، مثالهای دیگر عبارتند از معادله لژاندر^۱ از رتبه α ،

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (8)$$

و معادله بسل^۲ از رتبه ν ،

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (9)$$

که در آنها α و ν مقادیر ثابت، و اغلب اعداد صحیح می باشند. معادله بسل در بسیاری از مسائل فیزیکی گوناگون، به ویژه در مسائلی که متضمن هندسه دایره ای است، از قبیل تعیین توزیع حرارت در یک صفحه مدور، ظاهر می شود. معادله لژاندر غالباً در مسائل فیزیکی متضمن هندسه کروی پدید می آید.

اگر معادله (۲) به صورت (۶) نباشد، آن را غیرخطی می نامند. گرچه نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی نسبتاً دشوار است، اما در دو حالت خاص می توان معادله غیر خطی مرتبه دوم کلی (۲) را ساده کرد. این هنگامی است که $f(x, y, y')$ فاقد متغیر x یا متغیر y باشد، یعنی وقتی که معادله (۲) به صورت

$$y'' = f(x, y') \quad (10)$$

یا

$$y'' = f(y, y') \quad (11)$$

باشد. در این حالتها همواره می توان معادله (۱۰) یا معادله (۱۱) را با $y' = v$ به معادله مرتبه اول تبدیل کرد. چون معادله مرتبه اول حاصل از نوعی است که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، می توان با حل آن v را پیدا کرد، و با یک انتگرال گیری دیگر جواب معادله دیفرانسیل اصلی را به دست آورد. این مطلب در مسائل ۱، ۲ و ۳ در پایان همین بند مورد بحث قرار گرفته است.

بقیه این فصل و فصل بعد به بیان روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم اختصاص دارد. گرچه برای حل معادله (۶) فرمول خاصی نظیر آنچه که در حالت معادله خطی مرتبه اول داشتیم در دست نیست، اما درباره آن نظریه ریاضی جامعی وجود دارد. در بحث زیر به جز مواردی که تصریح خواهد شد، فرض می کنیم که در معادله (۶) توابع P, Q, R روی یک فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته اند (در برخی از مسائل فاصله مزبور

۱. آ. م. لژاندر (A. M. Legendre)، (۱۷۵۲ - ۱۸۳۳) یکی از ریاضیدانان برجسته فرانسوی است و تحقیقاتش عمدتاً در زمینه های توابع بیضوی و نظریه اعداد بوده است. توابع لژاندر که جوابهای معادله دیفرانسیلی به همین نام می باشند، حاصل بررسیهای او درباره جاذبه اجسام کروی شکل است.

۲. ف. و. بسل (F. W. Bessel)، (۱۷۸۴ - ۱۸۴۶) یکی از ریاضیدانان آلمانی است، که در زمینه های نجوم، ژئودزی و مکانیک سماوی دارای تحقیقات بنیادی است. وی برای نخستین بار به تحلیل سیستماتیک جوابهای معادله ای که به نام او موسوم است (و توابع بسل نامیده می شوند) پرداخت.

می تواند نامحدود باشد، یعنی α می تواند $-\infty$ و یا β می تواند $+\infty$ باشد، و علاوه بر این، تابع P در این فاصله هیچگاه صفر نمی شود. در این حالت می توان معادله (۶) را به $P(x)$ تقسیم کرد و معادله ای به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) \quad (12)$$

دیده می شود که مفروضات بالا در مورد معادله (۷) در $-\infty < x < \infty$ ، و در مورد معادله (۸) در روی فواصل $-1 < x < 1$ ، یا $x > 1$ ، یا $x < -1$ ، و در مورد معادله (۹) در روی هر فاصله ای که شامل مبدأ نباشد برقرارند. اگر معادله (۱۲) را به صورت معادله (۲) بنویسیم، تابع f عبارت خواهد بود از

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x) \quad (13)$$

چون $\partial f(x, y, y') / \partial y' = -p(x)$ و $\partial f(x, y, y') / \partial y = -q(x)$ پیوسته اند، از قضیه ۱.۳ وجود و یکتایی جواب معادله (۱۲) که در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y'_0$ ، در فاصله ای حول x_0 ، $\alpha < x_0 < \beta$ صدق کند محرز می گردد. اما، همانند معادلات مرتبه اول، قضیه وجود و یکتایی مربوط به معادلات مرتبه دوم را می توان درباره معادلات خطی به صورتی قویتر از حالت غیر خطی بیان کرد.

قضیه ۲.۳. اگر توابع p ، q و g دوی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک و فقط یک تابع $y = \phi(x)$ وجود دارد که در تمام فاصله $\alpha < x < \beta$ در معادله دیفرانسیل (۱۲)،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

و در نقطه خاص x_0 متعلق به فاصله مزبور، در شرایط اولیه (۵)،

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

صدق کند.

برای توضیح یکی از کاربردهای این قضیه مثالهای ساده زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۱. جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = 0$$

را که در شرایط اولیه $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ صدق می کند بیابید. به آسانی تحقیق می شود که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای این معادله دیفرانسیلند. علاوه بر این $y = \sin x$ در $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ صدق می کند، بنابراین طبق قضیه ۲.۳، $y = \sin x$ جواب یکتای مسئله است.

مثال ۲. تنها جواب معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

را که در شرایط اولیه $y(x_0) = 0$ ، $y'(x_0) = 0$ صدق می کند بیابید، x_0 نقطه ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ است.

چون $y = 0$ هم در معادله دیفرانسیل و هم در شرایط اولیه صدق می کند همان جواب یکتای مطلوب است.

باید توجه داشت که شرایط اولیه در قضیه های ۱.۳ و ۲.۳ که موجب می شوند معادله (۲) یا معادله (۱۲) يك جواب یکتا داشته باشد شرایطی روی مقدار تابع جواب و مشتق اول آن در يك نقطه ثابت از فاصله مزبور هستند. برعکس، مسئله تعیین جواب برای، مثلاً معادله (۱۲) در فاصله $\alpha < x < \beta$ ، که در $y(x_0) = A$ ، $y(x_1) = B$ صدق کند مشمول این قضیه نیست. در واقع، همواره ممکن است مسئله اخیر دارای جواب نباشد. این گونه مسائل را مسائل مقدار مرزی می نامند، و در فصل های ۱۰ و ۱۱ مورد بحث قرار می گیرند.

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱۲)،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

لازم می آید که نخست معادله همگن^۱ یا ساده، یا مکمل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (14)$$

را که از معادله (۱۲) با قراردادن $g(x) = 0$ بدست می آید حل کنیم. هنگامی که جواب معادله همگن (۱۴) به دست آمد، می توان با يك روش کلی معادله غیر همگن (۱۲) را حل کرد. در سه بند آینده چند نتیجه کلی درباره معادله همگن (۱۴) بیان خواهد شد. آنگاه در بند ۵.۳ نشان می دهیم که چگونه می توان معادله (۱۴) را در حالت خاصی که توابع p و q مقادیر ثابتی باشند حل کرد. حتی همین حالت خاص در عمل دارای اهمیت بسیاری است، مثلاً معادله مربوط به حرکت جرمی که بدیک فنر بسته شده است دارای ضرایب ثابت است. در بند ۶.۳ معادله غیر همگن (۱۲) را مورد توجه قرار می دهیم. بقیه این فصل به کاربردهایی در زمینه های ارتعاشات مکانیکی و شبکه های الکتریکی اختصاص دارد.

مسائل

۱. با جایگزینی $v' = y''$ ، $v = y'$ در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' = f(x, y')$ يك معادله مرتبه اول بدست می آید. اگر بتوان از حل این معادله v را به دست آورد، آنگاه با انتگرال گیری از $dy/dx = v(x)$ تابع y معین می گردد. توجه شود که يك ثابت دلخواه در حل معادله مرتبه اول مربوط به v ، و يك ثابت دیگر

۱. توجه شود که مفهوم واژه همگن در اینجا، با مفهومی که در بحث معادلات دیفرانسیل همگن مرتبه اول در بند ۷.۲ به کار رفت ارتباطی ندارد.

درانتگرال گیری مربوط به y ظاهر می شود. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0 \quad (\text{الف})$$

$$xy'' + y' = 1, \quad x > 0 \quad (\text{ب})$$

$$y'' + x(y')^2 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$2x^2 y'' + (y')^2 = 2xy', \quad x > 0 \quad (\text{د})$$

۲. معادله دیفرانسیل مرتبه دومی به صورت $y'' = f(y, y')$ را در نظر می گیریم. اگر قرار دهیم $y' = v$ ، خواهیم داشت $v' = f(y, v)$. این معادله شامل متغیرهای x, v و y است، و بنابراین به صورت معادله مرتبه اولی که در فصل ۲ بحث شد نمی باشد. می توان متغیر x را با انتخاب y به عنوان متغیر مستقل حذف کرد، زیرا بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}$$

و بنا بر این معادله دیفرانسیل اصلی به صورت زیر نوشته می شود

$$v \frac{dv}{dy} = f(y, v)$$

اگر بتوان این معادله مرتبه اول را حل کرد، v به عنوان تابعی از y به دست می آید. رابطه بین y و x از حل $dy/dx = v(y)$ نتیجه می شود. در اینجا نیز، در نتیجه نهایی دومقدار ثابت دلخواه وجود خواهد داشت. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y = 0 \quad (\text{ب}) \quad yy'' + (y')^2 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1 \quad (\text{د}) \quad y'' + y(y')^2 = 0 \quad (\text{ج})$$

۳. با به کار بردن روشهای مسائل ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. اگر شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی بیابید که در شرایط مزبور صدق کند.

$$y' y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad (\text{الف})$$

$$y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4 \quad (\text{ب})$$

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 2x^{-2} = 0, \quad x > 0 \quad (\text{ج})$$

$$y' y'' - x = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1 \quad (\text{د})$$

۴. برای هر يك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر فاصله ای را تعیین کنید که در آن يك جواب یکتا با شرایط اولیه $y'(x_0) = y'_0$ و $y(x_0) = y_0$ وجود داشته باشد، x_0 نقطه ای از فاصله مزبور است.

$$xy'' + 3y' = x \quad (\text{الف}) \quad y'' + 6y' + 7y = 2 \sin x \quad (\text{ب})$$

$$x(x-1)y'' + 3xy' + 4y = 2 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + (\cos x)y' + 2(\ln |x|)y = 0 \quad (\text{د})$$

$$(1+x^2)y'' + 4y' = e^x \quad (\text{ه})$$

$$e^x y'' + x^2 y' + y = \operatorname{tg} x \quad (\text{و})$$

۵. گیریم p و q روی يك فاصله باز كه شامل مبدأ است پیوسته باشند، و $y = \phi(x)$ جواب

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$$

باشد، $\phi''(0)$ را بیابید. اگر p و q چند جمله‌ای باشند، ثابت می‌کنند كه از جواب $y = \phi(x)$ می‌توان بینهایت بار مشتق گرفت. با فرض آنكه p و q چند جمله‌ای باشند، $\phi'''(0)$ را برحسب $a_0, a_1, p(0), q(0), p'(0)$ و $q'(0)$ بیابید. آیا این عمل را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد؟

۶. جواب هر معادله مرتبه دوم به صورت $y'' = f(x, y, y')$ عموماً متضمن دو مقدار ثابت دلخواه است. برعکس، می‌توان نشان داد كه هر خانواده از توابع كه متضمن دو ثابت دلخواه باشد، جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دومی خواهد بود. در هر يك از حالت‌های زیر با حذف c_1 و c_2 بین y, y' و y'' معادله دیفرانسیلی بیابید كه خانواده توابع داده شده در آن صدق كند.

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (\text{ب}) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (\text{الف})$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x \quad (\text{د}) \quad y = c_1 x + c_2 \sin x \quad (\text{ج})$$

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x \quad (\text{و}) \quad y = c_1 x + c_2 x^2 \quad (\text{ه})$$

۲.۳ جوابهای اساسی معادله همگن

در بحث نظریه معادلات دیفرانسیل خطی، استفاده از نماد عملگر دیفرانسیلی می‌تواند بسیار سودمند باشد. گیریم p و q توابع پیوسته‌ای روی يك فاصله باز $\alpha < x < \beta$ باشند. آنگاه به‌ازای هر تابع دوبار مشتق‌پذیر ϕ روی $\alpha < x < \beta$ ، عملگر دیفرانسیلی L را با معادله زیر تعریف می‌کنیم

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \quad (۱)$$

توجه شود كه $L[\phi]$ نیز تابعی روی $\alpha < x < \beta$ است، درواقع L را می‌توان به‌عنوان تابعی كه حوزه و دامنه آن خود توابعی از يك متغیر حقیقی در نظر گرفت. عملگر L اغلب به‌صورت $L = D^2 + pD + q$ نوشته می‌شود، كه در آن D عملگر مشتقی است. مقدار تابع $L[\phi]$ در نقطه x برابر است با

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$$

مثلاً، اگر $p(x) = x^2$ ، $q(x) = 1 + x$ و $\phi(x) = \sin 3x$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= (\sin 3x)'' + x^2(\sin 3x)' + (1+x)\sin 3x \\ &= -9\sin 3x + 3x^2 \cos 3x + (1+x)\sin 3x \end{aligned}$$

در این بند به بررسی معادله همگن خطی مرتبه دوم زیر می‌پردازیم

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x) = 0 \quad (2)$$

توابع p و q روی یک فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته فرض می‌شوند. توجه شود که معمولاً $\phi(x)$ را با علامت y نشان می‌دهند. بدین‌سان اغلب به‌جای معادله (۲) می‌نویسیم

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

باید توجه داشت که $L[\phi]$ در رابطه (۱) نمایشگر یک تابع است، در صورتی که $L[y]$ در معادله (۳) مقدار تابع $L[\phi]$ را در نقطه x نشان می‌دهد. بدین‌سان علامت y به‌طرز خاصی به‌کار می‌رود.

با استفاده از این نکته که اگر u_1 و u_2 توابع مشتق‌پذیری باشند، آنگاه

$$[c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)]' = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند، می‌توان قضیه مهم زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۳. اگر $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه ترکیب خطی $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه‌اند، نیز یک جواب معادله (۳) است.

باید نشان دهیم که اگر

$$L[y_1] = y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad \text{و} \quad L[y_2] = y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

آنگاه $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$ اما

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود. اگر در اثبات بالا $c_2 = 0$ بگیریم، این نتیجه به‌دست می‌آید که اگر

۱. توجه شود که چون $L[y_1]$ نمایشگر یک تابع است، در طرف دوم گزاره $L[y_1] = 0$ نمایشگر تابعی است که در $\alpha < x < \beta$ متحداً صفر است.

تابع y_1 يك جواب معادله (۳) باشد، آنگاه هر مضرب ثابت y_1 نیز يك جواب معادله (۳) است.

درضمن اثبات قضیه ۳.۳، نشان داده شد که به ازای هر دو تابع u_1 و u_2 که دارای مشتقهای دوم پیوسته باشند، و به ازای هر دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 داریم

$$L[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2]$$

عملگرى که دارای این خاصیت باشد، به عملگر خطی موسوم است، به ویژه عملگر دیفرانسیلی L يك عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبه دوم است. مثال دیگری از عملگر خطی در مسئله ۱۰ آمده است. این نکته که هر ترکیب خطی جوابهای يك معادله همگن خطی همچنان يك جواب معادله مزبور است دارای اهمیت اساسی است، و اغلب آن را اصل انطباق می نامند. نظریه معادلات همگن خطی، مشتمل بر معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر و معادلات با مشتقهای جزئی، به اصل انطباق بستگی زیاد دارد. این اصل را با مثالهای ساده زیر توضیح می دهیم.

مثال ۱. مستقیماً با محاسبه تحقیق کنید که $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ يك جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است. چون $\phi(x)$ را بد جای y قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \phi(x) &= (c_1 \cos x + c_2 \sin x)'' + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ &= c_1[(\cos x)'' + \cos x] + c_2[(\sin x)'' + \sin x] \\ &= c_1[-\cos x + \cos x] + c_2[-\sin x + \sin x] = 0 \end{aligned}$$

مثال ۲. تحقیق کنید که $\phi(x) = x + 1$ يك جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' + y = x + 2$ است؛ اما $\psi(x) = 2\phi(x)$ جواب معادله نیست. چون $\phi'(x) = 1$ و $\phi''(x) = 0$ داریم

$$\phi''(x) + 3\phi'(x) + \phi(x) = 0 + 3(1) + (x + 1) = x + 4$$

اما

$$\psi''(x) + 3\psi'(x) + \psi(x) = 0 + 3(2) + 2(x + 1) \neq x + 4$$

این با قضیه ۳.۳ تناقضی ندارد، زیرا معادله دیفرانسیل مزبور همگن نیست.

مثال ۳. نشان دهید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله $y'' + y^2 = 0$ باشند، لزوماً ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ يك جواب معادله نیست. با جایگذاری، داریم

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + (c_1 y_1 + c_2 y_2)^2 \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1^2 y_1^2 + 2c_1 c_2 y_1 y_2 + c_2^2 y_2^2 \end{aligned}$$

$$\neq c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

در اینجا اصل انطباق به علت خطی نبودن معادله دیفرانسیل تحقق نمی یابد.

دیدیم که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز يك جواب معادله (۳) است، و متناظر به بینهایت مقدار که می توان به c_1 و c_2 نسبت داد، بینهایت جواب برای معادله (۳) ساخته می شود. اما آیا این بینهایت جواب شامل همه جوابهای ممکن معادله (۳) است؟

دو جواب y_1 و y_2 از معادله (۳) هنگامی يك مجموعه اساسی جوابها را تشکیل می دهند که هر جواب معادله (۳) را بتوان به صورت يك ترکیب خطی y_1 و y_2 بیان کرد. برای اثبات آنکه y_1 و y_2 يك مجموعه اساسی از جوابها را تشکیل می دهند، باید نشان دهیم که به ازای هر جواب $y = \phi(x)$ می توان مقادیر ثابت c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ برای این منظور به روش زیر عمل می کنیم.

گیریم $y = \phi(x)$ جوابی از معادله (۳) باشد. نقطه x_0 را در فاصله $\alpha < x < \beta$ انتخاب می کنیم، آنگاه $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ به ترتیب مقادیر جواب مزبور و مشتق آن در نقطه x_0 است. اکنون باید ثابتهای c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که تابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و مشتق آن در $x = x_0$ به ترتیب مقادیر $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ را اختیار کنند. بدین سان c_1 و c_2 باید در دستگاه معادلات جبری خطی زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= \phi(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= \phi'(x_0) \end{aligned} \quad (4)$$

دستگاه معادلات (۴) هنگامی دارای جواب یکتا برای c_1 و c_2 است که دترمینان ضرایب آن صفر نباشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0 \quad (5)$$

در این صورت به ازای c_1 و c_2 که از معادلات (۴) به دست می آیند، توابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و ϕ هر دو در معادله دیفرانسیل (۳) و شرایط اولیه متناظر به $x = x_0$ صدق می کنند. چون قضیه ۲.۳ مبین آن است که تنها يك جواب برای این مسئله مقدار اولیه وجود دارد، نتیجه می گیریم که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ خواهیم داشت $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. اگر بدانیم که رابطه (۵) به ازای هر x در فاصله $\alpha < x < \beta$ برقرار است، همواره می توان يك چنین x را انتخاب کرد. در این حالت معادلات (۴) را همواره می توان با صرف نظر کردن از مقادیر بخصوص x_0 ، $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ حل کرد. بدینسان قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۴.۳. اگر توابع p و q در فاصله بساز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند و اگر y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

در شرط

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0 \quad (6)$$

به ازای هر نقطه از فاصله $\alpha < x < \beta$ صدق کنند، آنگاه هر جواب معادله (۳) دوی فاصله $\alpha < x < \beta$ را می‌توان به صورت يك تركيب خطی y_1 و y_2 بیان کرد.

مرسوم است که تركيب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ را با c_1 و c_2 دلخواه، جواب عمومی معادله (۳) بنامند.

مثال ۴. يك مجموعه اساسی از جوابهای معادله زیر را بیابید

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

با بررسی می‌توان دید که $y_1(x) = \cos x$ و $y_2(x) = \sin x$ جوابهای معادله (۷) می‌باشند. علاوه بر این

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x = 1$$

بنابراین اگر $y = \phi(x)$ يك جواب معادله (۷) باشد، آنگاه ثابتهای c_1 و c_2 وجود دارند به طوری که $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

دو تابع مشتق‌پذیر y_1 و y_2 را روی يك فاصله باز در نظر می‌گیریم، تابع $y_1 y_2' - y_1' y_2$ را رونسکین y_1 و y_2 می‌نامند، و آن را معمولاً به صورت زیر می‌نویسند

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (8)$$

مقدار رونسکین y_1 و y_2 را در نقطه x با $W(y_1, y_2)(x)$ و اگر در مورد توابع ابهامی پیش نیاید به طور ساده آن را با $W(x)$ نشان می‌دهند.

اکنون فرض کنیم که برای معادله (۳) دو جواب y_1 و y_2 بدست آورده‌ایم، چگونه می‌توان تشخیص داد که توابع y_1 و y_2 تشکیل يك مجموعه اساسی می‌دهند، یعنی چگونه می‌توان معلوم کرد که $W(y_1, y_2)$ هیچگاه در فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود؟ در مثال ۴ داریم $W(\cos x, \sin x) = 1$ ، و بنابراین روشن است که $\cos x$ و $\sin x$ روی هر فاصله، يك مجموعه اساسی برای معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ تشکیل می‌دهند، اما، به طور کلی $W(y_1, y_2)$ مقدار ثابتی نخواهد بود، و ممکن است تشخیص آنکه تابع مزبور در نقطه‌ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر شود دشوار باشد. خوشبختانه به این سؤال با قضیه مهم زیر می‌توان پاسخ داد.

قضیه ۵.۳. اگر توابع p و q دوی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر

۱. به احترام ریاضیدان هلندی رونسکی (Wronski)، (۱۷۷۸-۱۸۵۳).

توابع y_1 و y_2 دی فاصله $\alpha < x < \beta$ جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ یا متحد با صفر است و یا هیچگاه در $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود.

برای اثبات این قضیه می‌توان از استدلالی مشابه آنچه در اثبات قضیه ۲.۳ به کار رفت استفاده نمود، اما، ما اثبات دیگری عنوان می‌کنیم که در آن ضمناً فرمولی برای $W(y_1, y_2)$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه توابع y_1 و y_2 در

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad (9)$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

صدق می‌کنند، معادله اول را در $y_2 -$ و معادله دوم را در y_1 ضرب کرده و باهم جمع می‌کنیم، در نتیجه

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \quad (10)$$

چون قرار دهیم $W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$ ، دیده می‌شود که

$$W_{12}' = y_1 y_2'' - y_1' y_2' \quad (11)$$

و می‌توان معادله (۱۰) را به صورت زیر نوشت

$$W_{12}' + p W_{12} = 0 \quad (12)$$

این يك معادله جدایی‌پذیر (بند ۴.۲) و همچنین يك معادله خطی مرتبه اول (بند ۱.۲) است، و جواب آن مستقیماً به صورت زیر به دست می‌آید

$$W_{12}(x) = c \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (13)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است.^۱ چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی‌شود، $W_{12}(x)$ تنها اگر $c = 0$ باشد صفر خواهد شد، و در این صورت متحد با صفر است، بدین سان قضیه ثابت می‌شود. علاوه بر این رابطه (۱۳) فرمولی است که می‌توان از آن رونسکین يك مجموعه اساسی جوابهای معادله (۳) را با تقریب ضریب ثابتی بدون حل کردن معادله تعیین کرد. همچنین باید توجه داشت که رونسکین هر دو مجموعه اساسی جوابها تنها در يك

۱. نتیجه‌ای که به صورت معادله (۱۳) بیان شده است نخستین بار توسط ریاضیدان نروژی ن. ه. آبل (N. H. Abel)، (۱۸۰۲-۱۸۲۹) در ۱۸۲۷ به دست آمده است، و به اتحاد آبل مشهور است. وی همچنین ثابت کرد که برای حل معادله درجه پنجم يك فرمول کلی که متضمن عملیات جبری روی ضرایب معادله مزبور باشد وجود ندارد. بزرگترین تحقیق وی در آنالیز و در زمینه توابع بیضوی است، اما قبل از مرگ وی بدین رساله توجه نشد. لئاندر ریاضیدان بزرگ فرانسوی آن را به عنوان «بنایی مستحکمتر از برنزه» توصیف کرد.

ضریب ثابت باهم اختلاف دارند.

با ترکیب نتایج قضیه‌های ۴.۳ و ۵.۳ می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد.

قضیه ۶.۳. اگر توابع p و q دوی فاصلهٔ باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 دوی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، و اگر حداقل در يك نقطهٔ $\alpha < x < \beta$ ، $W(y_1, y_2)$ صفر نباشد، آنگاه هر جواب $y = \phi(x)$ از معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

بالاخره باید نشان دهیم که واقعاً معادلهٔ (۳) دارای يك مجموعهٔ اساسی جواب می‌باشد، یعنی باید بداثبات قضیهٔ زیر بپردازیم.

قضیه ۷.۳. اگر توابع p و q دوی فاصلهٔ باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه يك مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

دوی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ وجود دارد.

گیریم c نقطه‌ای از $\alpha < x < \beta$ باشد. بنابر قضیهٔ ۲.۳ برای مسائل متناهی اولیه

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(c) = 1, \quad y'(c) = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(c) = 0, \quad y'(c) = 1$$

جوابهای یکتای y_1 و y_2 در فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ وجود دارد. بدآسانی دیده می‌شود که $W(y_1, y_2)(c) = 1 \neq 0$. بنابراین از قضیهٔ ۶.۳ نتیجه می‌شود که y_1 و y_2 يك مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ (۳) تشکیل می‌دهند.

درخاتمهٔ این بند برهان جالب دیگری برای قضیهٔ ۶.۳ می‌آوریم. در این برهان نیازی بد استفاده از قضیهٔ وجود و یکتایی (برهان قضیهٔ ۴.۳ را ببینید) نمی‌باشد. فرض کنیم که توابع y_1 ، y_2 و y_3 جوابهای معادلهٔ (۳) باشند، و $W(y_1, y_2)(x)$ هیچگاه در $\alpha < x < \beta$ صفر نشود. برای اثبات رابطهٔ $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

$$y_3'' + p y_3' + q y_3 = 0$$

معادلهٔ اول را در $y_2 -$ ، و معادلهٔ دوم را در y_1 ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم. و بسا

استفاده از معادله ۱۱ داریم

$$W'_{12} + pW_{12} = 0 \quad (14)$$

که در آن $W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$. با محاسبه مشابهی در مورد معادلات دوم و سوم، و بالاخره معادلات اول و سوم، خواهیم داشت

$$W'_{23} + pW_{23} = 0 \quad (15)$$

$$W'_{13} + pW_{13} = 0 \quad (16)$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) معادلات خطی مرتبه اول اند. جوابهای آنها عبارتند از

$$W_{12}(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = k_{12} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (17)$$

$$W_{23}(x) = y_2(x)y'_3(x) - y'_2(x)y_3(x) = k_{23} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (18)$$

$$W_{13}(x) = y_1(x)y'_3(x) - y'_1(x)y_3(x) = k_{13} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (19)$$

که در آن k_{12} ، k_{23} و k_{13} ثابت اند، و بدویژه $k_{12} \neq 0$ ، زیرا W_{12} بنا بر فرض هیچگاه صفر نمی شود. چون معادله (۱۸) را در $-y_1(x)$ ، و معادله (۱۹) را در $y_2(x)$ ضرب کرده و باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$[y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)]y_3(x) = [-k_{23}y_1(x) + k_{12}y_2(x)] \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (20)$$

بالاخره، چون به جای $y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)$ مقدار آن را از معادله (۱۷) جایگزین کنیم، و نمایها را حذف کنیم بدست می آید

$$y_3(x) = -\frac{k_{23}}{k_{12}}y_1(x) + \frac{k_{13}}{k_{12}}y_2(x)$$

بنابراین y_3 را می توان به صورت یک ترکیب خطی y_1 و y_2 ، همان طور که باید ثابت می کردیم، بیان کرد.

مسائل

۱. تحقیق کنید که e^x و e^{-2x} و ترکیب خطی $c_1e^x + c_2e^{-2x}$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی اند، جوابهای معادله دیفرانسیل زیر می باشند:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

۰۲. در مسئله ۱ جواب یکتای معادله دیفرانسیل را که در شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ صدق می کند بیابید. جواب یکتای این مسئله هنگامی که شرایط اولیه $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ باشد چیست؟

۰۳. تحقیق کنید که e^x و e^{-x} جوابهای $y'' - y = 0$ می باشند. از آنجا نشان دهید که $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ و $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ نیز جوابهای این معادله دیفرانسیل هستند.

۰۴. تحقیق کنید که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای $y'' + y = 0$ می باشند. فعلاً می پذیریم که $(cf)' = cf'$ که در آن f یک تابع با مقدار حقیقی و c یک عدد مختلط است، نشان دهید که ترکیب خطی $(1+i)\sin x + (2-i)\cos x$ نیز یک جواب $y'' + y = 0$ است. در اینجا i یکۀ موهومی و $i^2 = -1$ است.

۰۵. تحقیق کنید که x^2 و x^{-1} و ترکیب خطی $c_1x^2 + c_2x^{-1}$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند، جوابهای معادله دیفرانسیل $x^2y'' - 2y = 0$ ، $x > 0$ می باشند.

۰۶. تحقیق کنید که $x^{1/2}$ و $x^{3/2}$ جوابهای معادله دیفرانسیل $xy'' + (y')^2 = 0$ می باشند، $x > 0$ ؛ اما ترکیب خطی $c_1 + c_2x^{1/2}$ به طور کلی جواب نیست. چرا؟

۰۷. نشان دهید که اگر $y = \phi(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ باشد، آنگاه $y = c\phi(x)$ که در آن c ثابتی مخالف یک است، جواب نیست. چرا؟

۰۸. فرض می کنیم $Ly = ay'' + by' + cy$ باشد که در آن a, b, c ثابت اند، مطلوب است محاسبه

$$L[\sin x] \quad (\text{ب}) \quad L[x] \quad (\text{الف})$$

$$r, L[x'] \quad (\text{د}) \quad r, L[e^{rx}] \quad (\text{ج}) \quad \text{ثابت}$$

۰۹. فرض می کنیم $Ly = ax^2y'' + bx'y' + cy$ باشد که در آن a, b, c ثابت اند، مطلوب است محاسبه

$$r, L[e^{rx}] \quad (\text{ب}) \quad L[x^2] \quad (\text{الف}) \quad \text{ثابت}$$

$$L[\ln x] \quad (\text{د}) \quad r, L[x^r] \quad (\text{ج}) \quad \text{ثابت}$$

۱۰. نشان دهید عامل M که با

$$M[u](x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x-t)u(t)dt \quad \alpha < x < \beta$$

تعریف شده است و در آن K تابعی پیوسته در فاصله $\alpha - \beta \leq s \leq \beta - \alpha$ می باشد، یک عملگر خطی است، یعنی نشان دهید که

$$M[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1M[u_1] + c_2M[u_2]$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت اند.

۱۱. رونسکین زوجهای توابع زیر را بیابید:

(الف) e^{mx}, e^{nx} که در آن m و n اعداد صحیح هستند و $m \neq n$

(ب) $\sinh x, \cosh x$ (ج) x, xe^x

(د) $e^x \sin x, e^x \cos x$ (ه) $1 + \cos 2x, \cos^2 x$

۱۲. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل داده شده اند و بسا محاسبه $W(y_1, y_2)$ تعیین کنید که در چه فوایدی تشکیل يك مجموعه اساسی جواب می دهند.

(الف) $y'' + \lambda^2 y = 0$; $y_1(x) = \sin \lambda x$, $y_2(x) = \cos \lambda x$

λ يك عدد حقیقی است

(ب) $y'' - y' - 2y = 0$; $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{2x}$

(ج) $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$

(د) $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$

توجه شود که اگر معادله (د) را به صورت استاندارد $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ بنویسیم، ضرایب $p(x) = -(x+2)/x$ و $q(x) = (x+2)/x^2$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ نامحدود می شوند، اما جوابهای x و xe^x هنگامی که $x \rightarrow 0$ کاملاً معین اند. بدین سان اگر در نقطه ای ضرایب ناپیوسته باشند، جواب لزوماً ناپیوسته نخواهد بود، اما اغلب چنین است.

۱۳. تحقیق کنید که اگر ϕ_1, ϕ_2 توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه

$$W(\phi\phi_1, \phi\phi_2) = \phi^2 W(\phi_1, \phi_2)$$

۱۴. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 يك مجموعه اساسی جواب برای معادله دیفرانسیل داده شده تشکیل می دهند و جوابی را که در شرایط اولیه داده شده صدق می کند بیابید.

(الف) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$

(ب) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

$y_1(x) = \sinh x$, $y_2(x) = \cosh x$

با نتیجه قسمت (الف) مقایسه شود.

(ج) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

$y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$

(د) $y'' + y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

$y_1(x) = 2$, $y_2(x) = e^{-x}$

در مسائل ۱۵، ۱۶ و ۱۷ فرض می کنیم که p و q پیوسته و توابع y_1 و y_2

جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ روی فاصله $\alpha < x < \beta$ باشند.

۱۵. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 هر دو در نقطه‌ای از $\alpha < x < \beta$ صفر شوند، آنگاه نمی‌توانند روی این فاصله يك مجموعه اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۶. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 هر دو در يك نقطه از $\alpha < x < \beta$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم باشند، آنگاه نمی‌توانند روی این فاصله يك مجموعه اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۷. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 يك مجموعه اساسی جواب باشند، آنگاه نمی‌توانند هر دو به ازای مقداری از $\alpha < x < \beta$ تماماً دارای نقطه عطف باشند، مگر آن که به ازای آن p و q هر دو صفر شوند.

۱۸. می‌توان مفهوم کامل بودن را، که درباره معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بررسی شد، در مورد معادلات خطی مرتبه دوم تعمیم داد. معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ را کامل گویند اگر بتوان آن را به صورت $[f(x)y]' + [P(x)y']' = 0$ که در آن $f(x)$ بر حسب $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ معین می‌شود نوشت. با انتگرال گیری از معادله اخیر فوراً معادله دیفرانسیل مرتبه اولی به دست می‌آید که می‌توان آن را با روش بند ۱۰۲ حل کرد. با مساوی قرار دادن ضرایب معادلات بالا، و حذف $f(x)$ ، نشان دهید که شرط لازم برای کامل بودن عبارت است از $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. می‌توان نشان داد که این شرط برای کامل بودن کافی نیز هست. کامل بودن هر يك از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت کامل بودن، جواب آن را بیابید.

$$y'' + xy' + y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 3x^2y' + xy = 0 \quad (\text{ب})$$

$$xy'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0, \quad x > 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0 \quad (\text{د})$$

۱۹. اگر معادله همگن خطی مرتبه دومی کامل نباشد، می‌توان آن را با ضرب در يك عامل انتگرال ساز $\mu(x)$ کامل نمود. بدین سان باید $\mu(x)$ را طوری تعیین کرد که

$$\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$$

را بتوان به صورت

$$[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$$

نوشت. با مساوی قرار دادن ضرایب این دو معادله و حذف $f(x)$ نشان دهید که تابع μ باید در معادله زیر صدق کند

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0$$

این معادله موسوم به معادله الحاقی است، و در نظریه پیشرفته معادلات دیفرانسیل دارای

نقش بسیار مهمی می باشد. عموماً مسئله حل معادله دیفرانسیل الحاقی به همان دشواری حل معادله اصلی است. معادله الحاقی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

(الف) معادله بسل^۱ رتبه^۲ v :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$$

(ب) معادله لژاندر^۲ رتبه^۲ α :

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \alpha(\alpha + 1) y = 0$$

(ج) معادله ایری^۳:

$$y'' - x y = 0$$

(د) معادله ویتکر^۴:

$$x^2 y'' + \left(-\frac{x^2}{4} + kx + \frac{1}{4} - m^2 \right) y = 0$$

که در آن k و m اعداد صحیح می باشند.

۲۰۰. نشان دهید که درمورد معادله خطی مرتبه دوم

$$P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y = 0$$

معادله الحاقی معادله الحاقی، همان معادله اصلی است.

۲۱۰. معادله خطی مرتبه دوم

$$P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y = 0$$

را هنگامی که معادله الحاقی آن با معادله اصلی متحد باشد خودالحاقی می نامند. نشان دهید که شرط لازم برای خودالحاقی بودن این معادله دیفرانسیل آن است که $P'(x) = Q(x)$. معادلات مسئله ۱۹ را از لحاظ خودالحاقی بررسی کنید.

۲۲۰. در بررسی نظریه معادله $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ اغلب به مواردی برمیخوریم که باید تابع را طوری تبدیل نمود که معادله به صورت $u'' + f(x) u = 0$ درآید. این صورت را فرم فرمال معادله همگن خطی مرتبه دوم می نامند. برای تبدیل معادله اصلی به فرم نرمال قرار دهید $y = u(x)v(x)$ و $v(x)$ را طوری انتخاب کنید که ضریب u' صفر شود. $v(x)$ و $f(x)$ را بیابید.

۳.۳ استقلال خطی

مفهوم جواب عمومی يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به عنوان ترکیب خطی دوجواب که رونسکین آنها صفر نشود با مفهوم استقلال خطی دوتابع ارتباط نزدیکی دارد. مفهوم

اخیر دارای اهمیت زیادی است و از محدوده این مسئله بسیار فراتر می‌رود، و در اینجا آن را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

گویند دو تابع f و g روی فاصله $\alpha < x < \beta$ وابستگی خطی دارند اگر دو ثابت c_1 و c_2 که توأماً صفر نباشند وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad (1)$$

گویند دو تابع f و g روی فاصله $\alpha < x < \beta$ استقلال خطی دارند اگر وابستگی خطی نداشته باشند، یعنی هنگامی که معادله (۱) تنها به ازای $c_1 = c_2 = 0$ روی همه فاصله $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. همین تعریف را می‌توان روی هر فاصله‌ای هم که باز نباشد به کار برد.

مثال ۰۱. توابع $\sin x$ و $\cos(x + \pi/2)$ روی هر فاصله‌ای وابستگی خطی ندارند، زیرا

$$c_1 \sin x + c_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

با انتخاب $c_1 = 1$ ، $c_2 = 1$ به ازای همه مقادیر x برقرار می‌گردد.

مثال ۰۲. نشان دهید که توابع e^x و e^{2x} روی هر فاصله دارای استقلال خطی اند. باید نشان داد که نمی‌توان ثابتهای c_1 و c_2 را که توأماً صفر نیستند طوری تعیین کرد که به ازای هر x در فاصله داده شده داشته باشیم

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0 \quad (2)$$

برای اثبات فرض می‌کنیم که معادله (۲) روی $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. آنگاه نقاط x_0 و $x_1 \neq x_0$ را در این فاصله انتخاب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} = 0$$

$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0$$

چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است: $e^{2x_1 + x_0} - e^{2x_0 + x_1} \neq 0$ ، تنها $c_1 = c_2 = 0$ جواب این معادلات است. بنابراین e^x و e^{2x} دارای استقلال خطی اند.

اکنون می‌توان قضیه ۰۳ را مجدداً با استفاده از مفهوم استقلال خطی بیان کرد.

قضیه ۰۸۰۳. اگر توابع p و q روی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

دارای استقلال خطی باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ هیچگاه روی فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر

نمی‌شود، و بنابراین هر جواب معادله (۳) را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی جوابهای y_1 و y_2 بیان کرد.

برای اثبات این قضیه باید نشان دهیم که اگر y_1 و y_2 جوابهای معادله (۳) روی $\alpha < x < \beta$ استقلال خطی داشته باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ هیچگاه روی $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود. فرض کنیم که یک نقطه x_0 ، $\alpha < x_0 < \beta$ وجود داشته باشد به طوری که $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ ، باید نشان دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. اگر $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ آنگاه دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

بر حسب c_1 و c_2 جواب مخالف صفری خواهد داشت. با استفاده از این مقادیر c_1 و c_2 قرار می‌دهیم $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. آنگاه ϕ یک جواب معادله (۳) است، و علاوه بر این بنا به معادلات (۴) در شرایط اولیه $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ صدق می‌کند. بنا بر این طبق قضیه وجود و یکتایی، روی فاصله $\alpha < x < \beta$ داریم $\phi(x) = 0$ (مثال ۲، بند ۱۰.۳ را ببینید). یعنی روی فاصله $\alpha < x < \beta$ داریم $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ که مستلزم وابستگی خطی y_1 و y_2 است، و به تناقض می‌رسیم.

عکس قضیه ۸.۳ نیز صادق است، یعنی اگر $L[y_1] = 0$ ، $L[y_2] = 0$ ، و $W(y_1, y_2) \neq 0$ روی $\alpha < x < \beta$ ، آنگاه توابع y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ دارای استقلال خطی‌اند. برای اثبات این نکته نیز از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنیم که y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ وابستگی خطی داشته باشند. در این صورت می‌توان c_1 و c_2 را که تواناً صفر نباشند طوری تعیین کرد که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad (5)$$

نتیجه می‌شود که رابطه

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \quad (6)$$

نیز روی $\alpha < x < \beta$ برقرار است. چون حداقل یکی از مقادیر c_1 یا c_2 مخالف صفر است برای برقراری معادلات (۵) و (۶) لازم (و کافی) است که $W(y_1, y_2)$ به ازای هر x صفر باشد، و به تناقض می‌رسیم. از این رو دو جواب معادله (۳) استقلال خطی دارند اگر و فقط اگر رونسکین آنها در هر نقطه فاصله مزبور مخالف صفر باشد.

باید توجه داشت که این رابطه بین رونسکین و استقلال خطی، اگر توابع مزبور جوابهای معادله (۳) نباشند برقرار نیست. در مسئله ۵ مثالی از دو تابع مستقل خطی که رونسکین آنها متحد با صفر است بیان شده است.

شبهات این نتیجه با نتایجی از جبر برداری دو بعدی بسیار جالب توجه است. دو

بردار a و b را وابسته خطی گویند اگر دو اسکالر c_1 و c_2 که توأماً صفر نباشند وجود داشته باشد به طوری که $c_1 a + c_2 b = 0$ ، در غیر این صورت مستقل خطی نامیده می‌شوند. گیریم بردارهای یکۀ i و j به ترتیب در امتداد مثبت محورهای x و y باشند. چون نمی‌توان اسکالرهایی c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $c_1 i + c_2 j = 0$ ، و توأماً صفر نباشند، بنا بر این بردارهای i و j دارای استقلال خطی اند. علاوه بر این می‌دانیم که هر بردار با مؤلفه‌های a_1 و a_2 را می‌توان به صورت $a_1 i + a_2 j$ نوشت، یعنی آن را به صورت ترکیب خطی دو بردار مستقل خطی i و j بیان کرد، به آسانی ثابت می‌شود که هر بردار صفحه را می‌توان به صورت ترکیب خطی از هر دو بردار مستقل خطی نمایش داد (مسئله ۷ را ببینید). این قبیل زوج بردارهای مستقل خطی را پایه یا مولد فضای برداری دوبعدی مزبور می‌نامند.

اصطلاح فضای برداری دربارهٔ اشیاء ریاضی دیگری که مانند بردارهای هندسی در همان قوانین جمع و ضرب در اسکالر صدق می‌کنند، به کار می‌رود. مثلاً می‌توان نشان داد که مجموعهٔ توابعی که روی $\alpha < x < \beta$ دوبار مشتق پذیرند تشکیل یک فضای برداری می‌دهند. به همین نحو مجموعهٔ V متشکل از توابعی که در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند نیز تشکیل یک فضای برداری می‌دهند.

چون هر عنصر V را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از عناصر مستقل خطی y_1 و y_2 بیان کرد، از این رو زوج مزبور را یک پایهٔ V یا یک زوج مولد V می‌نامند. از اینجا نتیجه می‌شود که V دوبعدی است — معادلهٔ (۳) از مرتبهٔ دوم است — و از بسیاری جهات با فضای بردارهای هندسی صفحه شباهت دارد. بعداً خواهیم دید که مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ n ام، یک فضای برداری n بعدی تشکیل می‌دهد، که به وسیلهٔ هر مجموعهٔ n جواب مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل مزبور ایجاد می‌شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۴ ثابت کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده می‌باشند.

$$y'' - y = 0; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad ۱.$$

$$y'' - y = 0; \quad y_1(x) = \cosh x, \quad y_2(x) = \sinh x \quad ۲.$$

$$y'' - y' - 6y = 0; \quad y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = e^{3x} \quad ۳.$$

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-2} \quad ۴.$$

۵. ثابت کنید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه y_1 و y_2 نیز جوابهای مستقل خطی اند مشروط به آنکه هیچ کدام از c_1 و c_2 صفر نباشد.

۶. ثابت کنید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند، آنگاه $y_2 = y_1 + y_2$ و $y_2 = y_1 - y_2$ نیز يك مجموعه اساسی جواب تشکیل می دهند.

۷. (الف) ثابت کنید که هر بردار صفحه را می توان به صورت يك ترکیب خطی بردارهای $i + j$ و $i - j$ نوشت.

داهنمایی: هر بردار a را می توان به صورت $a_1 i + a_2 j$ نوشت. نشان دهید که می توان c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که $a = c_1(i + j) + c_2(i - j)$. برای این کار دو عبارت a را برابر قرار داده و c_1 و c_2 را بر حسب a_1 و a_2 بیان کنید.

(ب) ثابت کنید که اگر بردارهای $x = x_1 i + x_2 j$ و $y = y_1 i + y_2 j$ مستقل خطی باشند، آنگاه هر بردار $z = z_1 i + z_2 j$ را می توان به صورت يك ترکیب خطی x و y بیان کرد. توجه شود که اگر x و y دارای استقلال خطی باشند، آنگاه $x_1 y_2 - y_1 x_2 \neq 0$. چرا؟

۸. تحقیق کنید که x و x^2 روی $-1 < x < 1$ دارای استقلال خطی اند، اما $W(x, x^2)$ در $x = 0$ صفر می شود. از اینجا چه نتیجه ای می توانید درباره امکان این که x و x^2 جوابهای معادله (۳)ی متن باشند بگیرید؟ نشان دهید که x و x^2 جوابهای معادله $2y = 2xy' - x^2y''$ می باشند. آیا این نکته با نتیجه شما در تناقض است؟ آیا با قضیه ۵.۳ بند ۲.۳ در تناقض است؟

۹. اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند، نشان دهید که بین هر دو صفر متوالی y_1 ، تابع y_2 دارای يك و فقط يك صفر است.

داهنمایی: از قضیه ۹.۱ استفاده کرده و نتیجه را با برهان خلف اثبات کنید. این نتیجه را اغلب قضیه استورم^۲ می نامند. به عنوان مثال خاص، توجه شود که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای مستقل خطی $y'' + y = 0$ می باشند، و $(0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots)$ صفرهای $\sin x$ و $(\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots)$ صفرهای $\cos x$ در بین یکدیگر واقع اند.

۱۰. نشان دهید که توابع $y_1(x) = x|x|$ و $y_2(x) = x^2$ روی $0 < x < 1$ و روی $0 < x < -1$ دارای وابستگی خطی اند، اما روی $-1 < x < 1$ استقلال خطی دارند. توجه شود که گرچه y_1 و y_2 مستقل خطی اند، $W(y_1, y_2)$ روی $-1 < x < 1$ متحد با صفر است، بنابراین y_1 و y_2 نمی توانند جوابهای معادله (۳)ی متن باشند.

۴.۳ کاهش مرتبه

نکته زیر دارای اهمیت و کاربرد بسیاری است: اگر يك جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم معلوم باشد، می توان جواب مستقل خطی دیگری (و بنابراین يك مجموعه

اساسی جواب) به دست آورد. این روش از دالامبر^۱ است، و معمولاً آن را روش کاهش مرتبه می نامند.

فرض کنیم که یک جواب y_1 که متحد با صفر نباشد برای معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

در دست باشد. آنگاه cy_1 که در آن c ثابت دلخواهی است نیز یک جواب معادله (۱) است. در اینجا این سؤال پیش می آید: آیا می توان تابع غیر ثابت v را طوری تعیین کرد که $y = v(x)y_1(x)$ یک جواب معادله (۱) باشد؟ پاسخ مثبت است، و علاوه بر این، چنان که خواهیم دید می توان v را برآسانی تعیین کرد. اگر قرار دهیم

$$y = v(x)y_1(x) \quad (2)$$

آنگاه

$$y' = v(x)y_1'(x) + v'(x)y_1(x)$$

$$y'' = v(x)y_1''(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v''(x)y_1(x)$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۱) خواهیم داشت

$$v(y_1'' + py_1' + qy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''y_1 = 0 \quad (3)$$

چون y_1 یک جواب معادله (۱) است بنابراین مقدار پرانتز اول صفر است. در هر فاصله ای که y_1 صفر نشود می توان (۳) را بر y_1 تقسیم کرد و در نتیجه

$$v'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' = 0 \quad (4)$$

معادله (۴) یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v' است و می توان آن را فوراً حل کرد (بند ۱۰۲). جواب آن عبارت است از

$$v'(x) = c \exp \left[- \int^x \left(p(s) + 2\frac{y_1'(s)}{y_1(s)} \right) ds \right] = cu(x) \quad (5)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، و

$$u(x) = \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp \left[- \int^x p(s) ds \right] \quad (6)$$

در نتیجه

$$v(x) = c \int^x u(t) dt + k \quad (7)$$

که در آن k نیز یک ثابت دلخواه است. اما می توان ثابت k را حذف کرد، زیرا با توجه به

۱. ژان دالامبر (Jean D' Alembert)، (۱۷۱۷-۱۷۸۳) ریاضیدان فرانسوی که تحقیقاتش در مکانیک و مکانیک سیالات موجب شهرت وی گردیده است.

$$y = y_1(x)v(x) \\ = cy_1(x) \int^x u(t) dt + ky_1(x) \quad (8)$$

دیده می‌شود که وجود k فقط يك مضرب $y_1(x)$ را به جواب دوم اضافه می‌کند. بدین سان دوجواب معادله (۱) عبارتند از

$$y = y_1(x), \quad y = y_1(x) \int^x u(t) dt \quad (9)$$

چون تابع اولیه u نمی‌تواند مقدار ثابتی باشد، جوابها دارای استقلال خطی اند. در روش کاهش مرتبه حفظ کردن فرمولهای (۹) و (۶) اهمیتی ندارد، آنچه باید به خاطر سپرد این است که اگر يك جواب y_1 معلوم باشد جواب دیگری به صورت $y = v(x)y_1(x)$ به روش بالا به دست می‌آید.

با وجود آن که روش کاهش مرتبه، طرز تعیین جواب اول معادله (۱) را مشخص نمی‌کند، اما از این جهت که مسئله حل معادله (۱) را به یافتن تنها يك جواب کاهش می‌دهد امیدبخش است.

جواب مستقل خطی دوم را که در (۹) آمده است می‌توان با استفاده از فرمول آبل در مورد رونسکین دوجواب مستقل خطی معادله (۱) نیز به دست آورد. این نکته در مسائل ۱۲ و ۱۳ بررسی می‌شود.

روش کاهش مرتبه در مورد معادلات غیر همگن نیز مفید است، این مطلب در مسئله ۱۵ بند ۲.۶.۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال. نشان دهید که $y = x$ يك جواب معادله رتبه يك لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (10)$$

است، و جواب مستقل خطی دوم را بیابید.

نخست اگر $y = x$ ، آنگاه $y' = 1$ و $y'' = 0$ و چون این مقادیر y ، y' و y'' را در معادله (۱۰) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$(1-x^2) \cdot 0 - 2x + 2x = 0$$

بنابراین $y = x$ يك جواب است. برای تعیین جواب دوم فراموشی دهیم $y = xv(x)$ ، آنگاه

$$y' = xv' + v, \quad y'' = xv'' + 2v'$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۱۰) داریم

$$(1-x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0$$

پس از ساده کردن و تقسیم بر $x(1-x^2)$ خواهیم داشت

$$v'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) v' = 0 \quad (11)$$

توجه شود که ضریب v' در $x=0$ یعنی صفر $y_1(x)$ نامعین است. اما، این مطلب در جواب نهایی هیچ اشکالی به وجود نمی آورد. نخست جوابی برای معادله (۱۱) در فواصل $0 < x < 1$ و $-1 < x < 0$ به دست می آوریم.

معادله (۱۱) نسبت به v' يك معادله خطی مرتبه اول است، و دارای عامل انتگرال ساز $x^2(1-x^2)$ می باشد، بنابراین

$$[x^2(1-x^2)v']' = 0$$

$$x^2(1-x^2)v' = c$$

از آنجا

$$\begin{aligned} v(x) &= c \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = c \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= c \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه، دومین جواب معادله (۱۰) (با حذف ضریب ثابت بدون آنکه از عمومیت کاسته شود) عبارت است از

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12)$$

گرچه تابع v در $x=0$ نامعین است، اما حد $y_2(x) = xv(x)$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ وجود دارد. تابع y_2 که با رابطه (۱۲) در $-1 < x < 1$ تعریف شده است نه فقط در $0 < x < 1$ و $-1 < x < 0$ صادق است بلکه در همه فاصله $-1 < x < 1$ در معادله دیفرانسیل (۱۰) صدق می کند. از طرف دیگر $y_2(x)$ هنگامی که $x \rightarrow \pm 1$ نامحدود می شود، خاصیت مزبور در ارتباط با این نکته است که ضریب y'' در معادله (۱۰) به ازای $x = \pm 1$ صفر می شود در حالی که ضرایب y' و y مخالف صفر باقی می مانند. این موضوع در فصل ۴ به تفصیل بررسی می شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۷ جواب دومی برای معادله دیفرانسیل داده شده به روش کاهش مرتبه بیابید.

$$y'' - 2y' - 12y = 0, \quad y_1(x) = e^{4x} \quad .1$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad .2$$

$$x^2 y'' + 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1 \quad .3$$

درجه دامنهای از x می توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1(x) = x \quad .4$$

درجه دامنهای از x می توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

$$x^2 y'' + 2xy' + y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1} \quad .5$$

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x \quad .6$$

$$(1 - x \cot x)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x \quad .7$$

دانهایی: فاصله $0 < x < \pi$ را در نظر بگیرید.

$$\int \frac{x dx}{1 - x \cot x} = \ln |x \cos x - \sin x|$$

۸. تحقیق کنید که $y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$ يك جواب معادله بسل رتبه $1/2$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

است، و جواب دوم را بیابید.

۹. معادله دیفرانسیل

$$x y'' - (x + N)y' + N y = 0$$

که در آن N عدد صحیح غیر منفی است به وسیله پژوهشگران متعددی مورد بحث قرار گرفته است. یکی از علل توجه به آن این است که دارای يك جواب نمایی و يك جواب چند جمله ای است.

(الف) تحقیق کنید که يك جواب آن $y_1(x) = e^x$ است.

(ب) نشان دهید که جواب دوم به صورت $y_2(x) = e^x \int x^N e^{-x} dx$ می باشد.

$y_2(x)$ را به ازای $N=1$ و $N=2$ محاسبه کنید و نتیجه بگیرید که

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^N}{N!}$$

نکته جالب آن که $y_2(x)$ دقیقاً نخستین $N+1$ جمله سری تیلر e^x است.

۱۰. تحقیق کنید که $y_1(x) = 3x^2 - 1$ يك جواب معادله رتبه دوم معادله لزاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

۱. ت.آ. نیوتن (T.A. Newton)، «درباره استفاده از يك معادله دیفرانسیل در ایجاد چند جمله ایها»، American Mathematical Monthly, 81, 1974، صفحات ۵۹۲-۶۰۱. مأخذ دیگری نیز در آن آمده است.

معادلات همگن با ضرایب ثابت ۱۳۳

است، و جواب دوم را بیابید. فواصل $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ ، $-1 < x < -1/\sqrt{3}$ و $1/\sqrt{3} < x < 1$ را جداگانه در نظر بگیرید، اما توجه شود که جواب نمایی y_1 روی $-1 < x < 1$ معتبر است.

دانهمایی: با استفاده از روش کسرهای ساده می توان نشان داد که

$$\frac{1}{(3x^2-1)^2(1-x^2)} = A \left[\frac{1}{(\sqrt{3}x-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}x+1)^2} \right] + B \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

ثابتهای A و B را تعیین کنید.

۱۱. جریان دو بعدی یکنواخت نهري را حول يك استوانه مستدير ثابت كه محور آن بر نهري عمود است در نظر می گیریم. در بررسی تلاطم جریان در اثر مجاورت استوانه به معادله دیفرانسیل

$$f'' + \delta(\xi f' + f) = 0$$

برمی خوریم. در اینجا متغیر بدون بعد ξ نمایشگر تغییرات در امتدادی است که بر محور استوانه و نهري دو عمود می باشد، $f(\xi)$ اندازه کاهش سرعت نهري در اثر مجاورت، پریم نمایشگر مشتق گیری نسبت به ξ ، و δ پارامتری فیزیکی است که بسا عکس انتشار تلاطم متناسب است. نشان دهید که $f_1(\xi) = e^{-\delta \xi^{1/2}}$ يك جواب است و جواب عمومی را به صورت انتگرال بیابید.

۱۲. فرض می کنیم که y_1 يك جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد که هیچگاه صفر نشود و می خواهیم جواب مستقل خطی دوم y_2 را بیابیم. نشان دهید که $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$ و آنگاه y_2 را بسا استفاده از فرمول آبل مربوط به $W(y_1, y_2)$ بیابید.

۱۳. تحقیق کنید که $y_1(x) = x$ يك جواب معادله

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

است، و آنگاه با استفاده از نتیجه مسئله ۱۲، جواب مستقل خطی دوم را تعیین کنید.

۵.۳ معادلات همگن با ضرایب ثابت

در اینجا نظریه عمومی معادلات خطی همگن مرتبه دوم را کنار گذاشته و به شرح روشهای حل واقعی این گونه معادلات می پردازیم. در این بند مسئله تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت را بررسی می کنیم.^۱ این مسئله با

۱. دانیل برنولی (۱۷۵۰-۱۷۸۲) و اوایلر (۱۷۵۷-۱۷۸۳) هر دو طرز حل این نوع معادلات را قبل از ۱۷۴۰ می دانستند. نخستین گزارش در این مورد را اوایلر در ۱۷۴۳ منتشر کرد.

ضرایب متغیر دشوارتر است و بررسی آن در فصل ۴ انجام خواهد گرفت.^۱
معادله

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

را که در آن $a \neq 0$ ، b و c اعداد حقیقی اند در نظر می گیریم. چون a ، b و c ثابت می باشند مستقیماً از قضیه وجود و یکتایی ۲.۳ نتیجه می شود که جوابهای معادله (۱) روی $-\infty < x < \infty$ معتبرند.

معادله (۱) این مسئله را مطرح می کند که کدام تابع $y = \phi(x)$ است که a برابر مشتق دوم آن به اضافه b برابر مشتق اول آن به اضافه c برابر خود تابع به ازای همه مقادیر x صفر می شود؟ با دقت در این مطلب سر رشته یک روش برای حل معادله مزبور به دست می آید. چون ضرایب ثابت اند طبیعی است توابع $y = \phi(x)$ را طوری در نظر بگیریم که y ، y' ، y'' فقط در ضرایب ثابت با هم اختلاف داشته باشند.

تابعی را می شناسیم که به طور وسیعی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مطالعه شده است و دقیقاً همین خاصیت را دارد یعنی همان تابع نمایی e^{rx} . بنابراین سعی می کنیم برای معادله (۱) جوابهایی به صورت e^{rx} با مقادیر مناسب r بیابیم. با جایگزینی $y = e^{rx}$ در معادله (۱) خواهیم داشت

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = 0 \quad (2)$$

یا

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (3)$$

چون e^{rx} صفر نیست، باید داشته باشیم

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (4)$$

اگر r یک ریشه این معادله درجه دوم، که اغلب آن را معادله مشخصه یا معین می نامند، باشد، آنگاه e^{rx} یک جواب معادله (۱) خواهد بود. توجه شود که ضرایب معادله مشخصه (۴) همان ضرایب معادله دیفرانسیل (۱) هستند. r_1 و r_2 ریشههای معادله (۴) عبارتند از

$$r_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad (5)$$

روشن است که نوع جوابهای معادله (۱) به مقادیر r_1 و r_2 بستگی دارد، این مقادیر به نوبه خود به ضرایب ثابت معادله دیفرانسیل به وسیله روابط (۵) بستگی دارند. در اینجا نیز

۱. در بعضی از حالتها می توان با تعویض متغیر مناسب، معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد (مسائل ۱۶، ۱۷ و ۱۸ بند ۱.۵.۳ را ببینید).

به همان گونه که در جبر مقدماتی عمل می شود باید حالتی را که در آن $b^2 - 4ac$ مثبت، صفر و یا منفی است جداگانه بررسی کنیم.

دو حالت نخست را در این بند مطالعه می کنیم، بررسی حالت $b^2 - 4ac < 0$ را به بند بعد موکول می نماییم.

ریشه های حقیقی و متمایز. هنگامی که $b^2 - 4ac > 0$ ، روابط (۵) دو مقدار حقیقی و متمایز برای r_1 و r_2 به دست می دهند. بنابراین $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ جوابهای معادله (۱) می باشند. علاوه بر این به آسانی تحقیق می شود که $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$ هیچگاه صفر نیست (مسئله ۱۵ را ببینید). بنابراین جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (۶)$$

مثال ۱. جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ را که در شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ صدق می کند بیابید.
با جایگزینی $y = e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$(r+3)(r+2) = 0 \quad \text{یا}$$

بنابراین $r = -2, -3$ و جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

برای برقراری شرایط اولیه در $x = 0$ باید داشته باشیم

$$c_1 + c_2 = 0, \quad -2c_1 - 3c_2 = 1$$

از حل این معادلات به دست می آید

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1$$

بنابراین جواب معادله دیفرانسیل مزبور که در شرایط داده شده صدق کند عبارت است از

$$y = e^{-2x} - e^{-3x}$$

ریشه های حقیقی و برابر. هنگامی که $b^2 - 4ac = 0$ ، از روابط (۵) نتیجه می شود که $r_1 = r_2 = -b/2a$ ، و فقط یک جواب $e^{-(b/2a)x}$ را داریم. اما، با استفاده از روش کاهش مرتبه (بند ۴.۳ را ببینید) می توان جواب دومی به دست آورد. قرار می دهیم

$$y = v(x)e^{-(b/2a)x}$$

آنگاه

$$y' = v'(x)e^{-(b/2a)x} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-(b/2a)x}$$

$$y'' = \left[v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x) \right] e^{-(b/2a)x}$$

با جایگزینی y, y', y'' در معادله (۱) و تقسیم بر سازه مشترک $e^{-(b/2a)x}$ معادله زیر برای v حاصل می‌شود:

$$a\left(v'' - \frac{b}{a}v' + \frac{b^2}{4a^2}v\right) + b\left(v' - \frac{b}{2a}v\right) + cv = 0$$

پس از ساده کردن داریم

$$av'' - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)v = 0$$

چون $b^2 - 4ac = 0$ ، جمله آخر حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$v'' = 0$$

بنابراین

$$v(x) = c_1x + c_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه‌اند. در نتیجه، جواب دوم معادله (۱) عبارت است از $xe^{-(b/2a)x}$. از بحث $(c_1x + c_2)e^{-(b/2a)x}$ به‌ویژه به ازای $c_1 = 1, c_2 = 0$ داریم $xe^{-(b/2a)x}$ جوابهای مستقل خطی مربوط به روش کاهش مرتبه می‌دانیم که $e^{-(b/2a)x}$ و $xe^{-(b/2a)x}$ جوابهای مستقل خطی معادله (۱) می‌باشند. این نکته را می‌توان با محاسبه رونسکین (مسئله ۱۶ را ببینید) نیز اثبات کرد. بدین‌سان در حالت $b^2 - 4ac = 0$ جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x}, \quad r_1 = -b/2a \quad (7)$$

مثال ۲. جواب عمومی معادله

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

را بیابید.

با جایگزینی $y = e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

یا

$$(r+2)(r+2) = 0$$

بنابراین $r = -2$ يك ریشه مکرر معادله مشخصه است. يك جواب e^{-2x} است، و جواب مستقل خطی دیگر، بنا به بحث فوق xe^{-2x} خواهد بود. بدین‌سان جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^{-r_1 x} + c_2 x e^{-r_1 x}$$

روش جالب دیگری برای تعیین جواب دوم هنگامی که ریشه‌های معادله مشخصه برابر باشند وجود دارد. چون r_1 ریشه مکرر $ar^2 + br + c = 0$ است، در نتیجه $ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2$. بنابراین، به ازای هر r داریم

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = ae^{rx}(r - r_1)^2 \quad (8)$$

طرف دوم رابطه (۸) به ازای $r = r_1$ صفر می‌شود، یعنی $e^{r_1 x}$ همان طور که قبلاً می‌دانستیم یک جواب معادله (۱) است. چون از دوطرف رابطه (۸) نسبت به r مشتق بگیریم و ترتیب مشتق‌گیری نسبت به r و x را تعویض کنیم خواهیم داشت

$$L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1) \quad (9)$$

به ازای $r = r_1$ طرف دوم معادله (۹) صفر می‌شود و بنابراین $L[xe^{r_1 x}] = 0$ ، بدین‌سان $xe^{r_1 x}$ نیز یک جواب معادله (۱) است.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۱۳ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید. اگر شرایط اولیه داده شده باشند جوابی را که در آن شرایط صدق می‌کند تعیین کنید.

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad ۱. \quad 4y'' + 4y' + y = 0 \quad ۲.$$

$$6y'' - y' - y = 0 \quad ۳. \quad 2y'' - 3y' + y = 0 \quad ۴.$$

$$y'' - y = 0 \quad ۵. \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad ۶.$$

$$y'' + 5y' = 0 \quad ۷. \quad y'' - 9y' + 9y = 0 \quad ۸.$$

$$y'' - 2y' - 2y = 0 \quad ۹. \quad y'' + 2y' + y = 0 \quad ۱۰.$$

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad ۱۱.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad ۱۲.$$

$$y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \quad ۱۳.$$

۱۴. نشان دهید که جواب عمومی $y'' - 4y = 0$ عبارت است از

$$y = c_1 \sinh 2x + c_2 \cosh 2x$$

۱۵. نشان دهید که اگر $r_1 \neq r_2$ ، آنگاه توابع $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ روی $-\infty < x < \infty$ دارای استقلال خطی اند. این نکته اثبات نتیجه‌ای را که در رابطه (۶) متن بیان شد تکمیل می‌کند.

۱۶. نشان دهید که به ازای هر مقدار r داریم $W(e^{rx}, xe^{rx}) \neq 0$. از اینجا نتیجه

بگیرید که اگر $e^{r_1 x}$ و $x e^{r_1 x}$ جوابهای $ay'' + by' + cy = 0$ باشند، آنگاه این جوابها يك مجموعه اساسی جواب تشکیل می دهند.

۱۷. در این مسئله روش دیگری برای تشکیل جواب دوم معادله $ay'' + by' + cy = 0$ هنگامی که r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه $ar^2 + br + c = 0$ برابر باشند، بیان می کنیم. نخست فرض کنیم که $r_2 \neq r_1$ و $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ جوابهای معادله دیفرانسیل مسزبور باشند. تحقیق کنید که $\phi(x; r_1, r_2) = (e^{r_2 x} - e^{r_1 x}) / (r_2 - r_1)$ نیز به ازای $r_2 \neq r_1$ يك جواب است. اکنون r_1 را ثابت گرفته و حد $\phi(x; r_1, r_2)$ را هنگامی که $r_2 \rightarrow r_1$ با استفاده از دستور هوییتال بیابید.

۱۰.۵.۳ ریشه های مختلط

برای تکمیل بحث معادله

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

حالتی را در نظر می گیریم که ریشه های معادله مشخصه

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2)$$

اعداد مختلطی به صورت $\lambda + i\mu$ باشند، که در آن λ و μ حقیقی اند. در اینجا این سؤال مطرح می شود که معنای عبارتی به صورت $e^{(\lambda + i\mu)x}$ چیست؟ نخست یادآوری می کنیم که بنابر آنچه در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی دیده ایم e^x حول $x = 0$ دارای سری تیلر^۱ زیر است

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty \quad (3)$$

اگر در رابطه (۳) به جای x قرار دهیم ix و نتیجه را به عنوان تعریف e^{ix} انتخاب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن از روابط $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ و غیره استفاده شده است. سری اول در رابطه (۴) دقیقاً همان سری تیلر $\cos x$ ، و سری دوم همان سری تیلر $\sin x$ است. از این رو بنابر تعریف قرار می دهیم

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (5)$$

1. Taylor (1685 - 1731)

این رابطه به فرمول اویلر موسوم است. با جایگزینی $-x$ به جای x در رابطه (۵) و توجه به روابط $\sin(-x) = -\sin x$ ، $\cos(-x) = \cos x$ خواهیم داشت

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (۶)$$

توابع $\sin x$ و $\cos x$ را می‌توان به ترتیب با جمع و تفریق روابط (۵) و (۶) بر حسب e^{ix} و e^{-ix} بیان کرد.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

اکنون بنا بر تعریف قرار می‌دهیم

$$e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) \quad (۷)$$

با این تعریف می‌توان نشان داد که قوانین معمولی جبر برقرارند. به عنوان مثال

$$\frac{e^{(\lambda + i\mu)x}}{e^{(\alpha + i\beta)x}} = e^{(\lambda + i\mu)x - (\alpha + i\beta)x} = e^{(\lambda - \alpha)x + i(\mu - \beta)x}$$

و

$$[e^{(\lambda + i\mu)x}]^n = e^{n(\lambda + i\mu)x} = e^{n\lambda x + in\mu x}$$

که در آن n می‌تواند هر عدد صحیح مثبت یا منفی باشد. در واقع این نتیجه به ازای مقادیر غیر صحیح n نیز برقرار است.

بالاخره، باید مسئله مشتق‌گیری از $e^{(\lambda + i\mu)x}$ نسبت به x را بررسی کنیم. گرچه به ازای r حقیقی داریم

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \quad (۸)$$

اما معلوم نیست که به ازای r مختلط این رابطه درست باشد. به هر حال به آسانی با محاسبه مستقیم و استفاده از تعریف داده شده در رابطه (۷) می‌توان نشان داد که رابطه (۸) به ازای r مختلط نیز برقرار است. در واقع، قوانین معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در مورد نمای مختلط هنگامی که e^{rx} به ازای r مختلط با رابطه (۷) تعریف شده باشد برقرارند. به طور عام‌تر در مورد هر تابع با مقدار مختلط $f(x) = u(x) + iv(x)$ که در آن u و v توابعی با مقدار حقیقی‌اند، و به ازای هر عدد مختلط c داریم

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x), \quad [cf(x)]' = cf'(x)$$

اکنون می‌توان به مسئله حل معادله (۱) هنگامی که ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشند پرداخت. چون a ، b و c حقیقی‌اند، ریشه‌ها به صورت زوج مزدوج $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$ خواهند بود، بنابراین جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x} \quad (9)$$

جواب عمومی (۹) دارای این نقص است که $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ توابعی با مقدار مختلط‌اند. چون معادله دیفرانسیل حقیقی است می‌خواهیم در صورت امکان جواب عمومی معادله (۱) به صورت ترکیب خطی جوابهایی با مقدار حقیقی باشد. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم. چون $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ جوابهای معادله (۱) می‌باشند، مجموع و تفاضل آنها نیز جواب است، بدین‌سان

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} + e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) + e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} - e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) - e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2ie^{\lambda x} \sin \mu x \end{aligned}$$

جوابهای معادله (۱) می‌باشند. بنابراین، با صرف نظر کردن از ضرایب ثابت ۲ و $2i$ ، توابع

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (10)$$

جوابهای معادله (۱) و با مقدار حقیقی‌اند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x) = \mu e^{2\lambda x}$$

و چون این هیچگاه صفر نمی‌شود دو تابع مزبور يك مجموعهٔ اساسی از جوابهای با مقدار حقیقی را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان جواب عمومی معادله (۱) را به صورت زیر بیان کرد

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت دلخواه‌اند.

مثال. جواب عمومی معادله زیر را بیابید

$$y'' + y' + y = 0 \quad (11)$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 + r + 1 = 0$$

و ریشه‌های آن عبارتند از

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب عمومی معادله (۱۱) چنین است

$$y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

بار دیگر توابع $e^{\lambda x} \cos \mu x$ و $e^{\lambda x} \sin \mu x$ جوابهای با مقدار حقیقی معادله (۱) را در نظر می گیریم. این توابع به ترتیب بخشهای حقیقی و موهومی جواب با مقدار مختلط $e^{(\lambda+i\mu)x}$ می باشند. این ویژگی حالت خاصی از یک نتیجه کلی است، که از حقیقی بودن ضرایب معادله دیفرانسیل مزبور خواه ثابت و یا تابع با مقدار حقیقی باشند به دست می آید. این نتیجه را به عنوان یک قضیه بیان می کنیم.

قضیه ۹.۳. فرض کنیم توابع با مقدار حقیقی p و q روی فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و $y = \phi(x) = u(x) + i v(x)$ یک جواب با مقدار مختلط معادله دیفرانسیل

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (12)$$

باشد که در آن توابع u و v با مقدار حقیقی اند. در این صورت u و v نیز جوابهای معادله دیفرانسیل (۱۲) می باشند.

برای اثبات این قضیه، کافی است توجه شود که

$$\begin{aligned} L[u+iv] &= (u+iv)'' + p(u+iv)' + q(u+iv) \\ &= (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \\ &= L[u] + iL[v] = 0 \end{aligned}$$

اما یک عدد مختلط وقتی فقط وقتی صفر است، که هر دو بخش حقیقی و موهومی آن صفر باشند، بدین سان $L[u] = 0$ و $L[v] = 0$.

اگر ثابتهای a ، b و c در معادله (۱) عدد مختلط باشند، باز هم می توان جوابهایی به صورت e^{rx} به دست آورد، r باید در معادله زیر صدق کند

$$ar^2 + br + c = 0$$

اما، در این حالت عموماً ریشه های معادله مشخصه اعداد مختلط اند، ولی مزدوج نیستند، و جوابهای متناظر به معادله (۱) با مقدار مختلط خواهند بود. این مطلب در مسائل ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به اختصار بحث شده است.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۸ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را تعیین کنید. در صورتی که شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی را که در آن شرایط صدق می کند بیابید.

$$y'' - 2y' + 6y = 0 \quad ۰۲ \quad y'' - 2y' + 2y = 0 \quad ۰۱$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad ۰۴ \quad y'' + 2y' - 8y = 0 \quad ۰۳$$

$$y'' + 6y' + 13y = 0 \quad ۰۶ \quad 9y'' - 6y' + y = 0 \quad ۰۵$$

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad ۰۷$$

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad ۰۸$$

$$۰۹. \text{تحقیق کنید که } W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x) = \mu e^{\lambda x}$$

۰۱۰. در این مسئله پریم، مشتق گیری نسبت به زمان t را نشان می دهد.

(الف) نشان دهید که اگر a, b و c ثابتهای مثبتی باشند، آنگاه همه جوابهای معادله $ay'' + by' + cy = 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ به صفر می گرایند. آیا اگر $b = 0$ یا $c = 0$ ، این نتیجه برقرار خواهد بود؟

(ب) نشان دهید که به ازای هر مقدار ثابت k تابع $y = \sin t$ يك جواب معادله زیر است

$$y'' + (k \sin^2 t)y' + (1 - k \cos t \sin t)y = 0$$

همچنین نشان دهید که اگر $0 < k < 2$ ، آنگاه $(1 - k \cos t \sin t) > 0$ و $(k \sin^2 t) \geq 0$. بدین سان مشاهده می شود که گرچه ضرایب این معادله دیفرانسیل باضرایب متغیر، غیر منفی اند (و ضریب y' فقط در نقاط $0, \pi, 2\pi, \dots$ صفر است) دارای جوابی است که به ازای $t \rightarrow \infty$ به صفر نمی گراید. بدین سان وضعیتی را که در نظریه معادلات دیفرانسیل چندان غیر عادی نیست ملاحظه می کنیم: امکان دارد معادلاتی که ظاهراً بسیار به هم شبیه اند، دارای خواص کاملاً متفاوتی باشند.

۰۱۱. نشان دهید که جواب عمومی معادله

$$y'' + y = 0$$

را می توان به صورت $y = A_1 \cos(x + \delta_1)$ و یا $y = A_2 \sin(x + \delta_2)$ که در آنها A_1, δ_1 و A_2, δ_2 مقادیر ثابت اند بیان کرد.

۰۱۲. نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی r داریم

$$(\cos x + i \sin x)^r = \cos rx + i \sin rx$$

این اتحاد را هنگامی که r يك عدد صحیح مثبت باشد، فرمول دموور^۱ می نامند. با استفاده از این نتیجه فرمولهای کمان مضاعف، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ را به دست آورید.

۰۱۳. نشان دهید که هر عدد مختلط $a + ib$ را می توان به صورت $Ae^{i\theta}$ که در آن

1. De Moivre (1667-1754)

A و θ اعداد حقیقی مثبت اند و $0 \leq \theta < 2\pi$ ، نوشت.

دانهمایی: با استفاده از فرمول اولر، $Ae^{i\theta}$ را بسط دهید و A و θ را بر حسب a و b بیابید.

۱۴۰. دو ریشهٔ دوم عدد مختلط $Ae^{i\theta}$ را با $A^{1/2}e^{i\theta/2}$ \pm تعریف می‌کنیم، ریشه‌های دوم $1+i$ ، $1-i$ و i را حساب کنید.

۱۵۰. معادلات زیر را حل کنید

$$y'' + 2y' + iy = 0 \quad (\text{ب}) \quad y'' + iy' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

ملاحظه شود که ریشه‌های معادلات مشخصهٔ اعداد مختلط مزدوج نیستند. آیا بخش حقیقی یا موهومی هیچ یک از جوابها در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق می‌کند؟

۱۶۰. اکنون که طرز حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت را فرا گرفتیم به بررسی شرایطی که تحت آن می‌توان معادلهٔ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را با تعویض متغیر مناسبی به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد می‌پردازیم. تعویض متغیر مستقل $z = u(x)$ را، که در آن موقتاً ارتباط بین x و z تصریح نشده است، در نظر می‌گیریم. نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{dy}{dz}$$

(ب) معادلهٔ دیفرانسیل مزبور به صورت زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right) \frac{dy}{dz} + q(x)y = 0$$

(ج) معادلهٔ قسمت (ب) با انتخاب

$$z = u(x) = \int^x [q(t)]^{1/2} dt$$

دارای ضرایب ثابت خواهد بود به شرط آنکه

$$\frac{z'' + p(x)z'}{q(x)} = \frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}}$$

مقداری ثابت باشد. باید توجه داشت که هنگامی تبدیل $z = u(x)$ با مقدار حقیقی است که $q(x) \geq 0$. این بدان معنی است که در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی $q(x)$ تغییر علامت ندهد، اگر $q(x) < 0$ باشد، معادلهٔ دیفرانسیل را در -1 ضرب می‌کنیم.

از اینجا نتیجه بگیرد که شرط لازم و کافی برای امکان تبدیل معادلهٔ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ به یک معادلهٔ با ضرایب ثابت به وسیلهٔ تعویض متغیر مستقل

آن است که تابع $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ برابر مقداری ثابت باشد.
 ۱۷۰. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۶، کدام يك از معادلات زیر را می توان با تعویض متغیر مستقل به يك معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد

$$y'' + xy' + e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 3xy' + x^2y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ب})$$

$$xy'' + (x^2 - 1)y' + x^2y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (\text{ج})$$

۱۸۰. با استفاده از مسئله ۱۶، نشان دهید که همواره می توان معادله

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0$$

را که در آن α و β ثابتهای حقیقی اند، با قرار دادن $z = \ln x$ به يك معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد. این گونه معادله را معادله اوپلر می نامند، و در بند ۴۰۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت. جواب عمومی

$$x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x > 0$$

را بیابید.

۱۹. با تعویضهای مناسب متغیرها می توان معادله خطی همگن مرتبه دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را به يك معادله مرتبه اول تبدیل کرد.
 (الف) قرار دهید $y'/y = -u$ و y را بر حسب u تعیین کنید. آنگاه نشان دهید که u در معادله

$$\frac{du}{dx} = q(x) - p(x)u + u^2$$

صدق می کند. این معادله به معادله ریکاتی موسوم است، و در مسئله ۳۵ بند ۸۰۲ بررسی شده است. توجه شود که این تقلیل مرتبه به بهای از دست دادن همگنی معادله تمام شده است.
 (ب) اکنون معادله کلی ریکاتی

$$\frac{dw}{dx} = q_0(x) + q_1(x)w + q_2(x)w^2$$

را در نظر می گیریم. نشان دهید که با تبدیل $w = -y'/yq_2$ به معادله خطی همگن مرتبه دوم زیر می رسیم

$$q_2(x)y'' - [q_2'(x) + q_1(x)q_2(x)]y' + q_2^2(x)q_0(x)y = 0$$

۶.۳ معادله ناهمگن

در بندهای پیشین این فصل نظریه عمومی معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم مورد بحث قرار گرفت، و در حالت ضرایب ثابت طرز ساختن جوابها را نشان دادیم. اکنون

توجه خود را به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (۱)$$

معطوف می‌داریم. درطول بحث فرض براین است که توابع q و g روی فاصله موردنظر پیوسته‌اند.

درمهندسی نوین مسئله حل معادله (۱) را اغلب به عنوان يك مسئله ورودی-خروجی مطرح می‌کنند. موقتاً فرض کنیم که معادله دیفرانسیل (۱) نمایشگر يك دستگاه مکانیکی یا الکتریکی باشد، طبیعی است که می‌توان جواب $y = \phi(x)$ را به عنوان خروجی دستگاه درنظر گرفت. ضرایب p و q به وسیله مکانیسم فیزیکی مزبور معین می‌گردند و جمله ناهمگن g همان تابع ورودی است. مسئله حل معادله (۱) متناظر است با تعیین خروجی دستگاه به ازای توابع ورودی مختلف.

پیش از آنکه به حالت‌های خاص معادله (۱) پردازیم، چند قضیه کلی ساده و بسیار مفید اثبات می‌کنیم که موجب تسهیل بحث آتی خواهد گردید.

قضیه ۱۰۰۳. تفاضل هر دو جواب معادله دیفرانسیل (۱)،

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

يك جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر زیر است

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (۲)$$

برای اثبات این قضیه فرض کنیم که توابع u_1 و u_2 جواب‌های معادله (۱) باشند. آنگاه

$$L[u_1] = g$$

و

$$L[u_2] = g$$

باکم کردن معادله دوم از معادله اول به دست می‌آید

$$L[u_1] - L[u_2] = 0$$

و چون L يك عملگر خطی است،

$$L[u_1 - u_2] = 0$$

که همان نتیجه مطلوب است. باکم این قضیه می‌توان قضیه مهم زیر را اثبات کرد.

قضیه ۱۱۰۳. اگر y_p يك جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن (۱)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

باشد، آنگاه می‌توان هر جواب $y = \phi(x)$ این معادله را به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (۳)$$

که دآن y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله همگن متناظر می باشند.

برای اثبات این قضیه، ملاحظه می کنیم که بنا بر قضیه ۱۵.۳، $\phi - y_p$ يك جواب معادله همگن مزبور است. بدین سان بنا بر قضیه ۴.۳ بند ۲.۳، می توان $\phi - y_p$ را به صورت يك تركيب خطی از y_1 و y_2 بیان کرد، و قضیه ثابت می شود.

بر حسب معمول تركيب خطی (۳) را جواب عمومی معادله (۱) می نامند.

در نتیجه، برای تعیین جواب عمومی معادله (۱) باید جواب عمومی معادله همگن (۲) را به دست آورد و سپس يك جواب دلخواه معادله ناهمگن را بدان افزود. همان طور که قابل پیش بینی بود (بند ۱۰.۳ را ببینید) جواب عمومی معادله (۱) شامل دو ثابت دلخواه است، و از این رو برای مشخص کردن يك جواب یکتای معادله (۱) لازم است دو شرط اضافی تصریح شود، یعنی شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$.

جواب عمومی معادله همگن (۲) را اغلب جواب مکمل نامیده و با y_c نشان می دهند. بدین سان $y_c(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ، جواب معادله ناهمگن، را معمولاً جواب خصوصی^۱ می نامند. توجه شود که p_p یکتا نیست، زیرا اگر Y يك جواب معادله ناهمگن باشد، آنگاه اگر به Y هر تركيب خطی از y_1 و y_2 را بیفزاییم عبارت حاصل همچنان يك جواب معادله ناهمگن خواهد بود. از قضیه ۱۱.۳ نتیجه می شود که جواب عمومی معادله ناهمگن (۱) چنین است

$$y = y_c(x) + y_p(x) \quad (۴)$$

در بسیاری از مسائل ممکن است جمله ناهمگن g خیلی پیچیده باشد، اما اگر بتوان آن را به صورت مجموع تعداد متناهی از توابع بیان کرد می توان با استفاده از خطی بودن معادله دیفرانسیل چند مسئله ساده تر را جایگزین مسئله اصلی کرد. به عنوان مثال، فرض کنیم که بتوان $g(x)$ را به صورت $g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)$ نوشت، آنگاه معادله (۱) چنین نوشته می شود

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x) \quad (۵)$$

اگر بتوان y_{p_i} ، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$L[y] = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (۶)$$

را پیدا کرد، آنگاه با جایگزینی مستقیم دیده می شود که

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_m}(x) \quad (۷)$$

يك جواب خصوصی معادله (۵) است. بنابراین جواب عمومی معادله (۵) به صورت زیر خواهد بود

۱. این اصطلاح چندان مناسب نیست، زیرا هر جواب که در شرایط اولیه مفروض صدق کند نیز جواب خصوصی نامیده می شود. اما معمولاً می توان مقصود را از خود متن دریافت.

$$y = y_c(x) + y_{p_1}(x) + \dots + y_{p_m}(x) \quad (۸)$$

عموماً، تعیین جوابهای معادلات (۶) و جمع نتایج حاصل، از حل معادله (۵) بد صورت اصلی آسانتر است. این روش را که در آن جواب مسائل پیچیده با جمع جوابهای مسائل ساده تر ساخته می شود، روش انطباق می نامند.

مثال. جواب عمومی معادله زیر را بیابید

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x \quad (۹)$$

نخست معادله همگن متناظر $y'' + 4y = 0$ را در نظر می گیریم. با جایگزینی $y = e^{rx}$ معادله مشخصه $r^2 + 4 = 0$ حاصل می شود. بدین سان جواب مکمل عبارت است از

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

برای تعیین يك جواب خصوصی معادله (۹) جوابهای خصوصی معادلات $y'' + 4y = 1$ و $y'' + 4y = x$ و $y'' + 4y = \sin x$ را با هم جمع می کنیم. بدآسانی می توان تحقیق کرد که جوابهای خصوصی این معادلات به ترتیب عبارتند از $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}x$ و $\frac{1}{4}\sin x$. بدین سان جواب عمومی معادله (۹) عبارت است از

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin x$$

۱۰۶.۳ روش ضرایب نامعین

برای به دست آوردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه دوم می توان از روشهای متعددی استفاده کرد. روش ضرایب نامعین، در صورتی که قابل کاربرد باشد، یکی از ساده ترین روشهاست. اساس این روش عبارت است از آنکه نخست شکل جواب خصوصی را حدس زده و سپس این تابع را که معمولاً شامل يك یا چند ضریب مجهول است در معادله دیفرانسیل جایگزین کنیم. هنگامی این روش موفقیت آمیز است که بتوان ضرایب مجهول را طوری تعیین کرد که تابع مزبور واقعاً در معادله دیفرانسیل صدق کند. روشن است که این روش به مقیاس وسیعی بستگی به آن دارد که از پیش شکل کلی جواب خصوصی را پیدا کنیم. در مورد يك معادله دیفرانسیل کاملاً دلخواه، چیزی نمی توان پیش بینی کرد. اما، اگر معادله به صورت

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x) \quad (۱)$$

باشد که در آن a ، b و c ثابتهای حقیقی اند و $g(x)$ جمله ناهمگن، يك تابع نمایی (e^{ax})، یا يك چندجمله ای ($a_n x^n + \dots + a_0$)، یا واجد خاصیت سینوسی ($\sin \beta x$ یا $\cos \beta x$) باشد، می توان قواعد ویژه ای برای تعیین جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین به دست

داد. این قواعد حالت کلیتری را که در آن $g(x)$ به صورت حاصل ضرب جمله‌هایی از نوع بالا مانند

$$g(x) = e^{\alpha x} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases} \quad (۲)$$

باشد شامل می‌شود. توجه شود که هر حاصل ضرب توابع نمایی، چندجمله‌ای، سینوسی و کسینوسی هم‌ارز با مجموع جمله‌هایی از نوع (۲) است. به ویژه، همواره می‌توان حاصل ضرب دو یا چند تابع سینوسی را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به مجموع توابع سینوسی تنها تبدیل کرد. حالتی را که در آن $g(x)$ مجموع جمله‌هایی از نوع (۲) است می‌توان با استفاده از روش انطباق که در بند قبل بیان شد بررسی کرد. روش ضرایب نامعین به قدرت می‌تواند در مواردی که جمله‌های نا همگن، از نوع (۲) پیچیده‌تر باشند یا معادلات با ضرایب متغیر باشند مفید واقع شود.

پیش از آنکه روش کلی را مورد بحث قرار دهیم، آن را با ذکر چند مثال ساده توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. يك جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر بیابید

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x \quad (۳)$$

می‌خواهیم تابع y_p را طوری تعیین کنیم که مجموع مشتق دوم آن منهای سه برابر مشتق اول منهای چهار برابر خود تابع برابر $2 \sin x$ گردد. آزمون توابعی از قبیل $\ln x$ ، e^x یا x^2 به عنوان $y_p(x)$ نمی‌تواند چندان مفید باشد، زیرا غیرممکن است از ترکیب این نوع توابع و مشتق‌های آنها $\sin x$ را به دست آورد. توابعی که برای $y_p(x)$ مناسب به نظر می‌رسند عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$. بنابراین $y_p(x)$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

که در آن A و B فعلاً ثابتهای مجهولی هستند. آنگاه

$$y_p'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$y_p''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۳) و جمع بندی جمله‌ها داریم

$$(-A - 3B - 4A) \cos x + (-B + 3A - 4B) \sin x = 2 \sin x$$

این معادله متحداً برقرار خواهد بود اگر فقط اگر

$$-5A - 3B = 0, \quad 3A - 5B = 2$$

از آنجا $A = \frac{3}{17}$ ، $B = -\frac{5}{17}$ و يك جواب خصوصی معادله (۳) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x)$$

مثال ۲. يك جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2 \quad (۴)$$

طبعاً تابع $y_p(x) = Ax^2$ را که در آن باید ثابت A را تعیین کرد مورد آزمون قرار می‌دهیم. در این صورت $y_p'(x) = 2Ax$ ، $y_p''(x) = 2A$ ، و با جایگزینی در معادله (۴) خواهیم داشت

$$2A - 6Ax - 4Ax^2 = 4x^2$$

اگر این معادله بخواهد به‌ازای همه مقادیر x برقرار باشد باید ضرایب توانهای مشابه x در هر دو طرف معادله برابر باشند. از اینجا سه معادله حاصل می‌شود و هیچ مقدار A در این سه معادله صادق نیست. بنابراین تعیین يك جواب خصوصی معادله (۴) به‌صورت Ax^2 غیرممکن است.

اما، اگر جمله ناهمگن $4x^2$ در معادله (۴) را به‌صورت چند جمله‌ای $4x^2 + 0x + 0$ تصور کنیم، معقول خواهد بود که برای $y_p(x)$ عبارت $Ax^2 + Bx + C$ را انتخاب کنیم و ثابتهای A ، B و C را تعیین نماییم. از جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۴) و تساوی ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف معادله، يك دستگاه سه معادله جبری ناهمگن خطی برای سه مجهول A ، B و C حاصل می‌گردد. جواب این دستگاه عبارت است از $A = -1$ ، $B = \frac{2}{7}$ و $C = -\frac{12}{8}$ ، بنابراین يك جواب خصوصی معادله (۴) چنین است

$$y_p(x) = -x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{12}{8}$$

ممکن است برای دانشجو این سؤال مطرح شود که اگر يك چند جمله‌ای از درجه بالاتر مانند $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ برای $y_p(x)$ انتخاب می‌کردیم، چه اتفاقی رخ می‌داد. پاسخ آن است که همه ضرایب بالاتر از جمله درجه دوم صفر می‌شدند. بدین‌سان، به‌جز در موارد استثنایی که بعداً بیان خواهد شد، لزومی ندارد درجه چند جمله‌ای که برای $y_p(x)$ انتخاب می‌کنیم از درجه چند جمله‌ای عبارت ناهمگن معادله بیشتر باشد.

مثال ۳. يك جواب خصوصی برای معادله زیر بیابید

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \quad (۵)$$

به‌همان دلایلی که قبلاً به‌کار رفت، فرض می‌کنیم که $y_p(x) = Ae^{-x}$. با جایگزینی در معادله (۵) خواهیم داشت

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x}$$

یا

$$۰. Ae^{-x} = e^{-x}$$

که نمی توان از آن A را تعیین کرد. بنابراین جواب خصوصی به صورت Ae^{-x} نیست. اشکال این مطلب در آن است که e^{-x} يك جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر است. در نتیجه، عملیات طرف اول معادله (۵)، هنگامی که بر مضرب ثابت دلخواهی از e^{-x} اجرا شوند حاصل صفر می شود. بدین سان این سؤال کلی مطرح می شود که آیا روش ضرایب نامعین را در حالتی هم که جمله ناهمگن خود جواب معادله همگن متناظر است می توان به کار برد؟ چنان که هم اکنون خواهیم دید پاسخ این سؤال مثبت است.

اکنون به بررسی حالت های کلی که در آن $g(x)$ به یکی از صورتهای زیر است می پردازیم

$$g(x) = \begin{cases} P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x \\ e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x. \end{cases}$$

$g(x) = P_n(x)$. در این حالت معادله (۱) به صورت زیر در می آید

$$ay'' + by' + cy = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (۶)$$

برای به دست آوردن يك جواب خصوصی فرض می کنیم که

$$y_p(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n \quad (۷)$$

با جایگزین کردن در معادله (۶) خواهیم داشت

$$a[n(n-1)A_0 x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}] + b(nA_0 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}) + c(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) = a_0 x^n + \dots + a_n \quad (۸)$$

از تساوی ضرایب توانهای متشابه x داریم

$$cA_0 = a_0$$

$$cA_1 + nbA_0 = a_1$$

$$\vdots$$

$$cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n$$

اگر $c \neq 0$ ، آنگاه $A_0 = a_0/c$ جواب معادله اول است، و معادلات دیگر به ترتیب

A_1, A_2, \dots, A_n را به دست می‌دهند. اگر $c=0$ و $b \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای طرف اول معادله (۸) از درجه $n-1$ خواهد بود، و نمی‌تواند در معادله (۸) صدق کند. برای آنکه حاصل $ay_p''(x) + by_p'(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n شود باید $y_p(x)$ را یک چندجمله‌ای درجه $n+1$ انتخاب کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = x(A_0 x^n + \dots + A_n)$$

در این عبارت جمله ثابت وجود ندارد، اما چون $c=0$ یک جواب ثابت معادله دیفرانسیل همگن متناظر است، در $y_p(x)$ به آن نیازی نیست. چون $b \neq 0$ داریم $A_0 = a_0 / b(n+1)$ و ضرایب A_1, \dots, A_n را می‌توان به طریق مشابه تعیین کرد. اگر c و b هر دو صفر شوند، قرار می‌دهیم

$$y_p(x) = x^2(A_0 x^n + \dots + A_n)$$

حاصل $ay_p''(x) + by_p'(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n خواهد بود و می‌توان مانند پیش عمل کرد. در این حالت نیز جمله ثابت و درجه اول در $y_p(x)$ حذف شده‌اند، زیرا هر دو جوابهای معادله همگن متناظرند.

$g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$. مسئله تعیین یک جواب خصوصی معادله

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P_n(x) \quad (9)$$

را می‌توان به مسئله‌ای که هم‌اکنون حل شد برگشت داد. فرض کنیم

$$y_p(x) = e^{\alpha x} u(x)$$

آنگاه

$$y_p'(x) = e^{\alpha x} [u'(x) + \alpha u(x)]$$

و

$$y_p''(x) = e^{\alpha x} [u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)]$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۹)، و حذف سازه $e^{\alpha x}$ ، دسته‌بندی جمله‌ها خواهیم داشت

۱. دانشجو باید توجه کند که در حالت $c=0$ ، $b \neq 0$ می‌توان از معادله (۶) یک بار انتگرال گرفت و معادله خطی مرتبه اولی به دست آورد که عبارت ناهمگن آن یک چندجمله‌ای از درجه $n+1$ است. یک جواب خصوصی این معادله با روش ضرایب نامعین که در آن $y_p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n+1$ است به دست می‌آید. اگر c و b هر دو صفر باشند، آنگاه می‌توان از معادله (۶) مستقیماً دوبار انتگرال گرفت و جواب یک چندجمله‌ای از درجه $n+2$ خواهد بود.
۲. یکی از شیوه‌های مورد علاقه ریاضیدانان آن است که یک مسئله جدید را به مسئله‌ای که قبلاً حل شده است تبدیل کنند.

$$au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x) = P_n(x) \quad (10)$$

تعیین يك جواب خصوصی معادله (۱۰) دقیقاً مسئله‌ای است كه هم‌اکنون حل شد. اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر نشود، فرض می‌کنیم كه $u(x) = A_0x^n + \dots + A_n$ ، و بنا بر این يك جواب خصوصی معادله (۹) به صورت

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n) \quad (11)$$

است. از طرف دیگر، اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر شود و $(2a\alpha + b)$ مخالف صفر باشد، باید $u(x)$ را به صورت $x(A_0x^n + \dots + A_n)$ گرفت. در این حالت عبارت متناظر برای $x y_p(x)$ برابر عبارت طرف دوم معادله (۱۱) خواهد بود. باید توجه داشت كه صفرشدن $a\alpha^2 + b\alpha + c$ متضمن آن است كه $e^{\alpha x}$ يك جواب معادله همگن متناظر است. اگر $2a\alpha + b$ و $a\alpha^2 + b\alpha + c$ هر دو صفر شوند (و در نتیجه $e^{\alpha x}$ و $x e^{\alpha x}$ جوابهای معادله همگن متناظر خواهند بود) در این صورت عبارت درست $u(x)$ چنین است $x^2(A_0x^n + \dots + A_n)$ ، و بنا بر این $x^2 y_p(x)$ برابر عبارت طرف دوم معادله (۱۱) می‌باشد. $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ یا $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ این دو حالت شبیه یکدیگرند، و ما $\sin \beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) / 2i$ می‌توان این مسئله را با توجه به $g(x)$ به صورت

$$g(x) = P_n(x) \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}$$

است، و باید قرارداد

$$y_p(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}(A_0x^n + \dots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)x}(B_0x^n + \dots + B_n)$$

و یا هم‌ارز با آن

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + \dots + A_n) \cos \beta x + e^{\alpha x}(B_0x^n + \dots + B_n) \sin \beta x$$

معمولاً صورت اخیر را ترجیح می‌دهند. اگر $\alpha \pm i\beta$ در معادله مشخصه متناظر به معادله همگن صدق کند، طبعاً باید هریك از چند جمله‌ایها را در x ضرب کرد تا درجه آنها يك واحد افزایش یابد.

اگر جمله ناهمگن شامل عبارت‌هایی از قبیل $e^{\alpha x} \cos \beta x$ و $e^{\alpha x} \sin \beta x$ باشد مناسبتر است آنها را با هم مورد توجه قرار دهیم، زیرا صورت جوابهای خصوصی متناظر بد آنها یکسان است. به عنوان مثال، اگر $g(x) = x \sin x + 2 \cos x$ ، $y_p(x)$ به صورت زیر خواهد بود

$$(A_0x + A_1) \sin x + (B_0x + B_1) \cos x$$

البته با فرض آنكه $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای معادله همگن متناظر نباشند. نتایج پیشین را می‌توان در جدول ۱.۳ خلاصه نمود.

جدول ۱۰۳ جواب خصوصی $ay'' + by' + cy = g(x)$

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s[(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha x} \sin \beta x]$

در اینجا s کوچکترین عدد صحیح نامنفی است (۲ یا ۱، یا ۰) به طوری که به ازای آن هیچ جمله‌ای از $y_p(x)$ جواب معادله همگن متناظر نباشد.

این نتایج همراه با اصل انطباق، که براساس آن می‌توان جواب خصوصی را هنگامی که جمله ناهمگن مجموع چند تابع باشد به دست آورد، این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان طبقه وسیعی از معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت را به طور نسبتاً سریع حل کرد.

اگر معادله دیفرانسیل دارای ضرایب متغیر، یا جمله ناهمگن از آنچه در معادله (۲) آمد پیچیده تر باشد، معمولاً بهتر است از روش تغییر پارامتر که در بند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد استفاده شود.

مثال ۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین، شکل درست $y_p(x)$ را برای معادله دیفرانسیل زیر تعیین کنید

$$y'' + 4y = xe^x + x \sin 2x \quad (12)$$

نخست معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم. به آسانی به دست می‌آید که

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

برای تعیین y_p ، یک جواب خصوصی معادله (۱۲)، از اصل انطباق استفاده می‌کنیم و معادلات زیر را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم

$$y'' + 4y = xe^x \quad (13)$$

و

$$y'' + 4y = x \sin 2x \quad (14)$$

برای معادله اول فرض می‌کنیم که $y_p(x) = (A_0x + A_1)e^x$. چون e^x جواب معادله همگن متناظر نیست، لزومی ندارد که در حدس اولیه خود تجدید نظر کنیم. برای معادله دوم فرض می‌کنیم که $y_p(x) = (B_0x + B_1) \cos 2x + (C_0x + C_1) \sin 2x$ ، اما چون

$\sin 2x$ و $\cos 2x$ جوابهای معادله همگن متناظرند، لازم است چندجمله‌ایهای ضریب را در x ضرب کنیم. بنابراین صورت درست $y_p(x)$ برای معادله (۱۲) عبارت است از

$$y_p(x) = (A_0x + A_1)e^x + (B_0x^2 + B_1x)\cos 2x + (C_0x^2 + C_1x)\sin 2x$$

برای تعیین ضرایب این عبارت آسانتر است، که جواب خصوصی متناظر با xe^x در معادله (۱۳) و $x\sin 2x$ در معادله (۱۴) را جداگانه حساب کنیم، تا اینکه تمام این عبارت را یکباره تطبیق دهیم.

مسائل

با استفاده از روش ضرایب نامعین، مربوط به تعیین جواب خصوصی معادله ناهمگن، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. هنگامی که شرایط اولیه داده شده است، جوابی را که در آنها صدق می‌کند پیدا کنید.

$$y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .1$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x} \quad .2$$

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad .3$$

$$y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x \quad .4$$

$$y'' + 9y = x^2e^{2x} + 6 \quad .5$$

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .6$$

$$2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x \quad .7$$

$$y'' + y = 3\sin 2x + x\cos 2x \quad .8$$

$$y'' + 2y' + y = e^x \cos x \quad .9$$

$$u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2 \quad .10$$

$$u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 t \quad .11$$

$$u'' + \mu u' + \omega_0^2 u = \cos \omega t \quad \mu^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad .12$$

$$y'' + y' + y = \sin^2 x \quad .13$$

$$y'' + y' + 4y = 2\sinh x, \quad \sinh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \quad .14 \text{ راهنمایی:}$$

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x, \quad \cosh x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \quad .15 \text{ راهنمایی:}$$

در مسائل ۱۶ تا ۲۲ شکل مناسبی برای $y_p(x)$ ، در صورتی که بخواهیم از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم، بیابید. محاسبه ثابتها لازم نیست.

$$y'' + 3y' = 2x^2 + x^2 e^{-x} + \sin 3x \quad ۰۱۶$$

$$y'' + y = x(1 + \sin x) \quad ۰۱۷$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(3x + 4) \sin x \quad ۰۱۸$$

$$y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x} \cos x + 4e^{-x} x^2 \sin x \quad ۰۱۹$$

$$y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x \sin 2x \quad ۰۲۰$$

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x \quad ۰۲۱$$

$$y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1) \sin 2x + 3e^{-x} \cos x + 4e^x \quad ۰۲۲$$

۰۲۳ جواب عمومی

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin m\pi x$$

را که در آن $\lambda > 0$ و $\lambda \neq m\pi$ ، $m = 1, 2, \dots, N$ ، تعیین کنید.

۰۲۴ اگر a ، b و c مثبت و Y_1 و Y_2 جوابهای

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

باشند، نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ داریم $Y_1(t) - Y_2(t) \rightarrow 0$. اگر $b = 0$ باشد آیا این نتیجه برقرار است؟

۰۲۵ در بسیاری از مسائل فیزیکی امکان دارد که تابع ورودی (یعنی، جمله ناهمگن) در فواصل زمانی مختلف دارای فرمولهای متفاوتی باشند. به عنوان یک مثال ساده از این-گونه مسائل، برای معادله

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi e^{\pi-t}, & t > \pi \end{cases}$$

جواب $y = \phi(t)$ را طوری بیابید که در شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ صدق کند، و y و y' به ازای همه مقادیر t پیوسته باشند. جمله ناهمگن و جواب $y = \phi(t)$ را به عنوان تابعی از زمان رسم کنید.

دانهمایی: نخست مسئله مقدار اولیه را به ازای $t \leq \pi$ ، سپس به ازای $t > \pi$ حل کنید و مقدار ثابت دلخواه را طوری تعیین کنید که y و y' در $t = \pi$ پیوسته باشند.

۲.۶.۳ روش تغییر پارامترها

در بند ۱.۶.۳ برای تعیین جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب ثابت که جمله ناهمگن آنها به صورت مناسبی است، روش ساده‌ای را بحث کردیم. در این بند به بررسی روش کلی تعیین جواب خصوصی معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (۱)$$

می‌پردازیم، توابع p ، q و g روی فاصله مورد توجه پیوسته‌اند. برای کاربرد این روش، که به روش تغییر پارامترها^۱ موسوم است لازم است يك مجموعه اساسی از جوابهای معادله همگن متناظر

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

در دست باشد.

فرض کنیم y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن (۲) باشند. آنگاه جواب عمومی معادله (۲) چنین است

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

در روش تغییر پارامترها به جای ثابتهای c_1 و c_2 توابع u_1 و u_2 را قرار می‌دهیم. آنگاه توابع u_1 و u_2 را طوری تعیین می‌کنیم که

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (3)$$

در معادله دیفرانسیل ناهمگن (۱) صدق کند. اهمیت این روش در آن است که می‌توان به آسانی توابع u_1 و u_2 را تعیین کرد. برای تعیین u_1 و u_2 به دو شرط نیازمندیم. يك شرط، از این نکته که y_p باید در معادله (۱) صدق کند برای u_1 و u_2 حاصل می‌شود. شرط دوم را می‌توان به طور دلخواه اختیار کرد، و طوری انتخاب می‌شود که محاسبات را آسان سازد. از مشتق‌گیری معادله (۳) به دست می‌آید

$$y'_p = (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) + (u_1 y'_1 + u_2 y'_2) \quad (4)$$

چنان که هم‌اکنون اشاره شد، این عبارت را با قید آنکه u_1 و u_2 در

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (5)$$

صدق کنند ساده می‌کنیم. y_p'' با توجه به این شرط به صورت زیر به دست می‌آید

$$y_p'' = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + u_1 y''_1 + u_2 y''_2 \quad (6)$$

توجه شود که در عبارت y_p'' ، به علت اعمال شرط (۵)، فقط مشتقهای اول u_1 و u_2 نمایان می‌شوند. با جایگزینی y'_p و y_p'' در معادله (۱) خواهیم داشت

$$u_1(y''_1 + p y'_1 + q y_1) + u_2(y''_2 + p y'_2 + q y_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g$$

جمله‌های داخل پرانتزها صفرند، زیرا y_1 و y_2 جوابهای معادله همگن (۲) می‌باشند، بنابراین شرط آنکه y_p در معادله (۱) صدق کند به صورت زیر در می‌آید

۱. این روش را به احترام ریاضیدان فرانسوی ژ. ل. لاگرانژ (J. L. Lagrange)، (۱۷۳۶-۱۸۱۳) روش لاگرانژ نیز می‌نامند، وی برای نخستین بار این روش را در ۱۷۷۴ به کار گرفت. لاگرانژ به سبب کارهایش در مکانیک سماوی، مکانیک تحلیلی، و آنالیز ریاضی مشهور است. وی در سن بیست و پنج سالگی به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان زنده شناخته شد.

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g \quad (۷)$$

معادلات (۵) و (۷) را به صورت دستگاه دو معادله

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$$

با دو تابع مجهول u_1' و u_2' می نویسیم. با حل این دستگاه به دست می آید

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} \quad (۸)$$

که در آن $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ تقسیم بر $W(y_1, y_2)$ بدون اشکال است زیرا y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن اند، و در نتیجه $W(y_1, y_2)$ در فاصله مزبور صفر نمی شود. با انتگرال گیری از معادلات (۸) و جایگزینی در معادله (۳) يك جواب خصوصی برای معادله ناهمگن (۱) به دست می آید. این نتیجه را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه ۱۲.۳. اگر توابع p ، q و g در $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن وابسته به معادله دیفرانسیل (۱)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

باشند، آنگاه يك جواب خصوصی معادله (۱) به صورت زیر خواهد بود

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad (۹)$$

معادله (۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$y_p(x) = \int \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} g(t) dt \quad (۱۰)$$

توجه شود که در معادله (۱۰)، t متغیر گنگ انتگرال گیری و x متغیر مستقل است.

در بدکار بردن روش تغییر پارامترها در مورد يك مسئله خاص معمولاً اطمینان بخش تر است که $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ را جایگزین کرده و مانند بالا عمل کنیم تا اینکه سعی کنیم فرمولهای (۹) یا (۱۰) را به خاطر بسپاریم. اگر بخواهیم یکی از این فرمولها را به کار ببریم باید توجه داشته باشیم که معادله دیفرانسیل به صورت استاندارد (۱) نوشته شده باشد. باید متذکر شد که گرچه روابط (۹) و (۱۰) فرمولهایی برای محاسبه $y_p(x)$ به دست می دهند، معلوم نیست که محاسبه این انتگرالها به صورت دقیق همیشه آسان یا حتی ممکن باشد. با وجود این، حتی در این حالتها نیز فرمولهای $y_p(x)$ نقطه آغازی برای محاسبه عددی $y_p(x)$ فراهم می سازند و ممکن است که این حد اکثر کاری باشد که بتوان انجام داد. از دیدگاه عددی معمولاً مناسبتر است که جواب به صورت انتگرالی باشد،

زیرا غالباً محاسبه عددی يك انتگرال بهطور قابل توجهی، از انتگرال گیری عددی مستقیم معادله دیفرانسیل آسانتر است.

باردیگر تأکید می کنیم که در محاسبه جواب خصوصی با روش تغییر پارامترها لزومی ندارد که ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت باشند، فقط باید دو جواب مستقل خطی معادله همگن را داشته باشیم.

مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید

$$y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \pi/2 \quad (11)$$

دو جواب مستقل خطی معادله همگن عبارتند از $y_1(x) = \cos x$ ، $y_2(x) = \sin x$. با وجود آنکه معادله (۱۱) دارای ضرایب ثابت است و $y_c(x)$ را می شناسیم، نمی توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد، زیرا طرف دوم معادله (۱۱) به صورت $e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ یا $e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ نیست. پس از روش تغییر پارامترها استفاده کرده، می نویسیم

$$y_p(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

آنگاه

$$y'_p(x) = [-u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x] + [u'_1(x) \cos x + u'_2(x) \sin x]$$

کروشه دوم را برابر صفر قرار داده و دوباره مشتق می گیریم، و در معادله (۱۱) جایگزین می کنیم، خواهیم داشت

$$u'_1(x) \cos x + u'_2(x) \sin x = 0$$

$$-u'_1(x) \sin x + u'_2(x) \cos x = \sec x$$

و از حل آن به دست می آید

$$u'_1(x) = -\tan x, \quad u'_2(x) = 1$$

$$u_1(x) = \ln \cos x, \quad u_2(x) = x$$

بنابراین يك جواب خصوصی معادله (۱۱) عبارت است از

$$y_p(x) = x \sin x + (\cos x) \ln \cos x$$

و جواب عمومی چنین است

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) \ln \cos x$$

می توان نتایجی را که در بندهای پیشین این فصل درباره روشهای حل معادله دیفرانسیل (۱)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

آمده است با فرض پیوسته بودن p ، q و g روی $\alpha < x < \beta$ به صورت زیر خلاصه کرد.

۱. اگر p و q ثابت باشند، همواره می توان برای معادله همگن دوجواب مستقل خطی پیدا کرد. آنگاه می توان با روش تغییر پارامترها يك جواب خصوصی و از آنجا جواب کامل را به دست آورد. اگر g به صورت مناسبی باشد، محتملاً استفاده از روش ضرایب نامعین برای تعیین يك جواب خصوصی آسانتر از روش تغییر پارامترها خواهد بود.

۲. اگر p و q ثابت نباشند، روش کلی برای حل معادله (۱) بر حسب تعدادی متناهی از توابع مقدماتی وجود ندارد.^۱ اما اگر بتوان يك جواب معادله همگن را پیدا کرد، می توان اصولاً جواب دومی را با کاهش مرتبه معادله به دست آورد. در این صورت يك جواب خصوصی با روش تغییر پارامترها به دست می آید، و بدین سان جواب کامل معین می گردد. در واقع می توان هر دو محاسبه را توأماً به کار گرفت. اگر يك جواب معادله همگن معلوم باشد، می توان با روش کاهش مرتبه، معادله ناهمگن را حل کرده، هم جواب خصوصی و هم جواب مستقل خطی دومی برای معادله همگن به دست آورد. این مطلب در مسائل ۱۵ و ۱۶ توضیح داده شده است. از این رو، به طور کلی، مسئله حل معادله (۱) به یافتن يك جواب معادله همگن متناظر موکول می گردد.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۷، يك جواب خصوصی را با استفاده از روش تغییر پارامترها بیابید.

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x \quad ۱.$$

$$y'' - y' - 2y = 2e^{-x} \quad ۲.$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \quad ۳.$$

$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad ۴.$$

$$y'' + 9y = 9 \sec^2 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{6} \quad ۵.$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-2x/x^2}, \quad x > 0 \quad ۶.$$

$$y'' + 2y = 3 \operatorname{cosec} 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad ۷.$$

۸. تحقیق کنید که x و xe^x جوابهای معادله همگن متناظر به

۱. روش سریها را که برای طبقه وسیعی از مسائل با ضرایب متغیر به کار می رود، در فصل ۴ مورد بحث قرار داده ایم. روشهای عددی در فصل ۸ بررسی شده اند.

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^2, \quad x > 0$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۹. تحقیق کنید که $(1+x)$ و e^x جوابهای معادله همگن متناظر به

$$x y'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x > 0$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۱۰. دوجواب مستقل خطی معادله بسل رتبه $1/2$ ،

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

عبارتند از $x^{-1/2} \cos x$ و $x^{-1/2} \sin x$. جواب عمومی

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{3/2} \sin x, \quad x > 0$$

را بیابید.

۱۱. تحقیق کنید که e^x و x جوابهای معادله همگن متناظر به

$$(1-x)y'' + x y' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}, \quad 0 < x < 1$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۱۲. فرمولی برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر بیابید

$$y'' - 5y' + 6y = g(x)$$

۱۳. فرمولی برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر بیابید

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = g(x), \quad x > 0$$

(مسئله ۱۰ را ببینید.)

۱۴. مسئله مقدار اولیه

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را در نظر می گیریم. در اینجا پریم نمایشگر مشتق نسبت به زمان t است.

(الف) نشان دهید که جواب عمومی $y'' + y = g(t)$ عبارت است از

$$y = \phi(t) = \left(c_1 - \int_{\alpha}^t g(s) \sin s \, ds\right) \cos t + \left(c_2 + \int_{\beta}^t g(s) \cos s \, ds\right) \sin t$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه و α و β نقاطی می باشند که به طور مناسب انتخاب شده اند.

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهید که اگر

$$c_1 = \int_a^0 g(s) \sin s \, ds, \quad c_2 = - \int_\beta^0 g(s) \cos s \, ds$$

آنگاه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ ، سپس نشان دهید که جواب مسئله مقدار اولیه بالا به ازای $g(t)$ دلخواه را می توان به صورت زیر نوشت

$$y = \phi(t) = \int_0^t g(s) \sin(t-s) \, ds$$

توجه شود که این رابطه فرمولی برای محاسبه جواب مسئله مقدار اولیه اصلی، به ازای هر جمله ناهمگن مفروض $g(t)$ ، به دست می دهد. تابع ϕ نه تنها در معادله دیفرانسیل مزبور صدق می کند، بلکه خود به خود در شرایط اولیه نیز صادق است. این فرمول رابطه موجود بین تابع ورودی $g(t)$ و خروجی $\phi(t)$ را نیز نشان می دهد. علاوه بر این، دیده می شود که تابع خروجی در زمان t تنها بستگی به تغییرات تابع ورودی از لحظه $t=0$ تا لحظه مورد توجه $t=t$ دارد. این انتگرال را اغلب تلفیق $\sin t$ و $g(t)$ می نامند.

(ج) اکنون که جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن را که در شرایط اولیه همگن صدق می کند در اختیار داریم، می توان همان مسئله را برای شرایط اولیه ناهمگن به وسیله اضافه کردن جوابی از معادله همگن که در شرایط اولیه ناهمگن صدق کند، حل کرد. نشان دهید که جواب $y'' + y = g(t)$ با شرایط $y(0) = y_0$ ، $y'(0) = y'_0$ چنین است

$$y = \phi(t) = \int_0^t g(s) \sin(t-s) \, ds + y_0 \cos t + y'_0 \sin t$$

۱۵. معادله ناهمگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (\text{يك})$$

را در صورتی که يك جواب همگن متناظر معلوم باشد، می توان با روش کاهش مرتبه نیز حل کرد (بند ۴.۳ را ببینید). با فرض آنکه y_1 يك جواب معلوم معادله همگن باشد. (الف) نشان دهید که $y = y_1(x)v(x)$ يك جواب معادله (يك) خواهد بود به شرط آنکه v در معادله زیر صدق کند

$$y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' = g \quad (\text{دو})$$

(ب) معادله (دو) يك معادله خطی مرتبه اول نسبت به v' است. نشان دهید که جواب آن چنین است

$$y_1'(x)h(x)v'(x) = \int^x y_1(s)h(s)g(s) \, ds + k$$

که در آن $h(x) = \exp \left[\int^x p(s) \, ds \right]$ و k مقدار ثابتی است.

(ج) با استفاده از قسمت (ب) نشان دهید که جواب عمومی معادله (يك) عبارت است از

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \int^x \frac{ds}{y_1^2(s)h(s)} + y_1(x) \int^x \frac{1}{y_1^2(s)h(s)} \left[\int^s y_1(t)h(t)g(t)dt \right] ds$$

۱۶. با استفاده از روشی که در مسئله ۱۵ بیان شد، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^2, \quad x > 0; y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' + 2xy' + 5y = x, \quad x > 0; y_1(x) = x^{-1} \quad (\text{ب})$$

۲.۳ ارتعاشات مکانیکی

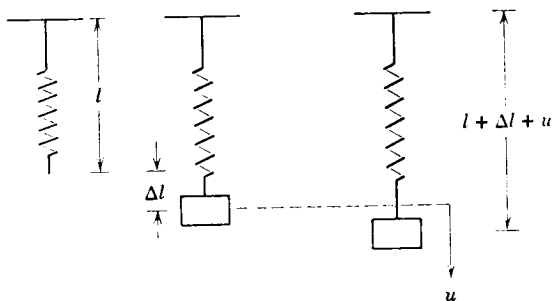
در بندهای ۱.۳ تا ۲.۶ این فصل روشهای حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم بیان شد. دیده شد که وقتی معادله دیفرانسیل دارای ضرایب ثابت باشد، می توان آن را مستقیماً حل کرد. دو زمینه مهم کاربرد این نظریه در مباحث نوسانات الکتریکی و مکانیکی می باشد، که در آن تعداد بسیار زیادی از پدیده ها طبق معادلاتی به شکل

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (۱)$$

صورت می پذیرند. در اینجا m ، c و k مقادیر ثابت، F تابعی مفروض، و $u = \phi(t)$ نمایشگر جواب يك دستگاه فیزیکی به صورت تابعی از زمان t است. به ویژه، حرکت جرم مرتعشی که به يك سر فنر قائمی آویخته شده باشد، طبق این معادله انجام می گیرد. شایسته است که طرز به دست آوردن معادله (۱) را در مورد این مسئله دقیقاً مورد توجه قرار دهیم، زیرا مسائل بسیاری در این اصول مشترکند.

نخست افزایش طول فنری به طول طبیعی l را در هنگام تعادل در اثر اضافه کردن يك جرم m در نظر می گیریم. گیریم Δl افزایش طول مزبور را نشان دهد (شکل ۱.۳ را ببینید). نیروهای وارد بر جرم عبارتند از نیروی ثقل که اثر آن به سوی پایین است، $mg = w$ ، که در آن g شتاب ثقل و w وزن جرم مزبور است، و نیروی فنر که اثر آن به سوی بالاست. چون جرم مزبور در این وضعیت در تعادل است، این نیروها از لحاظ اندازه عددی برابرند. اگر تغییر مکان Δl در مقایسه با طول l کوچک باشد، بنا بر قانون هوک^۱ نیروی فنر با Δl متناسب است، و بنا بر این اندازه آن $k\Delta l$ می باشد. ثابت k بستگی به فنر دارد و آن را ثابت

۱. هوک (Hooke)، (۱۶۳۵-۱۷۰۳) نخستین بار قانون خود را در ۱۶۷۶ به صورت رمزی، *ut tensio sic vis* منتشر کرد، و در ۱۶۷۸ حل آن را به صورت *ceiii nossttuu* ادائه داد، و تقریباً بدین معنی است که «هر قدر نیرو، همان قدر تغییر مکان».



شکل ۱۰۳

فتر می‌نامند. با معلوم بودن وزن w و اندازه‌گیری Δl و استفاده از

$$k\Delta l = mg \quad (۲)$$

می‌توان مقدار آن‌را محاسبه کرد. توجه شود که k دارای ابعاد $mg/\Delta l$ یعنی، طول/نیرو است.

از لحاظ دینامیک، موضوع مورد توجه در این مسئله بررسی حرکت جرم مزبور تحت تأثیر یک نیروی خارجی یا یک تغییر مکان اولیه است. فرض کنیم u که جهت مثبت مقادیر آن به‌سوی پایین است، نمایشگر تغییر مکان جرم مزبور از وضعیت تعادل باشد. این تغییر مکان u ، تابع t است و ارتباط آن با نیروهای وارد بر جرم مزبور به وسیله قانون نیوتن بیان می‌شود، یعنی باید md^2u/dt^2 از حیث اندازه و راستا با برآیند نیروهای وارد بر جرم m برابر باشد. در هنگام نوشتن معادله ناظر بر حرکت جرم، باید توجه داشت که علامت صحیح هر یک از نیروهای مختلف وارد بر جرم، به دقت تعیین شود. در بررسی زیر جهت مثبت نیروها را به سوی پایین، و جهت منفی را به سوی بالا انتخاب کرده‌ایم. چهار نیرو بر جرم مزبور اثر می‌کند:

۱. وزن آن، $w = mg$ که همواره به سوی پایین اثر می‌کند.
۲. نیروی ناشی از فنر F_s ، که با طول $\Delta l + u$ متناسب است، و تأثیرش همواره در جهت برگرداندن فنر به وضعیت طبیعی است. اگر $\Delta l + u > 0$ ، فنر کشیده شده و نیرو، که جهت آن به سوی بالاست، با $F_s(t) = -k(\Delta l + u)$ بیان می‌شود. دیده می‌شود که اندازه نیرویی که از فنر به جرم وارد می‌شود، برابر $k(\Delta l + u)$ است، علامت منفی نمایشگر آن است که جهت این نیرو در این حالت خاص به‌سوی بالاست. اگر $u + \Delta l < 0$ (یعنی، $-u > \Delta l$)، فنر به اندازه مسافت $(\Delta l) - (-u)$ فشرده شده است، و نیرو که راستای آن به‌سوی پایین است، برابر با $k[(\Delta l) - (-u)]$ می‌باشد. بنابراین به‌ازای همه مقادیر u

۱. توجه شود که اگر جرم در بالای وضعیت تعادل واقع باشد، مسافت آن در بالای وضعیت تعادل برابر $-u$ است، نه u .

داریم

$$F_d(t) = -k(\Delta l + u) \quad (۳)$$

بار دیگر تأکید می‌کنیم که رابطه (۳) نه فقط نمایشگر اندازه نیرویی است که فنر در هر وضعیت u بر جرم وارد می‌کند، بلکه راستای آن را نیز به دست می‌دهد.

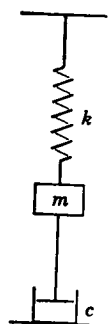
۳. $F_d(t)$ نیروی مقاوم یا استهلاك. این نیرو ممکن است در اثر خواص چسبندگی سیالی که جرم مزبور در آن حرکت می‌کند به وجود آید (مانند مقاومت هوا)؛ یا آنکه جرم متحرک به یک دستگاه متشکل از پیستونی که در استوانه‌ای مملو از روغن حرکت می‌کند (داشپوت) متصل شده باشد (شکل ۲.۳ را ببینید). در هر دو حالت نیروی استهلاك در خلاف جهت حرکت جرم اثر می‌کند. بنا به شواهد تجربی می‌دانیم که تا هنگامی که تندی جرم زیاد بزرگ نباشد می‌توان مقاومت را با تندی $|du/dt|$ متناسب گرفت. اگر جرم به سوی پایین در حرکت باشد، u صعودی و بنابراین du/dt مثبت است، در نتیجه $F_d(t)$ که سوی آن به طرف بالا می‌باشد با $-c(du/dt)$ داده می‌شود. ثابت مثبت c را، ثابت استهلاك می‌نامند؛ واحد آن از جنس نیرو بر سرعت است. اگر جرم به سوی بالا در حرکت باشد، u نزولی و du/dt منفی است، و $F_d(t)$ که در این حالت به سوی پایین است، همچنان با $-c(du/dt)$ معین می‌شود. بنا بر این به ازای هر u داریم

$$F_d(t) = -c \frac{du}{dt} \quad (۴)$$

۴. $F(t)$ نیروی اعمال شونده، که اگر مثبت باشد جهت آن به سوی پایین و اگر منفی باشد جهت آن به سوی بالاست. این نیرو ممکن است از حرکت پایه‌ای که فنر به آن بسته شده است ایجاد شود، یا آنکه نیرویی باشد که مستقیماً به جرم اعمال شده است.

طبق قانون نیوتن

$$mg + F_d(t) + F_d(t) + F(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2}$$



شکل ۲.۳

با جایگزینی $F_s(t)$ و $F_d(t)$ خواهیم داشت

$$mg - k(\Delta l + u) - c \frac{du}{dt} + F(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (5)$$

چون $k\Delta l = mg$ ، معادله (۵) به معادله دیفرانسیل (۱) بدل می‌شود

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$$

در نوشتن این معادله از قرارداد معمول که مشتق‌های نسبت به زمان را با نقطه نشان می‌دهند استفاده شده است.

این نکته مهم را باید به خاطر داشت که در معادله (۱)، جرم m ، ضریب استهلاک c ، و ثابت فنر k همه ثابت‌های ثابت‌اند. همچنین باید به این نکته مهم توجه داشت که معادله (۱) فقط نمایشگر یک معادله تقریبی برای تعیین u می‌باشد. در واقع رابطه بین $F_s(t)$ و $\Delta l + u$ خطی نیست؛ اما، برای اکثر مواد معمولی، مانند فولاد، و همچنین هنگامی که $(\Delta l + u)/l \ll 1$ ، رابطه با درجه دقت زیاد، تقریباً خطی است. به همین نحو، عبارت نیروی بازدارنده نیز تقریبی است. همچنین در به دست آوردن معادله (۱) از جرم فنر در مقایسه با جرم جسمی که به آن بسته شده است صرف نظر کرده‌ایم. خوشبختانه، در کاربردهای وسیع و گوناگونی، معادله (۱) مدل ریاضی رضایت بخشی از دستگاه فیزیکی مزبور است.

بیان کامل مسئله ارتعاش مستلزم مشخص کردن دو شرط اولیه است - تغییر مکان اولیه u_0 ، و سرعت اولیه \dot{u}_0 . از استدلال فیزیکی چندان روشن نمی‌شود که آیا فقط باید دو شرط اولیه مشخص شود، و یا آنکه این دو شرط باید همان شرایط مذکور باشد. اما از قضیه وجود و یکتایی ۲.۳ نتیجه می‌شود که با این شرایط یک مسئله ریاضی خواهیم داشت که دارای جوابی یکتاست. جوابی از معادله (۱) که در این شرایط اولیه صدق کند، وضعیت جرم مزبور را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد.

مثال. مسئله مقدار اولیه مربوط به دستگاه جرم-داشپوت-فنر زیر را بیابید. افزایش طول فنر به ازای وزن ۵ پوندی برابر ۱ اینچ است. دستگاه داشپوت به ازای سرعت ۲ اینچ در ثانیه نیرویی برابر ۲۰۰ پوند اعمال می‌کند. یک وزنه ۲ پوندی به فنر بسته شده است و از وضعیت ۲ اینچ پایینتر از موضع تعادل رها می‌شود. داریم

$$m = \frac{w}{g} = \frac{5 \text{ lb}}{32 \text{ ft/sec}^2} = \frac{1}{16} \frac{\text{lb-sec}^2}{\text{ft}}$$

$$c = \frac{0.02 \text{ lb}}{2 \text{ in./sec}} = \frac{0.02 \text{ lb}}{(1/6) \text{ ft/sec}} = 0.12 \frac{\text{lb-sec}}{\text{ft}}$$

$$k = \frac{5 \text{ lb}}{1 \text{ in.}} = \frac{5 \text{ lb}}{(1/12) \text{ ft}} = 60 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

و بنا براین

$$\frac{1}{16}\ddot{u} + 0.12\dot{u} + 60u = 0$$

یا

$$\ddot{u} + 1.92\dot{u} + 960u = 0$$

که در آن u بر حسب فوت و t بر حسب ثانیه است. شرایط اولیه عبارتند از $u(0) = \frac{1}{6}$ ، $\dot{u}(0) = 0$.

۱۰.۷.۳ ارتعاشات آزاد

ارتعاشات آزاد بدون استهلاك. اگر نیروی خارجی واستهلاكی وجود نداشته باشد، آنگاه معادله (۱) بند پیش به صورت ساده زیر درمی آید

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$u = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (2)$$

که در آن

$$\omega_0^2 = k/m \quad (3)$$

و ω_0 را فرکانس دوری می نامند، و روشن است که دارای واحدی از جنس معکوس زمان می باشد. در هر مورد خاص، ثابتهای A و B به وسیله شرایط اولیه داده شده معین می گردند. در بحث جواب معادله (۱) مناسبتر است که رابطه (۲) را به صورت

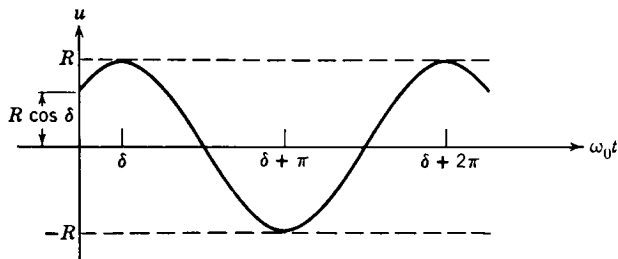
$$u = R \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (4)$$

در آوریم. مقادیر A و B هر چه باشند همواره می توان این تبدیل را با قراردادن $R = (A^2 + B^2)^{1/2}$ و $A = R \cos \delta$ و $B = R \sin \delta$ نسبت به δ انجام داد. به علت تناوب تابع کسینوس، معادله (۴) نمایشگر يك حرکت تناوبی، یا حرکت هارمونیک ساده با تناوب

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} \quad (5)$$

است. برای تمایز بین مسائل ارتعاشات آزاد بدون استهلاك و مسائل ارتعاشات استهلاكی یا ارتعاشات تقویت شونده، فرکانس دوری ω_0 و تناوب $2\pi/\omega_0$ مربوط به حرکت بدون استهلاك و بدون تقویت را معمولاً "فرکانس دوری طبیعی و تناوب طبیعی ارتعاش می نامند. چون $|\cos(\omega_0 t - \delta)| \leq 1$ ، u همواره بین دو خط $u = \pm R$ قرار دارد. ماکزیمم

تغییر مکان در زمانهای $\dots, \pm 2\pi, \pm \pi, 0, \dots$ روی می‌دهد. ثابتهای R و δ را به ترتیب دامنه و زاویه فاز حرکت مزبور می‌نامند. نمودار اجمالی حرکتی که با معادله (۴) نمایش داده می‌شود در شکل ۳.۳ آمده است. توجه شود که این حرکت تناوبی با افزایش زمان از بین نمی‌رود. علت این امر آن است که نیروی مقاوم را در نظر نگرفتیم، این نیرو موجب می‌شود که انرژی که در دستگاه از تغییر مکان اولیه و سرعت ذخیره شده است، اتلاف گردد.



شکل ۳.۳ حرکت هارمونیک ساده

مثال. مطلوب است تعیین تناوب طبیعی يك دستگاه فنر-جرم در صورتی که وزن جرم ۱۰ پوند و افزایش طول فنر ۲ اینچ باشد. اگر فنر را ۲ اینچ دیگر کشیده و سپس رها سازیم حرکت حاصل را معین کنید.

ثابت فنر برابر است با $k = 10 \text{ lb/2 in.} = 60 \text{ lb/ft}$. جرم m برابر است با

$$m = w/g = \frac{10}{32} \text{ lb/(ft/sec}^2\text{)}$$

بنابراین

$$T = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} = 2\pi \left[\frac{10}{(32)60} \right]^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ sec}$$

معادله حرکت عبارت است از

$$\frac{10}{32} \ddot{u} + 60u = 0$$

از آنجا

$$u = A \cos(\lambda\sqrt{3}t) + B \sin(\lambda\sqrt{3}t).$$

جوابی که در شرایط اولیه فوت $u(0) = 1/6$ و $\dot{u}(0) = 0 \text{ ft/sec}$ صدق می‌کند چنین است

$$u = \frac{1}{\epsilon} \cos(\lambda \sqrt{3} t)$$

که در آن t بر حسب ثانیه و u بر حسب فوت است.

ارتعاشات آزاد با استهلاك. اگر تأثیر نیروی مقاوم را منظور کنیم، معادله دیفرانسیل حرکت جرم چنین خواهد بود

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (6)$$

ریشه‌های معادله مشخصه آن عبارتند از

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \quad (7)$$

چون c ، k و m مثبت‌اند، $c^2 - 4km$ همواره از c^2 کوچکتر است، بنابراین اگر $c^2 - 4km \geq 0$ ، آنگاه r_1 و r_2 حاصل از معادله (۷) منفی‌اند. اگر $c^2 - 4km < 0$ ، آنگاه مقادیر r_1 و r_2 حاصل از معادله (۷) مختلط‌اند، اما بخش حقیقی آنها منفی است. جدول جوابهای معادله (۶) عبارت است از

$$c^2 - 4km > 0, \quad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad r_1, r_2 < 0 \quad (8)$$

$$c^2 - 4km = 0, \quad u = (A + Bt)e^{-(c/2m)t} \quad (9)$$

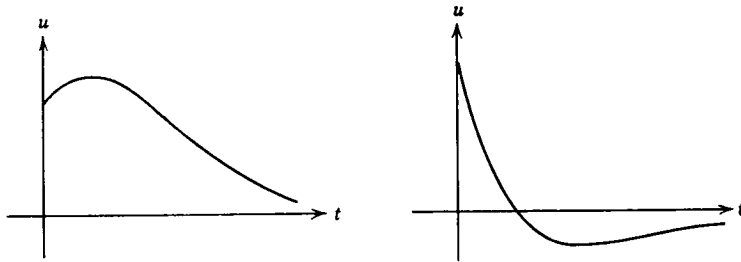
$$c^2 - 4km < 0, \quad u = e^{-(c/2m)t} (A \cos \mu t + B \sin \mu t) \quad (10)$$

$$\mu = (4km - c^2)^{1/2} / 2m > 0$$

در همه این حالتها، بدون توجه به شرایط اولیه، یعنی، بدون توجه به مقادیر A و B ، وقتی که $t \rightarrow \infty$ داریم $u \rightarrow 0$ ، و بنابراین حرکت با افزایش زمان مستهلك می‌شود. بدین‌سان جوابهای معادلات (۱) و (۶) آنچه را که انتظارش می‌رفت تأیید می‌کنند. بدون نیروی مقاوم، حرکت همواره بدون آنکه کند شود ادامه خواهد داشت، و با نیروی مقاوم، حرکت با افزایش زمان به‌صفر تنزل می‌کند.

دو حالت نخست، یعنی معادلات (۸) و (۹)، که به‌ترتیب استهلاكی شدید و استهلاكی بحرانی نامیده می‌شوند، نمایشگر حرکاتی هستند که در آنها جرمی که در آغاز تغییر مکان یافته است به موضع تعادل خود «کشیده می‌شود». بر حسب شرایط اولیه، امکان دارد که در این دو حالت جرم يك بار از موضع تعادل بگذرد، اما این يك «حرکت ارتعاشی» نیست. در شکل ۴.۳ طرح دو نمونه از این نوع حرکت آمده است. در مسائل ۱۵ و ۱۶ باز هم از این موضوع بحث خواهد شد.

حالت سوم، که آن را حرکت استهلاكی ضعیف می‌نامند، اغلب در دستگاههای مکانیکی روی می‌دهد، و نمایشگر «ارتعاش استهلاكی» است. برای توضیح، در معادله (۱۰)



شکل ۴.۳ حرکتهای استهلاکی شدید یا بحرانی

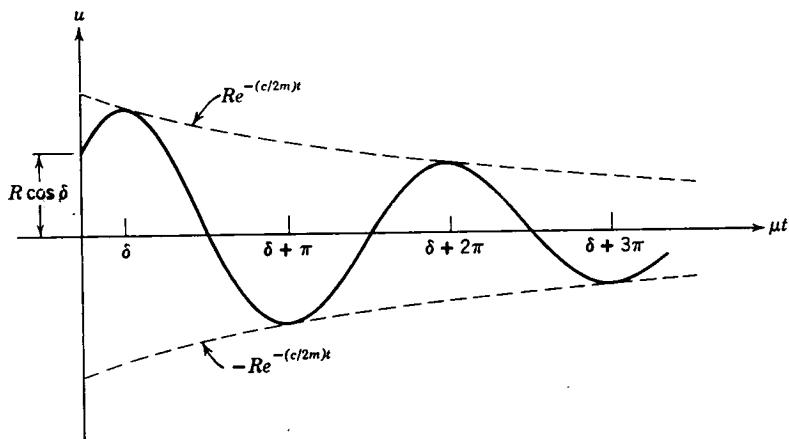
قرار می‌دهیم $A = R \cos \delta$ و $B = R \sin \delta$ ، و خواهیم داشت

$$u = Re^{-(c/2m)t} \cos(\mu t - \delta) \quad (11)$$

تغییر مکان u باید بین دو خم $u = \pm Re^{-(c/2m)t}$ واقع باشد، و بنا بر این بدین‌خیم کسینوسی شباهت دارد که دامنه آن کاهش می‌یابد. طرح یک نمونه در شکل ۵.۳ آمده است.

با وجود آنکه حرکت دقیقاً متناوب نیست، می‌توان یک شبه دوره تناوب $T_d = 2\pi/\mu$ را به‌عنوان زمان بین ماکزیممهای متوالی تغییر مکان تعریف کرد. رابطه بین T و T_d جالب توجه است. داریم

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2} \right)^{-1/2} = 2\pi \left(\frac{k}{m} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{c^2}{4km} \right)^{-1/2} \\ &= T \left(1 - \frac{c^2}{4km} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$



شکل ۵.۳ ارتعاش استهلاکی

بنابراین اگر $c^2/4km$ کوچک باشد،

$$T_d \cong T \left(1 + \frac{c^2}{8km} \right)$$

در نتیجه هنگامی که نیروی مقاوم بسیار کوچک باشد (یعنی، هنگامی که کمیت مطلق $c^2/4km \ll 1$)، می‌توان در محاسبه شبه دوره تناوب ارتعاش از نیروی مقاوم صرف نظر کرد. در بسیاری از مسائل فیزیکی دقیقاً همین وضعیت وجود دارد. از طرف دیگر، اگر بخواهیم حرکت دقیق جرم را برای تمام مدت بررسی کنیم، هرگز نمی‌توان از نیروی مقاوم هر قدر هم کوچک باشد صرف نظر کرد. در بند بعدی که به بحث پیرامون ارتعاشات تقویت شونده می‌پردازیم، نیروی مقاوم اهمیت بیشتری خواهد یافت.

مسائل

۱. يك وزنه ۲ پوندی طول يك فنر ۲ فوتی را ۶ اینچ افزایش می‌دهد. اگر وزنه را ۳ اینچ دیگر به طرف پایین کشیده و رها سازیم، با صرف نظر کردن از مقاومت هوا حرکت حاصل را معین کنید. دامنه، فرکانس دوری، و تناوب حرکت را بیابید.

۲. يك جرم ۱۰۰ گرمی به يك فنر فولادی به طول طبیعی ۵۰ سانتی متر آویزان است. طول فنر در اثر این جرم ۵ سانتی متر افزایش یافته است. اگر سرعت اولیه جرم برابر ۱۰ سانتی متر بر ثانیه به سوی پایین باشد، حرکت حاصل را معین کنید. از مقاومت هوا صرف نظر شود.

۳. يك وزنه ۳ پوندی طول يك فنر مارپیچی را ۳ اینچ افزایش می‌دهد. اگر با فشار دادن وزنه به سوی بالا، فنر را ۱ اینچ منقبض کرده و سپس وزنه را با سرعت ۲ فوت بر ثانیه به سوی پایین رها کنیم، حرکت حاصل را معین کنید. از مقاومت هوا صرف نظر شود. دامنه، فرکانس دوری، و تناوب حرکت را بیابید.

۴. نشان دهید که تناوب حرکت ارتعاشی بدون استهلاك جرمی که به يك فنر شاغولی آویزان است برابر $2\pi\sqrt{\Delta l/g}$ می‌باشد، که در آن Δl افزایش طول در اثر w وزن جرم مزبور است.

۵. در مسئله ۳ فرض کنیم مقاومت هوا يك نیروی استهلاكی برابر $3\pi r$ پوند اعمال کند. شبه تناوب حرکت استهلاكی حاصل را با تناوب طبیعی حرکت بدون استهلاك مقایسه کنید. تغییر تناوب چه درصدی از تناوب طبیعی است؟

۶. در مسئله ۵، ضریب استهلاك باید چقدر باشد، تا موجب ۵۰ درصد تغییر در تناوب حرکت گردد؟

۷. نشان دهید که $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ را می‌توان به صورت $r \sin(\omega_0 t - \theta)$ نوشت. r و θ را بر حسب A و B معین کنید. اگر $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \sin(\omega_0 t - \theta)$ ، رابطه بین δ و θ ، R ، r چیست؟

۸. جواب معادلهٔ دیفرانسیل $m\ddot{u} + ku = 0$ را که در شرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کند بیابید. جواب خود را به صورت $R \cos(\omega_0 t - \delta)$ بیان کنید.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ج})$$

۹. تناوب طبیعی نوسان آونگی به طول l را که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است بیابید. از مقاومت هوا و وزن نخ در مقایسه با وزن جرم مزبور صرف نظر کنید. θ را به قدر کافی کوچک فرض کنید به طوری که $\sin \theta \simeq \theta$.

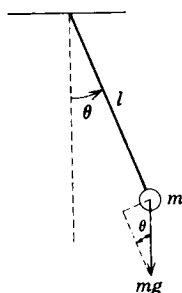
۱۰. راهنمایی: قانون نیوتن را برای مؤلفهٔ مماسی حرکت بنویسید.

۱۱. جسمی مکعبی شکل و همگن به ضلع l و چگالی حجمی ρ در مایعی به چگالی حجمی $\hat{\rho}$ شناور است. اگر جسم را اندکی در مایع فرو برده و رها سازیم، در امتداد شاغولی به نوسان درمی‌آید. با فرض آنکه بتوان از استهلاک ناشی از غلظت مایع و مقاومت هوا صرف نظر کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت و تناوب آن را بیابید.

۱۲. افزایش طول یک فنر مارپیچی بر اثر یک جرم ۲۵ گرمی برابر ۵ سانتی متر است. اگر فنر را به یک داشپوت روغنی با ضریب مقاومت ۴۰۰ دین ثانیه بر سانتی متر، متصل کنیم، و جرم را ۲ سانتی متر دیگر کشیده و رها سازیم، حرکت حاصل را معین کنید.

۱۳. افزایش طول یک فنر بر اثر وزنهٔ ۱۶ پوندی برابر ۳ اینچ است. وزنه را به یک دستگاه داشپوت با ضریب مقاومت ۲ پوند ثانیه بر فوت متصل می‌کنیم. مطلوب است تعیین حرکت حاصل، در صورتی که وزنه را از موضع تعادل با سرعت ۳ اینچ بر ثانیه به سوی پایین رها کنیم.

۱۴. یک وزنهٔ ۸ پوندی به یک فنر فولادی به طول ۱۵ اینچ آویزان است. افزایش طول فنر بر اثر وزنه برابر ۱/۸ فوت است. اگر وزنه را به یک داشپوت روغنی با ضریب مقاومت c نیز متصل کنیم، مقادیر c را طوری تعیین کنید که به ازای آنها حرکت، استهلاکی



شکل ۶.۳

شدید، استهلاکی بحرانی، و استهلاکی ضعیف باشد. واحدهای c را مشخص کنید.

۱۴. جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ را در حالت $c^2 - 4km < 0$ که در شرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کند بیابید. جواب خود را به صورت $Re^{-(c/2m)t} \cos(\mu t - \delta)$ بیان کنید.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ج})$$

۱۵. نشان دهید که اگر ضریب مقاومت c در معادلهٔ $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ طوری باشد که حرکت استهلاکی شدید یا بحرانی باشد، آنگاه شرایط اولیه هر چه باشد، جرم می‌تواند حداکثر یک بار از موضع صفر تغییر مکان بگذرد.

داهنمایی: همهٔ مقادیر ممکن t را به طوری که $u = 0$ ، بیابید.

۱۶. برای حالت استهلاکی بحرانی، جواب عمومی معادلهٔ (۶) را که در شرایط اولیهٔ $u(0) = u_0$ ، $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ صدق می‌کند بیابید. اگر $\dot{u}_0 = 0$ ، نشان دهید که وقتی $\infty \rightarrow t$ داریم $u \rightarrow 0$ ، اما به ازای هر مقدار متناهی t خواهیم داشت $u \neq 0$. فرض کنیم u مثبت باشد، برای \dot{u}_0 شرطی تعیین کنید که موجب شود جرم پس از رها شدن از موضع صفر تغییر مکان بگذرد.

۱۷. برای نوسان استهلاکی که با معادلهٔ (۱۱) داده شده است، زمان بین ماکزیممهای متوالی برابر است با $T_d = 2\pi/\mu$. نسبت تغییر مکان دوماکزیمم متوالی (متناظر به t و $t + T_d$) با $e^{(c/2m)T_d}$ معین می‌شود. بدین سان تغییر مکانهای متوالی متناظر به فواصل زمانی T_d تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $e^{(c/2m)T_d}$ می‌دهند. لگاریتم طبیعی این نسبت را که با $\Delta = (c/2m)T_d = (\pi c/m\mu)$ نشان داده می‌شود، کاهش لگاریتمی می‌نامند. چون m ، μ و Δ مقادیری هستند که می‌توان به آسانی اندازه‌گیری کرد، این معادله روش عملی مناسبی برای محاسبهٔ ضریب مقاومت دستگاه مکانیکی فراهم می‌سازد. به ویژه، در مورد حرکت ارتعاشی جرم در یک مایع غلیظ، ضریب مقاومت به غلظت مایع بستگی دارد؛ نوع این رابطه برای اشکال هندسی ساده معلوم است، و با استفاده از رابطهٔ بالا می‌توان به طور تجربی غلظت را معین کرد. این یکی از دقیقترین روشهای تعیین غلظت گاز در فشارهای بالاست.

(الف) در مسئلهٔ ۱۲، کاهش لگاریتمی را بیابید.

(ب) اگر در مسئلهٔ ۱۳ اندازهٔ کاهش لگاریتمی برابر ۳، و ثابته $T_d = 0.3$ باشد، ضریب مقاومت c را بیابید.

۲۰۷.۳ ارتعاشات تقویت شونده

اکنون حالتی را که در آن یک نیروی خارجی متناوب، مانند $F_0 \cos \omega t$ ، به دستگاه نثر-جرم

وارد می‌شود در نظر می‌گیریم. در این حالت معادله حرکت عبارت است از

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \quad (۱)$$

نخست فرض کنیم که نیروی مقاومی وجود ندارد؛ آنگاه معادله (۱) به صورت ساده زیر درمی‌آید

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \quad (۲)$$

هنگامی که $\omega_0 = \sqrt{k/m} \neq \omega$ ، جواب عمومی معادله (۲) چنین است

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (۳)$$

ثابت‌های c_1 و c_2 به وسیله شرایط اولیه تعیین می‌شوند. حرکت حاصل، عموماً، مجموع دو حرکت متناوب با فرکانسهای (ω_0 و ω) و دامنه‌های مختلف است. در اینجا دو مثال رامورد توجه قرار می‌دهیم.

ضربان. فرض کنیم که جرم در آغاز ساکن باشد، یعنی، $u(0) = 0$ ، $\dot{u}(0) = 0$. در این صورت ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله (۳) به صورت زیر بدست می‌آیند

$$c_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0 \quad (۴)$$

و جواب معادله (۲) عبارت است از

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (۵)$$

این عبارت مجموع دو تابع متناوب با تناوبهای مختلف و دامنه یکسان است. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

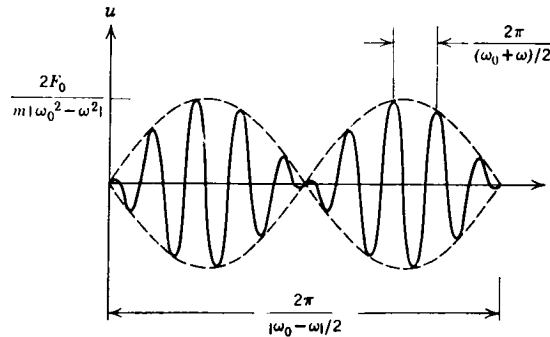
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

که در آن $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ و $B = (\omega_0 - \omega)t/2$ ، می‌توان رابطه (۵) را به صورت زیر نوشت

$$u = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \quad (۶)$$

اگر $|\omega_0 - \omega|$ کوچک باشد، آنگاه $|\omega_0 + \omega| \gg |\omega_0 - \omega|$ ، و در نتیجه $(\omega_0 + \omega)t/2$ تا بی‌نهایت است که در مقایسه با $(\omega_0 - \omega)t/2$ $\sin(\omega_0 - \omega)t/2$ دارای نوسانهای سریعتری است. بنابراین، حرکت نوسانی سریع با فرکانس دوری $(\omega_0 + \omega)/2$ می‌باشد، و دامنه آن دارای تغییرات بطیئی سینوسی است. این نوع حرکت، که دامنه آن دارای تغییرات تناوبی است، نمایانگر پدیده‌ای است که ضربان نامیده می‌شود. در آکوستیک هنگامی که دو دیافازون با فرکانسهای

تقریباً برابر همزمان به صدا در آیند. چنین پدیده‌ای بوجود می‌آید. در این حالت تغییرات تناوبی دامنه را می‌توان به‌طور ساده با گوش تشخیص داد. در الکترونیک تغییرات دامنه بر حسب زمان را مدولاسیون دامنه می‌نامند. طرح اجمالی تابع $u = \phi(t)$ مربوط به رابطه (۶) در شکل ۷.۳ ترسیم شده است.

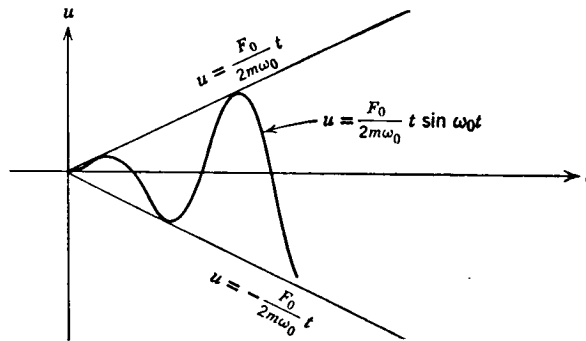


شکل ۷.۳ پدیده ضربان

تشدید. به‌عنوان مثال دیگر. حالت $\omega = \omega_0$ را در نظر می‌گیریم؛ در این حالت، تناوب تابع تقویت با تناوب طبیعی دستگاه برابر است. در این صورت جمله ناهمگن $F_0 \cos \omega t$ يك جواب معادله همگن متناظر است. در این حالت، جواب معادله (۲) عبارت است از

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (۷)$$

بدلت وجود جمله $t \sin \omega_0 t$ در رابطه (۷). روشن است که c_1 و c_2 هرچه باشند، دامنه حرکت وقتی $t \rightarrow \infty$ نامحدود خواهد شد (شکل ۸.۳ را ببینید). این پدیده به تشدید



شکل ۸.۳ پدیده تشدید

1. amplitude modulation

موسوم است. اما، در تحقق عملی، فنر محتملاً^۱ می‌شکند. البته، به محض آنکه u بزرگ شود، این نظریه دیگر معتبر نخواهد بود، زیرا هنگامی که از يك رابطه خطی برای تعیین ثابت فنر استفاده کردیم، فرض این بود که u کوچک است. اگر دستگاه شامل نیروی مقاوم باشد، حرکت محدود باقی می‌ماند؛ اما، در این حالت نیز امکان دارد که به ازای تابع ورودی $F_0 \cos \omega t$ ، هنگامی که نیروی مقاوم کوچک و ω نزدیک به ω_0 باشد، دامنه بسیار بزرگ شود.

ارتعاشات تقویت‌شونده استهلاکی. حرکت دستگاه فنر-جرم با استهلاك و تابع تقویت $F_0 \cos \omega t$ را می‌توان مستقیماً تعیین کرد. گرچه محاسبات نسبتاً مفصل‌اند، اما دشوار نیستند. جواب معادله (۱) عبارت است از

$$u = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (8)$$

که در آن δ از $\cos \delta = m(\omega_0^2 - \omega^2) / \Delta$ و $\sin \delta = c\omega / \Delta$ با در نظر گرفتن $\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}$ به دست می‌آید. در اینجا r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه وابسته به معادله (۱) می‌باشند. چنانکه در بند آخر دیدیم وقتی $t \rightarrow \infty$ هر دو تابع $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ به صفر می‌گرایند. بدین سان وقتی $t \rightarrow \infty$ داریم

$$u \rightarrow u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (9)$$

بدین علت $u_p(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$ را جواب گذرا و $u_p(t)$ را جواب حالت دائمی می‌نامند، به‌طور اجمال می‌توان گفت که جواب گذرا موجب می‌شود تا شرایط اولیه برقرار باشند، با افزایش زمان انرژی که با تغییر مکان و سرعت اولیه به دستگاه داده شده است در اثر نیروی استهلاك از بین می‌رود، و سپس حرکت نمایشگر جواب دستگاه به نیروی خارجی $F(t)$ خواهد بود. بدون استهلاك (که طبعاً، در هر دستگاه فیزیکی غیرممکن است) اثر شرایط اولیه برای همیشه پا برجا می‌ماند.

توجه شود که $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2$ هیچگاه، حتی به ازای $\omega = \omega_0$ صفر نمی‌شود، بنابراین وجود نیروی استهلاك حرکت موجب می‌شود که همواره دامنه حرکت محدود باقی بماند. به ازای مقادیر ثابت m ، c و k دامنه جواب حالت دائمی هنگامی ماکزیمم است که $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2$ مینیمم باشد؛ و این متناظر است با انتخاب ω^2 به صورت

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \quad (10)$$

برای طرح يك دستگاه فنر-جرم^۱ به منظور کشف نیروهای متناوب دريك همسایگی

۱. معمولاً چنین ابزارهایی را، ابزارهای لرزه می‌نامند، زیرا اصولاً با لرزه‌نگار که برای کشف حرکات سطح زمین به کار می‌رود مشابه‌اند. حرکت تناوبی پایه‌ای که فنر به آن نصب شده است با مسئله‌ای که در آن يك نیروی تناوبی بر جرم مزبور اثر می‌کند معادل است.

کوچک ω باید k ، c و m را طوری انتخاب کنیم که معادله (۱۵) به طور تحقیقی یا تقریبی برقرار باشد. بدین طریق پاسخ دستگاه به این گونه نیروها ماکزیمم خواهد بود و کشف آنها را آسانتر می کند. در مسائل مربوط به کشف علایم الکتریکی در شبکه های الکتریکی نیز وضعیت مشابهی رخ می دهد.

مسائل

۱. عبارت $\cos 9t - \cos 7t$ را به صورت $A \sin \alpha t \sin \beta t$ بیان کنید.
۲. عبارت $\sin 7t - \sin 6t$ را به صورت $A \sin \alpha t \cos \beta t$ بیان کنید.
۳. یک فنزمارپیچی در اثر وزنه ۴ پوندی $1/8$ فوت کشیده شده است. فنر تحت تأثیر یک نیروی خارجی $2 \cos 3t$ پوند قرار دارد. اگر وزنه را از وضعیت تعادل ۲ اینچ تغییر مکان داده و سپس رها کنیم، حرکت حاصل را معین کنید، از نیروی استهلاک صرف نظر شود. اگر نیروی خارجی برابر $4 \sin \omega t$ پوند باشد، به ازای چه مقدار ω تشدید به وجود می آید.
۴. اگر یک دستگاه فنر-جرم با وزن ۶ پوند و ضریب ثابت فنر ۱ پوند بر اینچ ناگهان در $t = 0$ با نیروی خارجی $4 \cos 7t$ پوند وبدون استهلاک به حرکت درآید، حرکت حاصل را تعیین کرده و نمودار تغییر مکان بر حسب زمان t را رسم کنید.
۵. جواب معادله دیفرانسیل $m \ddot{u} + ku = F \cos \omega t$ ، $\omega \neq \sqrt{k/m}$ را برای هر یک از شرایط اولیه زیر بیابید:

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ج})$$

۶. تعمیمی از پدیده ضربان را در حرکتی که مجموع دو تابع متناوب با دامنه های مختلف $A \cos \omega_1 t$ و $B \cos \omega_2 t$ باشد، می توان مشاهده کرد. نشان دهید که این نوع حرکت را می توان به صورت

$$R(t) \cos \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2} t - \delta(t) \right]$$

- بیان کرد. اگر $|A - B| \ll 1$ و $|\omega - \omega_0| \ll 1$ ، نشان دهید که R تابعی با تغییرات کند است. تغییرات زاویه فاز δ را بر حسب زمان t ، مدولاسیون فرکانسی می نامند.
- ۷*. مطلوب است تعیین حرکت $u = \phi(t)$ یک جرم m که به فنری با ثابت k آویزان است و نیروی

$$F(t) = F_0 \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi < t \leq 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}$$

بر آن اثر می‌کند. برای سهولت فرض شود $\omega^2 = k/m = 1$. از مقاومت هوا صرف نظر کرده و فرض می‌کنیم که جرم در آغاز ساکن باشد.

دانه‌مایی: هر فاصله زمانی را جداگانه بررسی کنید، وجوابهای متناظر به فواصل مختلف را با استفاده از این شرط که هر ϕ تابع پیوسته‌ای از t است با هم پیوند دهید.

۸. افزایش طول يك فنر مارپیچی در اثر وزنه ۸ پوندی، برابر ۶ اینچ است. جرم به يك دستگاه داشپوت با ثابت استهلاك ۲۵ ره پوند ثانیه برفوت وصل شده است. اگر جرم تحت تأثیر يك نیروی خارجی به صورت $4 \cos 2t$ پوند واقع باشد، جواب دایمی دستگاه را تعیین کنید. m را طوری انتخاب کنید که جواب دستگاه به این نیروی خارجی ماکزیمم باشد.

۹. جواب معادله دیفرانسیل $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin \omega t$ را با فرض $c^2 - 4km < 0$ برای هریک از شرایط اولیه زیر بیابید.

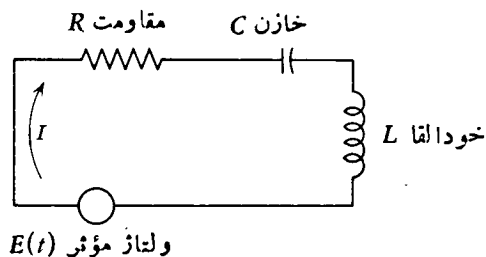
$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = u_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ج})$$

۸.۳ شبکه‌های الکتریکی.

به عنوان دومین مثال برای کاربرد نظریه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، به بررسی شدت جریان در يك مدار ساده به صورت سری، می‌پردازیم. مدار را در شکل ۹.۳ نشان داده ایم. شدت جریان $I = \phi(t)$ (بر حسب آمپر) تابعی از زمان t است. مقاومت R (اهم)، ظرفیت خازن C (فاراد)، و ضریب القای L (هنری) همه مثبت می‌باشند، و عموماً ممکن است تابع زمان t و شدت جریان I باشند. در دسته وسیعی از کاربردها می‌توان از این



شکل ۹.۳

بستگی صرف نظر کرد، و ما فرض می‌کنیم که R ، C و L ثابتهای معلومی باشند. ولتاژ مؤثر E (ولت) تابعی از زمان است و اغلب به صورت $E_0 \cos \omega t$ می‌باشد. کمیت فیزیکی دیگری که در بحث وارد می‌شود عبارت است از بار کل خازن $Q = \psi(t)$ (کولن) در زمان t . بستگی بار Q و شدت جریان I با رابطه $I = dQ/dt$ مشخص می‌شود. شدت جریان در مدار مزبور مطابق قانون دوم کیرشهف^۱ صورت می‌گیرد: در یک مدار بسته، ولتاژ مؤثر با مجموع افتهای ولتاژ در بقیه مدار برابر است.

بنابر قوانین مقدماتی الکتریسیته می‌دانیم که

$$IR = \text{افت ولتاژ بین دوسر مقاومت}$$

$$\frac{1}{C}Q = \text{افت ولتاژ بین دوسر خازن}$$

$$L \frac{dI}{dt} = \text{افت ولتاژ بین دوسر سیم پیچ}$$

بنابراین

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (۱)$$

واحدها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که

$$۱ \text{ ولت} = ۱ \text{ اهم} \times ۱ \text{ آمپر} = \frac{۱ \text{ کولن}}{۱ \text{ فاراد}} = \frac{۱ \text{ هنری}}{۱ \text{ ثانیه}} \times ۱ \text{ آمپر}$$

چون $I = dQ/dt$ ، می‌توان با جایگذاری I در معادله (۱)، برای Q معادله‌ی ناهمگن خطی مرتبه دوم زیر را به دست آورد:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (۲)$$

که در آن نقطه‌ها نمایشگر مشتق‌گیری نسبت به t می‌باشند. شرایط اولیه که باید مثلاً در زمان $t = 0$ مشخص گردند، عبارتند از

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I(0) = I_0. \quad (۳)$$

بدین‌سان باید بار اولیه خازن و شدت جریان اولیه در مدار را بدانیم.

همچنین می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۱) نسبت به t ، و جایگزینی dQ/dt ، معادله دیفرانسیل مرتبه دومی برای جریان I به دست آورد. بدین‌سان

۱. گوستاو کیرشهف (Gustav Kirchhoff)، (۱۸۲۴-۱۸۸۷) فیزیکدان آلمانی است که به سبب پژوهشهایش در الکتریسیته (قوانینی که به نام اوست) و تحقیقاتش در طیف‌نگاری مشهور است.

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{E}(t) \quad (۴)$$

شرایط اولیه‌ای که باید مشخص کرد عبارتند از

$$I(0) = I_0, \quad \dot{I}(0) = \dot{I}_0 \quad (۵)$$

با توجه به معادله (۱) داریم

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{L} \left[E(0) - RI_0 - \frac{1}{C}Q_0 \right] \quad (۶)$$

بدین‌سان اگر $I(0)$ و $Q(0)$ را مشخص کنیم \dot{I}_0 معین خواهد شد. کمیت‌های جریان و بار اولیه را می‌توان با دستگاه‌های فیزیکی اندازه‌گیری کرد، و بدین‌وسیله شرایط اولیه (۳) متناظر به معادله (۲) یا شرایط اولیه (۵) متناظر به معادله (۴) معین می‌گردد. شباهت بین این مسئله مدار الکتریکی و مسئله ارتعاش مکانیکی که قبلاً بحث شد، شایان توجه است. این نکته در جدول ۲.۳ به وضوح نشان داده شده است. با استفاده از شباهت بین دودستگاه می‌توان مسائل ارتعاشات مکانیکی را با ساختن مدار الکتریکی متناظر و اندازه‌گیری بار Q حل کرد. این مطلب در زمینه کامپیوترهای آنالوگ دارای نقش اساسی است.^۱

جدول ۲.۳

مدار الکتریکی	دستگاه مکانیکی
$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t)$	$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$
Q بار	u تغییر مکان
$I = \dot{Q}$ جریان	\dot{u} سرعت
L القاء	m جرم
R مقاومت	c استهلاك
$1/C$ الاستانس	k ثابت فنر
$E(t)$ ولتاژ مؤثر	$F(t)$ نیروی مؤثر

۱. به عنوان مقدمه بسیار ساده‌ای بر نظریه کامپیوترهای آنالوگ کتاب ترویت و راجرز (T.D. Truitt and A.E. Rogers) را ببینید.

واضح است که مسئله کلی مقدار اولیه

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=g(t); \quad y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0. \quad (7)$$

برای يك معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، حداقل با دو مسئله فیزیکی متناظر قرار می گیرد: حرکت يك جرم در ارتباط با يك فنر مرتعش، و جریان الکتریسته در يك مدار ساده به صورت سری. در واقع، مسائل فیزیکی دیگر، از قبیل نوسان پیچشی يك میله در ارتباط با يك چرخ لنگر نیز به مسئله مقدار اولیه (۷) می انجامند. این وضعیت مبین یکی از روابط اساسی بین ریاضیات و فیزیک می باشد: بسیاری از مسائل فیزیکی، همین که به صورت ریاضی فرمول بندی شوند، یکسان می شوند. بدین سان جواب مسائل فیزیکی متعددی را می توان از حل تنها يك مسئله ریاضی با تعبیر مناسب علامتها به دست آورد.

اکنون معادله (۲) را که در آن ولتاژ مؤثر به صورت يك تابع متناوب $E_0 \cos \omega t$ باشد، در نظر می گیریم. درست همانند دستگاه جرم - فنر که در بندهای ۱۰۷۰۳ و ۲۰۷۰۳ بررسی شد، می توان به بسط مفاهیم فرکانس طبیعی، استهلاك بحرانی، تشدید، ضربان، جواب گذرا، و جواب حالت دائمی در مورد مدار سری پرداخت. این موضوع در مثال و مسائل زیر آمده است.

مثال. رفتار جواب معادله (۲) را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ و $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ، با فرض $R \neq 0$ بررسی کنید.

نخست، چون C, R, L مثبت اند، همه جوابهای معادله همگن متناظر به معادله (۲) با $t \rightarrow \infty$ به صفر می گرایند (بند ۱۰۷۰۳ را ببینید). برای تعیین يك جواب خصوصی معادله

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t \quad (8)$$

از روش ضرایب نامعین استفاده می کنیم. با جایگزینی

$$Q_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (9)$$

دیده می شود که A و B باید در معادلات زیر صدق کنند

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E_0$$

$$-\omega RA + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0$$

با تعیین مقادیر A و B و قرار دادن آنها در معادله (۹) نتیجه می شود

$$Q_p(t) = \frac{E_0(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega R E_0 \sin \omega t}{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad (10)$$

معادله (۱۰) را می توان به صورت زیر نیز نوشت

واضح است که مسئله کلی مقدار اولیه

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=g(t); \quad y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0. \quad (7)$$

برای يك معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، حداقل با دو مسئله فیزیکی متناظر قرار می گیرد: حرکت يك جرم در ارتباط با يك فنر مرتعش، و جریان الکتریسیته در يك مدار ساده به صورت سری. در واقع، مسائل فیزیکی دیگر، از قبیل نوسان پیچشی يك میله در ارتباط با يك چرخ لنگر نیز به مسئله مقدار اولیه (۷) می انجامند. این وضعیت مبین یکی از روابط اساسی بین ریاضیات و فیزیک می باشد: بسیاری از مسائل فیزیکی، همین که به صورت ریاضی فرمول بندی شوند، یکسان می شوند. بدین سان جواب مسائل فیزیکی متعددی را می توان از حل تنها يك مسئله ریاضی با تعبیر مناسب علامتها به دست آورد.

اکنون معادله (۲) را که در آن ولتاژ مؤثر به صورت يك تابع متناوب $E_0 \cos \omega t$ باشد، در نظر می گیریم. درست همانند دستگاه جرم - فنر که در بندهای ۱۰۷۰۳ و ۲۰۷۰۳ بررسی شد، می توان به بسط مفاهیم فرکانس طبیعی، استهلاك بحرانی، تشدید، ضربان، جواب گذرا، و جواب حالت دائمی در مورد مدار سری پرداخت. این موضوع در مثال و مسائل زیر آمده است.

مثال. رفتار جواب معادله (۲) را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ و $E(t) = E_0 \cos \omega t$ با فرض $R \neq 0$ بررسی کنید.

نخست، چون C, R, L مثبت اند، همه جوابهای معادله همگن متناظر به معادله (۲) با $t \rightarrow \infty$ به صفر می گرایند (بند ۱۰۷۰۳ را ببینید). برای تعیین يك جواب خصوصی معادله

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t \quad (8)$$

از روش ضرایب نامعین استفاده می کنیم. با جایگزینی

$$Q_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (9)$$

دیده می شود که A و B باید در معادلات زیر صدق کنند

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E_0$$

$$-\omega RA + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0$$

با تعیین مقادیر A و B و قرار دادن آنها در معادله (۹) نتیجه می شود

$$Q_p(t) = \frac{E_0(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega RE_0 \sin \omega t}{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad (10)$$

معادله (۱۰) را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$Q_p(t) = \frac{E_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}} \quad (11)$$

که در آن δ از روابط $\cos \delta = \omega R / \Delta$ ، $\sin \delta = (1/C - L\omega^2) / \Delta$ و $\Delta = \sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}$

به دست می‌آید. چون $Q = Q_c(t) + Q_p(t)$ و وقتی که $t \rightarrow \infty$ داریم $Q_c(t) \rightarrow 0$ ، در نتیجه وقتی که $t \rightarrow \infty$ خواهیم داشت $Q \rightarrow Q_p(t)$. به همین علت اغلب $Q_p(t)$ را جواب حالت دایمی معادله (۸) می‌نامند.
هنگامی که بخواهیم جریان حالت دایمی مدار را معین کنیم، کافی است از $Q_p(t)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$I_p(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} \quad (12)$$

توجه شود که جریان حالت دایمی دارای همان فرکانس ولتاژ مؤثر است. جمله $\omega L - 1/(\omega C)$ را که در معادله (۱۲) آمده است «تکانس^۱ مدار» و عبارت $\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$ را «امپدانس^۲ مدار» می‌نامند.

مسائل

۱. اگر در یک مدار سری ساده مقاومت نباشد، نشان دهید که در صورت عدم ولتاژ مؤثر، بار Q روی خازن نسبت به زمان متناوب است و فرکانس آن برابر است با $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. این مقدار را فرکانس طبیعی مدار می‌نامند.

۲. نشان دهید که اگر در مدار مقاومت وجود نداشته و ولتاژ مؤثر به صورت $E_0 \cos \omega t$ باشد، آنگاه بار روی خازن هنگامی که $\omega = \sqrt{1/LC}$ باشد وقتی که $t \rightarrow \infty$ نامحدود خواهد شد. این پدیده تشدید است. نشان دهید که ω هر چه باشد بار همواره محدود باقی می‌ماند، به شرط آنکه در مدار مقاومتی ولو هر قدر کوچک وجود داشته باشد.

۳. نشان دهید که جواب $LI\ddot{t} + RI\dot{t} + (1/C)I = 0$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} I &= Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}, & R^2 - 4L/C > 0 & \text{به ازای} \\ &= (A + Bt)e^{\lambda t}, & R^2 - 4L/C = 0 & \text{به ازای} \\ &= e^{\lambda t}(A \cos \mu t + B \sin \mu t), & R^2 - 4L/C < 0 & \text{به ازای} \end{aligned}$$

مدار متناظر به این سه حالت را به ترتیب استهلاکی شدید، بحرانی، و ضعیف می‌نامند.

۴. فرض کنیم مداری به صورت سری شامل يك خود القا، يك مقاومت و يك خازن، باز باشد، و بار اولیه خازن برابر $Q_0 = 10^{-6}$ باشد. تغییرات بار و جریان را پس از بسته شدن مدار در هر يك از حالت های زیر بیابید

$$L = 0.2, \quad C = 10^{-5}, \quad R = 3 \times 10^2 \quad (\text{الف})$$

$$L = 1, \quad C = 4 \times 10^{-6}, \quad R = 10^2 \quad (\text{ب})$$

$$L = 2, \quad C = 10^{-5}, \quad R = 4 \times 10^2 \quad (\text{ج})$$

۵. اگر $L = 0.2$ و $C = 0.8 \times 10^{-6}$ فاراد باشد، مقاومت R را طوری تعیین کنید که مدار استهلاکی بحرانی باشد.

۶. مداری به صورت سری شامل يك خازن $10^{-6} \times 25$ فاراد، و يك مقاومت $10^2 \times 5$ اهم، و يك خود القا ی هنری است. بار اولیه خازن صفر است. اگر يك باطری ۱۲ ولتی را در مدار قرار داده و در $t = 0$ مدار را ببندیم، بار خازن را در 0.01 و 0.1 ثانیه، و بار حالت دایمی را بیابید.

۷. مطلوب است تعیین جریان حالت دایمی مداری به صورت سری در صورتی که ولتاژ مؤثر، $E = 110 \cos 120\pi t$ ولت، و $L = 10$ هنری، $R = 3 \times 10^2$ اهم، و $C = 0.25 \times 10^{-5}$ فاراد باشد.

۸. در مداری به صورت سری با مقادیر داده شده R ، L ، C و ولتاژ مؤثر $E_0 \cos \omega t$ ، به ازای چه مقدار ω جریان حالت دایمی ماکزیمم خواهد بود؟

۹. اغلب در مسائل مهندسی برق مناسبتر است که $E_0 \cos \omega t$ را به عنوان بخش حقیقی $E_0 e^{j\omega t}$ در نظر بگیرند ($j = \sqrt{-1}$ نماد متداولی در مهندسی برق است). در این صورت به جای معادله (۸) مذکور در متن باید معادله

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 e^{j\omega t} \quad (\text{يك})$$

را در نظر گرفت، با این قرارداد که پس از پایان محاسبات بخش حقیقی جواب را اختیار کنیم. $R \neq 0$.

۱. استفاده از نماد مختلط برای مسائل مدار الکتریکی به وسیله شارل پ. اشتاین متز (Charles P. Steinmetz)، (۱۸۶۵-۱۹۲۳) ریاضیدان و مخترع، پایه گذاری شد. استفاده از این نماد سمبولیک در بررسی پدیده های جریان متناوب موجب پیشرفت سریع در گسترش تجاری وسایل الکتریکی با جریان متناوب گردید. وی همچنین کشف قانون هیستریزس می باشد و دارای تحقیقات مهمی در بررسی پدیده آذرخش است. در جوانی يك سوسیالیست پر حرارت بود و در ۱۸۸۸ در حالی که مورد پیگرد پلیس بود بدون دریافت درجه دکترای خود آلمان را ترك کرد. در ۱۸۸۹ به ایالات متحده وارد شد و به استخدام شرکتی درآمد، که امروز جنرال الکتریک نام دارد.

(الف) نشان دهید که جواب حالت دایمی معادله (يك) عبارت است از

$$Q = \frac{E_0}{j\omega R - \omega^2 L + 1/C} e^{j\omega t}$$

داهنمایی: قرار دهید $Q = Ae^{j\omega t}$.

(ب) بدین سان نشان دهید که جریان حالت دایمی عبارت است از

$$I = \frac{E_0}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} e^{j\omega t}$$

(ج) با استفاده از رابطه $\alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{j\gamma}$ که در آن $\gamma = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$ ، نشان دهید که

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{j(\omega t - \delta)}$$

که در آن $\delta = \tan^{-1}[(\omega L - 1/\omega C)/R]$. بالاخره، نشان دهید که بخش حقیقی این عبارت با آنچه در مثال همین بند به دست آمده متحد است.

(د) اگر ولتاژ مؤثر، $E(t) = E_0 \sin \omega t$ باشد، جریان حالت دایمی چه خواهد بود؟

(ه) پارامتر مختلط $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ را امپدانس مختلط می نامند.

معکوس Z را ادمیتانس^۲ و بخش های حقیقی و موهومی $1/Z$ را به ترتیب کندوکنانس^۳ و سوسپتانس^۴ می نامند. مطلوب است تعیین ادمیتانس، کندوکنانس، و سوسپتانس.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

در ارتباط با کامپیوترهای آنالوگ دو کتاب زیر معرفی می شوند:

Truitt, T. D. and Rogers, A. E., *Basics of Analog Computers*, Rider, New York, 1960.

Jenners, Roger R., *Analog Computation and Simulation: Laboratory Approach*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.

درباره ارتعاشات مکانیکی و مدارهای الکتریکی کتابهای بسیاری وجود دارد. کتاب زیر

- | | | |
|----------------------|---------------|----------------|
| 1. complex impedance | 2. admittance | 3. conductance |
| 4. susceptance | | |

درباره ارتعاشات مکانیکی کلاسیک است:

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1947.

دو کتاب زیر جدیدتر و در سطح متوسط هستند.

Thomson, W.T., *Theory of Vibrations with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

Vierck, R. K., *Vibration Analysis*, International, Scranton, Pa., 1967.

کتابی مقدماتی در موضوع مدارهای الکتریکی در زیر معرفی می شود:

Smith, J. R. J., *Circuits, Devices, and Systems*, Second Edition, Wiley, New York, 1976.

سریهای جواب معادلات خطی مرتبه دوم

۱۰۴ مقدمه. مروری بر سریهای توانی

در فصل ۳ روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را شرح دادیم. اکنون به بررسی روشهای حل معادلات خطی مرتبه دوم که ضرایب آنها توانی از متغیر مستقل است می پردازیم. برای این منظور کافی است به بررسی معادله همگن

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

پردازیم، زیرا در اینجا نیز برای معادله ناهمگن متناظر می توان از همان روش استفاده کرد. طبقه وسیعی از مسائل فیزیک ریاضی به معادلاتی به صورت (۱) می انجامد که دارای ضرایب چند جمله ای می باشند، بد عنوان مثال، معادله بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

که در آن ν مقدار ثابتی است، و معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

که در آن α مقدار ثابتی است. به همین علت، و نیز برای ساده کردن محاسبات جبری نخست به بررسی حالتی می پردازیم که در آن توابع P ، Q و R چند جمله ای می باشند. اما چنانکه خواهیم دید، روش حل مزبور را می توان در مورد طبقه ای از توابع اعم از چند جمله ایها به کار گرفت.

در اینجا P ، Q و R را چند جمله ای فرض می کنیم، و بعد به بررسی حالت های عمومی تر می پردازیم. همچنین فرض می کنیم که می خواهیم معادله (۱) را در همسایگی يك نقطه x_0

وجود داشته باشد. روشن است که سری به ازای $x = x_0$ همگراست. امکان دارد سری به ازای همه مقادیر x همگرا باشد، یا آنکه به ازای برخی از مقادیر x همگرا و به ازای مقادیر دیگر واگرا باشد.

۲. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را هنگامی در يك نقطه x همگرای مطلق می گویند که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$$

همگرا باشد. می توان نشان داد که اگر يك سری همگرای مطلق باشد، در این صورت سری مزبور همگرا نیز هست، اما؛ صحت عکس این مطلب ضروری نیست.

۳. یکی از مفیدترین آزمونها برای همگرایی مطلق يك سری توانی، آزمون نسبت است. اگر به ازای مقدار مشخصی از x داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

در این صورت سری توانی مزبور به ازای مقداری از x به طوری که $l < 1$ همگرای مطلق است، و اگر $l > 1$ ، واگراست. به ازای $l = 1$ این آزمون نتیجه ای به دست نمی دهد.

مثال ۱. به ازای چه مقادیری از x سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

همگراست؟

برای این منظور از آزمون نسبت استفاده می کنیم. داریم

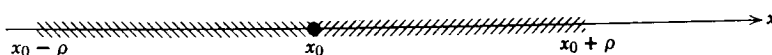
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|$$

بنا بر گزاره ۳ به ازای $1 < |x-2| < 3$ یعنی $1 < x < 3$ سری همگرای مطلق است، و به ازای $|x-2| > 1$ سری واگراست. مقادیر x متناظر به $|x-2| = 1$ عبارتند از $x=1$ و $x=3$. سری مزبور به ازای هريك از این مقادیر x واگراست، زیرا جمله n ام آن وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر نمی گراید.

۴. اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ در $x=x_1$ همگرا باشد، به ازای

$|x-x_0| < |x_1-x_0|$ همگرای مطلق است، و اگر در $x=x_1$ واگرا باشد، به ازای $|x-x_0| > |x_1-x_0|$ نیز واگراست.

۵. می توان عدد $\rho \geq 0$ را طوری تعیین کرد که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای $|x-x_0| < \rho$ همگرایی مطلق و به ازای $|x-x_0| > \rho$ واگرا باشد، ρ را شعاع همگرایی می نامند. هر گاه يك سری در هیچ نقطه، به جز x_0 ، همگرا نباشد، ρ را صفر می گیریم؛ هنگامی که سری به ازای همه مقادیر x همگرا باشد، می گوئیم ρ بینهایت است. فاصله همگرایی را در شکل ۱۰۴ با سایه مشخص کرده ایم.



شکل ۱۰۴

مثال ۲. مطلوب است تعیین شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

آزمون نسبت را به کار می بریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}.$$

پس سری به ازای $|x+1| < 2$ ، یعنی $-3 < x < 1$ همگرایی مطلق است، و به ازای $|x+1| > 2$ واگراست. $\rho = 2$ شعاع همگرایی این سری توانی است. بالاخره، به بررسی نقاط انتهایی فاصله همگرایی می پردازیم. در $x = -3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

که يك سری همگراست، اما همگرایی مطلق نیست. سری مزبور را در $x = -3$ همگرایی مشروط می گویند. در $x = 1$ سری به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

درمی آید که واگراست. خلاصه آنکه، سری مزبور به ازای $-3 \leq x < 1$ همگرا، و به ازای $-3 < x < 1$ همگرایی مطلق است، و شعاع همگرایی آن ۲ است.

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ به ازای $|x-x_0| < \rho$ ، $\rho > 0$ ،

به ترتیب به $f(x)$ و $g(x)$ همگرا باشند، آنگاه به ازای $|x-x_0| < \rho$ نتایج زیر برقرار است.

۶. سریها را می توان جمله به جمله جمع و یا تفریق کرد، و داریم

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

۷. سریها را می‌توان به‌طور صوری ضرب کرد، و

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

که در آن $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ ، به‌علاوه، اگر $g(x_0) \neq 0$ ، سریها را می‌توان به‌طور صوری تقسیم کرد، و

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$$

هرچند محاسبه d_n تا اندازه‌ای دشوار است. همچنین، امکان دارد که شعاع همگرایی سری توانی خارج قسمت کوچکتر از ρ باشد.

۸. تابع f به‌ازای $|x-x_0| < \rho$ پیوسته و دارای مشتقهای همه‌مراتب است. علاوه‌براین، f' ، f'' ، ... را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به‌جمله سری محاسبه کرد؛ یعنی،

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

و غیره، و هر یک از سریها به‌ازای $|x-x_0| < \rho$ همگرایی مطلق است.

۹. مقدار a_n از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

این سری را سری تیلر^۱ تابع f حول $x=x_0$ می‌نامند.

۱۰. اگر تساوی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ به‌ازای هر x برقرار

باشد، آنگاه $a_n = b_n$ ، $n=0, 1, 2, \dots$. به‌ویژه، اگر به‌ازای هر x داشته باشیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$$

آنگاه $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0$.

هرگاه تابع f حول $x=x_0$ دارای بسط به‌سری تیلر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

با شعاع همگرایی $\rho > 0$ باشد، آنرا در $x = x_0$ تحلیلی می نامند. بنا بر گزاره های بالا، اگر f و g در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه $f \pm g$ ، $f \cdot g$ و f/g (با شرط $g(x_0) \neq 0$) در $x = x_0$ تحلیلی اند. نتیجه ای که در بندهای آتی اغلب مورد استفاده قرار می گیرد، آن است که هر چند جمله ای در هر نقطه تحلیلی است؛ بدین سان مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت (به جز در صفرهای مخرج) چند جمله ایها در هر نقطه تحلیلی اند.

تعویض اندیس جمع بندی. اندیس جمع بندی در يك سری پارامتری گنگ است، درست به همان گونه که متغیر انتگرال گیری در يك انتگرال معین يك متغیر گنگ است. مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}$$

درست به همان طریق که در انتگرال معین به تعویض متغیر انتگرال گیری می پردازیم، در محاسبه جوابهای معادلات دیفرانسیل به صورت سری لازم می آید که اندیسهای جمع بندی را تعویض کنیم. با چند مثال به توضیح چگونگی تعویض اندیس جمع بندی می پردازیم.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= a_{0+2} x^{0+2} + a_{1+2} x^{1+2} + \dots + a_{m+2} x^{m+2} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \end{aligned} \quad .1$$

اندیس شماره گذاری را به اندازه ۲ واحد تغییر داده ایم ($n \rightarrow n+2$) و از ۲ واحد کمتر شروع کرده ایم.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n (x-a)^{n-2} \quad .2$$

ممکن است بخواهیم این سری را به صورت يك سری با جمله عمومی $(x-a)^n$ به جای $(x-a)^{n-2}$ بنویسیم. برای این کار مانند مثال پیش اندیس را به اندازه ۲ واحد انتقال می دهیم ($n \rightarrow n+2$). خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} (x-a)^n$$

به آسانی می توان تحقیق کرد که جمله های این دو سری دقیقاً برابرند.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2} x^{n-1} \quad .3$$

نخست x^2 را به داخل علامت جمع بندی می بریم، به دست می آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1}$$

برای آنکه این سری را به صورت یک سری جدید با جمله عمومی x^{n+r} بنویسیم، اندیس را ۱ واحد تنزل می دهیم ($n \rightarrow n-1$) و شماره گذاری را از یک جمله بالاتر شروع می کنیم. بدین سان

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r}$$

در اینجا نیز به آسانی می توان تحقیق کرد که جمله های این دوسری دقیقاً با هم برابرند.
۴. به عنوان آخرین مثال به بررسی نتیجه حاصل از معادله

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

می پردازیم. می خواهیم با استفاده از گزاره ۱۵، a_n را بیابیم. برای آنکه ضرایب توانهای مشابه x را برابر قرار دهیم، بهتر است در هر دو سری جمله عمومی مشتمل بر x^n باشد. برای این کار اندیس جمع بندی در طرف اول را با استفاده از دستور $n \rightarrow n+1$ تعویض می کنیم، و شماره گذاری را یک واحد تنزل می دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بنابر گزاره ۱۵ نتیجه می شود که

$$(n+1) a_{n+1} = a_n, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

و یا

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$$

بنابر این

$$a_1 = \frac{1}{1} a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} a_0 = \frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2!} a_0 = \frac{a_0}{3!}, \dots$$

و به طور کلی

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0, \quad n=1, 2, \dots$$

بدین سان رابطه مزبور همه ضرایب را بر حسب a_0 به دست می دهد. علاوه بر این،

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{x^n}{n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که دقیقاً همان $a_0 e^x$ است. در نوشتن سری بالا از قرارداد معمول $0! = 1$ استفاده کرده ایم.

مسائل

۱. شعاع همگرایی هر يك از سریهای توانی زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad (\text{د}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n} \quad (\text{و}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2} \quad (\text{ه})$$

۲. سری تیلر هر يك از توابع زیر را حول نقطه x_0 بیابید. شعاع همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

$$e^x, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ب}) \quad \sin x, \quad x_0 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2, \quad x_0 = -1 \quad (\text{د}) \quad x, \quad x_0 = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0 \quad (\text{و}) \quad \ln x, \quad x_0 = 1 \quad (\text{ه})$$

$$\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2 \quad (\text{ح}) \quad \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ز})$$

۳. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله اول هر يك از این سریها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید.

۴. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله اول هر يك از این سریها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید. نشان دهید که اگر $y'' = y$ ، آنگاه

ضرایب a_0 و a_1 دلخواه اند، و a_2 و a_3 را بر حسب a_0 و a_1 محاسبه کنید. نشان دهید که $n = 0, 1, 2, 3, \dots, a_{n+2} = a_n / (n+2)(n+1)$

۵. صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}, \quad x > 0 \quad (\text{د})$$

که در آن p يك ثابت، و k و m اعداد صحیح مفروضی می باشند.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad (\text{ه})$$

$$+ \beta x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$= [r(r-1) + \alpha r] a_0 x^r + [(r+1)r + \alpha(r+1)] a_1 x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) a_n + \alpha(n+r) a_n + \beta a_{n-2}] x^{n+r}, \quad x > 0$$

که در آن r مقدار ثابتی است.

۶. a_n را طوری تعیین کنید که معادله زیر برقرار باشد

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

تابعی را که با سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمایش داده شده است، مشخص کنید.

۲.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه عادی، بخش اول

در این بند باز ذکر چند مثال روش حل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (۱)$$

را هنگامی که توابع P ، Q و R چند جمله ای باشند، توضیح می دهیم. می خواهیم معادله (۱) را در همسایگی يك نقطه عادی x_0 ، یعنی نقطه ای که در آن $P(x_0) \neq 0$ است حل کنیم. چون $P(x_0) \neq 0$ و P پیوسته است، در نتیجه يك فاصله حول نقطه x_0 وجود دارد

که در آن P هیچگاه صفر نیست.^۱ در این فاصله Q/P و R/P توابعی پیوسته‌اند. بنابراین طبق قضیه وجود و یکنایی ۲.۳ معادله (۱) دارای جوابی یکتاست که در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y'_0$ با انتخاب دلخواه y_0 و y'_0 صدق می‌کند. می‌خواهیم برای معادله (۱) جوابهایی به صورت

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (2)$$

جستجو کنیم، برای این کار باید دو سؤال را بررسی کرد. نخست آنکه آیا می‌توان a_n را به‌طور صوری به‌گونه‌ای تعیین کرد که y حاصل از رابطه (۲) در معادله (۱) صدق کند. دوم آنکه آیا سری حاصل واقعاً همگراست، و اگر چنین است، این همگرایی به‌ازای چه مقادیری از $x - x_0$ تحقق می‌یابد. اگر بتوان نشان داد که سری مزبور به‌ازای $\rho > 0$ ، $|x - x_0| < \rho$ همگراست در این صورت همه عملیات صوری از قبیل مشتق‌گیری جمله به‌جمله را می‌توان توجیه کرد، و بدین‌سان برای معادله (۱) جوابی ساخته شده است که به‌ازای $|x - x_0| < \rho$ معتبر خواهد بود.

نکاتی که بیشتر جنبه نظری دارند، مانند شعاع همگرایی سری (۲) را به‌بند ۱.۲.۴ موکول می‌کنیم. در اینجا با فرض وجود جواب طرز تعیین a_n را نشان می‌دهیم. عملیترین روش برای انجام این کار آن است که سری (۲) و مشتقهای آن را به‌جای y ، y' و y'' در معادله (۱) قرار دهیم؛ آنگاه a_n ها را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل مزبور به‌طور صوری برقرار باشد. مثالهای زیر این روش را توضیح می‌دهند. معادلات دیفرانسیلی که عنوان می‌شوند خود از اهمیت بسیاری برخوردارند.

مثال ۱. بحث را با مسئله تعیین سری جواب معادله

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3)$$

آغاز می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانیم، دو جواب مستقل خطی این معادله عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$. برای مهارست در تعیین سری جواب در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جوابهای $\sin x$ و $\cos x$ را با استفاده از سربهای توانی به دست آورد. در معادله (۳) داریم $P(x) = 1$ ، $Q(x) = 0$ و $R(x) = 1$ ؛ بنابراین $x = 0$ يك نقطه عادی است. می‌خواهیم جوابی به‌صورت زیر بیابیم

۱. این نکته از لحاظ هندسی واضح است، و می‌توان آن را به‌طور دقیق نیز اثبات کرد.
۲. مقصود از اصطلاح «تعیین صوری» آن است که همه محاسبات جبری لازم برای تعیین جواب را بدون آنکه در هر گام مجاز بودن آن را توجیه کنیم انجام دهیم.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

چون جمله به جمله مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + (n+2)a_{n+2} x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (5)$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad (6)$$

با گذاشتن سریبای (۴) و (۶) به جای y و y'' در معادله (۳) به دست می آید

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

در مجموع اول، اندیس جمع بندی را تعویض می کنیم، و به جای n قرار می دهیم $n+2$ و بدین سان مجموع با اندیس ۰ آغاز می شود نه با اندیس ۲. داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

و یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

برای اینکه این معادله به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، لازم است که ضریب هریک از توانهای x صفر باشد؛ بنابراین، نتیجه می گیریم که

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

معادله (۷) را رابطه بازگشت می نامند. طبق این رابطه ضرایب زوج (a_0, a_2, a_4, \dots) و ضرایب فرد (a_1, a_3, a_5, \dots) جداگانه تعیین می شوند. داریم

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \dots$$

و به طور کلی، اگر $n = 2k$ ، آنگاه

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

و به همین ترتیب

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!},$$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \dots$$

و به طور کلی، اگر $n = 2k + 1$ ، آنگاه

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

بدین سان سری (۴) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (10) \end{aligned}$$

سری اول دقیقاً سری تیلر $\cos x$ ؛ و سری دوم سری تیلر $\sin x$ است. بدین سان، همان طور که از آغاز انتظار می رفت، جواب $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ به دست می آید. توجه شود که هیچ قیدی بر a_0 و a_1 ؛ تحمیل نمی شود، بنابراین دلخواه اند. این نکته برای سری جواب در يك نقطه عادی عمومیت دارد؛ و شگفتی آور نیست. از معادله (۲) دیده می شود که مقادیر y و y' در x_0 به ترتیب برابرند با a_1 و a_0 . چون شرایط اولیه $y(x_0)$ و $y'(x_0)$ را می توان به طور دلخواه انتخاب کرد، در نتیجه باید a_0 و a_1 دلخواه باقی بمانند تا هنگامی که شرایط اولیه خاصی عنوان شود.

این مثال را با توضیحی به پایان می بریم. حل را با آگاهی به اینکه جوابهای معادله (۳) باید $\sin x$ و $\cos x$ باشند آغاز کردیم. اما فرض کنید که این نکته را نمی دانستیم و

معادله (۳) را باروش سری حل کرده و جواب (۱۰) را به دست آورده ایم. با توجه به این مطلب که معادله (۳) در عمل زیاد مطرح می شود، ممکن است تصمیم بگیریم که برای این جوابها نام خاصی قایل شویم؛ مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ برای } \sin x \text{ و } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ برای } \cos x$$

آنگاه درباره خواص این توابع به بررسی بپردازیم. نخست، روشن است که $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ و $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$ ، فرمول دیگری که به آسانی به دست می آید عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x \end{aligned}$$

به همین ترتیب، $d(\cos x)/dx = -\sin x$. علاوه بر این، با محاسبه روی سریها، می توان همه خواص جبری و تحلیلی معمولی توابع سینوس و کسینوس از قبیل $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را به دست آورد.

نکته جالب آنکه می توان این توابع را که در فیزیک ریاضی اهمیت بسیاری دارند به عنوان جوابهای يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ساده که مکرراً به آن برخورد می شود، تعریف کرد و خواص آنها را بدون استفاده از مبحثی که در آن محتملاً این توابع را برای نخستین بار آموختیم، یعنی مثلثات مسطحه به دست آورد. دقیقاً، تابع $\sin x$ را می توان به عنوان جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + y = 0$ ، $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ و به همین نحو، تابع $\cos x$ را به عنوان جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + y = 0$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ تعریف کرد. برای تعریف همین توابع می توان از مسائل مقدار اولیه دیگر نیز استفاده کرد. مثلاً، مسئله مقدار اولیه غیرخطی $y'' = 1 - y^2$ ، $y(0) = 0$ ، $y'(0) > 0$ معرف تابع $\sin x$ خواهد بود (مسئله ۵ را ببینید).

مثال ۲. مطلوب است تعیین سری جواب معادله آیری^۲

۱. چنین تحلیلی در بند ۲۴ کتاب

K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Hafner, New York, 1951

آمده است.

۲. سر جورج آیری (Sir George Airy)، (۱۸۰۱-۱۸۹۲) منجم و ریاضیدان انگلیسی، در ۲۵ سالگی استاد ریاضیات کلمبریج شد، و از ۱۸۳۵ تا ۱۸۸۱ رئیس رصدخانه گرینویچ بود. یکی از نکات جالب در معادله آیری آن است که به ازای x های منفی، جوابها همانند توابع مثلثاتی نوسانی اند، و به ازای x های مثبت یکی از جوابها به طور نمایی صعود می کند، و دیگری به طور نمایی نزول می نماید. آیا شما می توانید پیش بینی این رفتار را توجیه کنید؟

$$y'' = xy, \quad -\infty < x < \infty \quad (11)$$

در این معادله داریم $P(x) = 1$ ، $Q(x) = 0$ ، و $R(x) = -x$ ؛ بنابراین، $x = 0$ يك نقطه عادی است. فرض کنیم که

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (12)$$

سری y'' با رابطه (۶) مشخص می‌شود؛ اما، با توضیحی که در مثال قبل آمد، می‌توان آن را به صورت

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad (13)$$

نوشت. با گذاشتن سریهای (۱۲) و (۱۳) به جای y و y'' در معادله (۱۱)، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad (14)$$

اکنون، اندیس جمع‌بندی در سری طرف دوم معادله بالا را با قراردادن $n-1$ به جای n تغییر داده، و جمع‌بندی را به جای صفر از ۱ آغاز می‌کنیم. بدین‌سان، خواهیم داشت

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$

در اینجا نیز برای آنکه معادله به ازای همه x ها برقرار باشد، لازم است که ضرایب توانهای متساوی برابر باشند؛ بنابراین $a_2 = 0$ ، و رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

چون a_{n+2} بر حسب a_{n-1} داده می‌شود، بنابراین a ها با گامهای سه واحدی تعیین می‌شوند. بدین‌سان a_0 مقدار a_2 ، و آن به نوبه خود a_4 ، ... را تعیین می‌نماید، همچنین a_1 مقدار a_3 ، و آن به نوبه خود مقدار a_5 ، ... را تعیین می‌کند، و به همین ترتیب از a_2 مقدار a_6 ، و از آن a_8 ، ... به دست می‌آید. چون $a_2 = 0$ ، مستقیماً نتیجه می‌شود که $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$.

برای دنباله $a_0, a_3, a_6, a_9, \dots$ در رابطه بازگشت به جای n متوالیاً مقادیر ۱، ۴، ۷، ۱۰، ... را قرار می‌دهیم:

$$a_2 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_5 = \frac{a_2}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{(6 \cdot 5)(3 \cdot 2)}, \quad a_8 = \frac{a_5}{(9 \cdot 8)}$$

$$= \frac{a_0}{(9 \cdot 8)(6 \cdot 5)(3 \cdot 2)}, \dots$$

برای این دنباله ضرایب مناسب است فرمولی برای a_{3n} به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ بنویسیم. نتایج بالا فرمول کلی زیر را به دست می دهد

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-2)(3n-4)] \dots [6.5][3.2]} a_0, \quad n=1, 2, \dots$$

این عبارت را می توان به ترتیب زیر نیز از رابطه بازگشت (۱۵) به دست آورد. نخست با قراردادن $n-2$ به جای n به دست می آید $n(n-1)a_n = a_{n-3}$ ؛ سپس، برای ایجاد ضرایب متناظر با a_0 به جای $n, 3n$ را قرار می دهیم، در نتیجه

$$(3n)(3n-1)a_{3n} = a_{3n-3}$$

از تکرار این رابطه فرمول بالا برای a_{3n} به دست می آید. برای دنباله $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{10}$ در رابطه بازگشت به جای n متوالیاً مقادیر $1, 4, 7, 10, \dots$ را قرار می دهیم:

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{(7.6)(4.3)},$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10.9} = \frac{a_1}{(10.9)(7.6)(4.3)}, \dots$$

به همان روش بالا خواهیم داشت

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-2)(3n-4)] \dots [7.6][4.3]} a_1, \\ n=1, 2, 3, \dots$$

و جواب معادله آیری عبارت است از

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^6}{6.5.3.2} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1) \dots 3.2} + \dots \right] \\ + a_1 \left[x + \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^7}{7.6.4.3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-4) \dots 4.3} + \dots \right] \\ = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-2)(3n-4) \dots 3.2} \right] \\ + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-4) \dots 4.3} \right] \quad (16)$$

به علت رشد سریع مخرج جمله‌های سریهای (۱۶)، می‌توان حدس زد که باید شعاع همگرایی آنها بسیار بزرگ باشد. در واقع، چنانکه در بند بعد خواهیم دید هر دوسری به ازای همه مقادیر x همگرا می‌باشند. مسئله ۴ را نیز ببینید.

موقتاً فرض کنیم که سریهای مزبور به ازای همه مقادیر x همگرا باشند، و تساوی را که با کروش اول و دوم در رابطه (۱۶) معین می‌شوند، به ترتیب با y_1 و y_2 نشان می‌دهیم. آنگاه، با انتخاب $a_0 = 1$ ، $a_1 = 0$ و بار دیگر با انتخاب $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ ، دیده می‌شود که y_1 و y_2 جوابهای خصوصی معادله (۱۱) می‌باشند. توجه شود که y_1 در شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ ، $y_1'(0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیه $y_2(0) = 0$ ، $y_2'(0) = 1$ صدق می‌کنند. بدین سان $w(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ و در نتیجه y_1 و y_2 مستقل خطی اند. بنابراین جواب عمومی معادله آیری عبارت است از

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad -\infty < x < \infty$$

مثال ۳. برای معادله آیری جوابی بر حسب توانهای $x-1$ بیابید.
نقطه $x=1$ يك نقطه عادی معادله (۱۱) است، و بدین سان جواب را به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

در نظر می‌گیریم. آنگاه

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n$$

و

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$$

با قراردادن y و y'' در معادله (۱۱) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad (17)$$

اکنون برای استفاده از برابری ضرایب توانهای متشابه $x-1$ ، باید x ، ضریب y در معادله (۱۱) را نیز بر حسب توانهای $x-1$ بنویسیم؛ یعنی $x = 1 + (x-1)$. توجه شود که این عبارت دقیقاً سری تیلر x حول $x=1$ است. آنگاه معادله (۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n &= [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

با تغییر اندیس جمع بندی در سری دوم طرف دوم، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$$

از تساوی ضرایب توانهای مشابه $x-1$ به دست می آید

$$2a_2 = a_0$$

$$(3 \cdot 2)a_3 = a_1 + a_0$$

$$(4 \cdot 3)a_4 = a_2 + a_1$$

$$(5 \cdot 4)a_5 = a_3 + a_2$$

\vdots

رابطه عمومی بازگشت عبارت است از

$$(18) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad n \geq 1$$

نخستین جمله های a_n را بر حسب a_0 و a_1 به دست می آوریم

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}$$

\vdots

بنابراین

$$y = a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots \right] + a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \dots \right] \quad (19)$$

به طور کلی، هنگامی که رابطه بازگشت مانند رابطه (۱۸) دارای سه جمله باشد، تعیین ضرایب سری جواب دشوار خواهد بود. در این مثال فرمول a_n بر حسب a_0 و a_1 را نمی توان به فوریت مشخص کرد. اما، در بند ۱۰.۲.۴ خواهیم دید که حتی بدون معلوم بودن فرمول a_n می توان ثابت کرد که سریبای (۱۹) به ازای همه مقادیر x همگرا می باشند، و علاوه بر این دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 برای معادله آیری (۱۱) به دست می دهند. بدین سان

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

جواب عمومی معادله آیری به ازای $-\infty < x < \infty$ است.

شایان توجه است که اگر بخواهیم برای معادله (۱) جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

و $R(x)$ را بر حسب توانهای $(x - x_0)$ بیان کنیم. روش دیگر آنکه با تعویض متغیر $x - x_0 = t$ ، معادله دیفرانسیل جدیدی برای y به عنوان تابع t به دست آوریم، و آنگاه برای آن جوابی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ پیدا کنیم. با قراردادن $x - x_0$ به جای t محاسبات را به پایان می‌بریم (مسئله ۳ را ببینید).

نکته جالب دیگر آنکه، توابع y_1 و y_2 که با سریهای رابطه (۱۶) مشخص می‌شوند، جوابهای مستقل خطی معادله (۱۱)، به ازای همه مقادیر x ، می‌باشند، و همین مطلب در مورد توابع y_1 و y_2 که با سریهای رابطه (۱۹) معین می‌شوند، نیز صادق است. بنا بر نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه دوم، هر يك از دو تابع نخست را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دو تابع اخیر نوشت، و برعکس، و این نتیجه را مطمئناً نمی‌توان تنها با بررسی سریها به دست آورد.

مثال ۴. معادله هرمیت عبارت است از

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (20)$$

که در آن λ يك ثابت است. این معادله در بسیاری از شعب فیزیک ریاضی دارای اهمیت است؛ مثلاً، در مکانیک کوانتومی در بررسی معادله شرودینگر^۲ در مورد نوسانگر هارمونیک به معادله هرمیت می‌رسیم.

برای آنکه در همسایگی نقطه عادی $x = 0$ ، جوابی برای معادله (۲۰) بیابیم، سریهای (۴)، (۵) و (۱۳) را در معادله (۲۰) به جای y ، y' و y'' قرار می‌دهیم، و از آنجا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_nx^n = 0$$

و یا

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0 \quad (21)$$

۱. شادل هرمیت (Charles Hermite)، (۱۸۲۲-۱۹۰۱) یکی از ریاضیدانان برجسته فرانسوی، که تحقیقاتش در زمینه جبر از اهمیت خاصی برخوردار است.

بنابراین $a_2 = -\lambda a_0 / 2$ ، و رابطه بازگشت عمومی عبارت است از

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \geq 1 \quad (22)$$

توجه شود که رابطه بازگشت (۲۲) درواقع شامل نتیجه $a_2 = -\lambda a_0 / 2$ که متناظر به $n=0$ است می باشد. از رابطه (۲۲) دیده می شود که از a_0 مقدار a_2 ، و از a_2 مقدار a_4 و به همین ترتیب سایر ضرایب زوج به دست می آیند. ضرایب توانهای فرد x نیز برحسب a_1 معین می شوند. سری صوری جواب معادله هریت عبارت است از

$$y = a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 + \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} x^4 - \frac{(\lambda-1)(4-\lambda)\lambda}{6!} x^6 + \dots \right] \\ + a_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right] = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (23)$$

باردیگر نتایج بند ۱۰.۲.۴، همگرایی این سریها را به ازای همه مقادیر x ثابت می کند. اگر λ يك عدد صحیح زوج نامنفی باشد، یکی از سریهای بالا به صورت يك چند جمله ای درمی آید. به ویژه، به ازای $\lambda = 0, 2, 4, 6$ ، يك جواب معادله هریت به ترتیب عبارت خواهد بود از $1 - 2x^2$ ، x ، $1 - 2x^2/3$ و $x - 2x^3/3$. چند جمله ای جواب متناظر به $\lambda = 2n$ ، پس از ضرب در يك ثابت مناسب^۱ به چند جمله ای هریت $H_n(x)$ موسوم است.

مسائل

۱. به روش صوری، برای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر، دو جواب مستقل خطی به صورت سری توانی برحسب $x - x_0$ بیابید. رابطه بازگشت را معین کنید.

$$y'' - y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1 \quad (\text{ج})$$

۱. معمولاً به این عمل نرمال سازی اطلاق می شود. ثابت مزبور را اغلب به گونه ای انتخاب می کنند که جواب دريك نقطه خاص دارای مقدار ویژه ای باشد، یا آن که يك انتگرال جواب در فاصله مفروضی دارای مقدار معینی باشد. به عنوان مثال، چند جمله ای هریت مرتبه n به طور یکتا با این بیان مشخص می گردد که يك چند جمله ای درجه n است، که جواب معادله هریت با $\lambda = 2n$ می باشد و در آن ضریب x^n برابر 2^n است.

$$y'' + K^2 x^2 y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k \text{ ثابت} \quad (د)$$

$$(1-x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (ه)$$

$$(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (و)$$

۲. جواب مسئله ۱ (ب) را با شرایط اولیه $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ و همچنین با شرایط اولیه $y(0) = 2$ ، $y'(0) = 1$ بیابید.

۳. با تعویض متغیر $t = x - 1$ ، دو سری جواب مستقل خطی بر حسب $x - 1$ برای معادله زیر بیابید

$$y'' + (x-1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

نشان دهید که همین نتیجه را می توان با بسط $x^2 - 1$ به سری تیلر حول $x = 1$ ، و جایگزینی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

به دست آورد.

۴. مستقیماً با استفاده از آزمون نسبت، نشان دهید که سریهای جواب معادله آیری در حول $x = 0$ به ازای همه مقادیر x همگرا می باشند. معادله (۱۶) متن را ببینید.

۵. مسئله مقدار اولیه $y'' = 1 - y^2$ ، $y(0) = 0$ ، $y'(0) > 0$ را با شرط اضافی $y'(0) > 0$ در نظر می گیریم. این شرط اضافی برای تعیین جواب به طور یکتا لازم است، زیرا معادله دیفرانسیل فقط شامل مربعات y و y' می باشد؛ بنا بر این اگر $\phi(x)$ يك جواب این معادله دیفرانسیل باشد، $-\phi(x)$ نیز يك جواب خواهد بود. برای این مسئله مقدار اولیه يك سری جواب به صورت

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

بیابید، و نشان دهید که $a_0 = 0$ ، $a_1 = 1$ ، $a_2 = 0$ ، و $a_3 = -1/3!$ توجه شود که نخستین دو جمله غیر صفر این سری، دو جمله اول بسط سری تیلر $\sin x$ حول $x = 0$ است.

۱۰۲۰۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه عادی، بخش دوم

در بند پیش مسئله تعیین جوابهای

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (۱)$$

را که در آن P ، Q و R چند جمله ای می باشند، در همسایگی يك نقطه عادی x_0 بررسی کردیم. با فرض آنکه معادله (۱) دارای جوابی به صورت $y = \phi(x)$ است، و ϕ دارای بسط تیلر

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (۲)$$

می باشد، که به ازای $\rho > 0$ ، $|x - x_0| < \rho$ ، همگراست، دیده شد که می توان a_n را

مستقیماً باقراردادن سری (۲) به جای y در معادله (۱) تعیین کرد.
 اکنون می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان این گزاره را توجیه کرد که اگر x_0 يك نقطه عادی معادله (۱) باشد، آنگاه جوابهایی به صورت (۲) وجود دارد. علاوه بر این به بررسی شعاع همگرایی این گونه‌سریها خواهیم پرداخت. با این بررسی تعریف نقطه عادی تعمیم خواهد یافت.

اکنون فرض کنیم که معادله (۱) دارای جوابی به صورت (۲) است. روشن است که با m بار مشتق‌گیری از معادله (۲) و قراردادن x_0 به جای x خواهیم داشت

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0)$$

بنابراین، برای محاسبه a_n در سری (۲)، باید نشان دهیم که می‌توان $\phi^{(n)}(x_0)$ را به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ از معادله دیفرانسیل (۱) به دست آورد.

فرض کنیم که $y = \phi(x)$ جوابی از معادله (۱) است که در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y'_0$ صدق می‌کند. آنگاه $a_0 = y_0$ و $a_1 = y'_0$. اگر فقط بخواهیم جوابی برای معادله (۱) بیابیم بدون آنکه شرایط اولیه‌ای مشخص شده باشد، آنگاه a_0 و a_1 مقادیری دلخواه خواهند بود. برای تعیین $\phi^{(n)}(x_0)$ و متناظراً a_n به ازای $n = 2, 3, \dots$ به معادله (۱) برمی‌گردیم. چون ϕ جوابی از معادله (۱) است، خواهیم داشت

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0$$

در فاصله‌ای حول x_0 که P در آن صفر نمی‌شود، می‌توان این معادله را به صورت زیر نوشت

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \quad (3)$$

که در آن $p(x) = Q(x)/P(x)$ و $q(x) = R(x)/P(x)$. با قراردادن x_0 به جای x در معادله (۳) به دست می‌آید

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0)$$

بنابراین a_2 با

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \quad (4)$$

داده می‌شود. برای تعیین a_3 از معادله (۳) مشتق می‌گیریم، و به جای x مقدار x_0 را قرار می‌دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \quad (5)$$

با جایگزینی a_2 از معادله (۴)، a_3 بر حسب a_1 و a_0 به دست می‌آید. چون P ، Q و R چندجمله‌ای‌اند و $P(x_0) \neq 0$ ، همه مشتقهای p و q در x_0 وجود دارند. بنابراین می‌توان به مشتق‌گیری از معادله (۳) تا بی‌نهایت ادامه داد، و متوالیاً ضرایب a_4, \dots را با جایگزینی x_0 به جای x تعیین کرد.

باید توجه داشت که خاصیت مهمی که در تعیین a_n به کار رفت، این بود که امکان بینهایت مشتق گیری از توابع p و q وجود داشت. به نظر می رسد که بتوان فرض اینکه توابع p و q خارج قسمت دوچند جمله ای باشند را تخفیف داد، و فقط قید کنیم که در یک همسایگی x_0 بینهایت بار مشتق پذیرند. متأسفانه، این شرط ضعیفتر از آن است که همگرایی سری حاصل برای $y = \phi(x)$ را تأمین کند. اما، شرط کلیتر دیگری برای p و q وجود دارد. براساس آن می توان محاسبات بالا را برای a_n انجام داد، و همگرایی سری جواب رانیز اثبات کرد. این شرط آن است که p و q در x_0 تحلیلی باشند، یعنی دارای بسط سری تیلر باشند که در فاصله ای حول نقطه x_0 همگرا باشند:

$$p(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + \dots + p_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \quad (۶)$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \dots + q_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n \quad (۷)$$

چنانکه در بند ۱.۴ بیان شد، اگر هر یک از توابع p و q خارج قسمت دوچند جمله ای باشد، آنگاه دارای بسط هایی^۱ به صورت (۶) و (۷) خواهند بود. با این اندیشه می توان تعریف نقطه عادی و نقطه غیر عادی معادله (۱) را به صورت زیر تعمیم داد: اگر توابع $p = Q/P$ و $q = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۱) می نامند؛ در غیر این صورت آن را نقطه غیر عادی گویند.

اکنون بر گردیم به مسئله فاصله همگرایی سری جواب. یک راه (که چندان هم جالب نیست) آن است که برای هر مسئله سری جواب را محاسبه کرده و سپس با استفاده از آزمونهای همگرایی، شعاع همگرایی سری جواب را تعیین کنیم. خوشبختانه، این سؤال را می توان برای طبقه وسیعی از مسائل با قضیه زیر جواب داد.

قضیه ۱.۴. اگر x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۱)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد، یعنی اگر $p = Q/P$ و $q = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (۸)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه، و y_1 و y_2 دوسری جواب مستقل خطی اند که در x_0 تحلیلی می باشند. علاوه بر این شعاع همگرایی هر یک از سریهای جواب y_1 و y_2 حداقل برابر می نیم

۱. خواننده دقیق محتملاً به این نتیجه (صحیح) رسیده است که اگر p به صورت (۶) باشد، در x_0 بینهایت بار مشتق پذیر خواهد بود، اما عکس آن درست نیست. مثالی برای توابعی که بینهایت بار در $x=0$ مشتق پذیرند اما دارای بسط سری تیلر نیستند، در مسئله ۸ آمده است.

شعاع همگرایی سریهای p و q خواهد بود. ضرایب سریهای جواب با قراردادن سری (۲) به جای y در معادله (۱) تعیین می‌شوند.

از صورت سریهای جواب دیده می‌شود که

$$y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \text{ و } y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \dots$$

بنابراین y_1 جوابی است که در شرایط اولیه $y_1(x_0) = 1$ ، $y_1'(x_0) = 0$ ، y_2 جوابی است که در شرایط اولیه $y_2(x_0) = 0$ ، $y_2'(x_0) = 1$ ، صدق می‌کند. همچنین توجه شود که با وجود آنکه محاسبه ضرایب با مشتق‌گیری متوالی از معادله دیفرانسیل از لحاظ نظری بسیار عالی است، اما عموماً يك روش محاسباتی عملی نیست. مناسبتر است که سری (۲) را در معادله دیفرانسیل (۱) به جای y قرارداده و مانند مثال قبل ضرایب را طوری تعیین کنیم که معادله دیفرانسیل برقرار باشد.

گرچه اثبات این قضیه دشوار نیست، و آن را به صورتی که تا اندازه‌ای کلیتر است، فوکس^۱ اثبات کرده است، اما در این کتاب قصد انجام این کار را نداریم. آنچه برای هدف ما مهم است، آن است که سری جواب به صورت (۲) وجود دارد، و شعاع همگرایی آن از کوچکترین شعاعهای همگرایی سریهای p و q کوچکتر نخواهد بود؛ بنابراین ما فقط باید آنها را تعیین کنیم.

این کار را به دو طریق می‌توان انجام داد. در اینجا نیز می‌توان مستقیماً سریهای توانی p و q را محاسبه کرد، و با استفاده از آزمونهای همگرایی سریها شعاعهای همگرایی آنها را معین نمود. اما، هنگامی که P ، Q و R چند جمله‌ای باشند، روش آسانتری وجود دارد. در نظریه توابع مختلط اثبات می‌شود که خارج قسمت دو چند جمله‌ای، مثلاً Q/P ، در حول $x = x_0$ اگر $P(x_0) \neq 0$ ، دارای بسط به سری توانی همگرا است. علاوه بر این، با فرض آنکه عوامل مشترك Q و P حذف شده باشند، شعاع همگرایی سری توانی Q/P حول نقطه x_0 دقیقاً برابر است با مسافت x_0 تا نزدیکترین صفر P . در تعیین این مسافت باید توجه داشت که $P(x) = 0$ ، ممکن است دارای ریشه‌های مختلط باشد، و آنها را نیز باید ملحوظ داشت.

مثال ۱. شعاع همگرایی سری نیلر تابع $(1+x^2)^{-1}$ را حول $x=0$ بیابید. می‌دانیم که به ازای $x^2 < 1$ تابع $(1+x^2)^{-1}$ دارای بسط سری توانی همگرا به صورت زیر است

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

روشن است که این سری به ازای $x^2 \geq 1$ واگراست، زیرا جمله n ام آن به ازای $n \rightarrow \infty$ به صفر میل نمی‌کند. بنابراین شعاع همگرایی آن عبارت است از $\rho = 1$. (این مطلب را می‌توان با آزمون نسبت تحقیق کرد.)

برای تعیین شعاع همگرایی، با استفاده از نظریه‌ای که هم‌اکنون شرح آن گذشت، دیده می‌شود که چند جمله‌ای $1+x^2$ در $x = \pm i$ صفر می‌شود؛ و چون مسافت از ۰ تا i در صفحه مختلط برابر است، شعاع همگرایی سری توانی مزبور حول $x=0$ برابر ۱ خواهد بود.

مثال ۲. شعاع همگرایی سری تیلر $(x^2-2x+2)^{-1}$ را حول $x=0$ ، و حول $x=1$ بیابید.

نخست دیده می‌شود که

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

دارای جوابهای $x = 1 \pm i$ است. مسافت از $x=0$ تا $x = 1+i$ یا $x = 1-i$ در صفحه مختلط برابر $\sqrt{2}$ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حول $x=0$ برابر $\sqrt{2}$ است.

مسافت از $x=1$ تا $x = 1+i$ یا $x = 1-i$ برابر ۱ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ حول $x=1$ برابر ۱ است.

بنابر قضیه ۱۰۴ سریهای جواب معادله آیری در مثالهای ۲ و ۳، و معادله هرمیت در مثال ۴ بند پیش، به ترتیب به ازای همه مقادیر x ، $x-1$ و x همگرایند، زیرا در این مسائل $P(x) = 1$ و هیچگاه صفر نمی‌شود.

باید تأکید کرد که سری جواب ممکن است به ازای x در دامنه وسیعتری از آنچه قضیه ۱۰۴ معین می‌کند همگرا باشد، بنابراین قضیه در واقع یک کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب به دست می‌دهد. این مطلب با چند جمله‌ای لژاندر، جواب معادله لژاندر، در مثال زیر توضیح داده می‌شود.

مثال ۳. مطلوب است تعیین یک کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

حول $x=0$ ، α مقداری است ثابت.

چون $P(x) = 1-x^2$ ، $Q(x) = -2x$ ، و $R(x) = \alpha(\alpha+1)$ چند جمله‌ای می‌باشند، و مسافت صفرهای P ، یعنی $x = \pm 1$ از $x=0$ برابر است، بنابراین سری جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به ازای $|x| < 1$ همگراست، و امکان دارد به ازای

مقادیر بزرگتر x نیز همگرا باشد. در واقع، می‌توان نشان داد که اگر α عدد صحیح مثبتی باشد، یکی از سریهای جواب شامل تعداد محدودی جمله خواهد بود، و بنابراین نه فقط به ازای $|x| < 1$ بلکه به ازای همه مقادیر x همگرا خواهد بود. به عنوان مثال، اگر

$\alpha = 1$ باشد، چند جمله‌ای جواب عبارت است از $y = x$. مسائل ۱۰ تا ۱۶ در پایان این بند را برای بحث کاملتری دربارهٔ معادلهٔ لژاندر ببینید.

مثال ۴. مطلوب است تعیین يك کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \quad (9)$$

حول نقاط $x = 0$ و $x = -1/2$

در اینجا نیز، P ، Q و R چند جمله‌ای اند، و صفرهای P عبارتند از $x = \pm i$. در صفحهٔ مختلط مسافت از 0 تا $\pm i$ برابر ۱، و از $-1/2$ تا $\pm i$ برابر $\sqrt{5}/2$ است. بنابراین در حالت اول سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به ازای $|x| < 1$ همگراست، و در حالت دوم سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+1/2)^n$ حداقل به ازای $|x+1/2| < \sqrt{5}/2$ همگرا خواهد بود.

نکتهٔ جالبی که دربارهٔ معادلهٔ (۹) می‌توان بیان کرد، نتیجه‌ای است از قضیهٔ وجود و یکتای ۲.۳ و قضیهٔ ۱.۴ که هم‌اکنون گذشت. فرض کنیم که شرایط اولیهٔ $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y'_0$ داده شده‌اند. چون به ازای هر x داریم $1+x^2 \neq 0$ ، بنابراین قضیهٔ ۲.۳ يك جواب یکتا برای این مسئلهٔ مقدار اولیه روی $-\infty < x < \infty$ وجود دارد. اما از طرف دیگر، قضیهٔ ۱.۴ تنها وجود سری جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را به ازای $-1 < x < 1$ تضمین می‌نماید. امکان دارد که جواب یکتا روی فاصلهٔ $-\infty < x < \infty$ حول $x = 0$ دارای بسطی به سری توانی نباشد که به ازای همهٔ مقادیر x همگرا باشد.

مثال ۵. آیا می‌توان يك سری جواب حول $x = 0$ برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + (\sin x)y' + (1+x^2)y = 0$$

تعیین کرد و اگر چنین است شعاع همگرایی آن را بیابید.

در این معادله دیفرانسیل، $p(x) = 1+x^2$ و $q(x) = \sin x$. با یادآوری از بند ۱.۴، $\sin x$ دارای بسط سری تیلر حول $x = 0$ است، و این بسط به ازای همهٔ مقادیر x همگراست. علاوه بر این، q نیز حول $x = 0$ دارای بسط به سری تیلر است و آن $q(x) = 1+x^2$ می‌باشد، که به ازای همهٔ مقادیر x همگراست. بدین‌سان يك سری جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با a_0 و a_1 دلخواه وجود خواهد داشت، و به ازای همهٔ مقادیر x همگرا خواهد بود.

مسائل

۱. مطلوب است تعیین $\phi''(x_0)$ ، $\phi'''(x_0)$ و $\phi^{(4)}(x_0)$ به ازای نقطه داده شده x_0 در صورتی که $y = \phi(x)$ يك جواب مسئله مقدار اولیه داده شده باشد.

$$y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + (1+x)y' + 2(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1 \quad (\text{د})$$

در قسمت (د)، $\phi''(0)$ ، $\phi'''(0)$ و $\phi^{(4)}(0)$ را بر حسب a_0 و a_1 بیان کنید.
۲. در هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر يك کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب حول نقطه داده شده x_0 بیابید.

$$y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4 \quad (\text{الف})$$

$$(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2 \quad (\text{ج})$$

$$xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1 \quad (\text{د})$$

۳. در هر يك از معادلات دیفرانسیل مسئله ۱ بند ۲.۴ يك کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب بیابید.

۴. معادله دیفرانسیل چیشف^۱ عبارت است از

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

که در آن α مقداری است ثابت.

(الف) دوجواب مستقل خطی بر حسب توانهای x به ازای $|x| < 1$ بیابید.
(ب) نشان دهید که اگر α برابر يك عدد صحیح نامنفی n باشد، آنگاه يك چندجمله‌ای جواب از درجه n وجود خواهد داشت. این چندجمله‌ایها را هنگامی که به طور مناسبی یکنی شوند، چندجمله‌ایهای چیشف می‌نامند، و در مسائلی که بخواهند برای توابعی که در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ تعریف شده‌اند، تقریب چندجمله‌ای بیابند کاربردهای بسیاری دارند.

(ج) برای هر يك از حالت‌های $\alpha = n = 0, 1, 2, 3$ يك جواب چندجمله‌ای بیابید.

۵. سه جمله اول هر يك از دوسری جواب مستقل خطی معادله

$$y'' + (\sin x)y = 0$$

بر حسب توانهای x ، را بیابید.

دانهمایی: $\sin x$ را حول $x = 0$ به سری تیلر بسط دهید، و تعداد کافی از جمله‌های آن را که برای محاسبه ضرایب $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لازم است در نظر بگیرید.

۶. سه جمله اول هر يك از دوسری جواب مستقل خطی معادله

$$e^x y'' + xy = 0$$

بر حسب توانهای x ، را بیابید. شعاع همگرایی هر يك از سریهای جواب را تعیین کنید.

دانهمایی: e^x یا xe^{-x} را حول $x = 0$ به سری توانی بسط دهید.

۷. اگر بدانیم که x و x^2 جوابهای يك معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

می باشند، درباره عادی یا غیر عادی بودن نقطه $x = 0$ چه می توان گفت؟

دانهمایی: از قضیه ۲.۳ استفاده کنید، و مقادیر x و x^2 را به ازای $x = 0$ مورد توجه قرار دهید.

۸. برای اثبات آنکه امکان دارد تابعی در يك نقطه بینهایت بار مشتق پذیر باشد، اما در حول این نقطه دارای بسط به سری تیلر نباشد تابع زیر را در نظر می گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

با استفاده از تعریف مشتق به عنوان حد خارج قسمت نموها ثابت کنید که $f'(0) = f''(0) = 0$.

می توان ثابت کرد که f در مبدأ بینهایت بار مشتق پذیر است، و به ازای هر n داریم $f^{(n)}(0) = 0$. بنابراین سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

به ازای همه مقادیر x صفر می شود، و تنها در $x = 0$ به $f(x)$ می گراید.

۹. روش سریها را که در این بند مورد بحث قرار گرفت می توان مستقیماً برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $P(x)y' + Q(x)y = 0$ در نقطه x_0 ، هنگامی که $p = Q/P$ حول نقطه مزبور دارای بسط به سری تیلر باشد به کار برد. چنین نقطه ای را نقطه عادی می نامند، و علاوه بر این، شعاع همگرایی سری

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حداقل برابر شعاع همگرایی سری Q/P خواهد بود. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش

سری برحسب توانهای x حل کنید، و تحقیق کنید که در هر حالت α دلخواه است. مسائل (ه) و (و) مشتمل بر معادلات دیفرانسیل ناهمگن است، و روش سریها را می توان به آسانی در این مورد تعمیم داد.

$$(الف) \quad y' - y = 0 \quad (ب) \quad y' - xy = 0$$

$$(ج) \text{ سه جمله } y' = e^{x^2} y, \quad (د) \quad (1-x)y' = y$$

$$(ه)^* \quad y' - y = x^2 \quad (و)^* \quad y' + xy = 1+x$$

در صورت امکان، سری جواب را با جوابی که به روشهای فصل ۲ به دست می آید مقایسه کنید.

معادله لژاندر. مسائل ۱۰ تا ۱۶ درباره معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

است. چنانکه در مثال ۳ بیان شد، نقطه $x=0$ يك نقطه عادی این معادله است، و مسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر $P(x) = 1-x^2$ برابر ۱ است. بنابراین شعاع همگرایی سری جواب حول $x=0$ حداقل برابر ۱ است. باید توجه داشت که در این معادله تنها لازم است حالت $\alpha > -1$ را در نظر بگیریم، زیرا اگر $\alpha \leq -1$ ، آنگاه با جایگزینی $\alpha = -(1+\gamma)$ که در آن $\gamma \geq 0$ است، به معادله لژاندر زیر می رسیم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma+1)y = 0$$

۱۰. نشان دهید که دو جواب مستقل خطی معادله لژاندر، به ازای $|x| < 1$ عبارتند از

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4) \dots (\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3) \dots (\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{(\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4) \dots (\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

۱۱. نشان دهید که اگر α ، برابر صفر و یا يك عدد صحیح زوج مثبت $2n$ باشد، سری جواب y_1 به يك چندجمله ای از درجه $2n$ تبدیل می شود، که تنها شامل توانهای زوج x است. نشان دهید که این چندجمله ایها متناظر به $\alpha = 0, 2, 4, \dots$ عبارتند از

$$1, 1-3x^2, 1-10x^2+\frac{35}{3}x^4$$

نشان دهید که اگر α ، برابر يك عدد صحیح فرد مثبت $2n+1$ باشد، سری جواب y_2 به يك چندجمله‌ای از درجه $2n+1$ که تنها شامل توانهای فرد x است تبدیل می‌شود، و چندجمله‌ایهای متناظر به $\alpha = 1, 3, 5$ عبارتند از

$$x, x - \frac{5}{3}x^3, x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$$

۱۲. چندجمله‌ای لژاندر P_n با جواب چندجمله‌ای معادله لژاندر به‌ازای $\alpha = n$ که در شرط $P_n(1) = 1$ صدق کند تعریف می‌شود. با استفاده از نتایج مسئله ۱۱، نشان دهید که

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

می‌توان نشان داد که فرمول عمومی آن عبارت است از

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

که در آن $[n/2]$ نمایشگر بزرگترین عدد صحیحی است که از $n/2$ تجاوز نکند. با توجه به عبارت $P_n(x)$ متناظر به مقادیر زوج و فرد n نشان دهید که $P_n(-1) = (-1)^n$.
۱۳. چندجمله‌ای لژاندر در فیزیک ریاضی دارای نقش مهمی است. مثلاً، در حل معادله لاپلاس (معادله پتانسیل) در مختصات کروی به معادله

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi$$

برمی‌خوریم که در آن n يك عدد صحیح مثبت است. نشان دهید که با تعویض متغیر $x = \cos \varphi$ برای تابع $y = f(x) = F(\cos^{-1} x)$ به معادله لژاندر با $\alpha = n$ می‌رسیم.
۱۴. نشان دهید که به ازای $n = 0, 1, 2, 3$ چندجمله‌ایهای لژاندر متناظر از فرمول

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

به‌دست می‌آیند. این فرمول، که به فرمول رودریک معروف است، به‌ازای همه مقادیر صحیح و مثبت n صادق است.

۱۵. نشان دهید که معادله لژاندر را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $[(1-x^2)P'_n(x)]' = -n(n+1)P_n(x)$ و $[(1-x^2)P'_m(x)]' = -m(m+1)P_m(x)$ با ضرب معادله اول در $P_m(x)$ و معادله دوم در $P_n(x)$ ، و سپس با انتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$
 اگر

این خاصیت چندجمله‌ایهای لژاندر را خاصیت تعامدی می‌نامند. اگر $m=n$ باشد، می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال بالا برابر است با $2/(2n+1)$.

۱۶. می‌توان هر چندجمله‌ای درجه n ام f را بر حسب ترکیب خطی از $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$$

با استفاده از نتیجه مسئله ۱۵، نشان دهید که

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx$$

۳.۴ نقاط غیرعادی منظم

در این بند به بررسی معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

در همسایگی يك نقطه غیرعادی x_0 می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر توابع P, Q و R چندجمله‌ایهایی بدون عامل مشترك باشند، نقاط غیرعادی معادله (۱) نقاطی هستند که به ازای آنها داریم $P(x) = 0$.

مثال ۱. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی و نقاط عادی معادله بسل مرتبه ν

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2)$$

روشن است که نقطه $x=0$ يك نقطه غیرعادی است، زیرا $P(x) = x^2$ به ازای آن صفر می‌شود. علاوه بر این، اگر معادله (۲) را بر x^2 تقسیم کنیم، ضرایب y' و y در $x=0$ نامعین خواهند بود. همه نقاط دیگر، نقاط عادی معادله (۲) می‌باشند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی و نقاط عادی معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (3)$$

که در آن α مقداری است ثابت.

نقاط غیرعادی عبارتند از صفرهای $P(x) = 1 - x^2$ ، یعنی نقاط $x = \pm 1$. همه نقاط دیگر نقاط عادی اند.

جوابهای معادله (۱) غالباً در همسایگی يك نقطه غیرعادی x_0 از لحاظ مقدار بسیار بزرگ می شوند، و مبین تغییرات سریع، یا ویژگیهای بخصوصی می باشند. بدین سان رفتار يك دستگاه فیزیکی در تحت چنین معادله ای اغلب در همسایگی يك نقطه غیرعادی بسیار جالبتر است. غالباً شرایط غیرعادی هندسی در يك مسئله فیزیکی، از قبیل گوشه ها یا لبه های تیز، به نقاط غیرعادی در معادله دیفرانسیل متناظر می انجامند. نقاط غیرعادی يك معادله دیفرانسیل با آنکه معمولاً تعدادشان اندك است، از لحاظ ریاضی اشكال اصلی جواب را در دامنه ای وسیعتر از آنچه در نظر اول می توان حدس زد مشخص می کنند. بدین سان، در حالی که ممکن است علاقه مند باشیم که از این چند نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل اجتناب کنیم، اما در واقع لازم است که جواب را به دقیقترین وجه در این نقاط بررسی کنیم. متأسفانه، هنگامی که x يك نقطه غیرعادی است از روشهای بند پیش کاری ساخته نیست، و لازم است که بسطهایی عامتر از بسط به سری تیلر را در نظر بگیریم. این موضوع ذیلاً با معادله دیفرانسیل مذکور در مثال ۳ توضیح داده می شود، در این معادله یکی از جوابها حول $x = 0$ فاقد بسط به سری تیلر است. بدون اطلاع اضافی درباره تغییرات R/P و Q/P در همسایگی نقطه غیرعادی، بررسی رفتار جوابهای معادله (۱) در مجاورت $x = x_0$ غیر ممکن است. امکان دارد که معادله (۱) دارای دو جواب مستقل خطی باشد که وقتی $x \rightarrow x_0$ کراندار باقی بماند، یا آنکه تنها يك جواب کراندار بماند و دیگری بینهایت شود، یا آنکه وقتی $x \rightarrow x_0$ هر دو جواب بینهایت شوند. این موضوع را با مثالهای زیر توضیح می دهیم.

مثال ۳. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad (4)$$

در $x = 0$ دارای يك نقطه غیرعادی است. با جایگذاری مستقیم می توان به آسانی تحقیق کرد که به ازای $x > 0$ یا $x < 0$ ، $y = x^2$ و $y = 1/x$ دو جواب مستقل خطی معادله (۴) می باشند. بدین سان در هر فاصله ای که شامل مبدأ نباشد، جواب عمومی معادله (۴) عبارت خواهد بود از $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$. تنها جواب معادله (۴) که وقتی $x \rightarrow 0$ کراندار می باشد عبارت است از $y = c_1 x^2$. در واقع، این جواب در مبدأ تحلیلی است با اینکه اگر معادله (۴) را به صورت متعارف $y = 0$ ($2/x^2$) بنویسیم، تابع $q(x) = -2/x^2$ در $x = 0$ تحلیلی نیست، و نمی توان قضیه ۱۰.۴ را به کار برد. از طرف دیگر، باید توجه داشت که جواب $y = x^{-1}$ در حول مبدأ دارای بسط به سری تیلر نیست (در $x = 0$ تحلیلی نیست)؛ بنابراین، از روش بند ۲.۴ در این حالت کاری ساخته نیست.

مثال ۴. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (5)$$

نیز در $x = 0$ دارای يك نقطه غیرعادی است. به آسانی می توان تحقیق کرد که $y_1(x) = x$ و $y_2(x) = x^2$ دو جواب مستقل خطی معادله (۵) می باشند، و هر دو در $x = 0$ تحلیلی اند. با وجود این، نمی توان به طرح مسئله مقدار اولیه ای با شرایط اولیه در $x = 0$ پرداخت. اعمال شرایط اولیه دلخواه در $x = 0$ غیر ممکن است، زیرا هر ترکیب خطی x و x^2 در $x = 0$ برابر صفر است.

می توان معادله دیفرانسیلی با يك نقطه غیرعادی x_0 طوری ساخت که هر جواب آن وقتی $x \rightarrow x_0$ بینهایت شود. حتی اگر معادله (۱) دارای جوابی نباشد که وقتی $x \rightarrow x_0$ کراندار باقی بماند، اغلب تعیین چگونگی رفتار جوابهای معادله (۱) وقتی $x \rightarrow x_0$ دارای اهمیت است؛ مثلاً، آیا y همانند $(x - x_0)^{-1}$ یا $|x - x_0|^{-1/2}$ ، یا به گونه ای دیگر به بینهایت میل می کند؟

به منظور آنکه يك نظریه ریاضی ساده مستدل برای حل معادله (۱) در همسایگی يك نقطه غیرعادی x_0 ، بیابیم، لازم است بحث را به حالت های به اصطلاح «غیرعادی ضعیف» که در آن غیرعادی بودن توابع Q/P و R/P در $x = x_0$ چندان شدید نباشد، محدود کنیم. البته این مفهوم از پیش روشن نیست. اما، بعداً ثابت خواهیم کرد (بند ۱۰۵۴ مسائل ۵ و ۶ را ببینید) که اگر P ، Q و R چند جمله ای باشند، شرایط مشخصه «غیرعادی ضعیف» عبارتند از منتهی بودن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad (6)$$

و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (7)$$

این بدین معنی است که Q/P از $(x - x_0)^{-1}$ و R/P از $(x - x_0)^{-2}$ غیرعادی تر نیستند. چنین نقطه ای را نقطه غیرعادی منظم معادله (۱) می نامند. نقطه x_0 در مورد توابعی عام تر از چند جمله ایها می تواند نقطه غیرعادی منظم معادله (۱) باشد، و برای این منظور باید توابع^۱

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}, (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (8)$$

هر دو حول x_0 دارای سری تیلر همگرا باشند، یعنی به عبارت دیگر توابع (۸) در $x = x_0$ تحلیلی باشند. از روابط (۶) و (۷) نتیجه می شود که اگر P ، Q و R چند جمله ایهای

۱. توابع داده شده با روابط (۸) ممکن است در x_0 معین نباشند، و در این حالت باید مقادیر آنها را در x_0 برابر حد آنها وقتی $x \rightarrow x_0$ گرفت.

مناسی باشند شرایط مزبور برقرار خواهد بود. هر نقطه غیرعادی معادله (۱) را که نقطه غیرعادی منظم نباشد، نقطه غیرعادی نامنظم معادله (۱) می نامند.
در بندهای بعدی چگونگی حل معادله (۱) را در همسایگی يك نقطه غیرعادی منظم مورد بحث قرار می دهیم. بحث درباره جوابهای معادله دیفرانسیل در همسایگی نقاط غیرعادی نامنظم از حدود يك كتاب مقدماتی خارج است.

مثال ۵. در مثال ۲ دیدیم که نقاط غیرعادی معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

عبارتند از $x = \pm 1$. تعیین کنید که آیا این نقاط غیرعادی، منظم اند یا نامنظم.
نخست به بررسی نقطه $x = 1$ می پردازیم، و مشاهده می کنیم که با تقسیم بر $1-x^2$ ضرایب y' و y به ترتیب عبارتند از $-2x/(1-x^2)$ و $\alpha(\alpha+1)/(1-x^2)$. بدین سان حدود زیر را محاسبه می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1+x} = 1$$

و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0 \end{aligned}$$

چون این حدود متناهی اند، نقطه $x = 1$ يك نقطه غیرعادی منظم است. به همین طریق می توان نشان داد که $x = -1$ نیز يك نقطه غیرعادی منظم است.

مثال ۶. نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل

$$2(x-2)^2 xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

را بیابید و آنها را بر حسب منظم یا نامنظم بودن طبقه بندی کنید.
با تقسیم بر $2(x-2)^2 x$ خواهیم داشت

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2} y' + \frac{1}{2(x-2)x} y = 0$$

بنابراین

$q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x-2)$ و $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x-2)^2$
نقاط غیرعادی عبارتند از $x = 0$ و $x = 2$. $x = 0$ را در نظر می گیریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3}{2(x-2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{2x(x-2)} = 0$$

چون این حدود منتهای اند، $x=0$ يك نقطه غیر عادی منظم است. در مورد $x=2$ دیده می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)p(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{3}{2(x-2)^2}$$

وجود ندارد؛ بنا بر این $x=2$ يك نقطه غیر عادی نامنظم است.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۸ تعیین کنید که آیا هر يك از نقاط 0 ، -1 و 1 برای معادله دیفرانسیل داده شده يك نقطه عادی، يك نقطه غیر عادی منظم، یا يك نقطه غیر عادی نامنظم است.

$$x y'' + (1-x) y' + x y = 0 \quad .1$$

$$x^2(1-x^2)y'' + 2x y' + 4y = 0 \quad .2$$

$$2x^4(1-x^2)y'' + 2x y' + 3x^2 y = 0 \quad .3$$

$$x^2(1-x^2)y'' + \frac{y}{x} y' + 4y = 0 \quad .4$$

$$(1-x^2)^2 y'' + x(1-x) y' + (1+x) y = 0 \quad .5$$

$$y'' + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 y' + 3(1+x)^2 y = 0 \quad .6$$

$$(x+3)y'' - 2x y' + (1-x^2)y = 0 \quad .7$$

$$x(1-x^2)^2 y'' + (1-x^2)^2 y' + 2(1+x)y = 0 \quad .8$$

۹. تعیین کنید که آیا نقطه غیر عادی $x=0$ معادله دیفرانسیل بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$$

يك نقطه غیر عادی منظم یا نامنظم است.

۱۰. برای معادله دیفرانسیل زیر مشخص کنید که آیا نقطه $x=0$ يك نقطه عادی،

يك نقطه غیر عادی منظم، یا يك نقطه غیر عادی نامنظم است:

$$x y'' + e^x y' + (3 \cos x) y = 0$$

۱۱. برای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر مشخص کنید که آیا نقطه $x = 0$ يك نقطه عادی، يك نقطه غیرعادی منظم، یا يك نقطه غیرعادی نامنظم است:

$$x^2 y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x} \cos x)y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - 3(\sin x)y' + (1 + x^2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

دانهمایی: سریهای توانی e^x و $\sin x$ را به ترتیب برای قسمتهای (الف) و (ب) در نظر بگیرید.

۱۲. فرض کنیم تابع f که به ازای $x \neq 0$ با $f(x) = x^{-1} \sin x$ و $f(0) = 1$ تعریف شده است، در $x = 0$ تحلیلی است، نشان دهید که $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل

$$(\sin x)y'' + xy' + 4y = 0$$

يك نقطه غیرعادی منظم و برای معادله دیفرانسیل

$$(x \sin x)y'' + 3y' + xy = 0$$

يك نقطه غیرعادی نامنظم است.

۱۳. تعاریفی که در بندهای پیش برای نقطه عادی و نقطه غیرعادی منظم داده شد، تنها هنگامی به کار می‌روند که نقطه x_0 متناهی باشد. در مباحث پیشرفته تر معادلات دیفرانسیل اغلب لازم می‌آید که نقطه واقع در بینهایت مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور از تعویض متغیر $1/x = \xi$ استفاده کرده، و معادله حاصل را در $\xi = 0$ بررسی می‌کنند. نشان دهید که برای معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

نقطه واقع در بینهایت يك نقطه عادی است، اگر

$$\frac{1}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

حول $\xi = 0$ دارای بسط به سری تیلر باشد. همچنین نشان دهید که نقطه واقع در بینهایت يك نقطه غیرعادی منظم است، اگر یکی از دو تابع بالا دارای بسط به سری تیلر نباشد، اما توابع

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

هر دو دارای چنین بسطی باشند.

۱۴. تعیین کنید که آیا برای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر نقطه واقع در بینهایت، يك نقطه عادی، يك نقطه غیرعادی منظم، یا يك نقطه غیرعادی نامنظم است.

(الف) معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

(ب) معادله بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

(ج) معادله هرمیت

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(د) معادله آیری

$$y'' - xy = 0$$

۴.۴ معادلات اوپلر

یکی از ساده ترین نمونه های معادله دیفرانسیلی که دارای يك نقطه غیرعادی منظم باشد، معادله اوپلر یا معادله همبندی

$$L[y] = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0 \quad (1)$$

است که در آن α و β دو ثابت اند. جز در مواردی که خلاف آن تصریح شود، α و β را حقیقی فرض می کنیم. به آسانی دیده می شود که $x=0$ يك نقطه غیرعادی منظم معادله (۱) می باشد. چون حل معادله اوپلر نمونه بارز حل همه معادلات دیفرانسیل با نقطه غیرعادی منظم است، شایسته است که پیش از بررسی مسئله کلیتر، این معادله را به طور دقیق مورد بحث قرار دهیم.

در هر فاصله ای که حاوی مبدأ نباشد، معادله (۱) دارای يك جواب عمومی به صورت

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

است، که در آن y_1 و y_2 استقلال خطی دارند. برای آسانی نخست فاصله $0 < x$ را در نظر می گیریم و بعداً نتایج را به فاصله $0 < x$ تعمیم می دهیم. نخست، باتوجه به $(x')' = rx^{r-1}$ و $(x')'' = r(r-1)x^{r-2}$ ، دیده می شود که اگر فرض کنیم معادله (۱) دارای جوابی به صورت^۱

$$y = x^r \quad (2)$$

است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2 (x^r)'' + \alpha x (x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r F(r) \end{aligned} \quad (3)$$

۱. این فرض همچنین براساس این نکته که معادله دیفرانسیل مرتبه اول اوپلر $xy' + ky = 0$ دارای جواب $y = x^{-k}$ است، مطرح می شود.

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta \quad (۴)$$

اگر r يك ریشه معادله درجه دوم $F(r) = 0$ باشد، آنگاه $L[x^r]$ صفر است، و $y = x^r$ يك جواب معادله (۱) خواهد بود. ریشه‌های $F(r) = 0$ عبارتند از

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \\ r_2 &= \frac{-(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \end{aligned} \quad (۵)$$

و $F(r) = (r-r_1)(r-r_2)$. عیناً همانند حالت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم باضرایب ثابت (بند ۵.۳ را ببینید)، باید حالتی را که در آن $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$ مثبت، صفر، و منفی است جداگانه بررسی کنیم. در واقع، تمام نظریه‌ای که در این بند عرضه می‌شود، همانند نظریه معادلات خطی مرتبه دوم باضرایب ثابت است، که در آن x^r به جای e^{rx} جایگزین شده است (مسائل ۴ و ۵ را ببینید). تذکر این نکته نیز لازم است که برای حل يك معادله اولر خاص بسیار آسانتر است که جایگزینی $y = x^r$ را انجام داده، و معادله درجه دوم (۴) را به دست آورد، و ریشه‌های r_1 و r_2 را محاسبه کرد، تا اینکه فرمول عمومی (۵) را حفظ کرد.

حالت ۱. $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$. در این حالت از روابط (۵) دو ریشه حقیقی مختلف r_1 و r_2 به دست می‌آید. چون به ازای $r_1 \neq r_2$ و $x > 0$ ، $W(x^{r_1}, x^{r_2})$ هیچگاه صفر نمی‌شود، در نتیجه جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad x > 0 \quad (۶)$$

توجه شود که اگر r عدد گویایی نباشد، آنگاه x^r با رابطه $x^r = e^{r \ln x}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱. مطلوب است حل معادله

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0 \quad (۷)$$

با قراردادن $y = x^r$ خواهیم داشت

$$x^r(2r^2 + r - 1) = 0$$

$$x^r(2r - 1)(r + 1) = 0$$

بنابراین

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1$$

و

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0 \quad (۸)$$

حالت ۲. $\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$. در این حالت، بنا بر روابط (۵)، داریم

$$r_1 = r_2 = -(\alpha - 1)/2$$

و برای معادله دیفرانسیل فقط جواب $y_1(x) = x'^1$ به دست می آید. جواب دوم را می توان با روش کاهش مرتبه به دست آورد، اما به منظور بحثی که در پیش داریم از روش دیگری استفاده می کنیم. چون $r_1 = r_2$ ، در نتیجه $F(r) = (r - r_1)^2$. بدین سان در این حالت نه تنها $F(r_1) = 0$ ، بلکه علاوه بر آن $F'(r_1) = 0$. این نکته مبین آن است که باید از معادله (۳) نسبت به r مشتق گرفت و آنگاه r را برابر r_1 قرارداد. با مشتق گیری از معادله (۳) نسبت به r داریم

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x'] = \frac{\partial}{\partial r} [x' F(r)]$$

با جایگزینی $F(r)$ و تعویض ترتیب مشتق گیری نسبت به x و r ، و توجه به $\partial(x')/\partial r = x' \ln x$ به ازای $r = r_1$ صفر می شود؛ در نتیجه

$$L[x' \ln x] = (r - r_1)^2 x' \ln x + 2(r - r_1) x' \quad (9)$$

طرف دوم معادله (۹) به ازای $r = r_1$ صفر می شود؛ در نتیجه

$$y_2(x) = x'^1 \ln x, \quad x > 0 \quad (10)$$

یک جواب دیگر معادله (۱) است. چون $x'^1 \ln x$ و x'^1 به ازای $x > 0$ مستقل خطی اند، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x'^1, \quad x > 0 \quad (11)$$

مثال ۲. مطلوب است حل معادله

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0 \quad (12)$$

با قرارداد $y = x^r$ خواهیم داشت

$$x'(r^2 + 4r + 4) = 0$$

از آنجا $r_1 = r_2 = -2$ و بنا بر این

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \quad x > 0 \quad (13)$$

حالت ۳. $\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$. در این حالت ریشه های r_1 و r_2 مختلط مزدوج

می باشند، مثلاً $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$. در اینجا باید به توضیح معنای x'^1 هنگامی که r مختلط است بپردازیم. با توجه به آنکه به ازای $x > 0$ و r حقیقی می توان نوشت

$$x^r = e^{r \ln x} \quad (14)$$

همین رابطه را می توان به عنوان تعریف x^r به ازای r مختلط به کار برد. آنگاه

$$x^{(\lambda+i\mu)} = e^{(\lambda+i\mu) \ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} \\ = x^{\lambda} e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda} [\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)], \quad x > 0 \quad (15)$$

چون برای x' به ازای مقادیر مختلط r این تعریف را در نظر بگیریم، می توان تحقیق کرد که قوانین معمول جبر و حساب دیفرانسیل درباره آن صدق می کند، و بنابراین x'^{λ} و x'^{μ} جوابهای معادله (۱) خواهند بود. جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu} \quad (16)$$

نقص این عبارت در آن است که توابع $x^{\lambda+i\mu}$ و $x^{\lambda-i\mu}$ دارای مقادیر مختلط اند. یادآور می شویم که وضعیت مشابهی در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت هنگامی که ریشه های معادله مشخصه مختلط بودند، وجود داشت. با استفاده از همان روشی که به کار رفت، دیده می شود که قسمت های حقیقی و موهومی $x^{\lambda+i\mu}$ ،

$$x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) \quad \text{و} \quad x^{\lambda} \sin(\mu \ln x) \quad (17)$$

جوابهای معادله (۱) می باشند و دارای استقلال خطی اند. بدین سان برای حالت ریشه های مختلط، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) + c_2 x^{\lambda} \sin(\mu \ln x), \quad x > 0 \quad (18)$$

مثال ۳. مطلوب است حل

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad (19)$$

با قراردادن $y = x^r$ خواهیم داشت

$$x^r [r(r-1) + r + 1] = 0$$

از آنجا $r = \pm i$ ، و جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x), \quad x > 0 \quad (20)$$

اکنون فاصله $x < 0$ را در نظر می گیریم. در اینجا به این اشکال برمی خوریم که x^r هنگامی که x منفی باشد، و r عدد صحیح نباشد چه معنایی می تواند داشته باشد؛ به همین طریق نیز $\ln x$ به ازای $x < 0$ نامعین است. می توان نشان داد که جوابهای معادله اولر که به ازای $x > 0$ به دست آمدند، به ازای $x < 0$ نیز معتبرند، اما عموماً دارای مقادیر مختلط می باشند. بدین سان در مثال ۱ جواب $x^{1/2}$ به ازای $x < 0$ موهومی است.

همواره می توان برای معادله اولر (۱) در فاصله $x < 0$ با تعویض متغیر زیر جوابهایی با مقدار حقیقی به دست آورد. بگیریم $\xi = -x$ که در آن $\xi > 0$ ، و قرار می دهیم $y = u(\xi)$. بدین سان خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left[-\frac{du}{d\xi} \right] \frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (21)$$

و معادله (۱) به صورت زیر درمی آید

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha \xi \frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \quad \xi > 0 \quad (22)$$

و این دقیقاً همان مسئله‌ای است که هم‌اکنون حل کردیم؛ از روابط (۶)، (۱۱)، و (۱۸) خواهیم داشت

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1 \xi^{\lambda_1} + c_2 \xi^{\lambda_2} \\ (c_1 + c_2 \ln \xi) \xi^{\lambda_1} \\ c_1 \xi^{\lambda} \cos(\mu \ln \xi) + c_2 \xi^{\lambda} \sin(\mu \ln \xi) \end{cases} \quad (23)$$

بر حسب آنکه $4\beta - (\alpha - 1)^2$ مثبت، صفر، یا منفی باشد. برای آنکه u را بر حسب x به دست آوریم، در روابط (۲۳) به جای ξ باید $-x$ را قرار داد. می‌توان این نتایج را برای $x > 0$ و $x < 0$ به صورت زیر ترکیب کرد. به ازای $x > 0$ داریم $|x| = x$ و به ازای $x < 0$ ، $|x| = -x$ ، بدین‌سان کافی است که در روابط (۶)، (۱۱)، و (۱۸) به جای x ، $|x|$ را قرار دهیم، تا متناظر به هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد جوابهایی با مقدار حقیقی به دست آورد (مسائل ۶ و ۷ را نیز ببینید). این نتایج در قضیه زیر خلاصه شده‌اند.

قضیه ۲۰۴. برای جلی معادله ادیلر (۱)

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

در فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، قرار می‌دهیم $y = x^r$ ، و r_1 و r_2 ریشه‌های معادله

$$F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

را محاسبه می‌کنیم.

اگر ریشه‌ها حقیقی و نابرابر باشند،

$$y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2} \quad (24)$$

اگر ریشه‌ها حقیقی و برابر باشند،

$$y = (c_1 + c_2 \ln |x|) |x|^{r_1} \quad (25)$$

اگر ریشه‌ها مختلط باشند،

$$y = |x|^{\lambda} [c_1 \cos(\mu \ln |x|) + c_2 \sin(\mu \ln |x|)] \quad (26)$$

که در آن $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$

درمورد يك معادله اولیر به صورت

$$(x-x_0)^2 y'' + \alpha(x-x_0)y' + \beta y = 0 \quad (27)$$

وضعیت دقیقاً همان است و باید جوابهایی به صورت $y = (x-x_0)^r$ جستجو کرد. جواب عمومی از روابط (۲۴)، (۲۵) یا (۲۶) با قرار دادن $(x-x_0)$ به جای x به دست می آید. به طریق دیگر، می توان معادله (۲۷) را با تعویض متغیر مستقل $t = x - x_0$ به صورت معادله (۱) درآورد.

به طور کلی درمورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با نقطه غیرعادی منظم همان وضعیت معادله اولیر را خواهیم داشت. این مسئله را در بند بعد بررسی خواهیم کرد.

مسائل

۱. برای هر يك از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم زیر جواب عمومی ای را بیابید که در هر فاصله ای که شامل نقطه غیرعادی نیست معتبر باشد.

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + \frac{3}{4}y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0 \quad (\text{و})$$

$$x^2 y'' + 6xy' - y = 0 \quad (\text{ز})$$

$$2x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \quad (\text{ح})$$

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad (\text{ط})$$

$$(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0 \quad (\text{ی})$$

$$x^2 y'' + 2xy' + 4y = 0 \quad (\text{ک})$$

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad (\text{ل})$$

۲. با استفاده از روش کاهش مرتبه نشان دهید که اگر r يك ریشه مکرر معادله $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$ باشد، آنگاه x'^1 و $x'^1 \ln x$ جوابهای معادله

$$x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0$$

می باشند.

۳. مطلوب است تعیین همه مقادیر α که به ازای آنها همه جوابهای

۲. $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ به صفر بگراید.
 ۳. معادلهٔ اولر مرتبهٔ دوم $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ را می‌توان با تعویض متغیر مناسبی به یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت تبدیل کرد. با توجه به آنکه x^r در مورد معادلهٔ اولر دارای همان نقش $(e^x)^r = e^{rx}$ متناظر به معادله با ضرایب ثابت است، کاملاً معقول خواهد بود که تعویض متغیر $x = e^z$ یا $z = \ln x$ انجام گیرد. تنها فاصله $x > 0$ را در نظر بگیرید.
 (الف) نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \quad \text{و} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$$

(ب) نشان دهید که معادلهٔ اولر به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

اگر r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$ باشد، نشان دهید که

(ج) اگر r_1 و r_2 حقیقی و نابرابر باشند، آنگاه

$$y = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

(د) اگر r_1 و r_2 برابر باشند، آنگاه

$$y = (c_1 + c_2 z) e^{r_1 z} = (c_1 + c_2 \ln x) x^{r_1}$$

(ه) اگر r_1 و r_2 مختلط مزدوج باشند، $r_1 = \lambda + i\mu$ ، آنگاه

$$y = e^{\lambda z} (c_1 \cos \mu z + c_2 \sin \mu z) = x^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x)].$$

۵. با استفاده از روش مسئلهٔ ۴، معادلات دیفرانسیل زیر را به ازای $x > 0$ حل کنید.

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + 7xy' + 5y = x \quad (\text{ج})$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x) \quad (\text{ه})$$

$$3x^2 y'' + 12xy' + 9y = 0 \quad (\text{و})$$

۶. نشان دهید که اگر $L[y] = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y$ ، آنگاه به ازای $x < 0$ ،

$$L[(-x)'] = (-x)' F(r)$$

که در آن $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$. از آنجا نتیجه بگیرید که اگر $r_1 \neq r_2$ ریشه‌های

$F(r) = 0$ باشند، آنگاه جوابهای مستقل خطی $L[y] = 0$ به ازای $x < 0$ عبارتند از $(-x)^{r_1}$ و $(-x)^{r_2}$.

۷. فرض می‌کنیم که x^{r_1} و x^{r_2} جوابهای معادلهٔ اولیه باشند که در آن $r_1 \neq r_2$ و يك عدد صحیح مثبت است. طبق رابطه (۲۴) جواب عمومی در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، عبارت است از $y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}$. نشان دهید که جواب عمومی را می‌توان به صورت $y = k_1x^{r_1} + k_2|x|^{r_2}$ نیز نوشت.

داهنمایی: نشان دهید که با انتخاب مناسب ثابتها عبارت‌های مزبور به ازای $x > 0$ یکی هستند؛ و با انتخاب ثابتهای دیگری به ازای $x < 0$ یکی می‌شوند.

۸. اگر ثابتهای α و β در معادلهٔ اولیه $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ اعداد مختلطی باشند، باز هم امکان دارد که جوابهایی به صورت x^r به دست آورد. اما، عموماً، جوابهای دیگر دارای مقادیر حقیقی نیستند. جواب عمومی هر يك از معادلات زیر را متناظر با فاصله $x > 0$ بیابید.

$$(الف) \quad x^2y'' + 2ixy' - iy = 0 \quad (ب) \quad x^2y'' + (1-i)xy' + 2y = 0$$

$$(ج) \quad x^2y'' + xy' - 2iy = 0$$

داهنمایی: مسائل ۱۳، ۱۴، و ۱۵ بند ۳.۵ را ببینید.

۵.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیرعادی منظم، بخش اول

اکنون به بررسی مسئلهٔ حل معادلهٔ کلی خطی مرتبهٔ دوم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (۱)$$

در همسایگی يك نقطهٔ غیرعادی منظم $x = x_0$ می‌پردازیم. برای آسانی فرض می‌کنیم که $x_0 = 0$. اگر $x_0 \neq 0$ ، معادله را می‌توان با قرارداد $z = x - x_0$ به معادله‌ای که نقطهٔ غیرعادی منظم آن در مبدأ باشد تبدیل کرد.

این نکته که $x = 0$ يك نقطهٔ غیرعادی منظم معادله (۱) است، بدان معنی است که $xQ(x)/P(x) = xq(x)$ و $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ دارای حد متناهی و در $x = 0$ تحلیلی می‌باشند. بدینسان دارای بسطهایی به سری توانی به صورت

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (۲)$$

می‌باشند، که در يك فاصله $\rho > 0$ ، $|x| < \rho$ حول مبدأ همگرایند. از لحاظ اهداف نظری مناسب است که معادله (۱) را بر $P(x)$ تقسیم کرده و سپس در x^2 ضرب کنیم، تا به دست آید:

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0 \quad (۳ الف)$$

یا

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n + \dots) y' + (q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n + \dots) y = 0 \quad (3 \text{ ب})$$

اگر غیر از

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x Q(x)}{P(x)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 R(x)}{P(x)}$$

همه p_n و q_n ها صفر باشند، آنگاه معادله (۳) به معادله اولر

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \quad (4)$$

که در بند پیش مورد بحث واقع شد تبدیل می شود. البته در حالت کلی، برخی از p_n و q_n ها، $n \geq 1$ ، صفر نیستند. اما، سرشت اساسی جوابهای معادله (۳) و جوابهای معادله اولر یکسان اند. وجود جمله های

$$p_1 x + \dots + p_n x^n + \dots \quad \text{و} \quad q_1 x + \dots + q_n x^n + \dots$$

فقط محاسبات را پیچیده تر می سازد.

اصولاً بحث را به فاصله $x > 0$ منحصر می نماییم. برای فاصله $x < 0$ می توان همانند آنچه در مورد معادله اولر عمل شد، تعویض متغیر $\xi = -x$ را به کار گرفت، و سپس معادله حاصل را به ازای $\xi > 0$ حل کرد.

چون ضرایب معادله (۳) همان «ضرایب اولر» با مضربی از سری توانی می باشند، کاملاً طبیعی است که به جستجوی جوابهایی به صورت «جوابهای اولر» با مضربی از سری توانی بپردازیم:

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (5)$$

آنچه را که در این مرحله از مسئله باید تعیین کنیم، عبارت است از:

۱. مقادیر r که به ازای آنها معادله (۱) دارای جوابی به صورت (۵) است.

۲. رابطه بازگشت a_n ها.

۳. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

چنان که خواهیم دید معادله (۱) همواره دارای حداقل یک جواب به صورت (۵) با a_0 دلخواه، و احتمالاً جواب دومی متناظر با مقدار دیگری از r می باشد. اگر جواب دومی به صورت (۵) وجود نداشته باشد، جواب دوم درست مانند هنگامی که معادله اولر دارای ریشه های برابر است، شامل یک جمله لگاریتمی است. البته، از لحاظ نظری، همین که جواب اول را که به صورت (۵) است پیدا کردیم، جواب دومی را می توان به روش کاهش مرتبه به دست آورد. متأسفانه، این روش همواره برای به دست آوردن جواب دومی مناسب نیست؛

وما دربندهای ۶.۴ و ۷.۴ روش دیگری را عرضه می‌کنیم. نظریه عمومی این مبحث را فروبنیوس^۱ ریاضیدان آلمانی ارائه کرد، و نسبتاً پیچیده است. ما به معرفی این نظریه نمی‌پردازیم، و دراین بند وسه بند آتی فرض می‌کنیم که جوابی به صورت مزبور وجود دارد. به ویژه، فرض می‌کنیم که هر سری توانی موجود در عبارت جواب دارای يك شعاع همگرایی مخالف صفر است، و توجه خود را به طرز تعیین ضرایب این نوع سری معطوف می‌نماییم.

نخست بامثالی روش فروبنیوس را درحالتی که هر دو جواب به صورت (۵) باشند توضیح می‌دهیم. معادله

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0 \quad (6)$$

را درنظر می‌گیریم. از مقایسه با معادله (۳)، دیده می‌شود که $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم معادله (۶) می‌باشد. همچنین از مقایسه با معادلات (۳ الف) و (۳ ب) دیده می‌شود که $q_0 = 1/2$ ، $p_0 = -1/2$ ، بدین سان $x^2q(x) = (1+x)/2$ و $xp(x) = -1/2$ ، و همه q_n و p_n های دیگر صفرند. معادله اولیرمتناظر عبارت است از

$$2x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (7)$$

اکنون به طور صوری به آزمون جوابی برای معادله (۶) به صورت (۵) به ازای $x > 0$ می‌پردازیم. آنگاه y' و y'' به صورت زیر خواهند بود

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \quad (8)$$

و

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}. \quad (9)$$

در نتیجه

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+1}$$

با توجه به آنکه مجموع سری اخیر را می‌توان به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$ نوشت، وجمله‌ها را

با هم ترکیب کرد، داریم

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = a_0[2r(r-1) - r + 1]x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} \right\} x^{r+n} = 0 \quad (10)$$

چون معادله (۱۰) باید به صورت اتحاد برقرار باشد، ضریب هر توان x در آن باید صفر باشد. چون $a_0 \neq 0$ است، متناظر با x^r داریم

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = 0 \quad (11)$$

از ضریب x^{r+n} خواهیم داشت

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0$$

یا

$$a_n = -\frac{1}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (12)$$

معادله (۱۱) را معادله شاخص معادله (۶) می نامند. توجه شود که این دقیقاً همان معادله ای است که برای معادله اوپلر (۷) وابسته به معادله (۶) به دست آوردیم. ریشه های آن معرف دومقدار ممکن برای r است که به ازای آنها امکان دارد جوابهای معادله (۶) به صورت (۵) باشند. با فاکتورگیری معادله (۱۱) خواهیم داشت $(2r-1)(r-1) = 0$ ؛ بنابراین ریشه های معادله شاخص عبارتند از

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

از این به بعد، هرگاه ریشه های معادله شاخص حقیقی و نامساوی باشند، ریشه بزرگتر را با r_1 نشان می دهیم. ریشه های معادله شاخص را اغلب نماهای تکنیکی در نقطه غیر عادی منظم مزبور می نامند.

معادله (۱۲) برای ضرایب a_n يك رابطه بازگشت به دست می دهد. با در نظر گرفتن صورت تجزیه شده معادله شاخص رابطه بازگشت را می توان چنین نوشت

$$a_n = \frac{-1}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (14)$$

به ازای هر ریشه r_1 و r_2 معادله شاخص رابطه بازگشت را به کار می گیریم، تا a_n های متناظر تعیین شوند. به ازای $r = r_1 = 1$ خواهیم داشت

۱. با انتخاب $a_0 = 0$ چیزی عاید نمی گردد، و این تنها بدان معنی است که سری باید با جمله $a_1 x^{r+1}$ یا، اگر $a_1 = 0$ باشد، با جمله $a_2 x^{r+2}$ و غیره آغاز شود. فرض کنیم که نخستین جمله مخالف صفر $a_m x^{r+m}$ باشد؛ این هم ارز با آن است که در سری (۵) به جای $r+m$ و به جای a_m ، a را قرار دهیم. در واقع r طوری انتخاب شده است که برابر کوچکترین توان x در سری مزبور باشد؛ و $a_0 \neq 0$ را به عنوان ضریب آن در نظر می گیریم.

$$a_n = \frac{-1}{(2n+1)n} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

بدین‌سان

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{(2n+1)n} \cdot \frac{-1}{(2n-1)(n-1)} a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)n(2n-1)(n-1) \dots (5 \cdot 2)(3 \cdot 1)} a_0. \end{aligned}$$

با دسته‌بندی سازه‌های $n, n-1, \dots, 1$ ، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3]n!} a_0, \quad n \geq 1 \quad (15)$$

بنابراین يك جواب معادله (۶) صرف نظر از ضریب ثابت a_0 ، عبارت است از

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3]n!} \right], \quad x > 0 \quad (16)$$

برای تعیین همگرایی سری (۱۶) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+3)(n+1)} = 0$$

به‌ازای هر x ، بدین‌سان سری به‌ازای همه مقادیر x همگراست.

متناظر باریشه دوم $r = r_2 = 1/2$ ، نیز به‌همان روش عمل می‌کنیم. از معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)} a_{n-1} = \frac{-1}{n(2n-1)} a_{n-1} \\ &= \frac{-1}{n(2n-1)} \cdot \frac{-1}{(n-1)(2n-3)} a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(2n-3) \dots (2 \cdot 3)(1 \cdot 1)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{[(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1]n!} a_0, \quad n \geq 1 \quad (17) \end{aligned}$$

در اینجا نیز با صرف نظر کردن از ضریب ثابت a_0 ، جواب دوم را به دست می آوریم

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1] n!} \right], \quad x > 0 \quad (18)$$

مانند پیش، می توان نشان داد که سری موجود در رابطه (۱۸) به ازای همه مقادیر x همگراست. چون جمله های اول سریهای جواب y_1 و y_2 به ترتیب x و $x^{1/2}$ می باشند، روشن است که جوابها دارای استقلال خطی اند. بنابراین جواب عمومی معادله (۶) عبارت است از

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x > 0$$

مثال بالا از جنبه های متعددی روشنگر است. محاسبات خود را بار دیگر از نقطه نظر کلیتری بررسی کنیم. گیریم

$$\begin{aligned} F(r) &= 2r(r-1) - r + 1 \\ &= (2r-1)(r-1) \end{aligned} \quad (19)$$

بدین سان معادله شاخص عبارت خواهد بود از $F(r) = 0$ ، و رابطه بازگشت (۱۲) به صورت زیر درمی آید

$$F(r+n)a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \quad (20)$$

معادله (۲۰) نمایشگر حالت کلی است به جز آنکه به جای جمله a_{n-1} در حالت کلی یک ترکیب خطی از $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ قرار می گیرد. اما، می توان در بحث زیر معادله (۲۰) را به عنوان مدل در نظر گرفت، البته با توجه به این نکته که بحث به مثال خاصی که هم اکنون تکمیل شد محدود نمی گردد.

اشکالات از دو منبع سرچشمه می گیرد. نخست، اگر دوریشت r_1 و r_2 معادله شاخص برابر باشند، در این صورت تنها یک سری جواب به شکل (۵) به دست می آید. دوم، این امکان وجود دارد که به ازای ریشه های مفروض r_1 یا r_2 نتوان برای یکی از a_n ها معادله (۲۰) را به علت آنکه $F(r+n)$ صفر شود، حل کرد. ببینیم چه وقت این حالت رخ می دهد؟ تنها صفرهای $F(r)$ عبارتند از r_1 و r_2 ، و اگر $r_1 > r_2$ ، آنگاه به ازای هر n به وضوح داریم $r_1 + n > r_1 > r_2$ و در نتیجه به ازای هر n خواهیم داشت $F(r_1 + n) \neq 0$. بدین سان هیچگاه در محاسبه سری جواب متناظر با ریشه بزرگتر معادله شاخص اشکالی پیش نخواهد آمد. از طرف دیگر $F(r_2 + n)$ را در نظر می گیریم، و فرض می کنیم $r_1 - r_2 = N$ یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه به ازای $n = N$ خواهیم داشت

$$F(r_2 + N)a_N + a_{N-1} = 0$$

اما $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$ و نمی توان معادله بالا را نسبت به a_N حل کرد، مگر آنکه a_{N-1} نیز صفر باشد، و بنا بر این نمی توان سری جواب دومی را به دست آورد. در مسائل

کلیتر، چنان که در بند بعد خواهیم دید، رابطه بازگشت بسیار پیچیده تر خواهد بود، و حتی هنگامی که $F(r_2 + N)$ صفر شود، امکان دارد که بتوان جواب دومی به صورت (۵) متناظر به $r = r_2$ را تعیین کرد. در هر صورت حالت های $r_1 = r_2 = N$ و $r_1 - r_2 = N$ که در آن N عدد صحیح و مثبتی است، مستلزم دقت خاصی می باشند.

در پایان، متذکر می شویم که اگر ریشه های معادله شاخص مختلط باشند، این نوع اشکالات رخ نمی دهد؛ از طرف دیگر جواب های متناظر به r_1 و r_2 توابعی با مقادیر مختلط از x خواهند بود. اما، درست همانند معادله اوپلر، می توان با در نظر گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی جواب های با مقادیر مختلط، جواب هایی با مقادیر حقیقی به دست آورد.

پیش از آنکه به بحث کلی و بررسی حالت های خاص $r_1 = r_2 = N$ و $r_1 - r_2 = N$ يك عدد صحیح مثبت، پردازیم يك نکته عملی را متذکر می شویم. اگر P ، Q ، و R چند جمله ای باشند، بسیار بهتر است که به جای معادله (۳) همان معادله (۱) را مستقیماً به کار بگیریم. بدین سان دیگر لازم نیست که $xQ(x)/P(x)$ و $x^2R(x)/P(x)$ به صورت سری توانی بیان شود. مثلاً، بسیار آسان تر است که معادله

$$x(1+x)y'' + 2y' + xy = 0$$

را در نظر بگیریم، تا اینکه آن را به صورت

$$x^2y'' + x \frac{2}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0$$

نوشته، و سپس $2/(1+x)$ و $x^2/(1+x)$ را بسط دهیم تا به صورت زیر درآید

$$x^2y'' + x[2(1-x+x^2-\dots)]y' + (x^2-x^3+x^4-\dots)y = 0$$

مسائل

۱. نشان دهید که هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر در $x=0$ دارای يك نقطه غیر عادی منظم است. معادله شاخص، رابطه بازگشت، و ریشه های معادله شاخص را بیابید. سری جواب ($x > 0$) متناظر با ریشه بزرگتر را بیابید. اگر ریشه ها نابرابر باشند، و تفاضل آنها عدد صحیح نباشد، سری جواب متناظر به ریشه کوچکتر را نیز بیابید.

$$2xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$xy'' + y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$xy'' + y' - y = 0 \quad (\text{د})$$

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$x^2 y'' + x y' + (x-2)y = 0 \quad (و)$$

۲. معادله لژاندر از رتبه α عبارت است از

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

جواب این معادله را در مجاورت نقطه عادی $x=0$ در مسائل ۱۰ و ۱۱ بند ۴. ۲. ۱ بررسی کردیم. در مثال ۵ بند ۴. ۳ نشان دادیم که $x = \pm 1$ نقاط غیرعادی منظم اند. معادله شاخص و ریشه‌های آن را به ازای نقطه $x=1$ تعیین کنید. یک سری جواب بر حسب توانهای $x-1$ به ازای $x-1 > 0$ بیابید.

داهنمایی: بنویسید $1+x = 2+(x-1)$ و $x = 1+(x-1)$. به عبارت دیگر، تعویض متغیر $z = x-1$ را به کار برده، سری جواب را بر حسب توانهای z بیابید.

۳. معادله دیفرانسیل لاگرا عبارت است از

$$x y'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

نشان دهید که $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است. معادله شاخص، ریشه‌های آن، رابطه بازگشت، و یک جواب ($x > 0$) را تعیین کنید. نشان دهید که اگر $\lambda = m$ ، یک عدد صحیح مثبت باشد، این جواب به صورت یک چندجمله‌ای درمی‌آید. این چندجمله‌ای را هنگامی که به صورت مناسبی نرمالیزه شده باشد، چندجمله‌ای لاگرا، $L_m(x)$ می‌نامند.

۴. معادله بسل از رتبه صفر عبارت است از

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

نشان دهید که $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است؛ و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = r_2 = 0$ ؛ و یک جواب به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

توجه شود که این سری به ازای هر x ، و نه فقط به ازای $x > 0$ ، همگراست. به ویژه $J_0(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کراندار است. تابع J_0 را تابع بسل نوع اول از رتبه صفر می‌نامند.

۵. با استفاده از روش کاهش مرتبه در مسئله ۴، نشان دهید که جواب دوم معادله بسل رتبه صفر شامل یک جمله لگاریتمی است.

داهنمایی: اگر $y_2(x) = J_0(x)v(x)$ ، آنگاه

$$y_2(x) = J_0(x) \int^x \frac{ds}{s[J_0(s)]^2}$$

نخستین جمله از سری بسط $1/s[J_0(s)]^2$ را بیابید.
 ۵. معادله بسل رتبه يك عبارت است از

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

(الف) نشان دهید که $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است؛ ریشه های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$ ؛ و يك جواب به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)! n! 2^{2n}}$$

توجه شود که همانند مسئله ۴، این سری به ازای همه مقادیر x همگراست، و $J_1(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ گراندار است. تابع J_1 را تابع بسل نوع اول از رتبه يك می نامند.
 (ب) نشان دهید که تعیین جواب دومی به صورت

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0$$

غیرممکن است.

۱۰.۵.۴ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیرعادی منظم، بخش دوم

اکنون به مسئله کلی تعیین يك جواب معادله

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \quad (1)$$

می پردازیم، که در آن

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و هر دوسری دارای شعاع همگرایی غیر صفرند [معادله (۳) بند ۵.۴ را ببینید]. نقطه $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است. برای آسانی نخست فرض می کنیم که $x > 0$ ، و به جستجوی جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (2)$$

می پردازیم. با جایگزینی در معادله (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & a_0 r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \dots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \dots \\ & + (p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n + \dots) \\ & \times [a_0 r x^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \dots + a_n(r+n)x^{r+n} + \dots] \\ & + (q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n + \dots) \end{aligned}$$

$$\times (a_0 x' + a_1 x^{r+1} + \dots + a_n x^{r+n} + \dots) = 0 \quad (3)$$

چون سریها را در یکدیگر ضرب کرده و جمله‌های مشابه را جمع کنیم، داریم

$$\begin{aligned} & a_0 F(r) x' + [a_1 F(r+1) + a_0 (p_1 r + q_1)] x^{r+1} \\ & + \{a_2 F(r+2) + a_0 (p_2 r + q_2) + a_1 [p_1 (r+1) + q_1]\} x^{r+2} \\ & + \dots + \{a_n F(r+n) + a_0 (p_n r + q_n) + a_1 [p_{n-1} (r+1) + q_{n-1}] \\ & + \dots + a_{n-1} [p_1 (r+n-1) + q_1]\} x^{r+n} + \dots = 0 \end{aligned}$$

یا به صورت فشرده تر

$$a_0 F(r) x' + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0 \quad (4)$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 \quad (5)$$

اگر بنا باشد که معادله (۴) متحداً برقرار گردد، باید ضریب هر توان x صفر شود.

چون $a_0 \neq 0$ ، از جمله شامل x' معادله شاخص $F(r) = 0$ حاصل می‌شود. بار دیگر تأکید می‌کنیم که معادله شاخص $F(r) = 0$ دقیقاً معادله‌ای است که در تعیین جوابهایی به صورت x' برای معادله اوایلر $x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0$ متناظر به معادله (۱) به دست می‌آید. ریشه‌های معادله شاخص را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم، و هنگامی که ریشه‌ها حقیقی باشند فرض می‌کنیم $r_1 \geq r_2$. اگر ریشه‌ها مختلط باشند، این ترتیب مطرح نیست. تنها به‌ازای این مقادیر r می‌توان انتظار داشت که برای معادله (۱) جوابهایی به صورت (۲) به دست آید.

چون ضریب x^{r+n} را در معادله (۴) برابر صفر قرار دهیم، رابطه بازگشت

$$F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad n \geq 1 \quad (6)$$

به دست می‌آید. معادله (۶) نشان می‌دهد که عموماً، به مقدار r و همه ضرایب پیش از آن a_0, a_1, \dots, a_{n-1} بستگی دارد. علاوه بر این دیده می‌شود که می‌توان متوالیاً $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ را بر حسب ضرایب سریهای $x p(x)$ و $x^2 q(x)$ محاسبه کرد، به شرط آنکه $F(r+1), F(r+2), \dots, F(r+n), \dots$ صفر نشوند. تنها مقادیر r که به‌ازای آنها $F(r)$ صفر می‌شود عبارتند از $r = r_1$ و $r = r_2$ ؛ چون $r_1 + n$ به‌ازای $n \geq 1$ با r_1 یا r_2 برابر نیست، در نتیجه $F(r_1 + n) \neq 0$ به‌ازای $n \geq 1$. بنا بر این همواره می‌توان یک جواب معادله، یعنی

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (7)$$

را تعیین کرد. در اینجا از نماد $a_n(r_1)$ استفاده شده است تا نشان دهد که a_n از معادله (۶) به ازای $r = r_1$ محاسبه گردیده است. علاوه بر این برای تصریح a_0 را برابر يك اختیار کرده ایم.

اگر r_2 برابر r_1 نباشد، و $r_1 - r_2$ نیز يك عدد صحیح مثبت نباشد، آنگاه $r_2 + n$ به ازای هیچیک از مقادیر $n \geq 1$ برابر r_1 نخواهد بود؛ بنابراین $F(r_2 + n) \neq 0$ ، و می توان جواب دومی به صورت

$$y_2(x) = x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \quad (۸)$$

به دست آورد.

پیش از ادامه بحث، چند نکته را درباره سری جوابهای (۷) و (۸) متذکر می شویم. سریهای توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$ در داخل شعاع همگرایی، توابعی هستند که در $x=0$ تحلیلی اند. بنابراین اگر در جوابهای y_1 و y_2 تغییرات غیر عادی وجود داشته باشد، با جمله های x^{r_1} و x^{r_2} که به ترتیب در این توابع تحلیلی ضرب می شوند تعیین می گردد. دیگر آنکه، برای به دست آوردن جوابهای حقیقی به ازای $x < 0$ ، می توان از تبدیل $\xi = -x$ با $\xi > 0$ استفاده کرد. همان گونه که از بحث پیرامون معادله اولیتر برمی آید، کافی است به جای x^{r_1} در معادله (۷) و x^{r_2} در معادله (۸) به ترتیب $|x|^{r_1}$ و $|x|^{r_2}$ بگذاریم. بالاخره، اگر r_1 و r_2 اعداد مختلط باشند، لزوماً مزدوج اند، و $r_2 \neq r_1 + N$. پس می توان دوسری جواب به صورت (۲) محاسبه کرد؛ اما، این جوابها توابعی از x با مقادیر مختلط خواهند بود. جوابهای با مقدار حقیقی را می توان از قسمتهای حقیقی و موهومی جوابهای مختلط به دست آورد.

اگر $r_2 = r_1$ ، تنها يك جواب به صورت (۲) به دست می آید. جواب دوم شامل يك جمله لگاریتمی است. روشی برای تعیین يك جواب دوم در بند ۶.۴ و مثالی در بند ۷.۴ بررسی شده است.

اگر $r_1 - r_2 = N$ ، که در آن N عدد صحیح مثبتی است، آنگاه $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$ ، و نمی توان $a_N(r_2)$ را از معادله (۶) به دست آورد، مگر آنکه اتفاقاً حاصل جمع موجود در معادله (۶) نیز به ازای $n = N$ صفر شود. اگر چنین باشد، می توان نشان داد که a_N دلخواه است و سری جواب دومی به دست می آید؛ در غیر این صورت، تنها يك سری جواب به صورت (۲) خواهیم داشت. در این حالت، جواب دوم شامل يك جمله لگاریتمی است. روش این کار به اختصار در بند ۶.۴، و مثالهایی برای هر دو حالت در بند ۷.۴ مورد بحث قرار می گیرد.

مسئله دیگری که باید در نظر داشت، همگرایی سریهایی است که در جواب صوری وجود دارند. همان طور که انتظار می رود، این موضوع به شعاع همگرایی سریهای توانی $x^2 q(x)$ و $x p(x)$ مربوط است. نتایج بحث و نکاتی درباره همگرایی سریهای جواب را

در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۳.۴. معادله دیفرانسیل (۱)

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0$$

داکه در آن $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است در نظر می‌گیریم. آنگاه $x^2 q(x)$ و $x^2 p(x)$ در $x = 0$ تحلیلی‌اند و دارای بسطهایی به صورت سری توانی

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

می‌باشند که به ازای $|x| < \rho$ همگرایند، و در آن $\rho > 0$ می‌نیم شعاعهای همگرایی سربهای توانی $x^2 q(x)$ و $x^2 p(x)$ است. فرض کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادله شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

باشند، و هنگامی که حقیقی‌اند، $r_1 \geq r_2$. آنگاه در هر يك از فواصل $-\rho < x < 0$ یا $0 < x < \rho$ يك جواب به صورت

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (9)$$

وجود دارد، $a_n(r_1)$ با رابطه بازگشت (۶) که در آن $a_0 = 1$ و $r = r_1$ است داده می‌شود. اگر $r_1 - r_2$ صفر یا عدد صحیح مثبتی نباشد، آنگاه در هر يك از فواصل $-\rho < x < 0$ یا $0 < x < \rho$ جواب مستقل خطی دومی به صورت

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \quad (10)$$

وجود دارد. $a_n(r_2)$ نیز با رابطه بازگشت (۶) به ازای $a_0 = 1$ و $r = r_2$ تعیین می‌شود. سربهای توانی در دابط (۹) و (۱۰) حداقل به ازای $|x| < \rho$ همگرایند.

امکان دارد که سربهای (۹) و (۱۰) دارای شعاعهای همگرایی بزرگتر از ρ باشند؛ اگر چنین باشد، جوابهای (۹) و (۱۰) در فواصل بزرگتر متناظر معتبرند. گرچه اثبات این قضیه از محدوده این متن خارج است، با وجود این می‌توان چند نکته را متذکر شد. برای تعیین r_1 و r_2 ، ریشه‌های معادله شاخص، که در این مبحث دارای چنین نقش پراهمیتی هستند، تنها باید p_0 و q_0 را تعیین و سپس معادله $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ را حل کرد. این ضرایب با

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) \quad (11)$$

داده می‌شوند. در عمل، به جای حفظ فرمول بازگشت (۶) برای a_n ، معمولاً سری (۲) را

به جای y در معادله (۱) قرار می‌دهیم، مقادیر r را تعیین کرده و a_n را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

در پایان متذکر می‌شویم که اگر $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (12)$$

باشد که در آن P ، Q و R چند جمله‌ای‌اند، آنگاه $P(x) = xQ(x)/P(x)$ و $x^2 q(x) = x^2 R(x)/P(x)$ بدین‌سان

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (13)$$

علاوه بر این، شعاعهای همگرایی سریهای (۹) و (۱۰) حداقل برابر مسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر P می‌باشند.

مثال. چگونگی جوابهای معادله

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

را در همسایگی نقاط غیرعادی بررسی کنید.

با مقایسه این معادله با (۱۲) داریم $P(x) = 2x(1+x)$ ، $Q(x) = 3+x$ ، و $R(x) = -x$. روشن است که نقاط $x = 0$ و $x = -1$ نقاط غیرعادی‌اند. نقطه $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-x}{2x(1+x)} = 0$$

علاوه بر این از روابط (۱۳) داریم $p_0 = 3/2$ و $q_0 = 0$. بدین‌سان معادله شاخص به

$$r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0 \quad \text{خواهد بود، و ریشه‌های آن عبارتند از } r_1 = 0 \text{ و } r_2 = -1/2$$

چون این ریشه‌ها برابر نیستند و تفاضل آنها نیز برابر يك عدد صحیح نیست، دو جواب مستقل خطی به صورت

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n, \quad y_2(x) = |x|^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n \right]$$

به ازای $0 < |x| < \rho$ وجود دارد. يك کران پایین برای شعاع همگرایی این سریها ۱ است که مسافت از $x = 0$ تا $x = -1$ صفر دیگر $P(x)$ می‌باشد. توجه شود که وقتی $x \rightarrow 0$ جواب y_1 کراندار و در واقع تحلیلی است. از طرف دیگر جواب دوم y_2 وقتی $x \rightarrow 0$ بی کران است.

نقطه $x = -1$ نیز يك نقطه غیر عادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0$$

در این حالت $p_0 = -1$ ، $q_0 = 0$ ، بنابراین معادله شاخص $r(r-1)-r=0$ می باشد. ریشه های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 2$ و $r_2 = 0$. متناظر با ریشه بزرگتر، جوابی به صورت

$$y_1(x) = (x+1)^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n \right].$$

وجود دارد. این سری حداقل به ازای $|x+1| < 1$ همگراست. چون تفاضل دو ریشه عدد صحیح مثبتی است، امکان دارد که جواب دوم به صورت

$$y_2(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n \right]$$

نباشد، و بدون بررسی بیشتر چیزی نمی توان گفت.

مسائل

۱. مطلوب است تعیین همه نقاط غیر عادی منظم هریک از معادلات دیفرانسیل زیر. معادله شاخص و نماهای تکنیکی را در هریک از نقاط غیر عادی منظم بیابید.

$$xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + 4xy' + 6y = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' + 3(\sin x)y' - 2y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$2x(x+2)y'' + y' - xy = 0 \quad (\text{و})$$

$$x^2 y'' + \frac{1}{4}(x + \sin x)y' + y = 0 \quad (\text{ز})$$

$$(x+1)^2 y'' + 3(x^2-1)y' + 2y = 0 \quad (\text{ح})$$

۲. نشان دهید که

$$x^2 y'' + (\sin x) y' - (\cos x) y = 0$$

دارای يك نقطه غیرعادی منظم در $x = 0$ است، و ریشه‌های معادله شاخص ± 1 می‌باشند. نخستین سه جمله غیر صفر سری متناظر به ریشه بزرگتر را بیابید.
۳. نشان دهید که

$$(\ln x) y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

دارای يك نقطه غیرعادی منظم در $x = 1$ است. ریشه‌های معادله شاخص را در $x = 1$ بیابید. نخستین سه جمله غیر صفر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{r+n}$ متناظر به ریشه بزرگتر را تعیین کنید. فرض کنیم $x - 1 > 0$. برای شعاع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.
۴. مسائل متعددی از فیزیک ریاضی (مثلاً، معادله شرودینگر برای اتم هیدروژن) به بررسی معادله دیفرانسیل

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (\text{يك})$$

می‌انجامد، که در آن α ، β و γ مقادیر ثابت‌اند. این معادله به معادله فوق هندسی موسوم است.

(الف) نشان دهید که $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از 0 و $1 - \gamma$.

(ب) نشان دهید که $x = 1$ يك نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از 0 و $\gamma - \alpha - \beta$.

(ج) با فرض آنکه $1 - \gamma$ يك عدد صحیح مثبتی نباشد، نشان دهید که در همسایگی $x = 0$ يك جواب معادله (يك) عبارت است از

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} x^2 + \dots$$

برای شعاع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.

(د) با فرض آنکه $1 - \gamma$ يك عدد صحیح یا صفر نباشد، نشان دهید که جواب دوم به ازای $1 < x < 0$ عبارت است از

$$y_2(x) = x^{(1-\gamma)} \left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!} x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!} x^2 + \dots \right]$$

(ه) نشان دهید که نقطه واقع در بینهایت، يك نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از α و β . مسئله ۱۳، بند ۳.۴ را ببینید.

۵. معادله دیفرانسیل

$$x^r y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

راکه در آن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ دو ثابت حقیقی اند در نظر می گیریم.

(الف) نشان دهید که $x = 0$ يك نقطه غیر عادی نامنظم است.

(ب) نشان دهید که اگر بخواهیم يك جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعیین کنیم،

معادله شاخص خطی خواهد بود، و در نتیجه تنها يك جواب صوری به این شکل وجود خواهد داشت.

۶. معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s} y' + \frac{\beta}{x^t} y = 0 \quad (\text{يك})$$

راکه در آن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ دو عدد حقیقی اند در نظر می گیریم، s و t اعداد صحیح مثبت اند و موقتاً آنها را دلخواه فرض می کنیم.

(الف) نشان دهید که اگر $s > 1$ یا $t > 2$ ، آنگاه نقطه $x = 0$ يك نقطه غیر عادی نامنظم است.

(ب) فرض کنیم که بخواهیم برای معادله (يك) جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad x > 0 \quad (\text{دو})$$

بیابیم. نشان دهید که اگر $s = 2$ و $t = 2$ ، آنگاه برای r تنها يك مقدار ممکن است که به ازای آن معادله (يك) دارای يك جواب صوری به شکل (دو) باشد.

(ج) نشان دهید که اگر $s = 1$ و $t = 3$ ، معادله (يك) دارای جوابهایی به صورت (دو) نیست.

(د) نشان دهید که ما کزیم مقادیر s و t که به ازای آنها معادله شاخص بر حسب r درجه دوم است [و بنا بر این می توان انتظار داشت که دو جواب به صورت (دو) به دست آید] عبارتند از $s = 1$ و $t = 2$. این دقیقاً همان شرایطی است که «تکنیکی ضعیف» یعنی نقطه غیر عادی منظم را از نقطه غیر عادی نامنظم به گونه ای که در بند ۳.۴ تعریف شدند متمایز می سازد. به عنوان تذکره اشاره می کنیم که گرچه گاهی می توان يك سری صوری جواب به شکل (دو) در نقطه غیر عادی نامنظم به دست آورد، اما این سری ممکن است همگرا نباشد.

۶.۴۰ سریهای جواب در مجاورت يك نقطه غیر عادی منظم؛

$$N = r_1 - r_2 \text{ و } r_1 = r_2$$

اکنون به بررسی حالتی که در آن r_1 و r_2 ریشه های معادله شاخص برابر باشند یا تفاضل آنها $N = r_1 - r_2$ يك عدد صحیح مثبتی باشد، می پردازیم. اگر $r_1 = r_2$ ، بنا بر شباهت

با معادلهٔ اولر می‌توان حدس زد که جواب دوم شامل يك جملهٔ لگاریتمی است. هنگامی که تفاضل ریشه‌ها عدد صحیحی است امکان دارد که وضع باز به همین منوال باشد. وضعیت کلی، با در نظر گرفتن حالتی که در آن تفاضل r_1 و r_2 برابر عدد صحیح نیست در قضیهٔ زیر خلاصه می‌شود.

قضیه ۴.۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \quad (1)$$

دا که در آن $x = 0$ يك نقطهٔ غیرعادی منظم است در نظر می‌گیریم. آنگاه توابع $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی‌اند و دارای نمایش سری توانی به صورت

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

می‌باشند که به ازای $|x| < \rho$ همگرایند، $\rho > 0$ می‌نیم شعاع همگرایی سریهای توانی متناظر با $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ است. فرض کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \quad (3)$$

باشند و هنگامی که حقیقی‌اند قرار می‌دهیم $r_1 \geq r_2$. آنگاه در هر يك از فواصل $0 < x < \rho$ یا $-\rho < x < 0$ معادلهٔ (۱) دارای دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 به صورت زیر می‌باشد.

۱. اگر $r_1 - r_2$ عدد صحیح یا صفر نباشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad (4 \text{ الف})$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right]. \quad (4 \text{ ب})$$

۲. اگر $r_1 = r_2$ آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (5 \text{ الف})$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n \quad (5 \text{ ب})$$

۳. اگر $N = r_1 - r_2$ يك عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (6 \text{ الف})$$

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right]. \quad (6 \text{ ب})$$

ضرایب $a_n(r_1), a_n(r_2), b_n(r_1), c_n(r_2)$ و ثابت a را می‌توان با گذاشتن جوابهای به‌صورت سری به‌جای y در معادله (۱) تعیین کرد. امکان دارد که مقدار ثابت a برابر صفر شود. هر يك از سریها در روابط (۴)، (۵) و (۶) حداقل به‌ازای $|x| < p$ همگرا است و معرف تابعی می‌باشد که در $x=0$ تحلیلی است.

حالتی را که در آن $r_1 - r_2$ عدد صحیحی نیست در بند ۱۰۵۰۴ بررسی کردیم. در اینجا به‌حالتهای $r_1 = r_2$ و $N = r_1 - r_2$ می‌پردازیم، و فرض می‌کنیم که $x > 0$. جوابهای با مقدار حقیقی به‌ازای $x < 0$ را می‌توان مانند پیش با قرار دادن $x = -x$ به‌دست آورد.

$r_1 = r_2$. روش تعیین جواب دوم اساساً همان است که در تعیین جواب دوم معادله اولر (بند ۴۰۴ را ببینید) هنگامی که ریشه‌های معادله شاخص برابر بودند به‌کار گرفتیم. برای معادله (۱) جوابی به‌صورت

$$y = \phi(r, x) = x' \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x' \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \quad (۷)$$

جستجو می‌کنیم، برای تأکید این نکته که ϕ به‌انتخاب r بستگی دارد نوشته‌ایم $y = \phi(r, x)$. اگر سریهای (۲) را به‌جای $x p(x)$ و $x^2 q(x)$ قرار دهیم، با محاسبه y' و y'' از رابطه (۷) و جایگزینی آنها در معادله و بالاخره دسته‌بندی جمله‌ها داریم (روابط (۳) و (۴) بند ۱۰۵۰۲ را ببینید)

$$L[\phi](r, x) = x' a_0 F(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} \quad (۸)$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \quad (۹)$$

اگر ریشه‌های معادله شاخص هردو برابر r_1 باشند، يك جواب را می‌توان با قراردادن r_1 به‌جای r و انتخاب a_n به‌طوری که هر جمله سری رابطه (۸) صفر شود به‌دست آورد. برای تعیین جواب دوم r را به‌عنوان متغیر پیوسته‌ای در نظر می‌گیریم، و a_n را به‌صورت تابعی از r به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضریب x^{r+n} ، $n \geq 1$ ، در رابطه (۸) صفر شود. آنگاه با فرض $F(r+n) \neq 0$ خواهیم داشت

$$a_n(r) = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(r+n)}, \quad n \geq 1 \quad (۱۰)$$

با انتخاب این‌مقدار برای $a_n(r)$ به‌ازای $n \geq 1$ ، رابطه (۸) به‌صورت ساده زیردرمی‌آید

$$L[\phi](r, x) = a_0 x' F(r) \quad (11)$$

چون r_1 ریشه مضاعف $F(r)$ است، از رابطه (۹) نتیجه می شود که $F(r) = (r - r_1)^2$ با قراردادن $r = r_1$ در رابطه (۱۱) خواهیم داشت $L[\phi](r_1, x) = 0$ ؛ بنابراین، همان گونه که از پیش می دانستیم

$$y_1(x) = \phi(r_1, x) = x^{r_1} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad x > 0 \quad (12)$$

يك جواب معادله (۱) است. اما نکته مهمتر آنکه، از رابطه (۱۱) درست مانند آنچه در مورد معادله اویلر داشتیم، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r} [x'(r - r_1)^2] \Big|_{r=r_1} \\ &= a_0 [(r - r_1)^2 x' \ln x + 2(r - r_1) x'] \Big|_{r=r_1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین، جواب دوم معادله (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ x' \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n \right] \right\} \Big|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1} \ln x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $a'_n(r_1)$ نمایشگر مقدار da_n/dr در $r = r_1$ است و $a_n(r)$ با رابطه (۱۰) مشخص می گردد.

توجه شود که علاوه بر فرضهایی که قبلاً داشتیم، در اینجا فرض کرده ایم که می توان

از سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n$ جمله به جمله نسبت به r مشتق گرفت. علاوه بر این، تعیین $a_n(r_1)$ و $a'_n(r_1)$ موضوع ساده ای نیست؛ ولیکن، تعیین دو جواب يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با نقطه غیر عادی منظم نیز مسئله ساده ای نیست.

به طور خلاصه، برای تعیین جواب دوم در حالت $r_1 = r_2$ سه روش وجود دارد.

نخست، می توان مستقیماً $b_n(r_1)$ را با جایگزینی عبارت (۵ ب) در معادله (۱) به جای y محاسبه کرد. دوم، می توان برای محاسبه $b_n(r_1) = a'_n(r_1)$ نخست $a_n(r)$ و سپس $a'_n(r_1)$ را تعیین کرد. توجه شود که در محاسبه جواب اول لازم است که $a_n(r_1)$ معلوم باشد، بنابراین مناسبتر است که عبارت کلی $a_n(r)$ را محاسبه کرد و هر دو عبارت $a_n(r_1)$ و $a'_n(r_1)$

را از آن به دست آورد. هنگامی که فقط چند جمله از سری $y_p(x)$ ضروری است، یا عبارت $a_n(r)$ بسیار پیچیده و یا محاسبه آن دشوار است، روش نخست ممکن است مناسبتر باشد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است، اما در آن ناگزیر به استفاده از سربها خواهیم بود.

$N = r_1 - r_p$. در این حالت بحث تفصیلی دربارهٔ به دست آوردن عبارت (۶ ب) برای جواب دوم بسیار پیچیده تر است و به آن نمی پردازیم. اما، متذکر می شویم که اگر

فرض کنیم $y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_p+n}$ ، آنگاه ممکن است محاسبهٔ $a_N(r_p)$ از رابطه (۱۵) دشوار باشد، زیرا

$$F(r+N) = (r+N-r_1)(r+N-r_p) = (r-r_p)(r+N-r_p)$$

به ازای $r = r_p$ صفر می شود. برای رفع این دشواری a_0 را که می توان به طور دلخواه انتخاب کرد، برابر $r - r_p$ می گیریم. آنگاه هر یک از a ها با $r - r_p$ متناسب خواهد شد، بنابراین در صورت کسر رابطه (۱۵) سازهٔ $r - r_p$ وجود خواهد داشت، و با سازهٔ متناظر در مخرج که به ازای $n = N$ به وجود می آید ساده می شود. با تحلیلی مشابه آنچه در حالت $r_1 = r_p$ داشتیم به این نتیجه می رسیم که جواب به صورت (۶ ب) است و در آن

$$c_n(r_p) = \frac{d}{dr} [(r-r_p)a_n(r)] \Big|_{r=r_p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

و $a_0 = r - r_p$ با قراردادن (۱۵) از رابطه (۱۵)

$$a = \lim_{r \rightarrow r_p} (r-r_p)a_N(r) \quad (16)$$

به دست می آید. اگر $a_N(r_p)$ متناهی باشد، آنگاه $a = 0$ و در y_p جملهٔ لگاریتمی وجود نخواهد داشت. این روش در کتاب کادینگتون^۱ (فصل ۴) بررسی شده است.

در عمل بهترین راه برای تعیین آن که آیا a در جواب دوم صفر است یا نه آن است که ببینیم آیا می توان a_n متناظر به r_p را محاسبه و $a_N(r_p)$ را تعیین کرد؟ اگر چنین باشد مشکل دیگری نداریم، و گرنه، باید از عبارت (۶ ب) با $a \neq 0$ استفاده کرد.

به طور خلاصه، در حالت $r_1 - r_p = N$ نیز برای تعیین جواب دوم سه روش موجود است. نخست، می توان a و $c_N(r_p)$ را مستقیماً با جایگزینی عبارت (۶ ب) به جای y در معادله (۱) محاسبه کرد. دوم، می توان a و $c_N(r_p)$ موجود در رابطه (۶ ب) را با استفاده از فرمولهای (۱۵) و (۱۶) محاسبه کرد. اگر این روش در نظر گرفته شود، باید در محاسبهٔ جواب متناظر به $r = r_p$ فرمول کلی $a_n(r)$ را به دست آورد و ندانیم که فقط به محاسبهٔ $a_N(r_p)$ اکتفا کرد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است.

در بند دیگر سه مثال می آوریم تا حالت های $r_1 = r_p$ ، $N = r_1 - r_p$ با $a = 0$ ، و $N = r_1 - r_p$ با $a \neq 0$ را توضیح دهد.

۷.۴۰ معادله بسل

در این بند به بررسی سه حالت خاص معادله بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (۱)$$

که در آن ν مقداری است ثابت می‌پردازیم، تا نظریه‌ای را که در بند ۶.۴ مورد بحث قرار گرفت توضیح دهد. روشن است که $x = 0$ يك نقطه غیر عادی منظم می‌باشد. برای سهولت تنها به بررسی حالت $x > 0$ می‌پردازیم.

معادله بسل رتبه صفر. این مثال حالتی را که در آن ریشه‌های معادله شاخص برابرند توضیح می‌دهد. با قراردادن $\nu = 0$ در معادله (۱) به‌دست می‌آید

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \quad (۲)$$

یا جایگزینی

$$y = \phi(r, x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (۳)$$

داریم

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\} x^{r+n} = 0 \end{aligned} \quad (۴)$$

ریشه‌های معادله شاخص $F(r) = r(r-1) + r = 0$ عبارتند از $r_1 = 0$ و $r_2 = 0$ ؛ بنابراین حالت برابری دو ریشه است. رابطه بازگشت عبارت از

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1) + (n+r)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \quad n \geq 2 \quad (۵)$$

برای تعیین $y_1(x)$ قرار می‌دهیم $r = 0$. آنگاه از رابطه (۴) نتیجه می‌شود که برای آنکه ضریب x^{r+1} صفر شود، باید a_1 را برابر صفر انتخاب کرد. بنابراین از رابطه (۵) داریم

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n-1} = \dots = 0$$

علاوه بر این

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

با قراردادن $n = 2m$ داریم

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

بدین سان

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2},$$

$$a_4(0) = -\frac{a_2(0)}{(2 \cdot 2)^2} = +\frac{a_0}{(2 \cdot 2)^2 2^2} = \frac{a_0}{2^4 2^2}$$

$$a_6(0) = -\frac{a_4(0)}{(2 \cdot 3)^2} = -\frac{a_0}{(2 \cdot 3)^2 2^4 2^2} = -\frac{a_0}{2^6 (3 \cdot 2)^2}$$

⋮

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

بنابراین

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad x > 0 \quad (7)$$

تابعی را که در کروسه است تابع بسل نوع اول از دقت هفر، می نامند، و با $J_0(x)$ نشان می دهند. از قضیه ۴.۴ نتیجه می شود که این سری بدای همه مقادیر x همگراست، و J_0 در $x=0$ تحلیلی است. برخی از خواص مهم J_0 را در مسائل مورد بحث قرار می دهیم. در این مثال $y_1(x)$ را با محاسبه $a'_n(0)$ تعیین خواهیم کرد. روش دیگری در آن تنها باید عبارت (۵) بند ۴.۶ را در معادله (۲) قرارداد، و سپس b_n را تعیین کرد، در مسئله ۷ بحث شده است. نخست از ضریب x^{r+1} در رابطه (۴) دیده می شود که $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. در نتیجه نه تنها $a_1(0) = 0$ ، بلکه نیز $a'_1(0) = 0$ به آسانی از رابطه بازگشت (۵) نتیجه می شود که

$$a'_1(0) = a'_3(0) = \dots = a'_{2n+1}(0) = \dots = 0$$

بنابراین تنها باید به محاسبه $a'_{2m}(0)$ ، $m=1, 2, 3, \dots$ از رابطه (۵)

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(2m+r)^2, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

پرداخت. بنابراین

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(2+r)^2}$$

$$a_4(r) = -\frac{a_2(r)}{(4+r)^2} = +\frac{a_0}{(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$a_{\nu}(r) = -\frac{a_{\nu}}{(\epsilon+r)^{\nu}} = -\frac{a_0}{(\epsilon+r)^{\nu}(\nu+r)^{\nu}(\nu+r)^{\nu}}$$

$$\vdots$$

$$a_{\nu m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(\nu m+r)^{\nu}(\nu m-\nu+r)^{\nu} \dots (\nu+r)^{\nu}(\nu+r)^{\nu}}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

محاسبه $a'_{\nu m}(r)$ را می توان با توجه به نکته زیر به آسانترین وجه انجام داد. اگر

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1} (x-\alpha_2)^{\beta_2} (x-\alpha_3)^{\beta_3} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

آنگاه

$$f'(x) = \beta_1 (x-\alpha_1)^{\beta_1-1} [(x-\alpha_2)^{\beta_2} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n}]$$

$$+ \beta_2 (x-\alpha_2)^{\beta_2-1} [(x-\alpha_1)^{\beta_1} (x-\alpha_3)^{\beta_3} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n}] + \dots$$

بنابراین به ازای x مخالف با $\alpha_n, \dots, \alpha_2, \alpha_1$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}$$

بدین سان، از رابطه (۸) داریم

$$\frac{a'_{\nu m}(r)}{a_{\nu m}(r)} = -\nu \left(\frac{1}{\nu m+r} + \frac{1}{\nu m-\nu+r} + \dots + \frac{1}{\nu+r} \right)$$

و با قراردادن $r=0$ داریم

$$a'_{\nu m}(0) = -\nu \left[\frac{1}{\nu m} + \frac{1}{\nu(m-1)} + \frac{1}{\nu(m-2)} + \dots + \frac{1}{\nu} \right] a_{\nu m}(0)$$

با جایگزینی $a_{\nu m}(0)$ از رابطه ۶، و با قراردادن

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{\nu} + 1 \quad (9)$$

سرانجام به دست می آید

$$a'_{\nu m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{\nu^{\nu m} (m!)^{\nu}}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

جواب دوم معادله بسل رتبه صفر با قرار دادن $a_0=1$ و جایگزینی $y_1(x)$ و

$a'_{\gamma m}(0) = b_{\gamma m}(0)$ در رابطه (۵) بند ۶.۴ به دست می آید. داریم

$$y_{\gamma}(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{\gamma^2 m (m!)^2} x^{\gamma m}, \quad x > 0 \quad (11)$$

به جای y_{γ} ، جواب دوم معمولاً به صورت یک ترکیب خطی از J_0 و y_{γ} اختیار می شود. این تابع را، تابع بسل نوع دوم از رتبه صفر می نامند، و با Y_0 نشان می دهند. مطابق با کتاب کاپسون^۱ (فصل ۱۲) تعریف می کنیم^۲.

$$Y_0(x) = \frac{\gamma}{\pi} [y_{\gamma}(x) + (\gamma - \ln \gamma) J_0(x)] \quad (12)$$

در اینجا γ یک مقدار ثابت است، که به ثابت اویلر-ماسکرونی^۳ مشهور است؛ و با رابطه زیر تعریف می شود

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \cong 0.5772 \quad (13)$$

با جایگزینی $y_{\gamma}(x)$ در رابطه (۱۲)، خواهیم داشت

$$Y_0(x) = \frac{\gamma}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{\gamma} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{\gamma^2 m (m!)^2} x^{\gamma m} \right], \quad x > 0 \quad (14)$$

جواب عمومی معادله بسل رتبه صفر به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

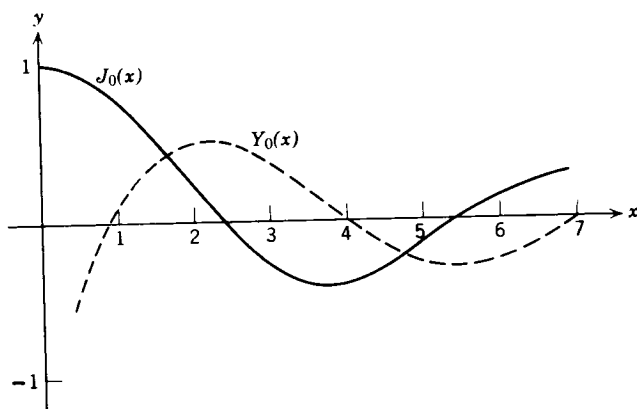
توجه شود که چون وقتی $x \rightarrow 0$ داریم $J_0(x) \rightarrow 1$ بنابراین $Y_0(x)$ در $x=0$ غیرعادی لگاریتمی است؛ یعنی، هنگامی که بسا مقادیر مثبت $x \rightarrow 0$ ، تغییرات $Y_0(x)$ همانند $(\gamma/\pi) \ln x$ است. بدین سان اگر همان طور که اغلب اتفاق می افتد بخواهیم جوابهایی از معادله بسل رتبه صفر را که در مبدأ متناهی باشند بیابیم، باید از Y_0 صرف نظر کنیم. نمودارهای توابع J_0 و Y_0 در شکل ۲.۴ نشان داده شده اند. این نکته جالب را با توجه به شکل ۲.۴ می توان دریافت که به ازای مقادیر بزرگ x هر دو تابع $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ نوسانی اند. این کیفیت را می توان از معادله اصلی پیش بینی کرد؛ و در واقع برای جوابهای معادله بسل رتبه ν برقرار است. اگر معادله (۱) را بر x^2 تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

1. Copson

۲. مؤلفین دیگر تعاریف دیگری برای Y_0 به کار می برند. آنچه در اینجا برای Y_0 انتخاب شد به عنوان تابع وبر (Weber)، (۱۸۴۲-۱۹۱۳) نیز مشهور است.

3. Máscheroni (1750-1800)



شکل ۲۰۴ توابع بسل رتبه صفر.

به ازای مقادیر بزرگ x ، می توان حدس زد که جمله های $y'(1/x)$ و $y(x^2/x^2)$ کوچک اند و بنابراین می توان از آنها صرف نظر کرد. در صورت صحت حدس فوق، معادله بسل رتبه ν را می توان با

$$y'' + y = 0$$

تقریب زد. جوابهای این معادله عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$ ؛ بدین سان می توان پیش بینی کرد که جوابهای معادله بسل به ازای مقادیر بزرگ x با ترکیبهای خطی $\sin x$ و $\cos x$ مشابهند. این نکته از آن جهت که توابع بسل نوسانی اند درست است؛ اما از جنبه های دیگر درست نیست. به ازای مقادیر بزرگ x توابع J_ν و Y_ν هنگامی که x افزایش یابد مستهلک می شوند؛ به ویژه، می توان ثابت کرد که وقتی $x \rightarrow \infty$ تغییرات تابع $J_\nu(x)$ همانند $(2/\pi x)^{1/2} \cos(x - \pi/4)$ است. این نکته را نمی توان از معادله $y'' + y = 0$ استنباط کرد. بدین سان معادله $y'' + y = 0$ تقریب مناسبی از معادله بسل به ازای مقادیر بزرگ x به دست نمی دهد. جوابهای این دو معادله دارای ویژگیهای مشترکی می باشند، اما تفاوتی بارزی نیز دارند. باید به جوابهای معادله بسل رتبه $1/2$ که در ذیل مورد بحث قرار گرفته اند نیز توجه داشت.

معادله بسل رتبه $1/2$ این مثالی است برای حالتی که در آن تفاضل ریشه های معادله شاخص عدد صحیح مثبتی است، اما جواب دوم شامل جمله لگاریتمی نیست. با قراردادن $\nu = 1/2$ در معادله (۱) داریم

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \quad (15)$$

اگر سری (۳) را به جای $y = \phi(r, x)$ بگذاریم، به دست می آید

$$\begin{aligned}
 L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4} \right] a_n x^{r+n} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4} \right] a_1 x^{r+1} \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1/2$ ؛ بنابراین تفاضل ریشه‌ها برابر يك عدد صحیح است. رابطه بازگشت عبارت است از

$$\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (17)$$

ازضرب x^{r+1} در رابطه (۱۶)، $a_1 = 0$ ، متناظر به ریشه بزرگتر $r_1 = 1/2$ به دست می‌آید. بنابراین، از رابطه (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$a_2 = a_4 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$$

علاوه براین، به ازای $r = 1/2$ داریم

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

یا با قراردادن $n = 2m$

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+1)2m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

بدین سان

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{3 \cdot 2} = -\frac{a_0}{3!} \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{5 \cdot 4} = +\frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{a_0}{5!} \\
 &\vdots \\
 a_{2m} &= \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (18)
 \end{aligned}$$

بنابراین، با قراردادن $a_0 = 1$ داریم

$$y_1(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \right]$$

$$= x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x > 0. \quad (19)$$

سری توانی موجود در رابطه (۱۹) دقیقاً سری تیلر $\sin x$ است؛ بنابراین یک جواب معادله بسل رتبه $1/2$ عبارت است از $x^{-1/2} \sin x$. تابع بسل نوع اول رتبه $1/2$ ، $J_{1/2}$ را با y_1 $(2/\pi)^{1/2}$ تعریف می کنند. بدین سان

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \sin x, \quad x > 0. \quad (20)$$

متناظر به ریشه $r_2 = -1/2$ امکان دارد محاسبه a_1 با اشکال مواجه شود، زیرا $N = r_1 - r_2 = 1$. اما، از رابطه (۱۶) دیده می شود که به ازای $r = -1/2$ ضرایب a_0 و a_1 صفرند، و بنابراین می توان ضرایب a_0 و a_1 را به طور دلخواه انتخاب کرد. آنگاه می توان متناظر به a_0 از رابطه بازگشت (۱۷) مقادیر a_2, a_3, \dots و متناظر با a_1 مقادیر a_4, a_5, a_6, \dots را به دست آورد. بنابراین جواب دوم شامل جمله لگاریتمی نیست. خواننده به عنوان تمرین نشان خواهد داد که به ازای $r = -1/2$ از رابطه (۱۷) داریم

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

بنابراین

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \quad x > 0. \quad (21)$$

جمله دوم طرف دوم معادله مضربی از $y_1(x)$ است. جواب دوم مستقل خطی معادله بسل رتبه $1/2$ را معمولاً متناظر با $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ اختیاری کنند و با $J_{-1/2}$ نشان می دهند. بدین سان

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0. \quad (22)$$

جواب عمومی معادله (۱۵) عبارت است از $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

معادله بسل رتبه يك. این مثال مبین حالتی است که در آن تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عدد صحیح مثبتی است و جواب دوم شامل يك جمله لگاریتمی است. با قراردادن $v = 1$ در معادله (۱) داریم

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0 \quad (23)$$

اگر به جای $y = \phi(r, x)$ سری (۳) را قرارداده و جمله‌ها را مانند مثالهای پیش‌دسته‌بندی کنیم، به‌دست می‌آید

$$L[\phi](r, x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0 \quad (24)$$

ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$. رابطه بازگشت چنین است

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r) \quad n \geq 2 \quad (25)$$

متناظر به ریشه بزرگتر $r = 1$ رابطه بازگشت عبارت است از

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

از ضریب x^{r+1} در رابطه (۲۴) دیده می‌شود که $a_1 = 0$ و از رابطه بازگشت نتیجه می‌شود که $a_3 = a_5 = \dots = 0$. به‌ازای مقادیر زوج n ، قرار می‌دهیم $n = 2m$ ؛ آنگاه

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

بنابراین

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(2)(1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2(3)(2)} = +\frac{a_0}{2^4(3 \cdot 2)(2 \cdot 1)} = \frac{a_0}{2^4 3! 2!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2(4)(3)} = -\frac{a_0}{2^6 4! 3!}$$

⋮

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

با $a_0 = 1$ خواهیم داشت

$$y_1(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \quad (27)$$

تابع بسل نوع اول رتبه يك را معمولاً برابر $\frac{1}{2}y_1$ می گیرند و با J_1 نشان می دهند:

$$J_1(x) = \frac{1}{2}y_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \quad (28)$$

این سری به ازای همه مقادیر x همگرایی مطلق است؛ بنابراین تابع J_1 به ازای همه مقادیر x معین است.

برای تعیین جواب دوم معادله بسل رتبه يك، به توضیح روش جایگزینی مستقیم می پردازیم. محاسبات دشوار است، و نمی توان توقع داشت دانشجویانی که ورزیدگی ندارند محاسبات مشابه را به طور کامل انجام دهند. اما، دانشجو می تواند a و چند ضریب نخستین c_n را از رابطه (۲۹) بدست آورد. بنابراین قضیه ۴.۴ فرض می کنیم که

$$y_2(x) = aJ_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right], \quad x > 0 \quad (29)$$

با محاسبه $y_2'(x)$ و $y_2''(x)$ و جایگزینی در معادله (۲۳)، و با استفاده از این نکته که J_1 جواب معادله (۲۳) است بدست می آید

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \quad (30)$$

که در آن $a_0 = 1$. با جایگزینی $J_1(x)$ از رابطه (۲۸)، و افزایش اندیس جمع بندی دوسری، و برخی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & -c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n \\ & = -a \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

از رابطه (۳۱) نخست دیده می شود که $c_1 = 0$ و $a = -c_0 = -1$. سپس با توجه بداینکه در طرف دوم تنها توانهای فرد x وجود دارد، نتیجه می شود که ضرایب توانهای زوج x در طرف اول باید صفر باشند. بدین سان، چون $c_1 = 0$ داریم $c_2 = c_3 = \dots = 0$. متناظر به توانهای فرد x رابطه بازگشت زیر را بدست می آوریم (با قراردادن $n = 2m+1$ در سری طرف اول رابطه (۳۱))

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

با قراردادن $m=1$ در رابطه (۳۲) به دست می آید

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!)$$

توجه شود که c_4 را می توان به طرد دلخواه انتخاب کرد، و سپس c_4 را از این معادله به دست آورد. همچنین توجه شود که در معادله متناظر به ضریب x ، c_4 در 0 ضرب شده است، و همین معادله برای تعیین a به کار رفت. اینکه c_4 دلخواه است چندان تعجب آور نیست، زیرا c_4 ضریب x در عبارت $\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right] x^{-1}$ است. در نتیجه، c_4 فقط مضربی از J_4 را ایجاد می کند، و y_4 تنها با تقریب مضربی از J_4 معین می شود. بر طبق آنچه در عمل متداول است قرار می دهیم $c_4 = 1/2^2$. آنگاه به دست می آوریم

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \cdot 2} \left[\frac{3}{2} + 1 \right] = \frac{-1}{2^4 \cdot 2!} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 \right] \\ = \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!} (H_2 + H_1)$$

جواب رابطه بازگشت (۳۲) عبارت است از

$$c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \quad m=1, 2, \dots$$

با در نظر گرفتن $H_0 = 0$. البته اثبات این مطلب کار آسانی نیست (و انتظار هم نداریم که دانشجو این محاسبات را انجام دهد). بدین سان

$$y_2(x) = -J_4(x) \ln x + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!} x^{2m} \right], \quad x > 0 \quad (33)$$

محاسبه $y_2(x)$ با استفاده از روش دیگر [روابط (۱۵) و (۱۶) بند ۶.۴ را ببینید] که در آن به تعیین $c_n(p)$ می پردازیم اندکی آسانتر است. به ویژه با این روش فرمول کلی c_{2m} بدون نیاز به حل رابطه بازگشت (۳۲) به دست می آید (مسئله ۸ را ببینید). از این لحاظ ممکن است خواننده علاقه مند باشد که محاسبات جواب دوم معادله بسل رتبه صفر را که در متن و مسئله ۷ آمده است با یکدیگر مقایسه کند.

جواب دوم معادله (۲۳)، تابع بسل نوع دوم رتبه يك یعنی Y_1 ، را معمولاً به صورت يك ترکیب خطی از J_4 و y_4 انتخاب می کنند. طبق کتاب کاپسون (فصل ۱۲)، Y_1 به صورت

زیر تعریف می‌شود

$$Y_1(x) = \frac{1}{\pi} [-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)] \quad (۳۴)$$

که در آن γ با رابطه (۱۳) تعریف شده است. جواب عمومی معادله (۲۳) بد ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

توجه شود که J_1 در $x = 0$ تحلیلی است، اما جواب دوم Y_1 وقتی $x \rightarrow 0$ همانند $1/x$ بی کران می‌شود.

مسائل

۱. نشان دهید که هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر در $x = 0$ دارای يك نقطهٔ غیرعادی منظم است، و دو جواب مستقل خطی آن را بد ازای $x > 0$ تعیین کنید.

(الف) $x^2 y'' + 2x y' + x y = 0$ (ب) $x^2 y'' + 3x y' + (1+x)y = 0$

(ج) $x^2 y'' + x y' + 2x y = 0$ (د) $x^2 y'' + 4x y' + (2+x)y = 0$

۲. دو جواب مستقل خطی معادلهٔ بسل رتبهٔ $3/2$ زیر را بیابید

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

۳. نشان دهید که معادلهٔ بسل رتبهٔ $1/2$

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

را با تعویض تابع $y = x^{-1/2} r(x)$ می‌توان به معادلهٔ

$$r'' + r = 0$$

ساده کرد. از اینجا نتیجه بگیرید که جوابهای معادلهٔ بسل رتبهٔ $1/2$ عبارتند از $y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$ و $y_2(x) = x^{-1/2} \sin x$.

۴. مستقیماً نشان دهید که سری $J_{1/2}(x)$ ، رابطه (۷)، بد ازای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است.

۵. مستقیماً نشان دهید که سری $J_{1/2}(x)$ ، رابطه (۲۸)، بد ازای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است و $J'_{1/2}(x) = -J_{1/2}(x)$.

۶. معادله بسل رتبه ν

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad x > 0$$

راکه در آن ν حقیقی و بزرگتر از صفر است در نظر می گیریم.
(الف) نشان دهید که $x = 0$ يك نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه های معادله شاخص عبارتند از ν و $-\nu$.

(ب) نشان دهید که يك جواب متناظر به ریشه بزرگتر ν عبارت است از

$$y_1(x) = x^\nu \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)(m+\nu-1)\dots(2+\nu)(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$$

(ج) نشان دهید که اگر 2ν عدد صحیح نباشد جواب دوم عبارت است از

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)(m-\nu-1)\dots(2-\nu)(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$$

توجه شود که $y_1(x)$ در $x = 0$ تحلیلی است، و $y_2(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ بی کران است.
(د) با استفاده از روشهای مستقیم تحقیق کنید که سریهای موجود در عبارت های $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ازای همه متادیر x همگرايند. همچنین تحقیق کنید که y_1 تنها با شرط آنکه ν عدد صحیح نباشد يك جواب است.

۷. در این بند نشان دادیم که يك جواب معادله بسل رتبه صفر،

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

عبارت است از J_0 ، که از رابطه (۷) با $a_0 = 1$ به دست می آید. بنابراین قضیه ۴.۴ به ازای $x > 0$ جواب دوم به صورت

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

است.

(الف) نشان دهید که

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2x J_0'(x) \quad (\text{يك})$$

(ب) با جایگزینی سری $J_0(x)$ در رابطه (يك)، نشان دهید که

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad (\text{دو})$$

(ج) توجه شود که در طرف دوم رابطه (دو) تنها توانهای زوج x وجود دارد. نشان

دهید که $b_2 = 1/2^2(1!)^2$, $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$ و

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n \frac{(2n)}{2^{2n}(n!)^2}, \quad n=2, 3, 4, \dots$$

و نتیجه بگیرید که

$$b_4 = \frac{-1}{2^4 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad b_6 = \frac{1}{2^6 6^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

جواب عمومی رابطه بازگشت مزبور عبارت است از $b_{2n} = (-1)^{n+1} H_n / 2^{2n}(n!)^2$ با جایگزینی b_n در عبارت $y_2(x)$ جوابی را که در رابطه (۱۱) داده شده است به دست می آوریم.

۸. برای معادله بسل رتبه یک جواب دومی با محاسبه $c_n(r)$ و a از رابطه (۶ب) بند ۶.۴، براساس فرمولهای (۱۵) و (۱۶) همان بند بیابید. چند راهنمایی لازم در جریان این محاسبات را ذیلاً بیان می کنیم. نخست، با استفاده از رابطه (۲۴) نشان دهید که $a_1(-1) = a'_1(-1) = 0$. آنگاه نشان دهید که $c_1(-1) = 0$ و با توجه به رابطه بازگشت، $c_n(-1) = 0$, $n=3, 5, \dots$. بالاخره، با استفاده از رابطه (۲۵) نشان دهید که

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+r+1)(2m+r-1)^2(2m+r-3)^2 \dots (r+3)^2(r+1)}$$

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1} (H_m + H_{m-1}) / 2^{2m} m! (m-1)!, \quad \text{و} \quad m=1, 2, 3, \dots$$

را محاسبه کنید.

۹. با تعویض مناسب متغیرها اغلب می توان یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر را به معادله بسل از رتبه ν تبدیل کرد. به عنوان مثال، نشان دهید که یک جواب

$$x^2 y'' + \left(\alpha^2 \beta^2 x^{2\beta} + \frac{1}{4} - \nu^2 \beta^2 \right) y = 0, \quad x > 0$$

عبارت است از $y = x^{1/2} f(\alpha x^\beta)$ که در آن $f(\xi)$ یک جواب معادله بسل از رتبه ν است. ۱۰. با استفاده از نتیجه مسئله ۹ نشان دهید که جواب عمومی معادله آیری

$$y'' - xy = 0, \quad x > 0$$

عبارت است از $y = x^{1/2} [c_1 f_1(\frac{2}{3} i x^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3} i x^{3/2})]$ که در آن $f_1(\xi)$ و $f_2(\xi)$ دو جواب مستقل خطی معادله بسل از رتبه $\frac{1}{3}$ می باشند.

۱۱. می توان نشان داد که J_0 دارای بینهایت صفر در $x > 0$ است. به ویژه،

حل کنیم، اغلب اما نه همواره، شرایط اولیه نیز در همین نقطه مشخص شده‌اند. اگر توابع P ، Q و R دارای سازه مشترک $x - x_0$ باشند، فرض می‌شود که از معادله (۱) این سازه مشترک را حذف کرده‌ایم. بنا بر این اگر $P(x_0) = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از دو مقدار $Q(x_0)$ و $R(x_0)$ صفر نیست. جواب معادله (۱) در یک فاصله شامل x_0 تا اندازه‌ای به تغییرات P در این فاصله وابسته است. بدویزه، اگر P در این فاصله صفر نشود، می‌توان با تقسیم معادله (۱) بر $P(x)$ آن را بدصورت

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

درآورد، که در آن $p(x) = Q(x)/P(x)$ و $q(x) = R(x)/P(x)$ توابعی پیوسته‌اند. بنا بر این با توجه به قضیه ۲.۳ وجود یک جواب تضمین می‌شود. در بندهای ۲.۲ و ۱.۲.۴ به بررسی جواب معادله (۱) در همسایگی یک نقطه x_0 که در آن $P(x_0) \neq 0$ است می‌پردازیم. چنین نقطه‌ای را برای معادله (۱) یک نقطه عادی می‌نامند. از طرف دیگر هنگامی که $P(x_0) = 0$ باشد، قضیه ۲.۳ را نمی‌توان به کاربرد، زیرا $p(x)$ و یا $q(x)$ به ازای $x_0 \rightarrow x$ نامحدود خواهند شد. چنین نقطه‌ای را برای معادله (۱) یک نقطه غیرعادی یا نقطه تکین می‌نامند. بندهای ۳.۴ تا ۷.۴ به تعیین جواب‌های معادله (۱) در همسایگی یک نقطه غیرعادی اختصاص دارند.

در هر حالت روش حل مبتنی بر این اندیشه است که y را به صورت یک سری توانی بر حسب $x - x_0$ بنویسیم که در آن x_0 یک نقطه مشخص است. گرچه ممکن است در نظر اول تعیین جواب‌های معادله دیفرانسیل به صورت سری، یأس‌آمیز جلوه کند، اما از لحاظ محاسبات این روش می‌تواند آسانترین راه برای حل این معادله دیفرانسیل باشد. در واقع، جداول $\sin x$ و $\cos x$ (جواب‌های $y'' + y = 0$) را می‌توان با استفاده از سری تیلر آنها حول $x = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (0! = 1) \quad (3)$$

و یا سربهای مشابه محاسبه کرد.

چون در این فصل سربها را بسیار زیاد به کار خواهیم برد، شایسته است به اختصار و بدون اثبات نتایجی از سربها و به ویژه سربهای توانی را بیان کنیم.

۱. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ را هنگامی در نقطه x همگرا گویند، که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n$$

سه صفر نخستین تقریباً برابرند با ۲۴۰۵، ۵۵۲۰ و ۸۶۵۳ (شکل ۲.۴ را ببینید).
صفرهای J_0 را با λ_j ، $j = 1, 2, \dots$ نشان می‌دهند، در نتیجه

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

تحقیق کنید که $y = J_0(\lambda_j x)$ در معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \quad x > 0$$

صدق می‌کند. از آنجا نشان دهید که

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$
 اگر

این خاصیت مهم $J_0(\lambda_i x)$ ، به‌عنوان خاصیت تعامد معروف است، و در حل مسائل مقادیر مرزی مفید واقع می‌شود (بند ۵.۱۱ و ۶.۱۱ را ببینید).
دانهمایی: معادله دیفرانسیل $J_0(\lambda_j x)$ را بنویسید، آن را در $x J_0(\lambda_j x)$ ضرب کرده و از $x J_0(\lambda_j x)$ برابر معادله دیفرانسیل $J_0(\lambda_j x)$ تفریق کنید، سپس از ۰ تا ۱ انتگرال بگیرید.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University, Oxford, 1935.

برای اثبات قضیه‌های ۱.۴، ۳.۴ و ۴.۴ را می‌توانید به کتابهای متوسط یا پیشرفته‌تر به‌عنوان مثال فصل ۳ و ۴ کادینگتن، یا فصل ۳ و ۴ کتاب زیر را ببینید:

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations*, Second ed., Macmillan, New York, 1964.

برای بحث درباره نقطه در بینهایت، که در مسئله ۱۳ بند ۳.۴ مطرح شده است همین کتابها را ببینید. بررسی جوابها در مجاورت نقطه غیرعادی غیرمنظم یکی از مباحث پیشرفته‌تر است؛ بحث مختصری در این باره در فصل ۵ کتاب زیر آمده است:

Coddington, E. A. and Levinson, N. ; *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

برای بحث کاملتر درباره معادله بسل، معادله لژاندر و بسیاری از معادلات دیگر راکه نام برده ایم، به کتابهای پیشرفته تر معادلات دیفرانسیل، روشهای ریاضیات کاربرده و توابع مخصوص رجوع کنید. کتاب زیر به موضوع توابع مخصوص از قبیل چند جمله ایهای لژاندر، توابع بسل و غیره می پردازد.

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, New York, 1961.



معادلات خطی مرتبه بالاتر

۱.۵ مقدمه

در این فصل نظریه معادلات خطی مرتبه دوم را که در فصل ۳ شرح دادیم به معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم می‌دهیم. يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام معادله‌ای است به صورت

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x) \quad (1)$$

در اینجا جز مواردی که خلاف آن تصریح شود، فرض می‌کنیم که توابع P_0, \dots, P_n و G روی يك فاصله $\alpha < x < \beta$ توابعی با مقدار حقیقی و پیوسته‌اند، و P_0 هیچگاه در این فاصله صفر نمی‌شود. آنگاه با تقسیم معادله (۱) بر $P_0(x)$ به دست می‌آید

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x) \quad (2)$$

که در آن، با استفاده از همان نمادهای فصل ۳، عملگر دیفرانسیل خطی L را تعریف کرده‌ایم. نظریه ریاضی وابسته به معادله (۲) کاملاً شبیه نظریه معادلات خطی مرتبه دوم است؛ به همین سبب اغلب تنها به بیان نتایج در مورد معادلات خطی مرتبه n ام اکتفا می‌کنیم. برای این اغلب نتایج نیز مشابه برای همین مربوط به معادله خطی مرتبه دوم است، و آنها را معمولاً به عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده‌ایم.

نخست با توجه به آنکه معادله (۲) شامل مشتق n ام y نسبت به x است، حل معادله (۲) به طور کلی مستلزم n انتگرال گیری خواهد بود. هر يك از این انتگرال گیریها مقدار ثابت دلخواهی را وارد می کند. بنابراین می توان انتظار داشت که برای تعیین يك جواب یکتا لازم باشد که n شرط اولیه، مثلاً

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (۳)$$

مشخص شود، x_0 می تواند هر نقطه ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ باشد، و $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ مجموعه مفروضی از ثابتهای حقیقی است. موضوع وجود چنین جواب و یکتایی آن با قضیه وجود و یکتایی زیر اثبات می گردد.

قضیه ۱۰۵. اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n و g روی فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه يك و تنها يك تابع $y = \phi(x)$ وجود دارد که روی فاصله $\alpha < x < \beta$ در معادله (۲) و شرایط اولیه (۳) صدق می کند.

اثبات این قضیه را در اینجا نمی آوریم؛ اما، به این نکته توجه خواهیم کرد که اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n ثابت باشند، جواب معادله (۲) را که در شرایط (۳) صدق کند به طور واقعی می توان ساخت (بندهای ۳۰۵-۵۰۵ را ببینید). گرچه در این حالت جوابی را می شناسیم، اما بی استفاده از قضیه ۱۰۵ از یکتایی آن بی اطلاعیم. اثبات کامل قضیه را می توان در کتاب اینس (بند ۳۲.۳) یا کتاب کادینگتون (فصل ۶) پیدا کرد. همانند حالت متناظر به مسئله مرتبه دوم، نخست به بحث پیرامون مسئله حل معادله همگن یا متمم

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (۴)$$

می پردازیم. نظریه عمومی معادله همگن (۴) در بند ۲۰۵ و روش حل آن به هنگامی که p_j ها ثابت باشند در بند ۳۰۵ مورد بحث قرار گرفته است. سپس به مسئله تعیین يك جواب خصوصی y برای معادله ناهمگن (۲) می پردازیم. روش ضرایب نامعین و روش تغییر پارامترها برای تعیین يك جواب خصوصی معادله (۲) در بندهای ۴۰۵ و ۵۰۵ به ترتیب مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مسائل

۱. با فرض آنکه توابع p_1, p_2, \dots, p_n روی فاصله ای شامل مبدأ پیوسته اند، و $y = \phi(x)$ يك جواب مسئله مقدار اولیه

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0,$$

$$y(0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

است، $\phi^{(n)}(0)$ را تعیین کنید. نشان دهید که اگر p_1, p_2, \dots, p_n در $x=0$ مشتق پذیر

باشند، آنگاه $\phi^{(n+1)}(0)$ را می توان برحسب داده های اولیه تعیین کرد.
۰۴ مشابه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم می توان انتظار داشت که اگر f واجد شرایط مناسبی باشد، معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

دارای جوابی است که شامل n ثابت دلخواه است. برعکس می توان ثابت کرد که يك خانواده از توابع که شامل n ثابت دلخواه باشد، جواب يك معادله دیفرانسیل مرتبه n ام است. با حذف ثابتهای c_1, \dots, c_n معادله دیفرانسیلی را که هریک از توابع زیر در آن صدق می کند بیابید.

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x^2} \quad (\text{ج})$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (\text{د})$$

$$y = x + c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad (\text{ه})$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sinh x + c_4 \cosh x \quad (\text{و})$$

۰۳ برای هریک از معادلات خطی زیر فوایدی را تعیین کنید که وجود جواب در آن مسلم باشد.

$$y^{iv} + 4y''' + 3y = x \quad (\text{الف})$$

$$xy''' + (\sin x)y'' + 3y = \cos x \quad (\text{ب})$$

$$x(x-1)y^{iv} + e^x y'' + 4x^2 y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y''' + xy'' + x^2 y' + x^3 y = \ln x \quad (\text{د})$$

۲.۵ نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه n ام

اگر توابع y_1, \dots, y_n جوابهای معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \quad (۱)$$

باشند، مستقیماً از محاسبه نتیجه می شود که ترکیب خطی

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (۲)$$

که در آن c_1, \dots, c_n ثابتهای دلخواه اند، نیز يك جواب معادله (۱) است. طبعاً این سؤال

مطرح می‌شود که آیا هر جواب معادله (۱) را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از y_1, y_2, \dots, y_n بیان کرد. جواب این سؤال هنگامی مثبت است که شرایط اولیه

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

هر چه باشد، بتوان ثابتهای c_1, \dots, c_n را طوری انتخاب کرد که ترکیب خطی (۲) در شرایط اولیه مزبور صدق کند. صریحاً آنکه، به ازای هر انتخاب x_0 در $\alpha < x < \beta$ ، و هر انتخاب $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ باید بتوان c_1, \dots, c_n را طوری تعیین کرد که معادلات

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + \dots + c_n y'_n(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \quad (4)$$

⋮

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

برقرار باشند. معادلات (۴) را می‌توان همواره نسبت به ثابتهای c_1, \dots, c_n حل کرد به شرط آنکه دترمینان ضرایب صفر نشود. از طرف دیگر، اگر دترمینان ضرایب صفر شود، همواره می‌توان مقادیر $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ را طوری انتخاب کرد که دستگاه معادلات (۴) دارای جواب نباشد. بنابراین یک شرط لازم و کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۴) به ازای مقادیر دلخواه $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ آن است که رونسکین

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

در $x = x_0$ صفر نشود. چون x_0 می‌تواند هر نقطه‌ای در فاصله $\alpha < x < \beta$ باشد، لازم و کافی است که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ در هیچ نقطه‌ای از فاصله مزبور صفر نشود. درست همانند آنچه در معادله خطی مرتبه دوم بیان شد، می‌توان نشان داد که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، آنگاه $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی فاصله $\alpha < x < \beta$ یا متحداً صفر است و یا هیچگاه صفر نمی‌شود (مسئله ۲ را ببینید). بدین سان قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۲۰۵. اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n دی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و توابع y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، و اگر حداقل در یک نقطه از $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ ، آنگاه هر جواب معادله (۱) را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n بیان کرد.

چنین مجموعه‌ای از جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n معادله (۱) را يك مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) می‌نامند. وجود مجموعه اساسی جوابها دقیقاً به همان روش مربوط به معادله خطی مرتبه دوم اثبات می‌شود (قضیه ۷.۳ را ببینید). چون همه جوابهای معادله (۱) به صورت (۲) می‌باشند، معمولاً هر ترکیب خطی دلخواه از يك مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را جواب عمومی می‌نامند.

بحث استقلال خطی را که در بند ۳.۳ آمد می‌توان نیز تعمیم داد. توابع y_1, \dots, y_n را هنگامی روی $\alpha < x < \beta$ مستقل خطی گویند که برای ثابتهای c_1, \dots, c_n نتوان مقادیر (به جز $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$) تعیین کرد به گونه‌ای که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (۶)$$

اگر y_1, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، می‌توان نشان داد که يك شرط لازم و کافی برای استقلال خطی آنها عبارت است از آن که $W(y_1, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ صفر نشود (مسئله ۳ را ببینید). بدین سان توابعی که يك مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را تشکیل می‌دهند دارای استقلال خطی اند، و هر مجموعه از n جواب مستقل خطی معادله (۱) تشکیل يك مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را می‌دهند.

مسئله ناهمگن. اکنون به بررسی معادله ناهمگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = g(x) \quad (۷)$$

می‌پردازیم. اگر y_{p_1} و y_{p_2} دوجواب خصوصی معادله (۷) باشند، از خطی بودن عملگر L مستقیماً نتیجه می‌شود که $L[y_{p_1} - y_{p_2}] = g - g = 0$. بنابراین تفاضل هر دوجواب معادله ناهمگن (۷) يك جواب معادله همگن (۱) است. چون هر جواب معادله همگن را می‌توان به صورت يك ترکیب خطی از يك مجموعه اساسی جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n بیان کرد، در نتیجه هر جواب معادله (۷) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} y &= y_c(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x) \end{aligned} \quad (۸)$$

نوشت، که در آن y_p يك جواب معادله ناهمگن (۷) است. ترکیب خطی (۸) را معمولاً جواب عمومی معادله ناهمگن (۷) می‌نامند.

نخستین مسئله آن است که يك مجموعه اساسی از جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n را بیابیم. اگر ضرایب معادله ثابت باشند، این مسئله بسیار آسان است؛ و در بند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد. اگر ضرایب ثابت نباشند، لازم می‌آید که از روشهای عددی (فصل ۸) و یا روشهای سری مشابه آنچه در مورد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به کار رفت

استفاده کنیم.^۱

درخاتمه، می توان نشان داد که در مورد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n ام می توان از روش کاهش مرتبه نیز استفاده کرد. بدین سان اگر y_1 يك جواب معادله (۱) باشد، جایگزینی $y = y_1(x)v(x)$ به يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه $n-1$ برای v' منجر می گردد (مسائل ۷ و ۸ را ببینید). متناظر با y_1 و $n-1$ جواب مستقل خطی v_1, \dots, v_{n-1} از معادله ای که مرتبه آن کاهش یافته است، يك مجموعه اساسی جوابهای $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ برای معادله (۱) به دست می آید. اگر يك جواب معادله مربوط به v' معلوم باشد، می توان مجدداً با استفاده از روش کاهش مرتبه يك معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه $n-2$ به دست آورد، و با ادامه این کار به يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول رسید. اما، در عمل روش کاهش مرتبه به ندرت برای معادلات بالاتر از مرتبه دوم مفید واقع می شود. اگر $n \geq 3$ ، معادله کاهش یافته حداقل از مرتبه دوم است، و فقط در موارد استثنایی حل این معادله از معادله اصلی آسانتر است. از طرف دیگر، چنانکه در بند ۴.۳ دیدیم، اگر $n=2$ ، معادله کاهش یافته از مرتبه اول است، و در نتیجه تسهیلات قابل ملاحظه ای فراهم می شود.

مسائل

۱. تحقیق کنید که عملگر دیفرانسیلی L که با

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

تعریف می شود، يك عملگر دیفرانسیلی خطی است. یعنی، نشان دهید که

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

که در آن توابع y_1 و y_2 ، n بار مشتق پذیرند و c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی می باشند. بدین سان، نشان دهید که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای $L[y] = 0$ باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ نیز يك جواب $L[y] = 0$ است.

۲. در بند ۲.۳ نشان دادیم که $W(y_1, y_2)$ رونسکین دوجواب $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ را می توان به صورت

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

نوشت، که در آن c مقدار ثابتی است. به طور کلیتر، می توان نشان داد که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ به ازای $\alpha < x < \beta$ باشند، آنگاه

۱. بحث روشهای سری برای معادلات مرتبه بالاتر را می توان در کتاب اینس (فصل ۱۶) یا کادینگتون و لوینسون (Levinson)، (فصل ۴) دید.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

این رابطه به اتحاد آبل معروف است. برای اثبات این نتیجه به ازای $n=3$ می توان به ترتیب زیر عمل کرد.
(الف) نشان دهید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

که در آن $W(y_1, y_2, y_3) = W$.

دانهمایی: مشتق يك دترمینان ۳ در ۳ برابر است با مجموع ۳ دترمینان ۳ در ۳ که در آنها به ترتیب از سطرهای اول، دوم، و سوم مشتق گیری شده است.

(ب) با جایگزینی y_1''', y_2''', y_3''' و y_1''', y_2''', y_3''' از معادله دیفرانسیل، سطر اول را در p_1 ، سطر دوم را در p_2 ضرب کرده، و آنها را با سطر آخر جمع کنید تا به دست آید

$$W' = -p_1 W$$

نتیجه مطلوب از این معادله حاصل می شود. اثبات حالت کلی نیز به طریق مشابه انجام می گیرد. چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی شود، این نتیجه نشان می دهد که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ یا متحد با صفر است و یا هیچگاه صفر نمی شود. ۳. هدف این مسئله آن است که نشان دهیم که اگر $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ متحد با صفر نباشد، آنگاه y_1, y_2, \dots, y_n مستقل خطی اند؛ و اگر مستقل خطی بوده وجوابهای

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta \quad (\text{يك})$$

باشند، آنگاه $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ هیچگاه صفر نیست.

(الف) فرض کنیم که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ متحد با صفر نباشد. برای اثبات استقلال خطی y_1, y_2, \dots, y_n باید نشان دهیم که تعیین ثابتهای c_1, c_2, \dots, c_n (که همه آنها صفر نباشند) به طوری که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (\text{دو})$$

غیرممکن است. با در نظر گرفتن معادلات حاصل از مشتقهای اول، دوم، \dots و $(n-1)$ ام معادله (دو) در نقطه ای که $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ ، نشان دهید که همه c ها باید صفر باشند، تا معادله (دو) برقرار باشد. بنابراین y_1, y_2, \dots, y_n مستقل خطی اند. (ب) فرض کنیم که y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی معادله (يك) باشند.

برای اثبات آن که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ هیچگاه روی $\alpha < x < \beta$ صفر نیست، فرض می‌کنیم که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$ ، و نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد.

دانهمایی: اگر $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$ ، آنگاه جواب ناصفری برای معادله (یک) وجود دارد که در x_0 در شرایط اولیه $y = y' = y'' = \dots = y^{(n-1)} = 0$ صدق می‌کند؛ آنگاه از قضیه وجود و یکتایی استفاده کنید.

۴. تحقیق کنید که توابع داده شده جوابهای معادله دیفرانسیل مربوطه‌اند، و رونسکین جوابها را محاسبه کنید.

$$y''' + y' = 0; \quad 1, \cos x, \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y^{iv} + y'' = 0; \quad 1, x, \cos x, \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^x, e^{-x}, e^{-2x} \quad (\text{ج})$$

$$y^{iv} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, x, e^{-x}, xe^{-x} \quad (\text{د})$$

$$xy''' - y'' = 0; \quad 1, x, x^2 \quad (\text{ه})$$

۵. نشان دهید که به ازای هر x داریم $W(5, \sin^2 x, \cos 2x) = 0$. آیا این نتیجه را می‌توانید مستقیماً بدون محاسبه رونسکین اثبات کنید.

۶. فرض کنیم عملگر دیفرانسیلی L با

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ثابتهای حقیقی‌اند تعریف شده است. مطلوب است محاسبه $L[e^{rx}]$ ؛ (الف) $L[x^n]$ ؛ (ب) $L[e^{rx}]$.

(ج) برای معادله $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$ چهار جواب بیابید. آیا فکر می‌کنید که این چهار جواب یک مجموعه اساسی تشکیل می‌دهند؟ چرا؟

۷. نشان دهید که اگر y_1 یک جواب

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$$

باشد، آنگاه از جایگزینی $y = y_1(x)v(x)$ معادله خطی مرتبه دوم زیر برای v' حاصل می‌شود

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1) v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1) v' = 0$$

۸. با استفاده از روش کاهش مرتبه، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0, \quad x > 0; \quad (\text{ب})$$

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2$$

۳.۵ معادلات همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

را که در آن a_0, \dots, a_1, a_n ثابت‌هایی حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم. طبعاً می‌توان بر اساس شناختی که از معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت داریم، پیش‌بینی کرد که $y = e^{rx}$ به ازای مقادیر مناسبی از r يك جواب معادله (۱) خواهد بود. در واقع، به ازای هر r داریم

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) \\ &= e^{rx} Z(r) \end{aligned} \quad (2)$$

به ازای مقداری از r که داشته باشیم $Z(r) = 0$ ، خواهیم داشت $L[e^{rx}] = 0$ و $y = e^{rx}$ يك جواب معادله (۱) است. چندجمله‌ای $Z(r)$ را چندجمله‌ای مشخصه یا چندجمله‌ای معین و معادله $Z(r) = 0$ را معادله مشخصه یا معادله معین معادله دیفرانسیل (۱) می‌نامند. هر چندجمله‌ای درجه n دارای n صفر است، مثلاً r_1, r_2, \dots, r_n ؛ بنابراین می‌توان چندجمله‌ای مشخصه را به صورت زیر نوشت

$$Z(r) = a_0(r-r_1)(r-r_2)\dots(r-r_n) \quad (3)$$

ریشه‌های حقیقی و نابرابر. اگر ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی باشند، و هیچ دوتای آنها مساوی نباشد، آنگاه برای معادله (۱)، n جواب متمایز $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ را خواهیم داشت. برای اثبات آن که در این حالت جواب عمومی معادله (۱) به صورت

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (4)$$

است، باید نشان دهیم که توابع $e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$ روی فاصله $-\infty < x < \infty$ مستقل خطی‌اند. نشان می‌دهیم که فرض بستگی خطی آنها به تناقض می‌انجامد. گیریم ثابت‌های c_1, c_2, \dots, c_n وجود داشته باشند به طوری که همه آنها صفر نباشند و به ازای هر x در $-\infty < x < \infty$ داشته باشیم $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} = 0$. با ضرب در $e^{-r_1 x}$ داریم $c_1 + c_2 e^{(r_2-r_1)x} + \dots + c_n e^{(r_n-r_1)x} = 0$ ، با مشتق‌گیری، به دست می‌آید

$$(r_2 - r_1)c_2 e^{(r_2-r_1)x} + (r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3-r_1)x} + \dots + (r_n - r_1)c_n e^{(r_n-r_1)x} = 0$$

به ازای $-\infty < x < \infty$. با ضرب رابطه اخیر در $e^{-(r_2-r_1)x}$ و مشتق‌گیری خواهیم داشت

$$(r_3 - r_2)(r_2 - r_1)c_3 e^{(r_3-r_2)x} + \dots + (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n-r_2)x} = 0$$

به ازای $-\infty < x < \infty$. چون به همین طریق ادامه دهیم، سرانجام به دست می آید

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \cdots (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \quad (5)$$

به ازای $-\infty < x < \infty$. چون تابع نمایی صفر نمی شود و r_i ها نابرابرند، در نتیجه $c_n = 0$. بدین سان $c_{n-1}e^{r_{n-1}x} + \cdots + c_2e^{r_2x} + c_1e^{r_1x} = 0$ ، با همان روش بالا به دست می آید $c_{n-1} = 0$. به همین طریق $c_1 = 0, \dots, c_{n-2} = 0$ ، و این با فرض بستگی خطی $e^{r_1x}, \dots, e^{r_{n-1}x}$ تناقض دارد.

ریشه های مختلط. اگر معادله مشخصه دارای ریشه های مختلط باشد، این ریشه ها از جفتهای مزدوج، $\lambda \pm i\mu$ ، تشکیل می شود، زیرا ضرایب a_0, \dots, a_n اعداد حقیقی اند. با شرط آنکه هیچ یک از ریشه ها مکرر نباشند، جواب عمومی معادله (۱) همچنان به صورت (۴) است. اما، به همان روش معادله مرتبه دوم (بند ۱.۵.۳) به جای جوابهای با مقدار $e^{(\lambda + i\mu)x}$ و $e^{(\lambda - i\mu)x}$ معمولاً از جوابهای با مقدار حقیقی

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (6)$$

که بخشهای حقیقی و موهومی $e^{(\lambda + i\mu)x}$ می باشند استفاده می شود. بدین سان، حتی هنگامی که برخی از ریشه های معادله مشخصه مختلط باشند، باز هم می توان جواب عمومی معادله (۱) را به صورت یک ترکیب خطی از جوابهای با مقدار حقیقی بیان کرد.

مثال ۱. جواب عمومی

$$y^{iv} - y = 0 \quad (7)$$

را بیابید.

چون به جای y قرار دهیم معادله مشخصه به صورت زیر به دست می آید

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

ریشه ها عبارتند از $1, -1, i, -i$ ؛ بنابراین جواب عمومی معادله (۷) چنین است

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

ریشه های مکرر. اگر ریشه های معادله مشخصه متمایز نباشند، یعنی، اگر برخی از ریشه ها مکرر باشند، آنگاه روشن است که جواب (۴) جواب عمومی معادله (۱) نیست. چنانکه دیدیم اگر r_1 ریشه مکرری برای معادله خطی مرتبه دوم $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ باشد، آنگاه دو جواب مستقل خطی به صورت $e^{r_1 x}$ و $x e^{r_1 x}$ به دست می آمد، منطقی می توان حدس زد که اگر یک ریشه $Z(r) = 0$ ، مثلاً $r = r_1$ ، s بار تکرار شود ($s \leq n$) آنگاه

۱. استقلال خطی جوابهای $e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$ ، درحالتی که برخی از r ها اعداد مختلط باشند، از تعمیم استدلالی که هم اکنون درحالت r های حقیقی بیان شد، نتیجه می گردد.

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (۸)$$

جوابهای معادله (۱) باشند. برای اثبات این موضوع، باید توجه داشت که اگر r_1 يك ریشه مرتبه s چندجمله‌ای $Z(r)$ باشد، آنگاه معادله (۲) را می‌توان به‌ازای همه مقادیر r به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx} a_0 (r-r_1)^s (r-r_{s+1}) \dots (r-r_n) \\ &= e^{rx} (r-r_1)^s H(r) \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن $H(r_1) \neq 0$. سپس از رابطه $\partial e^{rx} / \partial r = x e^{rx}$ و جابجایی پذیری مشتق‌گیریهای e^{rx} نسبت به x و r استفاده می‌کنیم. بدین‌سان با مشتق‌گیری از رابطه (۹) نسبت به r به دست می‌آید

$$L[xe^{rx}] = e^{rx} [x(r-r_1)^s H(r) + s(r-r_1)^{s-1} H(r) + (r-r_1)^s H'(r)] \quad (۱۰)$$

چون $s \geq 2$ ، طرف دوم رابطه (۱۰) به‌ازای $r=r_1$ صفر می‌شود و بنابراین $x e^{r_1 x}$ نیز يك جواب معادله (۱) است. اگر $s \geq 3$ ، بار دیگر نسبت به r از رابطه (۱۰) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $r=r_1$ ، بدین‌سان ثابت می‌شود که $x^2 e^{r_1 x}$ نیز يك جواب معادله (۱) است. این روش را می‌توان تا $s-1$ بار مشتق‌گیری ادامه داد و نتیجه مطلوب را به‌دست آورد. توجه شود که مشتق s ام طرف دوم رابطه (۹) به‌ازای $r=r_1$ صفر نمی‌شود، زیرا s امین مشتق $(r-r_1)^s$ ثابت است و $H(r_1) \neq 0$. منطقاً می‌توان حدس زد که $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ مستقل خطی‌اند، و ما آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

بالاخره، اگر يك ریشه مختلط $\lambda + i\mu$ ، s بار تکرار شود مزدوج آن $\lambda - i\mu$ نیز s بار تکرار خواهد شد. متناظر با این $2s$ جوابهای با مقدار مختلط می‌توانیم $2s$ جواب با مقدار حقیقی بیابیم، برای این کار کافی است توجه شود که بخشهای حقیقی و موهومی

$$e^{(\lambda + i\mu)x}, xe^{(\lambda + i\mu)x}, \dots, x^{s-1} e^{(\lambda + i\mu)x}$$

نیز جوابهای مستقل خطی‌اند:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x, \quad x e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad x e^{\lambda x} \sin \mu x, \\ \dots, x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \end{aligned}$$

بدین‌سان جواب عمومی معادله (۱) را همواره می‌توان به‌صورت يك ترکیب خطی از n جواب با مقدار حقیقی نوشت. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۲. جواب عمومی

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0 \quad (۱۱)$$

را بیابید.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0$$

که دارای ریشه‌های $i, -i, i, -i$ ، و جواب عمومی معادله (۱۱) چنین است

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

برای تعیین ریشه‌های معادله مشخصه اغلب لازم می‌آید که به محاسبه ریشه‌های سوم، یا چهارم، و حتی ریشه‌های مراتب بالاتر یک عدد مختلط بپردازیم. این کار معمولاً با استفاده از فرمول اویلر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ، وقواعد جبری که در بند ۱.۵.۳ آمد به آسانترین وجه صورت می‌گیرد. این موضوع در مثال زیر و همچنین در مسائل ۱ و ۲ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۳. جواب عمومی

$$y^{iv} + y = 0 \quad (12)$$

را بیابید.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 1 = 0$$

در این حالت چند جمله‌ای مزبور به آسانی تجزیه نمی‌شود. باید به محاسبه ریشه چهارم ۱ — پردازیم. در اینجا ۱ — را به عنوان عدد مختلط $1 + 0i$ — در نظر می‌گیریم. قدرمطلق آن برابر ۱ و زاویه قطبی آن π است. بدین سان

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$$

علاوه بر این، زاویه مزبور تنها با تقریب مضربی از 2π معین می‌گردد. بدین سان

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i \sin(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

که در آن m برابر صفر یا هر عدد صحیح مثبت یا منفی است. بدین سان

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

ریشه‌های چهارم ۱ — به ترتیب با قراردادن

$$m = 0, 1, 2, 3$$

به دست می‌آیند، و عبارتند از

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که به ازای هر مقدار دیگر m یکی از همین چهار ریشه حاصل می‌شود. مثلاً، متناظر با $m=4$ خواهیم داشت $(1+i)/\sqrt{2}$. جواب عمومی معادله (۱۲) عبارت است از

$$y = e^{x/\sqrt{2}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-x/\sqrt{2}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

درخاتمه متذکر می‌شویم که مسئله تعیین ریشه‌های $Z(r)=0$ هنگامی که $n>2$ ، و نتوان آنها را با بررسی یا روش ساده آزمون و خطا به دست آورد، مستلزم استفاده از روشهای عددی است. گرچه برای ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای درجه سوم و چهارم فرمولهای مشابه فرمول معادله درجه دوم وجود دارد، اما برای $n>4$ فرمولی در دست نیست؛ حتی در مورد معادلات چندجمله‌ای درجه سوم و چهارم معمولاً کاربرد روشهای عددی مناسبتر است.

اگر ثابتهای a_0, a_1, \dots, a_n در معادله (۱) اعداد مختلط باشند، جواب معادله (۱) همچنان به صورت (۴) است. اما در این حالت، ریشه‌های معادله مشخصه عموماً اعداد مختلط اند؛ و دیگر محقق نیست که مزدوج يك ریشه باز هم يك ریشه باشد. جوابهای متناظر توابعی با مقدار مختلط خواهند بود.

مسائل

۱. هر يك از اعداد مختلط زیر را به صورت

$$R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta}$$

بیان کنید. توجه شود که تساوی $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ ، به ازای

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

برقرار است.

(الف)	$1+i$	(ب)	$-1+i\sqrt{3}$	(ج)	-1
(د)	$-i$	(ه)	$\sqrt{3}-i$	(و)	$-1-i$

۲. مطلوب است محاسبه ریشه‌های تعیین شده هر يك از اعداد مختلط زیر با توجه به

۱. فرمول حل معادله درجه سوم را معمولاً به کاردانو (Cardano)، (۱۵۰۱-۱۵۷۶) و فرمول معادله درجه چهارم را به شاگردش فراری (Ferrari)، (۱۵۲۲-۱۵۶۵) نسبت می‌دهند. این نکته را که ریشه‌های يك معادله جبری کلی از درجه بالاتر از چهار را نمی‌توان با فرمولی که تنها شامل عملیات گویا (جمع، ضرب، و غیره) و استخراج ریشه باشد بیان کرد آبل وگالوا (Galois)، (۱۸۱۱-۱۸۳۲) اثبات کردند. برای بحث روشهای معادلات جبری می‌توان به کتاب اوسپنسکی (Uspensky) مراجعه کرد.

$$e^{i(\theta + 2m\pi)} = e^{i\theta} \text{ به ازای هر عدد صحیح } m, \text{ و}$$

$$[e^{i(\theta + 2m\pi)}]^{1/n} = e^{i[(\theta + 2m\pi)/n]} = \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)$$

(یکی از صور فرمول دو موآور، مسئله ۱۲، بند ۱۰۵.۳)

$$(1-i)^{1/2} \quad (\text{الف}) \quad 1^{1/3} \quad (\text{ب})$$

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/2} \quad (\text{ج}) \quad 1^{1/4} \quad (\text{د})$$

در هر يك از مسائل ۳ تا ۱۳ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad .۳$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad .۴$$

$$2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0 \quad .۵$$

$$y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0 \quad .۶$$

$$y^{vi} + y = 0 \quad .۷$$

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = 0 \quad .۸$$

$$y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0 \quad .۹$$

$$y^{vi} - y'' = 0 \quad .۱۰$$

$$y^v - 3y^{iv} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0 \quad .۱۱$$

$$y^{iv} - 8y' = 0 \quad .۱۲$$

$$y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0 \quad .۱۳$$

۱۴. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y''' + y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$$

۱۵. نشان دهید که جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{iv} - y = 0$$

را می توان به صورت

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cosh x + c_4 \sinh x$$

نوشته. جوابی را که در شرایط اولیه $y(0)=0$ ، $y'(0)=0$ ، $y''(0)=1$ ، صدق می کند بیابید. چرا استفاده از $\cosh x$ و $\sinh x$ مناسبتر از e^x و e^{-x} است؟

مسائل ۱۶ تا ۱۹ درباره معادلهٔ اویلر مرتبهٔ n ام است.
 *۱۶. معادلهٔ اویلر مرتبهٔ n ام یا معادلهٔ متحدالبعد عبارت است از

$$L[y] = x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (\text{يك})$$

که در آن a_1, \dots, a_n ثابتهای حقیقی اند. فقط فاصلهٔ $x > 0$ را در نظر بگیرید.
 (الف) نشان دهید که $L[x^r] = x^r F(r)$ که در آن

$$F(r) = r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1[r(r-1)\dots(r-n+2)] \\ + \dots + a_{n-1}r + a_n$$

يك چندجمله‌ای از درجهٔ n بر حسب r است. توابع $x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_n}$ متناظر با ریشه‌های r_1, r_2, \dots, r_n معادلهٔ $F(r) = 0$ جوابهای معادلهٔ (يك) می باشند.

(ب) نشان دهید که اگر r_1 يك ریشهٔ مکرر مرتبهٔ s معادلهٔ $F(r) = 0$ باشد، آنگاه $x^{r_1} \ln x, x^{r_1} (\ln x)^2, \dots, x^{r_1} (\ln x)^{s-1}$ جوابهای معادلهٔ (يك) می باشند.
 هنگامی که ریشه‌های $F(r) = 0$ مختلط باشند، می توان جوابهایی با مقدار حقیقی به همان روش که در مورد معادلهٔ اویلر مرتبهٔ دوم شرح داده شد به دست آورد. بند ۴.۴ را ببینید.

*۱۷. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۶ جواب عمومی هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. تنها فاصلهٔ $x > 0$ را در نظر بگیرید.

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^3 y''' + xy' - y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^4 y''' + 5x^3 y''' + 7x^2 y'' + 8xy' = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^3 y''' + x^2 y'' = 0 \quad (\text{ه})$$

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0 \quad (\text{و})$$

*۱۸. برای تعیین کشش روی يك كرهٔ بسیار كوچك به شعاع a که در جريان يك سیال غلیظ واقع شده باشد، لازم می آید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\rho^3 f''''(\rho) + 8\rho^2 f'''(\rho) + 8\rho f''(\rho) - 8f'(\rho) = 0, \quad \rho > a$$

را حل کنیم، که در آن ρ مسافت از مرکز كره است. توجه شود که این يك معادلهٔ اویلر

برحسب f' است و با استفاده از نتایج مسئله ۱۶، نشان دهید که جواب عمومی عبارت است از

$$f(\rho) = \frac{A}{\rho^3} + \frac{B}{\rho} + C + D\rho^2$$

که در آن A, B, C و D ثابت اند. نشان دهید که جوابی که در شرایط مرزی $f(a) = 0$ ، $f'(a) = 0$ و $f(\rho) \rightarrow U$ (سرعت در ∞) وقتی $\rho \rightarrow \infty$ صدق می کند، عبارت است از $f(\rho) = Ua^3/2\rho^3 - 3Ua/2\rho + U$. فرمول کشش روی کره (فرمول استوکس) به صورت $6\pi\mu aU$ درمی آید، که در آن μ ضریب غلظت سیال است. ر. ا. میلیکان^۱ در آزمایش مشهور خود برای اندازه گیری بار الکترون از این نتیجه استفاده کرده است. مسئله ۹ بند ۱۵.۲ را نیز ببینید.

*۱۹. نشان دهید که به ازای $x > 0$ ، با تعویض متغیر $x = e^t$ معادله اویلر مرتبه سوم $x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = 0$ به صورت ساده یک معادله خطی مرتبه سوم با ضرایب ثابت درمی آید. این تبدیل معادله اویلر مرتبه n ام را نیز به صورت یک معادله خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت درمی آورد. مسئله ۱۷ (ب) را با این روش حل کنید.

*۲۰. تشخیص این نکته که آیا همه جوابهای یک معادله خطی همگن به ازای $x \rightarrow \infty$ به سمت صفر می گرایند یا نه، اغلب در کاربردهای مهندسی مورد توجه قرار می گیرد. اگر پاسخ این پرسش مثبت باشد، معادله را پایداد مجانبی نامند. هنگامی که x نمایشگر زمان و y پاسخ یک دستگاه فیزیکی باشد، شرط پایداری مجانبی معادله دیفرانسیل بدان معنی است که شرط اولیه هر چه باشد، پاسخ دستگاه به آن بالاخره با بینهایت شدن x به صفر می گراید. در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $ay'' + by' + cy = 0$ ، در بند ۱۰۷.۳ (بند ۱۵.۳۱ مسئله ۱۵ را نیز ببینید) ثابت شد که شرط کافی برای پایداری مجانبی آن است که a, b و c مثبت باشند. به طور کلیتر معادله

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \quad (\text{یک})$$

که در آن a_0, a_1, \dots, a_n حقیقی اند، پایدار مجانبی است، اگر بخش حقیقی همه ریشه های معادله مشخصه منفی باشند. در این باره هورویتز^۲ یک شرط لازم و کافی به دست آورده است. به ازای $n = 4$ ، ملاک پایداری هورویتز را می توان به صورت زیر بیان کرد: معادله (یک) پایدار مجانبی است، اگر، و فقط، اگر به ازای $a_0 > 0$ ،

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

همه مثبت باشند. به ازای $n=3$ ، این شرط تنها درباره سه عبارت نخست با $a_4=0$ ، و به ازای $n=2$ درباره دو عبارت نخست با $a_4=0$ اعمال می شود. بحث کامل ملاك پایداری هورویتز را می توان در كتاب گیلمین^۱ (فصل ۶، مقاله ۲۶) یافت. پایداری مجانبی هر يك از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت امکان، صحت نتیجه خود را با محاسبه جواب عمومی تحقیق کنید.

$$y'''+3y''+3y'+y=0 \quad (\text{الف})$$

$$y'''-y=0 \quad (\text{ب})$$

$$y'''+y''-y'+y=0 \quad (\text{ج})$$

$$y^{iv}+2y''+y=0 \quad (\text{د})$$

$$y'''+0.1y''+1.2y'-0.4y=0 \quad (\text{ه})$$

$$y'''+3.2y''+2.41y'+0.21y=0 \quad (\text{و})$$

۴.۵ روش ضرایب نامعین

برای معادله خطی مرتبه n ناممکن با ضرایب ثابت

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=g(x) \quad (1)$$

هنگامی که $g(x)$ به صورت مناسبی باشد، می توان با روش ضرایب نامعین يك جواب خصوصی به دست آورد. گسره روش ضرایب نامعین دارای کلیت روش تغییر پارامترها که در بند بعد شرح داده شده است نمی باشد، اما هر گاه قابل اجرا باشد بسیار آسانتر است. درست همانند معادله خطی مرتبه دوم، روشن است که اگر عملگر دیفرانسیلی خطی L بر يك چندجمله ای $A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_mx$ ، یا تابع نمایی $e^{\alpha x}$ ، یا تابع سینوسی $\sin \beta x$ ، یا تابع کسینوسی $\cos \beta x$ اثر کند، نتیجه به ترتیب يك چندجمله ای، يك تابع نمایی، یا يك ترکیب خطی از توابع سینوسی و کسینوسی خواهد بود. بنابراین اگر $g(x)$ به صورت مجموع چندجمله ایها، توابع نمایی، توابع سینوسی و کسینوسی، یا حتی حاصل ضرب این نوع توابع باشد، می توان امیدوار بود که $y_p(x)$ را با انتخاب ترکیب مناسبی از چندجمله ایها، توابع نمایی و... با تعدادی ضریب ثابت نامعین به دست آورد. ثابتها به گونه ای تعیین خواهند شد که معادله (۱) برقرار گردد.

نخست به بررسی حالتی که $g(x)$ يك چندجمله ای درجه m

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m \quad (2)$$

است می پردازیم. b_0, \dots, b_1, b_m ثابتهای مفروض اند. جواب خصوصی را می توان

طبعاً به صورت

$$y_p(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (۳)$$

در نظر گرفت. با جایگزینی y در معادله (۱) و مساوی قرار دادن توانهای مشابه x ، از جمله‌های شامل x^m حاصل می‌شود $a_n A_0 = b_0$. اگر $a_n \neq 0$ ، خواهیم داشت $A_0 = b_0/a_n$. ثابتهای A_1, \dots, A_m نیز از ضرایب جمله‌های شامل $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x^0$ تعیین می‌شوند.

اگر $a_n = 0$ ، یعنی، اگر مقدار ثابتی جواب معادله همگن باشد، معادله بالا را نمی‌توان برحسب A_0 حل کرد؛ در این حالت لازم است که $y_p(x)$ را به صورت یک چندجمله‌ای از درجه $m+1$ فرض کنیم، تا در $L[y_p](x)$ جمله‌ای بدست آید که با $b_0 x^m$ برابری کند. البته، لزومی ندارد که در عبارت $y_p(x)$ مقدار ثابتی منظور کنیم. به طور کلیتر به آسانی می‌توان تحقیق کرد که اگر صفر یک ریشه مکرر مرتبه s چندجمله‌ای مشخصه باشد در این صورت $1, x, x^2, \dots, x^{s-1}$ جوابهای معادله همگن اند، آنگاه صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x) = x^s (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (۴)$$

به عنوان مسئله دیگر فرض کنیم که $g(x)$ به صورت

$$g(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \quad (۵)$$

باشد، آنگاه می‌توان انتظار داشت که $y_p(x)$ به صورت

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (۶)$$

باشد، به شرط آنکه $e^{\alpha x}$ جواب معادله همگن نباشد. اگر α یک ریشه مکرر مرتبه s چندجمله‌ای مشخصه باشد، صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (۷)$$

برای اثبات این نتایج می‌توان همانند معادله ناهمگن خطی مرتبه دوم با جایگزینی $y = e^{\alpha x} u(x)$ مسئله را به حالت قبل تبدیل کرد. تابع u باید در یک معادله ناهمگن خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت صدق کند، جمله ناهمگن دقیقاً چندجمله‌ای (۲) است (مسئله ۱۸ را ببینید).

به طریق مشابه، اگر $g(x)$ به صورت

$$g(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases} \quad (۸)$$

باشد، آنگاه صورت مناسبی برای $y_p(x)$ ، به شرط آنکه $\alpha + i\beta$ ریشه معادله مشخصه نباشد، چنین است

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \cos \beta x + e^{\alpha x} (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m) \sin \beta x \quad (9)$$

اگر $\alpha + i\beta$ يك ریشهٔ مكرر مرتبهٔ s معادلهٔ مشخصه باشد، آنگاه لزوماً باید طرف دوم معادلهٔ (۹) را در x^s ضرب کرد. این نتایج در جدول ۱۰۵ خلاصه شده است.

جدول ۱۰۵

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$	$x^s (A_0 x^m + \dots + A_m)$
$P_m(x) e^{\alpha x}$	$x^s (A_0 x^m + \dots + A_m) e^{\alpha x}$
$P_m(x) e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s [(A_0 x^m + \dots + A_m) e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_0 x^m + \dots + B_m) e^{\alpha x} \sin \beta x]$

در اینجا s کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که به ازای آن هر جملهٔ $y_p(x)$ از هر جملهٔ تابع مکمل $y_c(x)$ متمایز است.

اگر $g(x)$ مجموع جمله‌هایی به صورت (۲)، (۵) و (۸) باشد، معمولاً آسانتر است که جواب خصوصی متناظر به هر يك از جمله‌های $g(x)$ را جداگانه محاسبه کرد. بنابراین انطباق (چون معادلهٔ دیفرانسیل مزبور خطی است)، جواب خصوصی مسئلهٔ کلی برابر با حاصل جمع جوابهای خصوصی مسائل جزئی متناظر است. این مطلب در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال. يك جواب خصوصی

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x} \quad (10)$$

را بیابید.

نخست معادلهٔ همگن را حل می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه $r^3 - 4r = 0$ است، و ریشه‌های آن عبارتند از $0, \pm 2$ ؛ بنابراین

$$y_c(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

با استفاده از اصل انطباق، می‌توان جواب خصوصی معادلهٔ (۱۰) را به صورت مجموع جوابهای خصوصی متناظر با معادلات دیفرانسیل

$$y''' - 4y' = x, \quad y''' - 4y' = 3 \cos x, \quad y''' - 4y' = e^{-2x}$$

نوشت. حدس اولیه برای يك جواب خصوصی، y_{p_1} ، معادله اول $A_0x + A_1$ است؛ اما چون معادله همگن دارای جواب ثابتی است، دو جمله‌ای مزبور را در x ضرب می‌کنیم. بدین سان

$$y_{p_1}(x) = x(A_0x + A_1).$$

برای معادله دوم

$$y_{p_2}(x) = B \cos x + C \sin x$$

را در نظر می‌گیریم، و به تغییر این حدس اولیه نیازی نیست، زیرا $\cos x$ و $\sin x$ جواب معادله همگن نیستند. بالاخره، برای معادله سوم، چون e^{-2x} يك جواب معادله همگن است، فرض می‌کنیم که

$$y_{p_3}(x) = Exe^{-2x}$$

ثابتها با جایگزینی در معادلات دیفرانسیل متناظر تعیین می‌شوند؛ و عبارتند از

$$A_0 = -\frac{1}{8}, \quad A_1 = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{3}{5}, \quad E = \frac{1}{8}$$

بنابراین يك جواب خصوصی معادله (۱۰) عبارت است از

$$y_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

از روش ضرایب نامعین می‌توان در هر مورد که امکان حدس صورت صحیح $y_p(x)$ وجود داشته باشد استفاده کرد. اما، معمولاً این کار به جز در مورد معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت که در آن جمله‌های ناهمگن از نوع جمله‌های فوق‌الذکر باشند، غیرممکن است. برای مسائل پیچیده‌تر می‌توان از روش تغییر پارامترها که در بند بعد آمده است استفاده کرد.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۱۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید. در مواردی که مشخص شده است، جوابی را بیابید که در شرایط اولیه داده شده صدق کند.

$$y''' + 4y' = x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad ۰۱$$

$$y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3 \quad ۰۲$$

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x \quad ۰۳$$

$$y''' - y' = 2 \sin x \quad ۰۴$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1 \quad .5$$

$$y^{iv} - 4y'' = x^2 + e^x \quad .6$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = 3 + \cos 2x \quad .7$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{3}{2} \quad .8$$

$$y^{vi} + y''' = x \quad .9$$

$$y^{iv} + y''' = \sin 2x \quad .10$$

$$y^{iv} - y = 3x + \cos x \quad .11$$

در هر يك از مسائل ۱۲ تا ۱۷ صورت مناسبی برای $y_p(x)$ به منظور استفاده از روش ضرایب نامعین بیاييد. محاسبه ضرایب لزومی ندارد.

$$y''' - 2y'' + y' = x^2 + 2e^x \quad .12$$

$$y''' - y' = xe^{-x} + 2 \cos x \quad .13$$

$$y^{iv} - 2y'' + y = e^x + \sin x \quad .14$$

$$y^{iv} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x \sin x \quad .15$$

$$y^{iv} + 4y'' = \sin 2x + xe^x + 4 \quad .16$$

$$y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x} \sin x \quad .17$$

۱۸. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام ناهمگن

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x)$$

را که در آن a_0, \dots, a_n ثابت اند در نظر می گیریم. تحقیق کنید که اگر $g(x)$ به صورت

$$e^{\alpha x} (b_0 x^m + \dots + b_m)$$

باشد، آنگاه با جایگزینی $y = e^{\alpha x} u(x)$ معادله بالا به صورت

$$t_0 u^{(n)} + t_1 u^{(n-1)} + \dots + t_n u = b_0 x^m + \dots + b_m$$

درمی آید، که در آن t_0, \dots, t_n ثابت اند. t_0 و t_n را بر حسب α ها و α تعیین کنید. بدین سان مسئله تعیین يك جواب خصوصی معادله اصلی به مسئله ساده تعیین جواب خصوصی يك معادله با ضرایب ثابت که در آن جمله ناهمگن يك چندجمله ای است تبدیل می شود.

۵.۵ روش تغییر پارامترها

روش تغییر پارامترها برای تعیین يك جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام نا همگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \quad (1)$$

مستقیماً تعمیم نظریه‌ای است که در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بیان شد (بند ۲.۶.۳). چنانکه گذشت، برای استفاده از روش تغییر پارامترها، لازم است نخست معادله دیفرانسیل همگن متناظر را حل کنیم. این کار عموماً دشوار است، مگر آنکه ضرایب ثابت باشند. با وجود این روش تغییر پارامترها به مفهومی که ذیلاً بیان می‌شود از روش ضرایب نامعین عامتر است. روش ضرایب نامعین را معمولاً می‌توان فقط درباره معادلات با ضرایب ثابت و طبقه محدودی از توابع g به کار گرفت؛ در مورد معادلات با ضرایب ثابت، معادله همگن را می‌توان حل کرد و از آنجا يك جواب خصوصی متناظر به هر تابع پیوسته g با استفاده از روش تغییر پارامترها به دست آورد. اکنون فرض کنیم که يك مجموعه اساسی جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n از معادله همگن معلوم باشد. آنگاه

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (2)$$

روش تغییر پارامترها برای تعیین يك جواب خصوصی معادله (۱) مبتنی بر آن است که بتوان n تابع u_1, u_2, \dots, u_n را به گونه‌ای تعیین کرد که $y_p(x)$ به صورت

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x) \quad (3)$$

باشد. چون باید n تابع را تعیین کنیم، لازم است که n شرط مشخص گردد. روشن است که یکی از آنها آن است که y_p در معادله (۱) صدق کند. $n-1$ شرط دیگر به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که محاسبات آسان گردد. از آنجا که اگر تعیین y_p به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر برای $u_i, i=1, 2, \dots, n$ منجر گردد، نمی‌توان انتظار داشت که سهولتی در محاسبات به وجود آید، طبعاً باید شرایطی اعمال کرد که در نتیجه جمله‌هایی که منجر به مشتقهای بالاتر u_i می‌گردند حذف شوند. از معادله (۳) به دست می‌آید

$$y_p' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n) \quad (4)$$

بدین سان نخستین شرطی که بر u_i ها اعمال می‌کنیم آن است که

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0 \quad (5)$$

با ادامه این روش به طرز مشابه مشتقهای y_p تا مرتبه $n-1$ به صورت

$$y_p^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \dots + u_n y_n^{(m)}, \quad m=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

و $n-1$ شرط زیر برای توابع u_1, \dots, u_n حاصل می‌گردد:

$$u'_1 y_1^{(m-1)} + u'_2 y_2^{(m-1)} + \dots + u'_n y_n^{(m-1)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

مشتق مرتبه n ام y_p عبارت است از

$$y_p^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)}) + (u'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)}) \quad (8)$$

بالاخره، این شرط را که y_p جواب معادله (۱) باشد اعمال می‌کنیم. با جایگزینی مشتقهای y_p از روابط (۶) و (۸)، و دسته‌بندی جمله‌ها، و استفاده از روابطه $L[y_i] = 0$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ به‌دست می‌آید

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)} = g \quad (9)$$

معادله (۹)، همراه با $n-1$ معادله (۷)، یک دستگاه معادلات ناهمگن خطی برای u'_1, u'_2, \dots, u'_n تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_n u'_n &= 0, \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \dots + y'_n u'_n &= 0, \\ y''_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \dots + y''_n u'_n &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u'_1 + \dots + y_n^{(n-1)} u'_n &= g. \end{aligned} \quad (10)$$

شرط کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۱۰) آن است که دترمینان ضرایب به ازای هر مقدار x مخالف صفر باشد. اما، دترمینان ضرایب دقیقاً همان $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ است، و هیچگاه صفر نمی‌شود، زیرا y_1, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی معادله همگن می‌باشند. بنابراین می‌توان u'_1, \dots, u'_n را معین کرد. با استفاده از دستور کرامر، دیده می‌شود که جواب دستگاه (۱۰) عبارت است از

$$u'_m(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

که در آن $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ و W_m دترمینان حاصل از $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ با قراردادن ستون (۱، ۰، ۰، ...، ۰) به جای ستون m ام است، با این نماد جواب خصوصی معادله (۱) عبارت است از

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^n y_m(x) \int^x \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)} dt, \quad (12)$$

با وجود آنکه این روش ساده است، اما مسئله محاسباتی تعیین $y_p(x)$ از رابطه (۱۲) به‌ازای $n > 2$ آسان نیست. محاسبات را می‌توان تا اندازه‌ای با استفاده از اتحاد آبل:

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right].$$

ساده نمود (مسئله ۲ بند ۲.۵ را ببینید). ثابت c را می توان با محاسبه $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ در يك نقطه انتخابی مناسب تعیین کرد.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۳ با استفاده از روش تغییر پارامترها يك جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل داده شده بیابید.

$$y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2 \quad .1$$

$$y''' - y' = x \quad .2$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x} \quad .3$$

۴. مطلوب است تعیین يك جواب خصوصی معادله

$$x^2 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0$$

در صورتی که بدانیم x ، x^2 و $1/x$ جوابهای معادله همگن متناظرند.

۵. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' + y' - y = g(x)$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

۶. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y^{iv} - y = g(x)$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

(اھنمایی: توابع $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\sinh x$ ، $\cosh x$ تشکیل يك مجموعه اساسی

جوابهای معادله همگن را می دهند.

۷. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = g(x), \quad x > 0$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

(اھنمایی: تحقیق کنید که جوابهای معادله همگن عبارتند از x ، x^2 و x^3 .)

مراجع

Coddington, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential*

تبدیل لاپلاس

۱.۶ مقدمه. تعریف تبدیل لاپلاس

یکی از ابزارهای بسیار مفید برای حل معادلات دیفرانسیل خطی تبدیلات انتگرالی است. تبدیل انتگرالی رابطه‌ای است به صورت

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt \quad (1)$$

که تابع مفروض f را با انتگرال گیری به یک تابع دیگر F تبدیل می کند. تابع F را مبدل f ، و تابع K را هسته تبدیل می نامند. طرح کلی آن است که با استفاده از رابطه (۱) مسئله مربوط به f را به یک مسئله ساده تر مربوط به F تبدیل کرده و این مسئله ساده تر را حل نمود و سپس تابع مطلوب f را با استفاده از مبدل آن، F به دست آورد. با انتخاب یک هسته مناسب K و حدود انتگرال گیری α و β ، اغلب می توان مسئله متضمن یک معادله دیفرانسیل خطی را به طور اساسی ساده کرد. برخی از تبدیلات انتگرالی دارای کاربردهای فراوانی می باشند، و هر یک از آنها برای گونه هایی از مسائل مناسب اند. در این فصل به بررسی خواص تبدیل لاپلاس^۱ و برخی از کاربردهای آن می پردازیم.

۱. پ.س. لاپلاس (P.S. Laplace)، (۱۷۴۹-۱۸۲۷) یکی از بزرگترین ریاضیدانان فرانسوی است، که به سبب پژوهشهایش در نجوم، احتمالات، و مکانیک شهرت یافته است. وی رابطه (۲) را در ۱۷۸۲، مورد مطالعه قرارداد، اما فونونی که در این فصل بیان شده اند مدتها بعد و عمدتاً توسط اولیور هوایساید (Oliver Heaviside)، (۱۸۵۰-۱۹۲۵) تکامل یافته اند.

این تبدیل به طریق زیر تعریف می‌شود. گیریم $f(t)$ به ازای $t \geq 0$ معین باشد، و فرض کنیم که f در شرایطی که بعداً بیان می‌شود صدق کند. در این صورت مبدل f در تبدیل لاپلاس، که آن را با $\mathcal{L}\{f(t)\}$ یا $F(s)$ نشان خواهیم داد، با تساوی زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

هسته این تبدیل $K(s, t) = e^{-st}$ است، و به‌ویژه به معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت وابسته است. این تبدیل بخصوص در حل مسائلی که جمله‌های ناهمگن آنها دارای طبیعت ضربیه‌ای یا ناپیوستگی می‌باشند سودمند است. در مورد این قبیل مسائل اعمال روشهایی که در پیش بیان شد نسبتاً دشوار است، و متضمن آن است که جوابهایی را که در فواصل متفاوت معتبرند به هم پیوندیم. در تحلیل مدارها که جمله‌های ضربیه‌ای یا ناپیوسته فراوانند، تبدیل لاپلاس به‌ویژه بسیار باارزش است، اما در کاربردهای دیگر نیز واجد اهمیت است.

چون تبدیل لاپلاس با انتگرالی روی دامنه صفر تا بینهایت تعریف می‌شود، مناسب است که نخست برخی از خواص اساسی این گونه انتگرالها را یادآوری کنیم. بدو متذکر می‌شویم که هر انتگرال روی فاصله بی‌کران را انتگرال نامرئ می‌نامند، و به‌صورت حد انتگرالهایی که روی فواصل متناهی تعیین شده‌اند تعریف می‌شود؛ بدین‌سان

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t) dt \quad (3)$$

که در آن A عدد حقیقی مثبتی است. اگر انتگرال از a تا A به ازای هر $A > a$ وجود داشته باشد، و اگر وقتی $A \rightarrow \infty$ حد وجود داشته باشد، آنگاه می‌گویند انتگرال نامرئ به این مقدار حده همگراست. در غیر این صورت گوییم انتگرال واگراست و یا وجود ندارد. مثالهای زیر هر دو حالت را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. فرض کنیم $f(t) = e^{ct}$ ، که در آن c یک عدد غیر صفر ثابت است. آنگاه

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ct} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} (e^{cA} - 1). \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال نامرئ همگراست اگر $c < 0$ ، و واگراست اگر $c \geq 0$. اگر $c = 0$ ، تابع زیر علامت انتگرال برابر واحد است، و باز هم انتگرال واگراست.

مثال ۲. فرض کنیم $f(t) = 1/t$ ، $t \geq 1$. آنگاه

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A.$$

چون $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$ ، انتگرال ناسره واکراست.

مثال ۳. فرض کنیم $f(t) = t^{-p}$ ، که در آن p يك عدد ثابت و $p \neq 1$ است؛ حالت $p = 1$ در مثال ۲ بررسی شد. آنگاه

$$\int_1^{\infty} t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1).$$

وقتی $A \rightarrow \infty$ ، $A^{1-p} \rightarrow 0$ اگر $p > 1$ ، اما $A^{1-p} \rightarrow \infty$ اگر $p < 1$. بنابراین $\int_1^{\infty} t^{-p} dt$ به ازای $p > 1$ همگراست، اما (با احتساب نتیجه مثال ۲) به ازای $p \leq 1$ واگراست. این نتایج مشابه نتایج مربوط به سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ می باشند.

پیش از بحث درباره وجود $\int_a^{\infty} f(t) dt$ ، باید به تعریف چند اصطلاح پردازیم. تابع f را روی فاصله $\alpha \leq t \leq \beta$ پیوسته قطعه‌ای نامند، اگر بتوان این فاصله را با تعدادی متناهی از نقاط

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

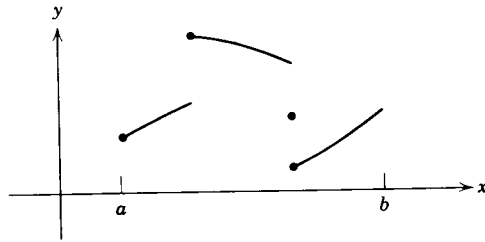
طوری تقسیم کرد که

۱. f روی هر زیر فاصله $t_{i-1} < t < t_i$ پیوسته باشد؛
۲. هنگامی که نقطه‌ای از داخل هر زیر فاصله به نقاط انتهایی آن میل کند، f دارای حد متناهی باشد.

به عبارت دیگر، f در $\alpha \leq t \leq \beta$ پیوسته قطعه‌ای است اگر به جز تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی، در این فاصله پیوسته باشد. اگر f روی $\alpha \leq t \leq \beta$ به ازای هر $\beta > \alpha$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه f را روی $t \geq \alpha$ پیوسته قطعه‌ای نامند. در شکل ۱.۶ مثالی از تابع پیوسته قطعه‌ای نشان داده شده است.

اگر f روی فاصله $a \leq t \leq A$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه می توان نشان داد که $\int_a^A f(t) dt$ وجود دارد. بنابراین، اگر f به ازای $t \geq a$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه $\int_a^A f(t) dt$ به ازای هر $A > a$ وجود خواهد داشت. اما، چنانکه در مثالهای بالا دیده

شد، پیوستگی قطعه‌ای برای تأمین همگرایی انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} f(t) dt$ کافی نیست.



شکل ۱۰۶ يك تابع پیوسته قطعه‌ای.

اگر به آسانی توان انتگرال f را بر حسب توابع مقدماتی به دست آورد، استفاده از تعریف همگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(t)dt$ ممکن است دشوار باشد. در اغلب موارد قضیه مقایسه زیر که نظیر قضیه مشابه آن در سریهاست، مناسبترین روش آزمون همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره را به دست می‌دهد.

قضیه ۱۰۶. فرض کنیم f به ازای $t \geq a$ پیوسته قطعه‌ای باشد، اگر به ازای يك ثابت مثبت M دای $t \geq a$ داشته باشیم $|f(t)| \leq g(t)$ ، داگر $\int_M^\infty g(t)dt$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ نیز همگراست. از طرف دیگر، اگر به ازای $t \geq M$ داشته باشیم $0 \leq g(t) \leq f(t)$ ، داگر $\int_M^\infty g(t)dt$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ نیز واگراست.

اثبات این قضیه را که مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال است در اینجا نمی‌آوریم. اما، با مقایسه مساحت‌هایی که با $\int_M^\infty g(t)dt$ و $\int_M^\infty |f(t)|dt$ نموده می‌شوند می‌توان آن را توجیه کرد. مفیدترین توابع برای مقایسه عبارتند از e^{ct} و t^{-p} ، که آنها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ بررسی کردیم.

اکنون بار دیگر مبدل لاپلاس $\{f(t)\}$ یا $F(s)$ را که با رابطه (۲) هنگامی که انتگرال ناسره مزبور همگرا باشد معین می‌گردد، مورد توجه قرار می‌دهیم. در حالت کلی، پارامتری، می‌تواند مختلط باشد، اما در این بحث کافی است تنها مقادیر حقیقی s را بررسی کنیم. بنا بر بحثی که درباره انتگرالها عنوان شد، تابع f باید در شرایطی صدق کند تا F مبدل لاپلاس آن وجود داشته باشد. مفیدترین و ساده‌ترین این شرایط در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۲۰۶. فرض کنیم که

(يك) f دای فاصله $0 \leq t \leq A$ به ازای هر A مثبت پیوسته قطعه‌ای باشد؛

(دو) به ازای $t \geq M$ داشته باشیم $|f(t)| \leq ke^{at}$. در این نامساوی M و a و k اعداد حقیقی ثابت اند، و لزوماً M مثبت اند. آنگاه مبدل لاپلاس $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ که با رابطه (۲) تعریف شد، به ازای $s > a$ وجود دارد.

برای اثبات این قضیه تنها لازم است نشان دهیم که انتگرال موجود در رابطه (۲) به ازای $s > a$ همگراست. انتگرال ناسره مزبور را به دو بخش تقسیم می کنیم

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (۴)$$

نخستین انتگرال در طرف دوم رابطه (۴) بنا بر فرض (یک) قضیه وجود دارد؛ بنابراین وجود $F(s)$ بستگی به همگرایی انتگرال دوم خواهد داشت. بنا بر فرض (دو) به ازای $t \geq M$ داریم

$$|e^{-st} f(t)| \leq ke^{-st} e^{at} = ke^{(a-s)t},$$

و بدین سان، بنا بر قضیه ۱.۶، اگر $\int_M^\infty e^{(a-s)t} dt$ همگرا باشد، $F(s)$ وجود دارد. با مراجعه به مثال ۱ و قرار دادن $a-s$ به جای c ، دیده می شود که این انتگرال هنگامی که $a-s < 0$ ، همگراست و قضیه ۲.۶ ثابت می شود.

در این فصل، تنها توابعی را که در شرایط قضیه ۲.۶ صدق کنند در نظر می گیریم، مگر آن که خلاف آن تصریح شود. این نوع توابع را پیوسته قطعه ای، و از دقتی $t \rightarrow \infty$ می نامند. مبدل لاپلاس برخی از توابع مقدماتی مهم در مثالهای زیر داده شده است.

مثال ۴. گیریم $f(t) = 1$ ، $t \geq 0$. آنگاه

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

مثال ۵. گیریم $f(t) = e^{at}$ ، $t \geq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a \end{aligned}$$

مثال ۶. گیریم $f(t) = \sin at$ ، $t \geq 0$. آنگاه

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt, \quad s > 0$$

چون

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \sin at \, dt,$$

با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \Big|_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at \, dt \right] \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt. \end{aligned}$$

باردیگر از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a^2} F(s). \end{aligned}$$

بنابراین، با حل معادله نسبت به $F(s)$ داریم

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

اکنون فرض کنیم که f_1 و f_2 دو تابعی باشند که مبدل لاپلاس آنها به ترتیب به ازای a_1 و a_2 وجود داشته باشد. آنگاه، به ازای s بزرگتر از ماکزیمم a_1 و a_2 داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt, \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (5)$$

رابطه (۵) مبین آن است که تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است. این خاصیت فوق العاده مهم است، و ما در آینده از آن استفاده فراوانی خواهیم کرد

مسائل

۱. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. در هر حالت تعیین کنید که آیا تابع f روی فاصله $۰ \leq t \leq ۳$ پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای است و یا هیچکدام

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{د})$$

۲. مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

(الف) t (ب) t^2 (ج) t^n ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

۳. مبدل لاپلاس $f(t) = \cos at$ را که در آن a ثابتی است حقیقی بیابید.

۴. با توجه به روابط $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ و $\sinh bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$

مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید؛ a و b ثابتهای حقیقی اند.

(الف) $\cosh bt$ (ب) $\sinh bt$

(ج) $e^{at} \cosh bt$ (د) $e^{at} \sinh bt$

۵. با توجه به روابط $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ و $\sin bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$

و با فرض آنکه فرمولهای مقدماتی انتگرال گیری به این حالت تعمیم می‌یابند، مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید؛ a و b ثابتهای حقیقی اند.

(الف) $\sin bt$ (ب) $\cos bt$

(ج) $e^{at} \sin bt$ (د) $e^{at} \cos bt$

۶. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را

بیایید؛ n يك عدد صحيح مثبت و a ثابتی حقیقی است.

$t \cosh at$	(ج)	$t \sin at$	(ب)	te^{at}	(الف)
$t^n \sinh at$	(ه)	$t^n \sin at$	(م)	$t^n e^{at}$	(د)

۷. مطلوب است تعیین همگرایی یا واگرایی هریک از انتگرالهای زیر:

(الف) $\int_0^{\infty} (t^2 + 1)^{-1} dt$ (ب) $\int_0^{\infty} te^{-t} dt$ (ج) $\int_1^{\infty} t^{-2} e^t dt$

۸. فرض کنیم که f و f' به ازای $t \geq 0$ پیوسته و وقتی $t \rightarrow \infty$ از رتبه‌ی نمایی باشند. با انتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید که اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ، آنگاه $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. در واقع این نتیجه تحت شرایط ضیقتری نیز همانند آنچه در قضیه ۲.۶ بیان شد صادق است.

۹. تابع گاما. تابع گاما را با $\Gamma(p)$ نشان داده و با انتگرال

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \quad (\text{يك})$$

تعریف می کنند. این انتگرال به ازای همه مقادیر p در بینهایت همگراست. به ازای $p < 0$ نیز يك انتگرال ناسره است، زیرا وقتی $x \rightarrow 0$ تابع زیر علامت انتگرال بی کران می شود. اما، می توان نشان داد که این انتگرال در $x = 0$ به ازای $p > -1$ همگراست. (الف) نشان دهید که به ازای $p > 0$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

(ب) اگر p برابر عدد صحيح مثبت n باشد، نشان دهید که

$$\Gamma(n+1) = n!$$

چون $\Gamma(p)$ به ازای مقادیر ناصحيح p نیز معین است، این تابع تعمیمی از تابع فاکتوریل را برای مقادیر ناصحيح متغیر مستقل به دست می دهد. (ج) نشان دهید که به ازای $p > 0$

$$p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

بدین سان اگر مقادیر $\Gamma(p)$ در يك فاصله به طول واحد، مثلاً $1 \leq p < \infty$ معلوم باشد، می توان به ازای همه مقادیر مثبت p ، $\Gamma(p)$ را تعیین کرد. می توان نشان داد که $\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(3/2) \cdot \Gamma(5/2) \dots \Gamma(11/2) = \sqrt{\pi}$ را بیایید.

(د) نشان دهید که $\Gamma(1) = 1$ و در نتیجه با تعریف $1 = 0!$ سازگار است.

۱۰. مبدل لاپلاس t^p را که در آن $p > -1$ است در نظر می گیریم.
(الف) با مراجعه به مسئله ۹، نشان دهید که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^p\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p dx \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0\end{aligned}$$

(ب) اگر p برابر عدد صحیح مثبت n باشد، نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

(ج) نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad s > 0$$

می توان نشان داد که

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

(د) نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \quad s > 0$$

۲.۶ حل مسائل مقدار اولیه

در این بند نشان می دهیم که چگونه با استفاده از تبدیل لاپلاس می توان مسائل مقدار اولیه را در مورد معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت حل کرد. کارایی تبدیل لاپلاس در این مورد اساساً مبتنی بر این نکته است که مبدل f' به طریق ساده ای با مبدل f مرتبط می گردد. توضیح این ارتباط در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۳.۶. فرض کنیم که روی هر فاصله $0 \leq t \leq A$ تابع f پیوسته و f' پیوسته قطعه ای باشد. علاوه بر این فرض کنیم که ثابتهای K, a, M وجود دارند به طوری که

به ازای $t \geq M$ داشته باشیم $|f(t)| \leq Ke^{at}$. آنگاه $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ به ازای $s > a$ وجود دارد، و علاوه بر این

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (1)$$

برای اثبات این قضیه انتگرال زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt$$

اگر نقاط ناپیوستگی f' در فاصله $0 \leq t \leq A$ را با t_1, t_2, \dots, t_n نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots \\ &\quad + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t) dt \end{aligned}$$

با انتگرال گیری جزء به جزء هر يك از جمله های طرف دوم به دست می آید

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A \\ &\quad + s \left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

چون f پیوسته است، جمله های شامل t_1, t_2, \dots, t_n حذف می شوند. از ترکیب انتگرالها به دست می آید

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

هنگامی که $s > a$ ، وقتی $A \rightarrow \infty$ داریم $e^{-sA} f(A) \rightarrow 0$. بنابراین، به ازای $s > a$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

وقضیه ثابت می شود.

اگر f' و f'' در همان شرایطی که در قضیه ۳.۶ به ترتیب برای f و f' منظور شد صدق کنند، آنگاه مبدل لاپلاس f'' نیز به ازای $s > a$ وجود دارد و با رابطه زیر معین می شود

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (2)$$

در واقع، اگر f و مشتقهای آن در شرایط مناسبی صدق کنند، با کاربردهای متوالی این قضیه می توان عبارتی برای مبدل $f^{(n)}$ مشتق n ام f به دست آورد. این مطلب در نتیجه زیر آمده است.

نتیجه. فرض کنیم که دوی هر فاصله $0 \leq t \leq A$ توابع $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ پیوسته و $f^{(n)}$ پیوسته قطعه ای باشد. علاوه بر این فرض کنیم که ثابتهای a, K و M وجود داشته باشند به طوری که به اذی $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq Ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leq Ke^{at}$ ، \dots ، $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ به آنگاه $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ به اذی $s > a$ وجود دارد و با رابطه زیر معین می شود

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

اکنون طرز استفاده از تبدیل لاپلاس را برای حل مسائل مقدار اولیه بیان می کنیم. نخست معادله دیفرانسیل

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (4)$$

و شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (5)$$

را در نظر می گیریم.

این مسئله ساده به آسانی با روشهای بند ۵.۳ حل می شود. معادله مشخصه آن عبارت است از

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \quad (6)$$

و در نتیجه جواب عمومی معادله (۴) چنین است

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \quad (7)$$

شرایط اولیه (۵) مستلزم آن است که $c_1 + c_2 = 1$ ، $c_1 + 2c_2 = 0$ ؛ بنا بر این $c_1 = \frac{2}{3}$ و $c_2 = \frac{1}{3}$ بدین سان جواب مسئله مقدار اولیه (۴) و (۵) عبارت است از

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t} \quad (8)$$

اکنون همین مسئله را به وسیله تبدیل لاپلاس حل می کنیم. برای این منظور باید فرض کنیم که مسئله دارای يك جواب $y = \phi(t)$ است و نخستین دو مشتق آن در شرایط نتیجه بالا صدق می کنند. آنگاه، با اعمال تبدیل لاپلاس در مورد معادله (۴) خواهیم داشت

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (9)$$

در اینجا از خطی بودن تبدیل استفاده شده، مبدل مجموع به صورت حاصل جمع

مبدلها نوشته شده است. با استفاده از نتیجه بالا $\mathcal{L}\{y''\}$ و $\mathcal{L}\{y'\}$ را برحسب $\mathcal{L}\{y\}$ بیان می‌کنیم، و معادله (۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2 \mathcal{L}\{y\} = 0$$

یا

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0 \quad (10)$$

که در آن $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. چون از شرایط اولیه (۵) مقادیر $y(0)$ و $y'(0)$ را در معادله (۱۰) جایگزین کرده و آن را نسبت به $Y(s)$ حل کنیم، به دست می‌آید

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \quad (11)$$

بدین‌سان برای $Y(s)$ که مبدل لاپلاس جواب مسئله مقدار اولیه یعنی $y = \phi(t)$ است، عبارتی به دست آورده‌ایم. برای تعیین تابع ϕ باید تابعی را بیابیم که مبدل لاپلاس آن برابر $Y(s)$ که با رابطه (۱۱) داده شده است، باشد.

این کار را در این حالت می‌توان به آسانی با بسط طرف دوم رابطه (۱۱) به کسره‌های ساده انجام داد. بدین‌سان

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1} \quad (12)$$

بالاخره، با توجه به نتیجه مثال ۵ بند ۱، دیده می‌شود که مبدل e^{2t} برابر $\frac{1}{s-2}$ و e^{-t} برابر $\frac{1}{s+1}$ است؛ به همین طریق e^{-t} دارای مبدل $\frac{2}{s+1}$ است. بنابراین، با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس،

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

دارای مبدل (۱۲) است. این همان جوابی است که قبلاً با روش دیگری به دست آمد. گرچه در این مسئله ساده از به کار گرفتن تبدیل لاپلاس مزیت خاصی حاصل نمی‌شود، با وجود این می‌توان برخی از ویژگیهای اساسی روش تبدیل را خاطر نشان کرد. نخست آنکه، $Y(s)$ مبدل تابع مجهول $y = \phi(t)$ از حل يك معادله جبری، معادله (۱۰)، و نه يك معادله دیفرانسیل به دست می‌آید. دیگر آنکه مستقیماً جوابی به دست می‌آید که هم در شرایط اولیه (۵) و هم در معادله دیفرانسیل (۴) صدق می‌کند. بدین‌سان مسئله تعیین مقادیر مناسب برای ثابتهای دلخواه جواب عمومی مطرح نمی‌گردد. برای خواننده این نکته نیز قابل توجه است که ضرب $Y(s)$ در معادله (۱۰) دقیقاً همان چندجمله‌ای موجود در معادله

مشخصه (۶) است؛ و در واقع همیشه چنین است. چون استفاده از بسط $Y(s)$ به کسرهای ساده برای تعیین $\phi(t)$ مستلزم تجزیه چندجمله‌ای می‌باشد، بنابراین به کار گرفتن تبدیل لاپلاس ما را از تعیین ریشه‌های معادله مشخصه بی‌نیاز نمی‌کند. در مورد معادلاتی که مرتبه آنها بالاتر از دو است امکان دارد که این يك مسئله جبری دشواری باشد، به ویژه اگر ریشه‌ها گنگ یا مختلط باشند.

دشواری اصلی در حل مسائل مقدار اولیه به روش تبدیل همان مسئله تعیین تابع $y = \phi(t)$ متناظر با مبدل $Y(s)$ است. این مسئله را مسئله عکس تبدیل لاپلاس می‌نامند؛ $\phi(t)$ مبدل معکوس متناظر به $Y(s)$ ، و روش تعیین $\phi(t)$ از $Y(s)$ «تبدیل معکوس» نامیده می‌شود. برای نشان دادن مبدل معکوس $Y(s)$ از علامت $\{Y(s)\}^{-1}$ استفاده می‌کنیم. برای تبدیل معکوس لاپلاس فرمول کلی وجود دارد، اما به کار گرفتن آن مستلزم اطلاعاتی از مبحث توابع مختلط است و آن را در این کتاب مطرح نمی‌کنیم. اما، با وجود این می‌توان بسیاری از خواص مهم تبدیل لاپلاس، و حل بسیاری از مسائل جالب را، بدون استفاده از توابع مختلط به دست آورد.

در حل مسئله مقدار اولیه (۴) و (۵) این سؤال را که آیا جز تابعی که با رابطه (۸) داده شده است توابع دیگری که دارای همان مبدل (۱۲) باشند وجود دارد؟ مطرح نکردیم. در واقع، می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی پیوسته با مبدل لاپلاس F باشد، آنگاه تابع پیوسته دیگری که دارای همان مبدل باشد وجود ندارد. به عبارت دیگر، اساساً بین توابع و مبدل لاپلاس آنها يك تناظر يك به يك وجود دارد. این نکته گسترده‌آوری جدولی از مبدل‌های توابع متداول و معکوس آنها را مطرح می‌کند (جدول ۱۰.۶ را ببینید).^۱ در ستون دوم مبدل توابع متناظر در ستون اول مندرج است. مهمتر آنکه توابع ستون اول مبدل معکوس توابع متناظر در ستون دوم می‌باشند. بدین‌سان، مثلاً اگر مبدل جواب معادله دیفرانسیلی معلوم باشد، خود جواب را اغلب می‌توان به سادگی با مراجعه به جدول پیدا کرد. برخی از عناصر جدول ۱۰.۶ به عنوان مثال مورد استفاده قرار گرفتند و برخی به عنوان مسئله در بند ۱۰.۶ مطرح می‌گردند، مابقی را بعداً در همین فصل بررسی می‌کنیم. ستون سوم این جدول جایی را که در آن اشتقاق مبدل مزبور را می‌توان یافت نشان می‌دهد.

اغلب، يك مبدل لاپلاس $F(s)$ را می‌توان به صورت مجموع چند جمله نوشت

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (13)$$

فرض کنیم که $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ ، \dots ، $f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. آنگاه تابع

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

دارای مبدل لاپلاس $F(s)$ است. بنابراین خاصیت یکتایی فوق‌الذکر تابع پیوسته دیگری که دارای همین مبدل باشد وجود ندارد. بدین‌سان

۱. جداول مفصلتری نیز در دسترس است. منابع پایانی این فصل را ببینید.

جدول ۱۰۶ مبدل‌های لاپلاس توابع مقدماتی

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	توجه
۱	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	بند ۶؛ مثال ۴
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	بند ۶؛ مثال ۵
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	بند ۶؛ مثال ۶
$t^n, n = \text{عدد صحیح مثبت}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	بند ۶؛ مسئله ۱۰
$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	بند ۶؛ مسئله ۳
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $	بند ۶؛ مسئله ۴
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $	
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	بند ۶؛ مسئله ۵
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	
$t^n e^{at}, n = \text{عدد صحیح مثبت}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	بند ۶؛ مسئله ۶
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	بند ۶؛ ۳
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	بند ۶؛ ۳
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	بند ۶؛ ۳
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	بند ۶؛ ۳؛ مسئله ۴
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	بند ۶؛ ۵
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	بند ۶؛ ۴
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	بند ۶؛ ۲
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	بند ۶؛ ۲؛ مسئله ۱۴

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \quad (14)$$

یعنی، عکس تبدیل لاپلاس نیز يك عملگر خطی است. در بسیاری از مسائل به آسانی می توان این خاصیت را به کار گرفت و مبدل مفروض را به مجموع توابعی که مبدل معکوس آنها معلوم است یا از جدول می توان به دست آورد تجزیه کرد. بسط به کسرهای ساده در این مورد دارای اهمیت خاصی است، حالت کلی آن را در مسئله ۱۹ آورده ایم. خواص مفید دیگر تبدیل لاپلاس را بعداً در این فصل بیان می کنیم.

برای توضیح بیشتر در مورد روش حل مسائل مقدار اولیه به وسیله تبدیل لاپلاس به مثال زیر توجه شود.

مثال. مطلوب است تعیین جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = \sin 2t \quad (15)$$

که در شرایط اولیه زیر صدق کند

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (16)$$

فرض می کنیم که این مسئله مقدار اولیه دارای جوابی به صورت $y = \phi(t)$ باشد، که با نخستین دوشق خود در شرایط نتیجه قضیه ۳.۶ صدق می کند. آنگاه، مبدل لاپلاس معادله دیفرانسیل مزبور را به دست می آوریم، خواهیم داشت

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

که در آن مبدل $\sin 2t$ را از جدول ۱.۶ به دست آورده ایم. چون به جای $y(0)$ و $y'(0)$ مقادیر آنها را از شرایط اولیه قرار داده و معادله را بر حسب $Y(s)$ حل کنیم، به دست می آید

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$Y(s)$ را با استفاده از کسرهای ساده می توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4}$$

با تعیین ثابتهای a, b, c, d خواهیم داشت

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

با استفاده از مثال ۶ بند ۱۰۶، یا جدول ۱۰۶، نتیجه می شود که

$$y = \phi(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (17)$$

خواننده باید توجه داشته باشد که برای حل يك معادله دیفرانسیل مانند معادله (۱۵)، به وسیله تبدیل لاپلاس، از ابتدا فرض می کنیم که جواب $y = \phi(t)$ دارای مبدل $Y(s)$ است. به محض آنکه جواب به دست آمد، صحت این فرض تأیید می شود. به عنوان مثال، عبارت طرف دوم رابطه (۱۷) به وضوح در شرایط نتیجه قضیه ۳.۶ به ازای $n = 2$ صدق می کند. علاوه بر این، این مثال نشان می دهد که مسائل ناهمگن دقیقاً به همان طریق معادلات همگن حل می شوند؛ و لازم نیست که معادلات همگن و ناهمگن را به صورتی که در فصل ۳ حل شد جداگانه حل کرد. این یکی از مزایای تبدیل لاپلاس است، و نیز، جوابی که در شرایط اولیه صدق کند مستقیماً به دست می آید، بی آنکه قبلاً به تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل پردازیم.

مهمترین کاربردهای مقدماتی تبدیل لاپلاس را می توان در بررسی ارتعاشات مکانیکی و تحلیل مدارهای الکتریکی مشاهده کرد؛ معادلات مربوطه را به ترتیب در بندهای ۷.۳ و ۸.۳ به دست آوردیم. يك دستگاه ارتعاشگر فنر-جرم دارای معادله حرکت

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (18)$$

است که در آن m جرم، c ضریب کاهش، k ثابت فنر، و $F(t)$ نیروی مؤثر خارجی است. معادله يك مدار الکتریکی متشکل از مقاومت R ، ضریب القا L ، و خازن C (یعنی يك مدار RLC) عبارت است از

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (19)$$

که در آن $Q(t)$ بار خازن و $E(t)$ ولتاژ مؤثر است. معادله (۱۹) را بر حسب جریان $I(t) = dQ(t)/dt$ می توان به صورت زیر نوشت

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}(t) \quad (20)$$

باید برای u ، Q و I شرایط اولیه مناسبی در نظر گرفت. چنانکه قبلاً در بند ۸.۳ متذکر شدیم معادله (۱۸) مربوط به دستگاه فنر-جرم و معادلات (۱۹) یا (۲۰) برای مدار الکتریکی از لحاظ ریاضی متحد و یکسانند، تنها اختلاف در تعبیر ثابتهای و متغیرهای موجود در آنها می باشد. مسائل فیزیکی دیگری نیز به همین معادله دیفرانسیل منجر می گردند. بدین سان هنگامی که مسئله ریاضی حل شد، جواب آن را می توان بر حسب هر يك از مسائل فیزیکی متناظر که مورد توجه باشد تعبیر کرد.

در مسائل این بند و بندهای دیگر این فصل مسائل مقدار اولیه متعددی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت آمده است. بسیاری از آنها را می توان به عنوان مدل های دستگاه های فیزیکی خاصی تعبیر کرد، اما معمولاً ما به تصریح این نکته نمی پردازیم.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۱۰ با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

$$y'' - y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad (1)$$

$$y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3)$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (4)$$

$$y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \quad (5)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$$

$$y^{iv} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0 \quad (6)$$

$$y'' - 2y' - 2y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (8)$$

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (9)$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (10)$$

در هر يك از مسائل ۱۱ و ۱۲ مبدل لاپلاس $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید. برای تعیین عکس مبدلها روشی در بند ۳۰۶ خواهد آمد.

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (11)$$

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (12)$$

۱۳*. مبدل لاپلاس برخی از توابع را می توان به آسانی از بسط به سری تیلر به دست آورد.

(الف) با استفاده از سری تیلر تابع $\sin t$ ،

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

و با فرض آنکه مبدل لاپلاس این سری را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 1$$

(ب) گیریم

$$f(t) = \begin{cases} (\sin t)/t, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

سری تیلر تابع f را حول $t=0$ بیابید. با فرض آنکه مبدل لاپلاس این تابع را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctg \frac{1}{s}, \quad s > 1$$

(ج) تابع بسل نوع اول از رتبه صفر J_0 دارای سری تیلر زیر است (بند ۷.۴ را ببینید)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

با فرض آنکه مبدل‌های لاپلاس زیر را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \quad s > 1$$

و

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s} e^{-1/4s}, \quad s > 0$$

مسائل ۱۴ تا ۱۷ مربوط به مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌باشند.
۱۴. گیریم

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

می‌توان ثابت کرد که اگر f در شرایط قضیه ۲.۶ صدق کند، مشتق‌گیری از عبارت زیر علامت انتگرال نسبت به پارامتر s به ازای $s > a$ مجاز است.
(الف) نشان دهید که

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

(ب) نشان دهید که

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$$

بدین سان مشتق مبدل لاپلاس، متناظر با ضرب تابع اصلی در $-t$ است.

۱۵. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۴، مبدل لاپلاس هر يك از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(t) = t^n e^{at}$ ، که در آن a ثابتی حقیقی و n عدد صحیح مثبتی است.

(ب) $f(t) = t^n \sin t$.

(ج) $f(t) = t^n$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

۱۶*. معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر

$$ty'' + y' + ty = 0$$

را در نظر می گیریم. در بند ۳.۴ دیده شد که $t = 0$ يك نقطهٔ غیرعادی منظم این معادله

است، و بنابراین امکان دارد که جوابها وقتی $t \rightarrow 0$ بی کران شوند. اکنون بررسی کنیم

که آیا جوابهایی وجود دارد که خود و مشتقهای آنها در $t = 0$ منتهای باقی بمانند. با

فرض آنکه چنین جواب $y = \phi(t)$ وجود داشته باشد، قرار می دهیم $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

(الف) نشان دهید که $Y(s)$ در رابطهٔ زیر صدق می کند

$$(1 + s^2)Y'(s) + sY(s) = 0$$

(ب) نشان دهید که $Y(s) = c(1 + s^2)^{-1/2}$ ، که در آن c ثابت دلخواهی است.

(ج) با بسط $(1 + s^2)^{-1/2}$ به يك سری دوجمله ای که به ازای $s > 1$ معتبر باشد،

و با فرض آنکه بتوان مبدل معکوس را جمله به جمله محاسبه کرد نشان دهید که

$$y = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = c J_0(t)$$

که در آن J_0 تابع بسل نوع اول رتبهٔ صفر است. توجه شود که $J_0(0) = 1$ ، و مشتقهای

همهٔ مراتب J_0 در $t = 0$ منتهای هستند. در بند ۷.۴ نشان داده شد که جواب دوم این معادله

وقتی $t \rightarrow 0$ بی کران می شود.

۱۷. در هر يك از مسائل مقدار اولیهٔ زیر جواب را با $y = \phi(t)$ نشان می دهیم، با

استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۴ معادلهٔ دیفرانسیلی را که $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$ در آن صدق می کند

بیابید.

(الف) $y'' + ty = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (معادلهٔ آیری)

(ب) $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(معادلهٔ لژاندر)

توجه شود که معادله دیفرانسیل مربوط به $Y(s)$ در قسمت (الف) مرتبه اول است، اما در قسمت (ب) از مرتبه دوم می باشد. این بدان علت است که معادله قسمت (الف) حداکثر دارای توان اول t است، در حالی که در قسمت (ب) دارای توان دوم t می باشد. این نکته مبین آن است که تبدیل لاپلاس اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر مفید نیست، مگر آنکه همه ضرایب حداکثر توابعی خطی از متغیر مستقل باشند.

۰۱۸ فرض کنیم که

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

اگر $G(s)$ و $F(s)$ به ترتیب مبدل‌های لاپلاس $g(t)$ و $f(t)$ باشند، نشان دهید که

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

۰۱۹ در این مسئله نشان می دهیم که چگونه به طور کلی با استفاده از بسط به کسرهای ساده می توان عکس مبدل‌های لاپلاس را محاسبه کرد. فرض کنیم که

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

که در آن $Q(s)$ یک چند جمله ای از درجه n با صف‌های متمایز r_1, \dots, r_n و $P(s)$ یک چند جمله ای از درجه کمتر از n است. در این حالت می توان نشان داد که $P(s)/Q(s)$ دارای بسطی به کسرهای ساده به صورت زیر است

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \dots + \frac{A_n}{s-r_n} \quad (\text{یک})$$

که در آن باید ضرایب A_1, \dots, A_n را تعیین کرد.
(الف) نشان دهید که

$$A_k = \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{دو})$$

دانهمایی: یک روش برای این کار آن است که رابطه (یک) را در $s = r_k$ ضرب کنیم و سپس حد آن را وقتی $s \rightarrow r_k$ بیابیم.
(ب) نشان دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t} \quad (\text{سه})$$

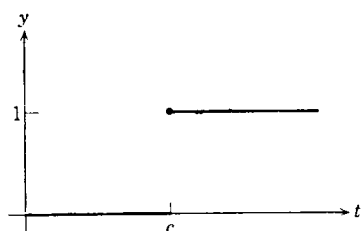
۳.۶ توابع پله‌ای

در بند ۲.۶ روش کلی حل مسائل مقدار اولیه با استفاده از تبدیل لاپلاس مطرح شد. برخی از جالبترین کاربردهای مقدماتی روش تبدیل را در حل معادلات دیفرانسیل خطی با توابع نیروی ناپیوسته یا ضربه‌ای می‌توان ملاحظه کرد. این نوع معادلات اغلب در تحلیل جریان در مدارهای الکتریکی یا ارتعاشات دستگاههای مکانیکی مطرح می‌شود. در این بند و بندهای بعدی به بررسی برخی دیگر از خواص تبدیل لاپلاس که در حل این نوع مسائل مفید هستند می‌پردازیم. جز در مواردی که خلاف آن تصریح شود ذیلاً همه توابع را پیوسته قطعه‌ای و از رتبه‌نمایی فرض می‌کنیم، تا بدین‌سان مبدل لاپلاس آنها حداقل به‌ازای مقادیر به‌قدر کافی بزرگ s وجود داشته باشد:

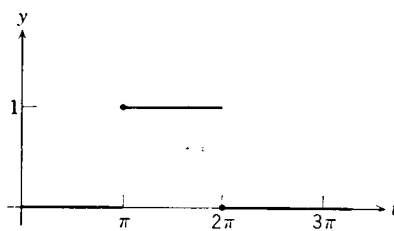
برای بررسی دقیق توابعی که دارای ناپیوستگی‌های جهشی می‌باشند، شناخت تابعی موسوم به تابع پله‌ای یکه بسیار مفید است. این تابع که آن را با u_c نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \quad c \geq 0. \quad (1)$$

نمودار تابع $y = u_c(t)$ در شکل ۲.۶ نشان داده شده است.



شکل ۲.۶ $y = u_c(t)$.



شکل ۲.۶ $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

شکل ۳.۶ $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$

شکل ۲.۶ $y = u_c(t)$

مثال ۱. نمودار تابع $y = h(t)$ را که در آن

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \quad t \geq 0$$

است رسم کنید.

بنا بر تعریف $u_c(t)$ در رابطه (۱) داریم

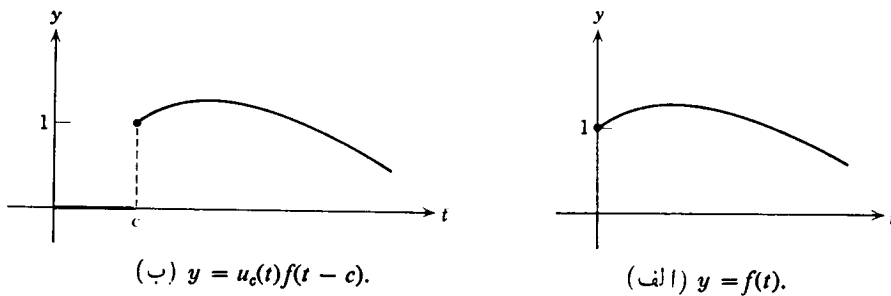
$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty \end{cases}$$

بدین سان نمودار $y = h(t)$ مطابق شکل ۳.۶ است.

تابع پله ای یکبه u_c را می توان برای انتقال به مسافت c به طرف راست يك تابع مفروض f ، با حوزه $t \geq 0$ ، به کار گرفت. به عنوان مثال، تابع زیر

$$y = u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

نمایشگر انتقال تابع f به مسافت c در جهت مثبت t می باشد (شکل ۴.۶ را ببینید).



شکل ۴.۶

مبدل لاپلاس u_c به آسانی تعیین می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (۲)$$

تابع پله ای یکبه به علت رابطه موجود بین مبدل $f(t)$ و مبدل انتقال یافته آن $u_c(t)f(t-c)$ که ذیلاً بیان می شود، در مبحث تبدیل لاپلاس دارای اهمیت ویژه ای است.

قضیه ۴.۶. اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشد، و اگر يك ثابت مثبت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s), \quad s > a \quad (۳)$$

عکس، اگر $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ، آنگاه

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} \quad (۱)$$

برای اثبات قضیه ۴.۶ کافی است مبدل $u_c(t)f(t-c)$ را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t)f(t-c) dt \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st} f(t-c) dt\end{aligned}$$

با تعویض متغیر $\xi = t - c$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-(\xi+c)s} f(\xi) d\xi = e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \\ &= e^{-cs} F(s)\end{aligned}$$

بدین‌سان رابطه (۳) اثبات شد؛ رابطه (۴) از اعمال تبدیل عکس به‌دو طرف رابطه (۳) نتیجه می‌شود.

مثال ساده‌ای برای این قضیه از قرارداد $f(t) = 1$ به دست می‌آید. با توجه به $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ ، مستقیماً از رابطه (۳) داریم $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. این نتیجه بسا رابطه (۲) مطابقت دارد. مثالهای ۲ و ۳ علاوه بر این نشان می‌دهند که چگونه از قضیه ۴.۶ می‌توان در محاسبه مبدلها و عکس مبدلها استفاده کرد.

مثال ۲. اگر تابع f به‌صورت

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

تعریف شده باشد، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید.

دیده می‌شود که $f(t) = \sin t + g(t)$ ، که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

بدین‌سان

$$g(t) = u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)$$

و

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)\} \\ &= \mathcal{L}\{\sin t\} + e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\cos t\}\end{aligned}$$

با جایگزینی مبدلهای $\sin t$ و $\cos t$ ، به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2+1} \\ &= \frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}\end{aligned}$$

خوانندگان باید این روش را با محاسبه مستقیم $\mathcal{L}\{f(t)\}$ براساس تعریف مقایسه کنند.

مثال ۳. مطلوب است مبدل معکوس

$$F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

بنا بر خطی بودن تبدیل معکوس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2)\end{aligned}$$

تابع f را نیز می توان به صورت زیر نوشت

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

قضیه زیر شامل خاصیت بسیار مفید دیگری از تبدیل لاپلاس است که از لحاظی نظیر خاصیت مذکور در قضیه ۴.۶ است.

قضیه ۵.۶. اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s \geq a \geq 0$ وجود داشته، و c يك ثابت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \quad s > a+c \quad (5)$$

برعکس، اگر $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ آنگاه

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} \quad (6)$$

بنا بر قضیه ۵.۶، ضرب $f(t)$ در e^{ct} موجب انتقال مبدل $F(s)$ به مسافت c در جهت مثبت s می گردد، و برعکس. اثبات این قضیه تنها مستلزم محاسبه $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$ است. بدین سان

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt \\ &= F(s-c)\end{aligned}$$

که همان رابطه (۵) است. قید $s > a + c$ از آنجا نتیجه می شود که بنا بر فرض (دو) قضیه ۲.۶ داریم $|f(t)| \leq ke^{at}$ ؛ بنابراین $|e^{ct}f(t)| \leq ke^{(a+c)t}$. رابطه (۶) از مبدل معکوس رابطه (۵) نتیجه می گردد، و اثبات کامل می شود. کاربرد اصلی قضیه ۵.۶ در محاسبهٔ برخی از مبدل‌های معکوس است، چنانکه در مثال ۴ توضیح داده شده است.

مثال ۴. مطلوب است مبدل معکوس

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

با جدا کردن مربع کامل موجود در مخرج، می توان نوشت

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2)$$

که در آن $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. چون $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sin t$ ، از قضیه ۵.۶ نتیجه می شود که

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t} \sin t$$

نتایج این بند اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل مفید است، به ویژه معادلاتی که شامل توابع نیروی ناپیوسته اند. بند بعد به مثالی برای توضیح این نکته اختصاص یافته است.

مسائل

۱. نمودار هریک از توابع زیر را در فاصله $t \geq 0$ رسم کنید.

$$u_1(t) + 2u_2(t) - 6u_3(t) \quad (\text{الف})$$

$$(t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t) \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = t^2 \quad \text{در آن } f(t-\pi)u_\pi(t) \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \sin t \quad \text{که در آن } f(t-3)u_3(t) \quad (\text{د})$$

$$f(t) = 2t \quad \text{که در آن } f(t-1)u_1(t) \quad (\text{ه})$$

$$f(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t) \quad (\text{و})$$

۲. مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = u_1(t) + 2u_2(t) - 6u_3(t) \quad (\text{د})$$

$$f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t) \quad (\text{ه})$$

$$f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \geq 0 \quad (\text{و})$$

۳. مبدل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2} \quad (\text{ب}) \quad F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2 - 2} \quad (\text{د}) \quad F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{ج})$$

$$F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s} \quad (\text{و}) \quad F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{ه})$$

۴. فرض کنیم که $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشد.

(الف) نشان دهید که اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca$$

(ب) نشان دهید که اگر k ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

(ج) نشان دهید که اگر a و b مقادیر ثابت باشند و $a > 0$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-b/a} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

۵. با استفاده از نتایج مسئله ۴، مبدل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$F(s) = \frac{2s+1}{4s^2+4s+5} \quad (\text{ب}) \quad F(s) = \frac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s-1} \quad (\text{د}) \quad F(s) = \frac{1}{9s^2-12s+3} \quad (\text{ج})$$

۶. تبدیل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید. در قسمت (د) فرض می‌کنیم که انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری مجاز باشد.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = 1 - u_1(t) + \dots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k(t) \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t) \quad (\text{د}) \quad \text{شکل ۵.۶ را ببینید.}$$

۷*. گیریم f در $f(t+T) = f(t)$ به ازای $t \geq 0$ و عدد مثبت T صدق کند؛ f را متناوب با دوره تناوب T روی $0 \leq t < \infty$ می‌نامند. نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

۸*. با استفاده از نتیجه مسئله ۷ مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t+2) = f(t)$$

شکل ۶.۶ را ببینید.

$$f(t+2) = f(t)$$

با مسئله ۶ (د) مقایسه کنید.

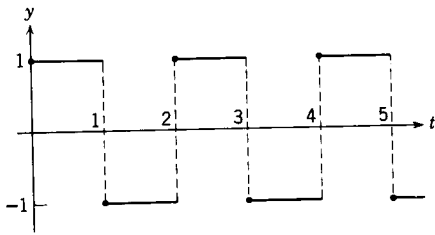
$$f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi \quad (\text{د}) \quad f(t) = t, \quad 0 \leq t < 1 \quad (\text{ج})$$

$$f(t+\pi) = f(t)$$

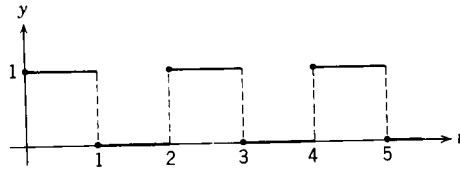
شکل ۸.۶ را ببینید.

$$f(t+1) = f(t)$$

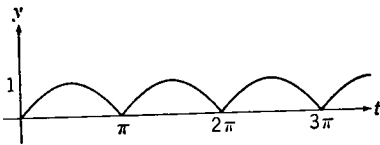
شکل ۷.۶ را ببینید.



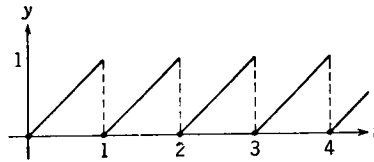
شکل ۶.۶ موج مربعی .



شکل ۵.۶ موج مربعی .



شکل ۸.۶ موج سینوسی یکطرفه .



شکل ۷.۶ موج دندانه‌ای .

۹۰. الف) اگر $f(t) = 1 - u_1(t)$ ، مطلوب است $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ؛ با مسئله ۶ الف) مقایسه کنید. نمودار $y = f(t)$ را رسم کنید.

ب) گیریم $g(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$ ، که در آن f تابعی است که در قسمت الف) تعریف شد. نمودار $y = g(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{g(t)\}$ را بیابید.

ج) گیریم $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t-1)$ ، که در آن g تابعی است که در قسمت ب) تعریف شده است. نمودار $y = h(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{h(t)\}$ را بیابید.

۱۰۰. تابع p را که به صورت زیر تعریف شده است در نظر می گیریم

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad p(t+2) = p(t)$$

الف) نمودار $y = p(t)$ را رسم کنید.

ب) با استفاده از نتیجه مسئله ۷، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ را که در آن p ادامه تناوبی تابع h

در مسئله ۹ ج) است بیابید.

ج) با استفاده از قضیه ۳.۶، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ مبدل لاپلاس

$$p(t) = \int_0^t f(t) dt$$

را که در آن f تابع مسئله ۸ ب) است بیابید.

۱.۳.۶ يك معادله دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته

اکنون توجه خود را به يك مسئله نمونه كه متضمن يك تابع نیروی ناپیوسته (جمله ناهمگن) است معطوف می كنیم. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 4y = h(t) \quad (1)$$

را كه در آن

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi, \quad t \geq 2\pi \end{cases} \quad (2)$$

(شكل ۳.۶ صفحه ۳۵۹ را ببینید) در نظر می گیریم. فرض كنیم كه شرایط اولیه عبارتند از

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3)$$

به عنوان مثال بار يك خازن در يك مدار الكتریکی ساده كه شامل مقاومت نباشد و ولتاژ اعمال شده به صورت (۲) باشد از این مسئله تبعیت می كند. همچنین، y می تواند نمایشگر پاسخ يك نوسانگر هماهنگ نامیرا تحت نیروی اعمال شده $h(t)$ باشد. قبل از آنكه مبدل معادله (۱) را بدست آوریم مناسبتر است كه $h(t)$ را به صورت

$$h(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t) \quad (4)$$

(مثال ۱ بند ۳.۶ را ببینید) بنویسیم. بدین سان مبدل لاپلاس معادله (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} (s^2 + 4)Y(s) - sy(0) - y'(0) &= \mathcal{L}\{u_{\pi}(t)\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\} \\ &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن مقادیر اولیه (۳) و استخراج $Y(s)$ ، بدست می آید

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)} \quad (5)$$

برای پیدا كردن $y = \phi(t)$ باید جمله به جمله از طرف دوم رابطه (۵) مبدل معكوس گرفت. بنابر جدول ۱.۶ مبدل معكوس جمله اول چنین است

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t \quad (6)$$

برای محاسبه مبدل معكوس جمله دوم دیده می شود كه بنابر قضیه ۴.۶ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right\}=u_{\pi}(t)g(t-\pi)$$

که در آن

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$$

با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده، داریم

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

و بنا بر جدول ۱.۶

$$g(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

بدین سان

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{4}u_{\pi}(t)[1-\cos 2(t-\pi)] \quad (7)$$

و به همین طریق برای جمله سوم داریم

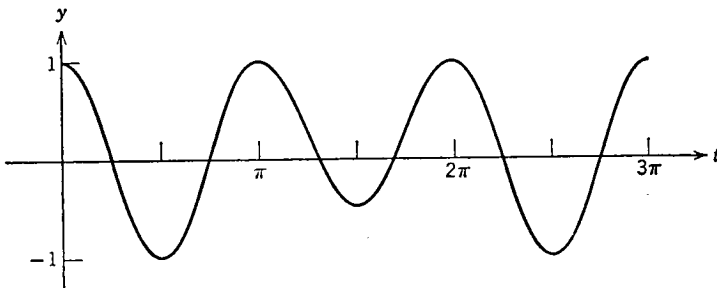
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)] \quad (8)$$

بالاخره با توجه به روابط (۶)، (۷) و (۸) به دست می آید

$$\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$=\cos 2t + \frac{1}{4}u_{\pi}(t)[1-\cos 2(t-\pi)] - \frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)] \quad (9)$$

نمودار $y=\phi(t)$ در شکل ۹.۶ رسم شده است.



شکل ۹.۶ جواب مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲)، (۳).

توجه شود که جمله‌های دوم و سوم طرف دوم رابطه (۹) به ترتیب به‌ازای $0 < t < 2\pi$ و $t < \pi$ صفرند. اگر $\phi(t)$ را بدون استفاده از توابع پله‌ای یکس $u_{2\pi}$ و u_{π} بنویسیم، آنگاه

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi \\ \frac{3}{4} \cos 2t + \frac{1}{4}, & \pi \leq t < 2\pi \\ \cos 2t, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

مسئله مقدار اولیه که در اینجا بررسی شد، شامل يك معادله دیفرانسیل با تابع نیرو است که دارای يك ناپیوستگی جهشی می‌باشد. بنابراین کاملاً در محدوده قضیه اساسی وجود و یکتایی ۲.۳ قرار نمی‌گیرد. بدین‌سان تعجبی ندارد که جواب $y = \phi(t)$ که با رابطه ۱۰ بیان شده است با وجود آنکه به‌ازای $t > 0$ پیوسته و دارای مشتق اول پیوسته است در نقاط $t = \pi$ و $t = 2\pi$ که تابع نیروی h دارای ناپیوستگی جهشی است دارای مشتق دوم نباشد. بنابر رابطه (۱۰) داریم

$$\phi''(t) = \begin{cases} -4 \cos 2t, & 0 < t < \pi, \\ -3 \cos 2t, & \pi < t < 2\pi, \\ -4 \cos 2t, & 2\pi < t < \infty. \end{cases}$$

مثلاً در همسایگی $t = \pi$ ، وقتی از چپ $t \rightarrow \pi$ ، داریم $\phi''(t) \rightarrow -4$ ، اما وقتی از راست $t \rightarrow \pi$ ، خواهیم داشت $\phi''(t) \rightarrow -3$. بدین‌سان ϕ'' در $t = \pi$ دارای يك ناپیوستگی جهشی است، و در $t = 2\pi$ نیز وضعیت به‌همین منوال است. این ناپیوستگی‌ها ناشی از ناپیوستگی تابع نیرو در این نقاط است. اکنون معادله خطی مرتبه دوم کلی

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (11)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن p و q روی يك فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، اما g روی این فاصله تنها پیوسته قطعه‌ای است. اگر $y = \psi(t)$ يك جواب معادله (۱۱) باشد، آنگاه ψ و ψ' روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، اما ψ'' همانند g و در همان نقاط دارای ناپیوستگی جهشی خواهد بود. همین نکته در مورد معادلات از مرتبه بالاتر نیز صادق است؛ بالاترین مشتق جواب که در معادله دیفرانسیل وجود دارد، همانند تابع نیرو، در همان نقاط دارای ناپیوستگی‌های جهشی است، اما جواب و مشتق‌های پایین‌تر حتی در این نقاط پیوسته خواهند بود. روش دیگر برای حل مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲)، و (۳) آن است که معادله دیفرانسیل را در سه فاصله جداگانه $0 < t < \pi$ ، $\pi < t < 2\pi$ ، و $2\pi < t$ حل کنیم. در فاصله اول، ثابتهای دلخواه موجود در جواب عمومی به گونه‌ای انتخاب

می‌شوند که در شرایط اولیه صدق کنند. در فاصله دوم ثابتها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که ϕ و مشتق آن ϕ' در $t = \pi$ پیوسته باشند. توجه شود که محدودیت تعداد ثابتها مانع از آن است که قید پیوستگی ϕ'' در این نقطه را نیز اعمال کنیم. به همین طریق، در فاصله سوم ثابتها به گونه‌ای تعیین می‌شوند که ϕ و ϕ' در $t = 2\pi$ پیوسته باشند. همین روش کلی را می‌توان در مسائل دیگری که دارای توابع نیروی پیوسته قطعه‌ای‌اند به کار برد. اما، همین که موضوع از لحاظ نظری کامل شد، معمولاً آسانتر است که با استفاده از تبدیل لاپلاس این نوع مسائل را یکجا حل کرد.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۷ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

$$y'' + y = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq t < \infty \end{cases} \quad ۱.$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ و } t \geq 2\pi \end{cases} \quad ۲.$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 4y = \sin t - u_{\pi}(t) \sin(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad ۳.$$

$$y'' + 4y = \sin t + u_{\pi}(t) \sin(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad ۴.$$

$$y'' + 2y' + y = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \quad ۵.$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 3y' + 2y = u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad ۶.$$

$$y'' + y = u_{\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad ۷.$$

۸*. گیریم تابع f به صورت

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

تعریف شده است و به ازای دیگر مقادیر مثبت t داشته باشیم $f(t + 2\pi) = f(t)$. یعنی، f متناوب و با دوره تناوب 2π است (مسئله ۷ بند ۳.۶ را ببینید). مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه زیر

$$y'' + y = f(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۹*. فرض کنیم که تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(الف) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید.

(ب) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' + 4y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

۴.۶ توابع ضربه‌ای

در برخی از کاربردها لازم می‌آید که پدیده‌هایی با ماهیت ضربه‌ای را بررسی کنیم، به عنوان مثال، ولتاژها یا نیروهای بسیار بزرگی که در فواصل زمانی بسیار کوتاه اثر می‌کنند. این نوع مسائل اغلب به معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (۱)$$

می‌انجامند که در آن $g(t)$ در طول یک فاصله کوتاه $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ دارای مقدار بزرگی است و به ازای مقادیر دیگر t صفر است. انتگرال $I(\tau)$ ، که با

$$I(\tau) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} g(t) dt \quad (۲)$$

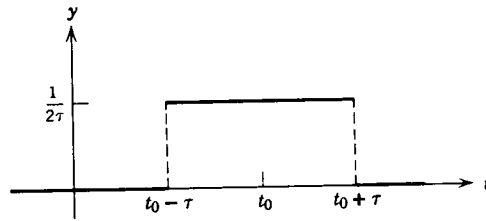
تعریف می‌شود، و چون در خارج فاصله $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ داریم $g(t) = 0$ بنابراین

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt, \quad (۳)$$

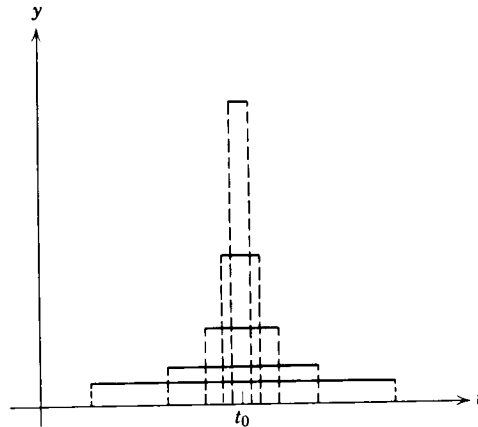
نمایشگر اندازه شدت تابع نیرو است. در یک دستگاه مکانیکی که $g(t)$ نیرو است، در این صورت $I(\tau)$ ضربه کل نیروی $g(t)$ در فاصله زمانی $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ است. به همین نحو، اگر γ نمایشگر جریان در یک مدار الکتریکی و $g(t)$ مشتق زمانی ولتاژ باشد، آنگاه $I(\tau)$ نمایشگر ولتاژ کل است که در طول فاصله $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ روی مدار اثر می‌کند. به ویژه، فرض کنیم t_0 برابر صفر، و $g(t)$ به صورت

$$g(t) = d_{\tau}(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau \\ 0, & t \leq -\tau \text{ یا } t \geq \tau \end{cases} \quad (۴)$$

باشد که در آن τ ثابت مثبت کوچکی است (شکل ۱۰.۶ را ببینید). بنابر رابطه (۲) یا (۳) مستقیماً نتیجه می‌شود که در این حالت مادامی که $\tau \neq 0$ ، داریم $I(\tau) = 1$ و مستقل از مقدار τ می‌باشد. اکنون با بررسی تأثیر تابع نیروی d_{τ} روی فواصل زمانی که بتدریج کوتاه‌تر می‌شوند؛ یعنی، با قید $\tau \rightarrow 0$ چنانکه در شکل ۱۱.۶ نشان داده شده است



شکل ۱۰.۶ $y = d_{\tau}(t)$



شکل ۱۱.۶

به تجرید d_{τ} می پردازیم. در نتیجه این عمل حد گیری خواهیم داشت

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d_{\tau}(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (5)$$

علاوه بر این، چون به ازای هر $\tau \neq 0$ داریم $I(\tau) = 1$ ، در نتیجه

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = 1 \quad (6)$$

روابط (۵) و (۶) را می توان برای تعریف يك «تابع ضربه يکه» ایده ال δ به کار گرفت، که يك ضربه با اندازه واحد در $t = 0$ وارد می کند، اما به ازای همه مقادیر دیگر t برابر صفر است. یعنی، «تابع» δ با خواص زیر تعریف می شود

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8)$$

روشن است که هیچ تابع معمولی از آن نوع که در آنالیز مقدماتی بررسی شده اند در هر

دو رابطه (۷) و (۸) صدق نمی‌کند. «تابع» δ که با این روابط تعریف شد نمونه‌ای است از آنچه توابع تعمیم‌یافته نامیده می‌شود و معمولاً آن را «تابع دلتای» دیراک^۱ می‌نامند. اغلب مناسبتر است که توابع نیروی ضربه‌ای را بدوسیله تابع دیراک نمایش دهیم. چون $\delta(t)$ متناظر با ضربه واحد در $t=0$ است، یک ضربه واحد در نقطه دلخواه $t=t_0$ با $\delta(t-t_0)$ بیان می‌شود. از روابط (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\delta(t-t_0)=0, \quad t \neq t_0. \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (10)$$

تابع دلتا در شرایط قضیه ۲.۶ صادق نیست، اما با وجود این مبدل لاپلاس آن را می‌توان به‌طور صوری تعریف کرد. چون $\delta(t)$ به‌عنوان حد $d_\tau(t)$ به‌ازای $\tau \rightarrow 0$ تعریف شده است، طبیعی است که مبدل لاپلاس δ نیز به‌طریق مشابه با حد مبدل d_τ تعریف شود. به‌ویژه، فرض می‌کنیم که $t_0 > 0$ باشد، و $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ را با معادله

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} \quad (11)$$

تعریف می‌کنیم. برای محاسبه حد موجود در رابطه (۱۱) نخست دیده می‌شود که اگر $t_0 > \tau$ ، که در واقع چون $\tau \rightarrow 0$ شرط مزبور بالاخره برقرار می‌شود، آنگاه $t_0 - \tau > 0$. چون $d_\tau(t-t_0)$ تنها روی فاصله $t_0 - \tau$ تا $t_0 + \tau$ مخالف صفر است، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-t_0) dt \\ &= \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} d_\tau(t-t_0) dt \end{aligned}$$

چون به‌جای $d_\tau(t-t_0)$ مقدار آن را از رابطه (۴) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} &= \frac{1}{\tau\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{\tau\tau s} e^{-st} \Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau} \\ &= \frac{1}{\tau\tau s} e^{-st_0} (e^{s\tau} - e^{-s\tau}) \end{aligned}$$

یا

۱. پل. آ. م. دیراک (Paul A. M. Dirac)، (۱۹۰۲ -) به‌خاطر تحقیقاتش در مکانیک کوانتیک در ۱۹۳۳ [همراه با اروین شرودینگر (Erwin Schrödinger)] به دریافت جایزه نوبل نائل گردید.

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0} \quad (12)$$

خارج قسمت $(\sinh s\tau)/s\tau$ وقتی $\tau \rightarrow 0$ مبهم است، اما حد آن را می توان با استفاده از قاعده هوییتال محاسبه کرد. داریم

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s \cosh s\tau}{s} = 1$$

آنگاه از معادله (۱۱) نتیجه می شود که

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \quad (13)$$

چون رابطه (۱۳) به ازای هر $t_0 > 0$ برقرار است، می توان $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ را از رابطه (۱۳) با $t_0 \rightarrow 0$ تعریف کرد؛ بدین سان

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} e^{-st_0} = 1 \quad (14)$$

به روش مشابه می توان انتگرال حاصل ضرب تابع دلنا و هر تابع پیوسته f را تعریف کرد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t) dt \quad (15)$$

با استفاده از تعریف $d_\tau(t)$ ، (۴) و قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرالها، به دست می آید

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t) dt &= \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot \tau \cdot f(t^*) = f(t^*) \end{aligned}$$

که در آن $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. بنابراین وقتی $\tau \rightarrow 0$ ، $t^* \rightarrow t_0$ ، و از رابطه (۱۵) نتیجه می شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (16)$$

اغلب هنگامی که با مسائل ضربه ای سروکار داریم، تابع دلنا را برای سهولت وارد کرده، و روی آن به طور صوری همانند یک تابع معمولی عمل می کنیم. این نکته را در مثال زیر توضیح می دهیم. اما باید توجه داشت که توجیه نهایی این قبیل روشها باید بر تحلیل دقیق عملیات حدگیری مزبور مبتنی باشد. در این مورد نظریه ریاضی متقنی تکامل یافته است، اما دشوارتر از آن است که در اینجا مورد بحث قرار گیرد.

مثال. جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (18)$$

را بیابید.

این مسئله مقدار اولیه ممکن است در بررسی يك مدار الكتريكي كه در آن يك ولتاژ ضربه‌ای واحد در زمان $t = \pi$ اعمال شده است مطرح گردد. برای حل مسئله مزبور مبدل لاپلاس معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = e^{-\pi s}$$

كه در آن شرایط اولیه (۱۸) به كار رفته اند. بدین سان

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad (19)$$

بنا بر قضیه ۵.۶ یا از جدول ۱.۶

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = e^{-t} \sin t \quad (20)$$

بدین سان، بنا بر قضیه ۴.۶ داریم

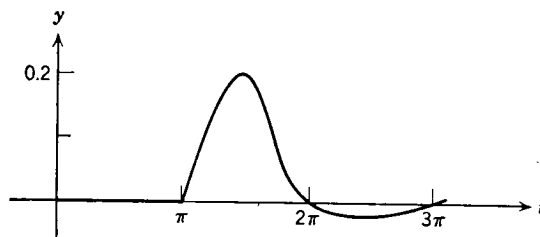
$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = u_{\pi}(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) \quad (21)$$

كه جواب صوری مسئله مزبور است. می‌توان y را به صورت زیر نوشت

$$y = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi), & t \geq \pi \end{cases} \quad (22)$$

نمودار تابع (۲۲) در شکل ۱۲.۶ نشان داده شده است.

چون در $t = 0$ شرایط اولیه همگن اند، و تحريك خارجي تا $t = \pi$ وجود ندارد،



شکل ۱۲.۶ جواب مسئله مقدار اولیه (۱۷) و (۱۸)

در فاصله $0 < t < \pi$ پاسخی وجود نخواهد داشت. ضربه در $t = \pi$ پاسخی ایجاد می کند که به طور نامحدود ادامه دارد، گسره به طور نمایی، در صورت فقدان تحریک خارجی دیگر، مستهلک می شود. توجه به این نکته نیز جالب است که پاسخ در $t = \pi$ علی رغم ماهیت غیر عادی تابع نیرو در این نقطه، پیوسته است، اما شیب جواب در این نقطه دارای یک ناپیوستگی جهشی است، و مشتق دوم آن در این نقطه تعریف نشده است. این لازمه معادله دیفرانسیل (۱۷) است زیرا وجود نقطه غیر عادی در یک طرف آن باید با یک نقطه غیر عادی در طرف دیگر توازن یابد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید.

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (۱)$$

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (۲)$$

$$y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (۳)$$

$$y'' - y = 2\delta(t - 1); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (۴)$$

$$y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (۵)$$

$$y'' + \omega^2 y = \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad ۶$$

$$y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad ۷$$

۸* (الف) با استفاده از روش تغییر پارامترها نشان دهید که جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

عبارت است از

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$$

(ب) نشان دهید که اگر $f(t) = \delta(t - \pi)$ ، آنگاه جواب قسمت (الف) به صورت زیر ساده می شود

$$y = u_{\pi}(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$

که با رابطه (۲۱) متن تطبیق می کند.

۵.۶ انتگرال تلفیقی

گاهی می‌توان یک مبدل لاپلاس $H(s)$ را به صورت حاصل ضرب دو مبدل دیگر $F(s)$ و $G(s)$ که به ترتیب با توابع f و g متناظرند بیان کرد. در این حالت، ممکن است انتظار داشته باشیم که $H(s)$ مبدل حاصل ضرب f و g باشد. اما، چنین نیست؛ به عبارت دیگر، مبدل لاپلاس حاصل ضرب معمولی دو تابع، حاصل ضرب مبدل آنها نیست. لیکن از طرف دیگر، اگر یک «ضرب تعمیم یافته» مناسبی تعریف کنیم وضعیت تغییر می‌کند، و به صورتی که در قضیه زیر بیان شده است درمی‌آید.

قضیه ۵.۶. اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ و $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ هر دو به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشند، آنگاه

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad s > a \quad (1)$$

که در آن

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

تابع h را تلفیق f و g می‌نامند؛ انتگرالهای موجود در رابطه (۲) را نیز انتگرالهای تلفیقی می‌نامند.

تساوی دو انتگرال رابطه (۲) از تعویض متغیر $t - \tau = \tau$ در انتگرال اول نتیجه می‌شود. پیش از آنکه به اثبات قضیه پردازیم نکاتی را درباره انتگرال تلفیقی بیان می‌کنیم. طبق این قضیه، مبدل تلفیق دو تابع (و نه مبدل حاصل ضرب معمولی آنها) با حاصل ضرب مبدل‌های آنها برابر است. به منظور تأکید این نکته که انتگرال تلفیقی را می‌توان به عنوان یک «ضرب تعمیم یافته» تلقی کرد قرار می‌دهند

$$h(t) = (f * g)(t) \quad (3)$$

به ویژه، علامت $(f * g)(t)$ نمایشگر نخستین انتگرال موجود در رابطه (۲) است. تلفیق $f * g$ دارای بسیاری از خواص ضرب معمولی است. به عنوان مثال، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$f * g = g * f \quad (\text{خاصیت جابجایی}) \quad (4)$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{خاصیت توزیع پذیری}) \quad (5)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری}) \quad (6)$$

$$f * 0 = 0 * f = 0 \quad (7)$$

اثبات این خواص به خواننده واگذار می‌شود. اما، ضرب معمولی دارای خواص دیگری

است که انتگرال تلفیقی واجد آنها نمی باشد. به عنوان مثال، معمولاً $f * 1$ یا f برابر نیست. برای اثبات کافی است توجه شود که

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) \, d\tau$$

و مثلاً اگر $f(t) = \cos t$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} (f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t-\tau) \, d\tau = -\sin(t-\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\sin 0 + \sin t \\ &= \sin t \end{aligned}$$

روشن است که، $(f * 1)(t) \neq f(t)$. به همین نحو، نامفهی بودن $f * f$ ممکن است صادق نباشد. برای مثال مسئله ۳ را ببینید.

در کاربردهای گوناگونی که در آن رفتار دستگاه در لحظه t نه تنها به وضعیت آن در لحظه t بستگی دارد، بلکه به گذشته آن نیز وابسته است به انتگرالهای تلفیقی برمی خوریم. این نوع دستگاهها را گاهی دستگاههای وراثتی می نامند و در زمینه های مختلفی از قبیل انتقال نترونی، کشسانی-چسب، و بررسی ازدیاد جمعیتها مطرح می شود. اکنون برگردیم به اثبات قضیه ۶.۶، نخست دیده می شود که اگر

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi$$

و

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\eta} g(\eta) \, d\eta$$

آنگاه

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \int_0^{\infty} e^{-s\eta} g(\eta) \, d\eta \quad (۸)$$

چون تابع زیر علامت انتگرال اول به متغیر انتگرالگیری دومین انتگرال بستگی ندارد، می توان $F(s)G(s)$ را به صورت انتگرال مکرر نوشت،

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\eta) \, d\eta \int_0^{\infty} e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi) \, d\xi \quad (۹)$$

این عبارت را می توان با تعویض متغیر به صورت ساده تری در آورد. نخست به ازای η ثابت قرار می دهیم $\xi = t - \eta$ ، آنگاه انتگرال بر حسب ξ در رابطه (۹) به انتگرالی

بر حسب t بدل می‌شود؛ بدین‌سان

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\eta) d\eta \int_{\eta}^{\infty} e^{-st} f(t-\eta) dt \quad (10)$$

سپس با قراردادن $\eta = \tau$ ؛ رابطه (۱۰) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt \quad (11)$$

انتگرال طرف دوم رابطه (۱۱) در بخشی از صفحه st که آن را در شکل ۱۳.۶ سایه زده‌ایم و تا بینهایت ادامه دارد محاسبه می‌شود. با فرض آنکه بتوان ترتیب انتگرال‌گیری را معکوس کرد داریم

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (12)$$

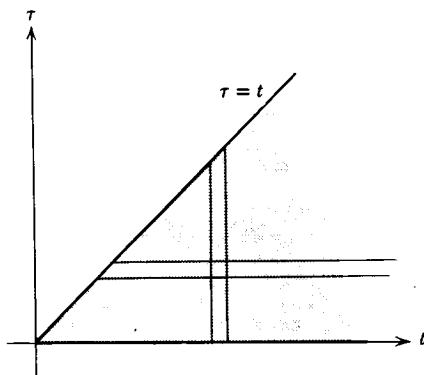
یا

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{h(t)\} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $h(t)$ به وسیله رابطه (۲) تعریف شده است. بدین‌سان اثبات قضیه ۶.۶ پایان می‌یابد.

مثال. مطلوب است تعیین مبدل معکوس

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$



شکل ۱۳.۶

به آسانی می توان $H(s)$ را به عنوان حاصل ضرب s^{-2} و $a/(s^2+a^2)$ تلقی کرد، که طبق جدول ۱۰.۶، به ترتیب مبدل های t و $\sin at$ می باشند. بدین سان، بنا بر قضیه ۶.۶، مبدل معکوس $H(s)$ عبارت است از

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau) \sin a\tau \, d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

خواننده می تواند نشان دهد که اگر برای $h(t)$ شق دیگر

$$h(t) = \int_0^t \tau \sin a(t-\tau) \, d\tau$$

را انتخاب کنیم به همین نتیجه می رسیم و رابطه (۲) در این حالت تأیید می گردد.

مسائل

۱. خواص جابه جایی، توزیع پذیری، و شرکت پذیری انتگرال تلفیقی را اثبات کنید.

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{ب}) \quad f * g = g * f \quad (\text{الف})$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (\text{ج})$$

۲. مثال دیگری به جز آنچه در متن آمده است بیابید که نشان دهد $(f * 1)(t)$ لزوماً با $f(t)$ برابر نیست.

۳. با استفاده از مثال $f(t) = \sin t$ نشان دهید که $f * f$ لزوماً نامنفی نیست.

۴. مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos \tau \, d\tau \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^\tau \, d\tau \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \cos \tau \, d\tau \quad (\text{د})$$

۵. با استفاده از قضیه تلفیق مبدل معکوس لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2)} \quad (\text{ب}) \quad F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{s^2+1} \quad (\text{د}) \quad F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+2)} \quad (\text{ج})$$

(۶) مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

که در آن $f(t) = 1 - u_{2\pi}(t)$.

(۷) مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

که در آن α مقداری است ثابت.

۰۸. معادله

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi) d\xi = f(t)$$

را که در آن توابع f و k معلوم، و ϕ مجهول است در نظر می گیریم. چون تابع مجهول ϕ در زیر علامت انتگرال است، معادله مزبور را معادله انتگرالی می نامند؛ به ویژه، این معادله به طبقه ای از معادلات انتگرالی تعلق دارد که به معادلات انتگرالی ولترا^۱ مشهورند. با گرفتن مبدل لاپلاس از معادله انتگرالی مزبور، برای $\{\phi(t)\}$ عبارتی بر حسب $\{f(t)\}$ و $\{k(t)\}$ مبدلهای توابع معلوم f و k به دست می آید. مبدل معکوس $\{\phi(t)\}$ جواب معادله انتگرالی داده شده است. ۰۹. معادله انتگرالی ولترا (مسئله ۸ را ببینید)

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi) d\xi = \sin 2t$$

را در نظر می گیریم.

(الف) نشان دهید که اگر تابع u به گونه ای باشد که $u''(t) = \phi(t)$ ، آنگاه

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \sin 2t$$

(ب) نشان دهید که معادله انتگرالی مزبور با مسئله مقدار اولیه

$$u''(t) + u(t) = \sin 2t; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

هم ارز است.

(ج) معادله انتگرالی مزبور را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

(د) مسئله مقدار اولیه قسمت (ب) را حل کنید، و تحقیق کنید که جواب همان است

که در قسمت (ج) به دست آمد.

۰۱۰۰. توتوکرون^۲ (خم همزمان). یکی از مسائل جالب در تاریخ ریاضیات مسئله

تعیین توتوکرون است: خمی که هرگاه يك نقطه مادی روی آن تنها در اثر نیروی ثقل بلغزد، زمان لازم برای رسیدن آن به پایتترین نقطه خم مستقل از نقطه آغاز حرکت باشد. برای ساختن آونگی که تناوب آن از دامنه نوسان مستقل باشد به این مسئله برخوردند. توتوکرون را در ۱۶۷۳ کریستیان هویگنس^۱ با روشهای هندسی به دست آورد، و بعداً لایبنیتز و یاکوب برنولی آن را با روش تحلیلی به دست آوردند. روش برنولی (در ۱۶۹۰) یکی از نخستین مواردی بود که در آن صریحاً به حل يك معادله دیفرانسیل اقدام شد.

خم مزبور در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است. نقطه آغازی $P(a, b)$ به نقطه انتهایی $(0, 0)$ با کمان C متصل شده است. طول کمان s را از مبدأ اندازه می گیریم، و $f(y)$ میزان تغییرات s را بر حسب y نشان می دهد:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{يك})$$

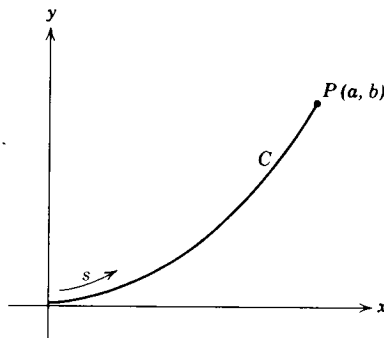
آنگاه $T(b)$ زمان لازم برای رسیدن P به مبدأ با استفاده از اصل بقاء انرژی به صورت زیر به دست می آید

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy \quad (\text{دو})$$

(الف) فرض کنیم که b هر چه باشد، $T(b) = T_0$ مقداری است ثابت. از معادله (دو) تبدیل لاپلاس بگیریم، و با استفاده از قضیه تلفیق نشان دهید که

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{s}}; \quad (\text{سه})$$

آنگاه نشان دهید که



شکل ۱۴.۶

$$f(y) = \frac{\sqrt{2} g T_0}{\pi \sqrt{y}} \quad (\text{چهار})$$

دانهمایی: مسئله ۱۰ بند ۱۰.۶ را ببینید.

(ب) با ترکیب معادلات (یک) و (چهار)، نشان دهید که

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}} \quad (\text{پنج})$$

که در آن $\alpha = gT_0^2/\pi^2$.

(ج) با استفاده از تعویض متغیر $y = 2\alpha \sin^2(\theta/2)$ برای حل معادله (پنج) نشان دهید که

$$x = \alpha(\theta + \sin \theta), \quad y = \alpha(1 - \cos \theta). \quad (\text{شش})$$

معادلات (شش) نمایشگر معادلات پارامتری یک سیکلوئید است. بدین سان تو توکرون کمانی از سیکلوئید است.

۶.۶ بحث کلی و خلاصه

درخاتمه این فصل، به اختصار برخی از جنبه‌های کلیتر روش تبدیل را مورد بحث قرار می‌دهیم. مسئله مقدار اولیه‌ای را که مشتمل بر معادله دیفرانسیل

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (۱)$$

است و a, b, c ثابت‌های حقیقی و f تابع معلومی است همراه با شرایط اولیه

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (۲)$$

در نظر می‌گیریم.

مبدل لاپلاس معادله (۱) عبارت است از

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay'_0 = F(s) \quad (۳)$$

که در آن $Y(s)$ و $F(s)$ به ترتیب مبدل‌های y و $f(t)$ می‌باشند. با استفاده از شرایط اولیه (۲) و استخراج $Y(s)$ ، به دست می‌آید

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c} \quad (۴)$$

بدین سان می‌توان $Y(s)$ را به عنوان حاصل ضرب توابع

$$H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1} \quad (۵)$$

و

$$G(s) = F(s) + (as + b)y_0 + ay_0' \quad (۶)$$

تصور کرد. تابع نخست، H ، کاملاً به وسیله خواص دستگاه مورد بررسی مشخص می گردد، و می توان آن را تابع دستگاه نامید. در مورد يك مدار الکتریکی معمولاً تابع $Z(s) = 1/sH(s)$ را امپدانس^۱ مدار می نامند. تابع دوم، G ، به تابع نیرو و شرایط اولیه بستگی دارد و می توان آن را تابع تحریک نامید. علاوه بر این، تابع تحریک نیز از دو جزء تشکیل شده است: تابع F ، که مبدل تابع نیروی f است، و تابع $(as + b)y_0 + ay_0'$ که به شرایط اولیه بستگی دارد.

در اینجا این وسوسه پیش می آید که بنویسیم

$$Y(s) = H(s)G(s) \quad (۷)$$

و، با استفاده از قضیه تلفیق جواب معادلات (۱) و (۲) را به صورت زیر به دست آوریم

$$y = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (۸)$$

اما، تابع $(as + b)y_0 + ay_0'$ نمی تواند مبدل لاپلاس يك تابع معمولی باشد.^۲ در نتیجه، باید $Y(s)$ را به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = H(s)F(s) + \frac{(as + b)y_0 + ay_0'}{as^2 + bs + c} \quad (۹)$$

از آنجا

$$y = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(as + b)y_0 + ay_0'}{as^2 + bs + c} \right\} \quad (۱۰)$$

به مجرد آنکه مقادیر a ، b و c داده شوند، مبدل معکوس موجود در رابطه (۱۰) را می توان از جدول ۱.۶ یا با استفاده از روش کسرهای ساده تعیین کرد. با استفاده از خطی بودن تبدیل معکوس، معادله (۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت

$$y = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau + y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{as + b}{as^2 + bs + c} \right\} + y_0' \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{as^2 + bs + c} \right\} \quad (۱۱)$$

1. impedance

۲. اگر چنین بود وقتی $s \rightarrow \infty$ به صفر میل می کرد (مسئله ۸ بند ۱.۶ را ببینید). اما، می توان این تابع را به عنوان مبدل ترکیبی از تابع دلتا و «مشتق» آن تعبیر کرد.

و چون قرار دهیم

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{as+b}{as^2+bs+c} \right\}, \quad y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{as^2+bs+c} \right\} \quad (12)$$

خواهیم داشت

$$y = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau + y_0 y_1(t) + y'_0 y_2(t) \quad (13)$$

نخستین جمله طرف دوم رابطه (۱۳) پاسخ دستگاه را به تابع نیروی f نشان می‌دهد. بنا بر اصطلاحات فصل ۳ این یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (۱) است. جملات دیگر طرف دوم رابطه (۱۳) پاسخ دستگاه با شرایط اولیه را نمایش می‌دهد. اگر y_0 و y'_0 را به عنوان ثابتهای دلخواه تلقی کنیم، این جمله‌ها متضمن تابع مکمل، یعنی جواب عمومی معادله همگن متناظر با معادله (۱) می‌باشند.

مراجع

کتابهای زیر درباره تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن حاوی اطلاعات بیشتری هستند.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1958.

Doetsch, Gustave, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, Van Nostrand, London, 1967.

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

McLachlan, N. W., *Modern Operational Calculus*, Dover, New York, 1962.

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 1971.

هریک از کتابهای فوق شامل یک جدول تبدیلات است. جداول مفصلتری نیز وجود دارند؛ به عنوان مثال، کتابهای زیر را ببینید:

Erdelyi, A. (editor), *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

Roberts, G. E. and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms*, Saunders, Philadelphia, 1966.

در کتاب زیر بحث مفصلتری درباره توابع تعمیم یافته آمده است:

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, 1958.



دستگاههای معادلات مرتبه اول

۱.۲ مقدمه

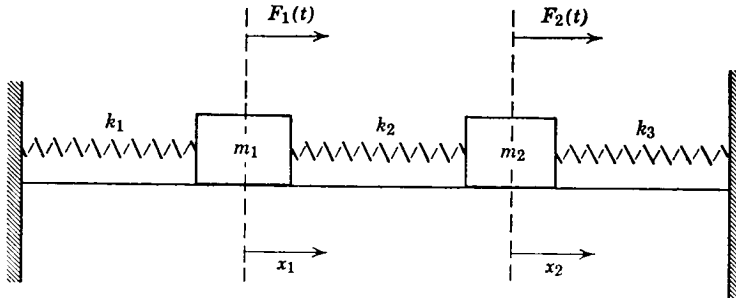
این فصل به بررسی دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی اختصاص دارد. در مسائلی که مشتمل بر چند تابع از يك متغیر مستقل می باشند، طبعاً به این نوع دستگاهها برمیخوریم. در اینجا توابع را با x_1, x_2, x_3, \dots و متغیر مستقل را با t نشان می دهیم. مشتق گیری نسبت به t را با علامت پریم نمایش می دهیم. به عنوان مثال، حرکت يك نقطه مادی در فضای سه بعدی از قانون نیوتن

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_1 \left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right), \\m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= F_2 \left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right), \\m \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= F_3 \left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right),\end{aligned} \quad (1)$$

پیروی می کند، که در آن m جرم نقطه مادی؛ x_1, x_2, x_3 مختصات فضایی آن؛ و F_1, F_2, F_3 نیروهای وارد بر آن به ترتیب در راستاهای x_1, x_2, x_3 است. اگر مثلاً نقطه مزبور نمایشگر يك سفینه فضایی باشد، آنگاه F_1, F_2, F_3 مشتمل است بر نیروهای

جاذبه که از اجرام سماوی مجاور بر سفینه وارد می‌شوند، و نیروهایی که به وسیله دستگاه محرکه ایجاد می‌گردند، و علاوه بر این اگر در جو زمین باشد، نیروهای مقاوم را نیز شامل است.

به عنوان مثال دیگر، دستگاه متشکل از فنر-جرم را که در شکل ۱۰۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.



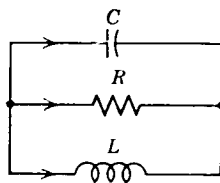
شکل ۱۰۷ يك دستگاه فنر-جرم با دو درجه آزادی

دو جرم مزبور روی سطحی بدون اصطکاک تحت تأثیر نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ حرکت می‌کنند، و به سه فنر که ثابتهای آنها به ترتیب k_1 ، k_2 و k_3 است مقیدند. با استدلالی مشابه آنچه در بند ۷.۳ داشتیم برای x_1 و x_2 ، مختصات دو جرم مزبور معادلات زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

در مسئله ۶ چگونگی به دست آوردن معادلات (۲) طرح شده است. به عنوان مثال دیگر، مدار موازی RLC را که در شکل ۲.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. اگر V افت ولتاژ خازن و I جریان در خود القا باشد، آنگاه بنابر بند ۸.۳ و مسئله ۷ این بند، می‌توان نشان داد که ولتاژ و جریان در این مدار مطابق با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}, \end{aligned} \quad (3)$$



شکل ۲.۷. يك مدار موازی شامل خازن، مقاومت و القاایی

انجام می گیرد که در آن L ضریب القاایی، C ظرفیت، و R مقاومت است. به عنوان مثال آخر مسئله شکارگر- طعمه را که یکی از مسائل اساسی اکولوژی ریاضی است بیان می کنیم. فرض کنیم $H(t)$ و $P(t)$ در زمان t جمعیت دو نوع جانور را نشان دهد که یکی از آنها (P) از نوع دیگر (H) تغذیه می کند. به عنوان مثال، $H(t)$ و $P(t)$ می تواند به ترتیب نمایشگر تعداد روباه ها و خرگوش های يك جنگل یا تعداد ماهی های خاردار و ماهی های قرمز (که به وسیله ماهی های خاردار خورده می شوند) در يك برکه باشد. بدون وجود طعمه ها، شکارگران کاهش می یابند و بدون شکارگران، طعمه ها افزایش می یابند. برای بررسی کیفیت حفظ توازن اکولوژیکی در محیطی که هر دو نوع وجود داشته باشند در سال ۱۹۲۵ لوتکا و ولترا يك مدل ریاضی مطرح کردند. این مدل از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= a_1 H - b_1 H P, \\ \frac{dP}{dt} &= -a_2 P + b_2 H P\end{aligned}\quad (۴)$$

تشکیل می گردد که در آن ضریب a_1 میزان مولید جمعیت H ؛ و a_2 میزان مرگ و میر جمعیت P است. b_1 و b_2 ضرایب تأثیر متقابل بین شکارگر و طعمه می باشند. معادلاتی به شکل (۴) را گاهی معادلات شکارگر- طعمه می نامند. در بند ۵.۹ به بررسی دقیق آنها خواهیم پرداخت.

مثالهای دیگری از دستگاههای معادلات دیفرانسیل مربوط به مدلهای الکتریکی در مسائل پایان این بند آمده است.

ارتباط مهمی بین معادله دیفرانسیل از مرتبه دلخواه و دستگاه معادلات وجود دارد. در واقع، يك معادله مرتبه n

۱. آلفرد ج. لوتکا (Alfred J. Lotka)، (۱۸۸۰-۱۹۴۹) يك بیوفیزیکدان آمریکایی بود. ویتو ولترا (Vito Volterra)، (۱۸۶۰-۱۹۴۰) ریاضیدان ایتالیایی بیشتر به خاطر پژوهشهایش در معادلات انتگرالی شهرت دارد (مسئله ۸ بند ۵.۶ را ببینید). وی نیز یکی از بنیانگذاران نظریه جدید انتگرال گیری و آنالیز تابعی است.

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5)$$

را همواره می‌توان به يك دستگاه شامل n معادله مرتبه اول كه دارای شكل خاصی است تبدیل کرد. برای اثبات متغیرهای x_1, x_2, \dots, x_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', \dots, x_n = y^{(n-1)} \quad (6)$$

آنگاه به آسانی نتیجه می‌شود كه

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \end{aligned} \quad (7)$$

و از معادله (5)

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8)$$

معادلات (7) و (8) حالت خاصی از دستگاه کلیتر زیر است

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (9)$$

به طریق مشابه می‌توان دستگاههای (1) و (2) را نیز به دستگاههای معادلات مرتبه اول به صورت (9) تبدیل کرد، كه به ترتیب شامل شش و چهار معادله خواهند بود. دستگاههای (3) و (4) خود به صورت (9) هستند. در واقع، دستگاههای به صورت (9) تقریباً شامل تمام حالت‌های جالب می‌باشند، و در نتیجه بخش اعظم نظریه پیشرفته تر معادلات دیفرانسیل به این نوع دستگاهها اختصاص یافته است.

دستگاه معادلات (9) را هنگامی روی فاصله $\alpha < t < \beta$ دارای جواب گویند كه يك مجموعه از n تابع

$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$$

وجود داشته باشد، كه در تمام نقاط $\alpha < t < \beta$ مشتق پذیر بوده و در دستگاه (9) به ازای همه نقاط این فاصله صدق کنند. علاوه بر دستگاه معادلات دیفرانسیل مفروض، ممكن است شرایط اولیه‌ای به صورت زیر نیز داده شده باشد

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \quad (10)$$

که در آن t_0 مقدار خاصی از t واقع در $\alpha < t < \beta$ است، و اعداد x_1^0, \dots, x_n^0 از پیش تعیین شده‌اند. معادلات دیفرانسیل (۹) و شرایط اولیه (۱۰) با هم تشکیل يك مسئله مقدار اولیه می‌دهند.

به منظور آنکه برای مسئله مقدار اولیه (۹) و (۱۰) يك جواب یکتا تضمین شود، لازم است بر توابع F_1, F_2, \dots, F_n شرایطی اعمال گردد. قضیه زیر مشابه قضایای وجود و یکتایی جواب در مورد معادلات مرتبه اول و دوم است که بدترتیب در قضایای ۲.۲ و ۱.۳ آمده است.

قضیه ۱.۷. فرض کنیم هر يك از توابع F_1, \dots, F_n و مشتقهای جزئی $\partial F_1 / \partial x_1, \dots, \partial F_n / \partial x_1, \dots, \partial F_n / \partial x_n, \dots, \partial F_n / \partial x_n$ در يك ناحیه R ، از فضای x_1, x_2, \dots, x_n که شامل نقطه $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ باشد پیوسته است. آنگاه يك فاصله $|t - t_0| < h$ وجود دارد که در آن دستگاه معادلات دیفرانسیل (۹) دارای جواب یکتای $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ است، که در شرایط اولیه (۱۰) نیز صدق می‌کند.

این قضیه را می‌توان با تعمیم استدلال مذکور در بند ۱۱.۲ ثابت کرد، اما در اینجا به بیان آن نمی‌پردازیم. اما، به این نکته توجه شود که درباره مشتقهای جزئی توابع F_1, F_2, \dots, F_n نسبت به t در فرض قضیه چیزی بیان نشده است. علاوه بر این در قسمت حکم، طول $2h$ ، فاصله‌ای که در آن جواب وجود دارد، دقیقاً مشخص نیست، و در برخی از حالتها ممکن است بسیار کوتاه باشد. بالاخره، شرایط مذکور برای تأمین نتیجه کافی‌اند نه لازم و قضیه به کلیترین صورتی که می‌شناسیم بیان نشده است.

اگر هر يك از توابع F_1, \dots, F_n در معادلات (۹) تابعی خطی از متغیرهای x_1, \dots, x_n باشند، آنگاه دستگاه معادلات مزبور را خطی می‌نامند. در غیر این صورت ناخطی است. بدین سان کلیترین دستگاه n معادله خطی مرتبه اول به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (11)$$

اگر هر يك از توابع g_1, \dots, g_n متحداً برابر صفر باشند، آنگاه دستگاه (۱۱) را همگن می‌نامند؛ در غیر این صورت ناهمگن است. ملاحظه شود که دستگاههای (۲) و (۳) هر دو خطی‌اند؛ دستگاه (۲) ناهمگن است مگر آنکه $F_1(t) = F_2(t) = 0$ ، اما دستگاه (۳) همگن است. دستگاه (۴) ناخطی است. دستگاه (۱) بسته به نوع توابع F_1, F_2 و F_3 یا خطی است و یا ناخطی.

در مورد دستگاه خطی (۱۱) قضیه وجود و یکتایی ساده‌تر و دارای نتیجه‌ای قوی‌تر است، و مشابه قضایای ۱.۲ و ۲.۳ می‌باشد.

قضیه ۲.۷. اگر توابع $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ در فاصله $\alpha < t < \beta$

که شامل نقطه $t = t_0$ است، پیوسته باشند، آنگاه يك جواب يكتاي $\phi_1(t) = x_1, \dots, x_n = \phi_n(t)$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) وجود دارد، که در شرایط (۱۰) صدق می‌کند. این جواب در تمام فاصله $\alpha < t < \beta$ معتبر است.

توجه شود که برخلاف وضعیت دستگاه ناخطی، وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی در تمام فاصله‌ای که در آن فرضها صادق‌اند محقق است. علاوه بر این، در مورد يك دستگاه خطی مقادیر اولیه x_1^0, \dots, x_n^0 در $t = t_0$ کاملاً دلخواه‌اند، در حالی که برای حالت ناخطی نقطه اولیه باید در ناحیه R که در قضیه ۱.۷ تعریف شد واقع باشد.

این فصل به دستگاه‌های معادلات خطی مرتبه اول اختصاص دارد (دستگاه‌های ناخطی را در ضمن فصول ۸ و ۹ مورد بحث قرار خواهیم داد). با به کار گرفتن برخی از نتایج نظریه ماتریسها مطالب به سودمندترین وجه بیان می‌شود، و از آغاز بند ۳.۷ بقیه این فصل مبتنی بر استفاده از ماتریسها است. نکات لازم درباره ماتریسها را در بندهای ۳.۷ و ۴.۷ خلاصه کرده‌ایم. برای خوانندگانی که کاملاً با نظریه ماتریسها بیگانه‌اند، بند ۲.۷ شامل بحثی از روشهای مقدماتی حذف است که با آن می‌توان دستگاه معادلات را به يك معادله از مرتبه بالاتر تبدیل کرد. این روش اساس مناسبی برای بحث کلی دستگاه‌های خطی فراهم نمی‌کند، اما گاهی به عنوان وسیله حل دستگاه‌های دو یا سه معادله‌ای کاملاً مفید است.

مسائل

۱. هر يك از دستگاه‌های (۱) و (۲) را به يك دستگاه معادلات مرتبه اول به صورت (۹) تبدیل کنید.
۲. مسئله مقدار اولیه

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$$

را در نظر می‌گیریم. این مسئله را به يك مسئله مقدار اولیه متشکل از دو معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید.

۳. نشان دهید که اگر $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ مقادیری ثابت باشند، و a_{12} و a_{21} توأماً صفر نباشند، و اگر توابع g_1 و g_2 مشتق‌پذیر باشند، آنگاه مسئله مقدار اولیه زیر را

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0$$

می‌توان به يك مسئله مقدار اولیه در مورد يك معادله مرتبه دوم تبدیل کرد. آیا می‌توان همین روش را هنگامی که a_{11}, \dots, a_{22} توابعی از t باشند اجرا کرد؟

۴. دستگاه خطی همگن

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y$$

$$y' = p_{22}(t)x + p_{21}(t)y$$

را در نظر می گیریم. نشان دهید که اگر $x = x_1(t)$ ، $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$ ، $y = y_2(t)$ دو جواب دستگاه مزبور باشند، آنگاه

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

نیز به ازای ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 يك جواب است. این خاصیت همان اصل انطباق است.

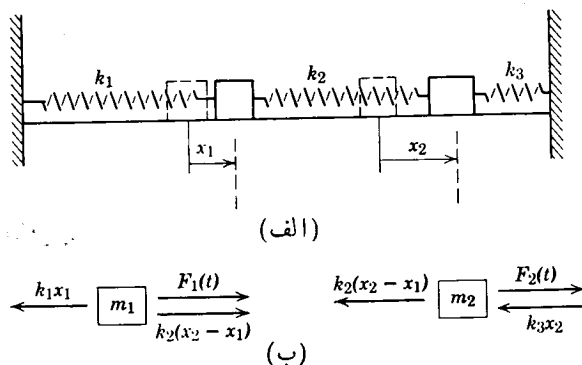
۵. فرض کنیم $x = x_1(t)$ ، $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$ ، $y = y_2(t)$ دو جواب دستگاه خطی ناهمگن زیر باشند

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t)$$

$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t)$$

نشان دهید که $x = x_1(t) - x_2(t)$ ، $y = y_1(t) - y_2(t)$ يك جواب دستگاه همگن متناظر است.

۶. معادلات (۲) را می توان با ترسیم يك نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر بر هر جرم در آن نشان داده شده است، به دست آورد. شکل ۳.۷ (الف) این وضعیت را هنگامی که تغییر مکانهای x_1 و x_2 مربوط به هردو جرم مثبت اند (به طرف راست) و $x_2 > x_1$ نشان می دهد. فنرهای ۱ و ۲ منبسط گردیده و فنر ۳ منقبض شده است و بدین سان نیروهایی پدید آمده است که در شکل ۳.۷ (ب) دیده می شود. با استفاده از قانون نیوتن ($F = ma$) معادلات (۲) را به دست آورید.



شکل ۳.۷

مدارهای الکتریکی. نظریه مدارهای الکتریکی، مانند آنچه در شکل ۲.۷ نشان داده شده است، متشکل از خودالقاهها، مقاومتها، و خازنهای، بر قوانین کیرشهف مبتنی

است: (۱) جریان خالص در هر گره (یا اتصال) صفر است، (۲) افت خالص ولتاژ در طول هر حلقه بسته صفر است. علاوه بر قوانین کیرشهف روابط بین جریان I بر حسب آمپر و افت ولتاژ V بر حسب ولت در هر يك از اجزاء مدار به صورت زیر وجود دارد

$$V = RI; \quad R = \text{مقاومت بر حسب اهم}$$

$$C \frac{dV}{dt} = I; \quad C = \text{ظرفیت بر حسب فاراد}$$

$$L \frac{dI}{dt} = V; \quad L = \text{ضریب القا بر حسب هنری}$$

قوانین کیرشهف و رابطه جریان-ولتاژ برای هر جزء مدار يك دستگاه جبری و معادلات دیفرانسیل فراهم می سازد و بدین وسیله ولتاژ و جریان را می توان در سراسر مدار تعیین کرد. مسائل ۷ تا ۹ این روش را توضیح می دهند.

۷. مداری را که در شکل ۲.۷ نشان داده شده است در نظر می گیریم. جریان در خازن، مقاومت، و القاایی را به ترتیب با I_1 ، I_2 و I_3 و افت ولتاژهای متناظر را با V_1 ، V_2 و V_3 نشان می دهیم. جهت مثبت جریانها و افت ولتاژها را به دلخواه انتخاب کرده ایم و آنها را با پیکان نشان داده ایم.

(الف) با اعمال قانون دوم کیرشهف در مورد حلقه فوقانی مدار مزبور نشان دهید که

$$V_1 - V_2 = 0 \quad (\text{يك})$$

و به طریق مشابه

$$V_2 - V_3 = 0 \quad (\text{دو})$$

(ب) با اعمال قانون اول کیرشهف در مورد یکی از دو گره مدار، نشان دهید که

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{سه})$$

(ج) با استفاده از رابطه جریان-ولتاژ در هر يك از اجزاء مدار معادلات زیر را

به دست آورید

$$CV'_1 = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI'_3 = V_3 \quad (\text{چهار})$$

(د) با حذف V_1 ، V_2 ، I_1 و I_2 در معادلات (يك) تا (چهار) روابط زیر را به دست

آورید

$$CV'_1 = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \quad LI'_3 = V_1 \quad (\text{پنج})$$

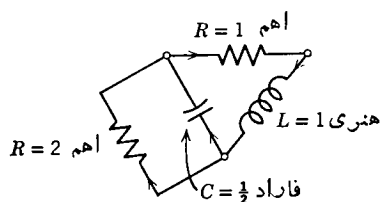
چنانکه دیده می شود اگر از اندیشه های معادلات (پنج) صرف نظر کنیم، آنگاه دستگاه (۳) ی

متن حاصل می گردد.

۸. مداری را که در شکل ۴.۷ نشان داده شده است در نظر می گیریم. با استفاده از روشی که در مسئله ۷ طرح شد، نشان دهید که جریان I در خود القا و ولتاژ V در خازن در دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می کنند

$$\frac{dI}{dt} = -I - V,$$

$$\frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

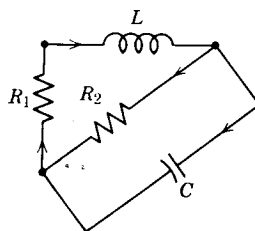


شکل ۴.۷

۹. مداری را که در شکل ۵.۷ نشان داده شده است در نظر می گیریم. با استفاده از روشی که در مسئله ۷ طرح شد، نشان دهید که جریان I در خود القا و ولتاژ V در خازن در دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می کنند

$$L \frac{dI}{dt} = -R_1 I - V,$$

$$C \frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$



شکل ۵.۷

۲.۷ حل دستگاههای خطی با روش حذفی

ابتدایی ترین روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت همانا روش مستقیم حذف است. یعنی، به منظور به دست آوردن یک معادله از مرتبه بالاتر که فقط شامل یک تابع مجهول باشد، متوالیاً به حذف توابع می پردازیم. پس از حل این معادله توابع دیگر را می توان به نوبه خود به دست آورد.

این روش در مورد دستگاههایی که تنها از دو یا سه معادله مرتبه اول تشکیل شده اند کاملاً کارگر است، این روش را می توان در مورد دستگاهها خواه ناهمگن خواه همگن به کار برد، در مورد برخی از مسائل شامل دستگاههای معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر نیز سودمند است. اما روش حذف برای بحث نظری و برای حل دستگاههای بزرگتر مناسب نیست.

برای توضیح روش حذف دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

را در نظر می گیریم. معادله اول را نسبت به x_2 حل می کنیم

$$x_2 = x_1' - x_1 \quad (2)$$

در نتیجه $x_2' = x_1'' - x_1'$ ، و از معادله دوم پس از ساده کردن به دست می آید

$$x_1'' - 2x_1' - 3x_1 = 0 \quad (3)$$

جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$x_1 = \phi_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \quad (4)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهند. از معادله (۲) فوراً نتیجه می شود که

$$x_2 = \phi_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \quad (5)$$

جواب دستگاه (۱) متشکل از معادلات (۴) و (۵) شامل دو ثابت دلخواه است. به آسانی ثابت می شود که می توان ثابتهای مزبور را به ازای شرایط اولیه داده شده در هر نقطه تعیین کرد. بنابراین هر جواب دستگاه (۱) را می توان به ازای مقادیر مناسب c_1 و c_2 به صورت (۴) و (۵) نوشت. بدین سان معادلات (۴) و (۵) جواب عمومی دستگاه (۱) را تشکیل می دهند. خواننده می تواند تحقیق کند که اگر به جای x_2 تابع x_1 را از معادلات (۱) حذف کنیم باز هم همین جواب به دست می آید.

همین روش را می توان در مورد دستگاه ناهمگن

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + g_1(t) \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + g_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

به کار برد. تنها اختلاف آن است که در اینجا $x_2 = x_1' - x_1 - g_1(t)$ ، و معادله مرتبه دوم (۳) مربوط به x_1 به صورت يك معادله ناهمگن درمی آید.

چنانکه در پیش گفته شد، روش حذف را می توان برای حل دستگاههای معادلات مرتبه بالاتر نیز به کار گرفت. این قبیل دستگاهها طبعاً در کاربردهای مختلف مطرح می شود؛ همچنین وقتی روش حذف را در مورد دستگاهی که بیش از دو معادله مرتبه اول دارد به کار گیریم به این نوع دستگاهها برمی خوریم.

بدین سان دستگاه

$$\begin{aligned} L_1[x_1] + L_2[x_2] &= g_1(t) \\ L_3[x_1] + L_4[x_2] &= g_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

را در نظر می گیریم L_1, L_2, L_3 و L_4 عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت

می باشند، و لزومی ندارد که از مرتبه اول باشند، و g_1 و g_2 توابعی مفروضند. مثلاً، فرض کنیم که L_1 عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم

$$L_1[x] = ax'' + bx' + cx \quad (8)$$

باشد. برای آسانی قرار می دهیم $D = d/dt$ ، و معادله (۸) را به صورت زیر می نویسیم

$$L_1[x] = (aD^2 + bD + c)x \quad (9)$$

قبل از ادامه بحث لازم است به بررسی معنی عباراتی از قبیل $L_2 L_1[x]$ که معرف اعمال متوالی عملگرهای L_1 و L_2 به تابع x است پردازیم. به عنوان مثال فرض کنیم که

$$L_1[x] = (aD + b)x \quad (10)$$

و

$$L_2[x] = (cD + d)x \quad (11)$$

که در آن a, b, c, d مقادیر ثابت اند. آنگاه $L_2 L_1[x]$ به صورت زیر تعیین می گردد

$$\begin{aligned} L_2 L_1[x] &= cD[(aD + b)x] + d[(aD + b)x] \\ &= caD^2 x + cbDx + daDx + dbx \\ &= [caD^2 + (cb + da)D + db]x \end{aligned} \quad (12)$$

توجه شود که معادله (۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$$L_2 L_1[x] = [(cD + d)(aD + b)]x \quad (13)$$

که در هنگام بسط طرف دوم با D همانند یک کمیت جبری عمل می شود. به طریق مشابه

$$\begin{aligned} L_1 L_2[x] &= aD[(cD + d)x] + b[(cD + d)x] \\ &= [acD^2 + (ad + bc)D + bd]x \end{aligned} \quad (14)$$

از معادلات (۱۲) و (۱۴) به وضوح دیده می شود که

$$L_2 L_1[x] = L_1 L_2[x] \quad (15)$$

یعنی، L_1 و L_2 خاصیت جابه جایی دارند. می توان نشان داد که خاصیت جابه جایی نه تنها در مورد عملگرهای L_1 و L_2 که با روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف شده اند بلکه برای هر دو عملگر خطی دیفرانسیلی L_1 و L_2 که دارای ضرایب ثابت (و از هر مرتبه ای) باشند برقرار است. از طرف دیگر، عملگرها با ضرایب متغیر عموماً دارای خاصیت جابه جایی نیستند (مسئله ۲۲).

به دستگاه (۷) برمی گردیم، به آسانی می توان یکی از دو تابع x_1 یا x_2 را حذف

کرد. برای حذف x_1 کافی است L_3 را به معادله اول، L_1 را بد معادله دوم، اعمال کرده و آنگاه اولی را از دومی کم کنیم. بدین سان

$$L_3 L_1[x_1] + L_3 L_2[x_2] = L_3[g_1] \quad (۱۶)$$

$$L_1 L_3[x_1] + L_1 L_4[x_2] = L_1[g_2] \quad (۱۷)$$

و از تفریق معادله (۱۶) از معادله (۱۷) به دست می آید

$$L_1 L_4[x_2] - L_3 L_2[x_2] = L_1[g_2] - L_3[g_1] \quad (۱۸)$$

معادله (۱۸) شامل x_1 نیست و می توان آن را با روشهای معمول حل کرد. همین که x_2 از معادله (۱۸) به دست آمد، x_1 را می توان با حل هر يك از معادلات (۷) تعیین کرد. امکان دیگر نخست حذف x_2 با روشی مشابه از دستگاه است. توجه شود که برای استفاده از این روش لازم است توابع g_1 و g_2 به قدر کافی دارای مشتق باشند تا بتوان عبارتهای $L_1[g_2]$ و $L_3[g_1]$ موجود در معادله (۱۸) را محاسبه کرد.

به طور کلی، تعدادی ثابتهای زاید در طول این روش وارد می شوند. در حل معادله (۱۸)، تعداد ثابتهای دلخواه موجود در جواب x_2 برابر با مرتبه عملگر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ خواهد بود. ثابتهای اضافی در هنگام تعیین x_1 با حل یکی از معادلات (۷)، وارد می شوند. تعیین روابط بین ثابتها و حذف ثابتهای زاید، با جایگزینی x_1 و x_2 در معادله دیگر (۷) که برای یافتن x_1 به کار نرفته است انجام می گیرد. این نکته را در مثال زیر توضیح داده ایم. این مسئله را که چه تعداد ثابتهای دلخواه باید در جواب عمومی دستگاه (۷) وجود داشته باشد می توان به طریق زیر جواب گفت. اگر دستگاه (۷) ساده شده و به يك دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل شود، آنگاه تعداد ثابتهای مستقل در جواب عمومی برابر با تعداد معادلات دستگاه خواهد بود. این نکته در بند ۵.۷ اثبات می شود. با حذف x_1 ، يك معادله به دست می آید که مرتبه آن همان مرتبه عملگر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ است. این معادله اخیر را می توان به نوبه خود به يك دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کرد که تعداد معادلات آن با مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ برابر باشد. بدین سان منطقاً می توان انتظار داشت که تعداد ثابتهای مستقل دلخواه در جواب عمومی دستگاه (۷) برابر با مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ باشد، مشروط به آنکه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ صفر نباشد، و صحت این حدس را می توان اثبات کرد. با استفاده از این مطلب می توان صحت تعداد ثابتهای دلخواه موجود در جواب نهایی را امتحان کرد. این نتیجه را می توان به دستگاههای بزرگتر معادلات تعمیم داد (مسئله ۲۳ را ببینید).

۱. مقصود از مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ بزرگترین مرتبه مشتق موجود در آن است. اگر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ صفر باشد، دستگاه (۷) را تبیین نامند. در این حالت ممکن است تعداد جوابها نامتناهی و یا صفر باشد، بر حسب آنکه طرف دوم معادله (۱۸) صفر شود یا نه (مسائل ۱۸ تا ۲۱ را ببینید). این وضعیت همانند وضعیت يك دستگاه معادلات جبری خطی است که در مینان ضرایب آن صفر باشد.

مثال. مطلوب است تعیین جواب عمومی دستگاه زیر

$$(x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0 \quad (19)$$

$$(x_1' + 2x_1) + (2x_2' - 4x_2) = 0 \quad (20)$$

در این حالت $L_2[x_2] = (D^2 - 3D + 2)x_2$ ، $L_1[x_1] = (D^2 + D - 1)x_1$ ، $L_2[x_2] = (2D - 4)x_2$ و $L_1[x_1] = (D + 2)x_1$ بسا اعمال L_1 و L_2 به ترتیب به معادلات (۱۹) و (۲۰)، و تفریق نتایج، خواهیم داشت

$$(L_1 L_2 - L_2 L_1)[x_2] \\ = [(D^2 + D - 1)(2D - 4) - (D + 2)(D^2 - 3D + 2)]x_2 = 0$$

یا

$$(D^3 - D^2 - 2D)x_2 = 0 \quad (21)$$

بدین سان جواب عمومی دستگاه (۱۹)، (۲۰) بسا ید شامل سه ثابت دلخواه باشد. جواب عمومی معادله (۲۱) چنین است

$$x_2 = \phi_2(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \quad (22)$$

با جایگزینی این عبارت به جای x_2 در معادله (۲۰) خواهیم داشت

$$x_1' + 2x_1 = 4c_1 + 6c_2 e^{-t} \quad (23)$$

که جواب عمومی آن عبارت است از

$$x_1 = \phi_1(t) = 2c_1 + 6c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} \quad (24)$$

برای حذف ثابتهای زائید، x_1 و x_2 را در معادله (۱۹) قرار می دهیم، به دست می آید $c_4 = 0$. توجه شود که اگر x_2 را در معادله (۱۹) قرار می دادیم و سپس از حل معادله مرتبه دوم حاصل x_1 را به دست می آوردیم، دو ثابت اضافی، به جای یکی، وارد می شد. این ثابتهای اضافی با جایگزینی x_1 و x_2 در معادله (۲۰) حذف خواهند شد.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۱۱ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

$$x_1' = x_1 + x_2 \quad ۱.$$

$$x_2' = 4x_1 - 2x_2$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^t \quad ۲.$$

$$x_2' = 4x_1 + x_2 - e^t$$

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \sin 2t, \quad x_1(0) = 0 \quad .۳$$

$$x_2' = x_1 - 2x_2 + t, \quad x_2(0) = 1$$

$$x_1' = x_1 - x_2 - t^2 \quad .۴$$

$$x_2' = x_1 + 3x_2 + 2t$$

$$x_1' = 3x_1 - 4x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 1 \quad .۵$$

$$x_2' = x_1 - x_2 - e^t, \quad x_2(0) = -1$$

$$x_1' = 4x_1 - 2x_2 + 2t \quad .۶$$

$$x_2' = 8x_1 - 4x_2 + 1$$

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 - e^{-t} \sin t \quad .۷$$

$$x_2' = 4x_1 - x_2 + 2e^{-t} \cos t$$

$$x_1' = x_1 - 5x_2, \quad x_1(0) = 1 \quad .۸$$

$$x_2' = 2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1' = x_1 \quad .۹$$

$$x_2' = -x_2 + \sqrt{2}x_1$$

$$x_2' = \sqrt{2}x_2$$

$$x_1' = x_1 - x_2 + 4x_2 \quad .۱۰$$

$$x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_2$$

$$x_2' = 2x_1 + x_2 - x_2$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + x_2 \quad .۱۱$$

$$x_2' = 2x_1 + x_2 - x_2$$

$$x_2' = -8x_1 - 5x_2 - 3x_2$$

۱۲. مسئله‌ای را که با معادلات (۱۹) و (۲۰) در مثال طرح شد با جایگزینی x_2 از رابطه (۲۲) در معادله (۱۹) حل کنید.

در هر يك از مسائل ۱۳ تا ۱۷ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید. توجه شود که در جواب عمومی به تعداد لازم، ثابت‌های دلخواه موجود باشد.

حل دستگاههای خطی با روش حذفی ۳۵۱

$$(D^2 - 2D + 2)x_1 + (D - 1)x_2 = 0 \quad .13$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 1)x_2 = 0$$

$$(2D + 1)x_1 + Dx_2 = t \quad .14$$

$$(D - 1)x_1 + Dx_2 = 2$$

$$(D^2 - 4D + 4)x_1 + 2Dx_2 = 1 \quad .15$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 2)x_2 = 0$$

$$D^2x_1 + (D + 1)x_2 = 0 \quad .16$$

$$(D - 1)x_1 + x_2 = \sin t$$

$$(D^2 - 4D + 4)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0 \quad .17$$

$$(D^2 - 2D)x_1 + (D^2 + 4D + 4)x_2 = 0$$

در هر يك از مسائل ۱۸ تا ۲۱ نشان دهید كه دستگاه معادلات داده شده تبهگن است. با اقدام به حل دستگاه مشخص كنید كه آیا دستگاه فاقد جواب است یا دارای بینهایت جواب می باشد.

$$Dx_1 + (D + 1)x_2 = t \quad .18$$

$$Dx_1 + (D + 1)x_2 = t + 2$$

$$(D + 2)x_1 + (D + 2)x_2 = e^{2t} \quad .19$$

$$(D - 2)x_1 + (D - 2)x_2 = e^{-2t} \quad u = x_1 + x_2 \text{ قرار دهید}$$

$$(D^2 - 1)x_1 + (D - 1)x_2 = \sin t \quad .20$$

$$(D + 1)x_1 + x_2 = 2e^t$$

$$(D^2 + 3D + 2)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0 \quad .21$$

$$(D + 1)x_1 + Dx_2 = 0$$

۲۲. عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب متغیر عموماً خاصیت جابه‌جایی ندارند. عملگرهای

$$L_1[x] = x' + tx, \quad L_2[x] = x' + t^2x$$

را در نظر می گیریم. نشان دهید كه

$$L_1L_2[x] = L_2\{L_1[x]\} = x'' + (t^2 + t)x' + (2t + t^3)x$$

$$L_2 L_1[x] = L_2\{L_1[x]\} = x'' + (t + t^2)x' + (1 + t^2)x$$

از آنجا

$$L_1 L_2[x] \neq L_2 L_1[x]$$

۲۳. دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$L_{11}[x_1] + L_{12}[x_2] + L_{13}[x_3] = g_1(t)$$

$$L_{21}[x_1] + L_{22}[x_2] + L_{23}[x_3] = g_2(t)$$

$$L_{31}[x_1] + L_{32}[x_2] + L_{33}[x_3] = g_3(t)$$

که در آن L_{11}, \dots, L_{33} عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت‌اند، اما لزوماً از مرتبه اول نیستند. می‌توان نشان داد که مرتبه این دستگاه، یعنی، تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب عمومی، برابر است با مرتبه عملگر L که با

$$L = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شود. در محاسبه این دترمینان، L_{11}, \dots, L_{33} را به عنوان چندجمله‌ای از عملگر D در نظر می‌گیریم و به‌طور صوری از روش بسط دترمینان استفاده می‌کنیم. مطلوب است تعیین مرتبه هر یک از دستگاه‌های زیر

$$(D^2 + 1)x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(D - 1)x_2 + (D^2 - 2)x_3 = 0$$

$$D^2 x_1 - (D^2 + 1)x_3 = 0$$

$$(D + 1)x_1 + D x_2 + (D^2 + 1)x_3 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(D^2 + 2D + 2)x_1 + (D - 1)x_2 + (D + 2)x_3 = 2te^t$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 3)x_2 + (D^2 + 3D)x_3 = te^{2t}$$

۳.۷ یادآوری مبحث ماتریسها

گرچه روش حذف که در بند اخیر مورد بحث قرار گرفت اغلب برای حل دستگاه‌های خطی معادلات دیفرانسیل که تعداد معادلات آنها اندک باشد، رضایت‌بخش است اما هنگامی که با دستگاه‌های بزرگتر سروکار پیدا کنیم استفاده از این روش دشوار می‌گردد. نکته مهمتر آنکه روش مزبور مبانی مناسبی برای بسط منطقی نظریه وابسته به این نوع معادلات را به دست

نمی‌دهد. به این دو دلیل لازم است برخی از نتایج ماتریسی مربوط به مسئله مقدار اولیه را در مورد يك دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل به کار ببریم. به منظور سهولت مراجعه در این دو بند خلاصه نکاتی را که خواننده بعداً بدانها نیاز خواهد داشت می‌آوریم. فرض بر آن است که خواننده با مبحث دترمینان و طرز محاسبه آنها آشناست. ماتریسها را با حروف بزرگ سیاه A, B, C, \dots و گاهی با حروف بزرگ سیاه یونانی Φ, Ψ, \dots نشان خواهیم داد. يك ماتریس A از يك جدول مستطیلی اعداد یا عناصر تشکیل می‌شود که در m سطر و n ستون مرتب شده‌اند، یعنی،

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

A را يك ماتریس $m \times n$ می‌نامیم. گرچه بعداً در این فصل عناصر برخی از ماتریسها را اعداد حقیقی می‌گیریم، اما در این بند امکان آن را که عناصر ماتریس اعداد مختلط باشند در نظر گرفته‌ایم. عنصر واقع در سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهند، اندیس اول نمایشگر سطر و اندیس دوم نمایشگر ستون آن است. گاهی علامت (a_{ij}) برای نشان دادن ماتریس با عنصر عمومی a_{ij} به کار رفته است.

به هر ماتریس A يك ماتریس A^T موسوم به ترانپوذهٔ A که از تعویض سطرها و ستونها به یکدیگر حاصل می‌شود متناظر است. بدین سان، اگر $A = (a_{ij})$ ، آنگاه $A^T = (a_{ji})$. همچنین، مزدوج عدد مختلط a_{ij} را با \bar{a}_{ij} ، و ماتریس حاصل از A با تبدیل هر عنصر a_{ij} به مزدوجش \bar{a}_{ij} را با \bar{A} نشان می‌دهند. ماتریس \bar{A} را مزدوج A می‌نامند، و نیز لازم می‌آید که ترانپوذهٔ ماتریس مزدوج \bar{A}^T را در نظر بگیریم. این ماتریس را الحاقی A می‌نامند و با A^* نشان می‌دهند. به عنوان مثال، فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}$$

۱. اسامی برخی از کتب جبر ماتریسی را به عنوان نمونه در پایان این فصل آورده‌ایم.

انواع خاصی از ماتریسها که در اینجا بیشتر مورد توجه اند عبارتند از: ماتریسهای مربع، یعنی ماتریسهایی که تعداد سطرها و ستونهای آنها برابر است، $m=n$ ؛ و بردارها (یا بردارهای ستونی)، که می توان آنها را به عنوان ماتریسهای $n \times 1$ ، یعنی ماتریسهایی که تنها دارای یک ستون اند تلقی کرد. ماتریسهای مربع را که n سطر و n ستون دارند، ماتریسهای رسته n می گویند. بردارهای (ستونی) را با حروف کوچک سیاه x, y, ξ, η, \dots نشان می دهیم. x^T ترانپوخته x بردار ستونی $n \times 1$ ، یک بردار سطری $1 \times n$ است؛ یعنی، ماتریسی است متشکل از یک سطر که عناصر آن همان عناصر x در موضعهای متناظر می باشند.

خواص جبری

۱. تساوی. A و B ، دو ماتریس $m \times n$ را هنگامی مساوی گویند که عناصر متناظر آنها با هم مساوی باشد؛ یعنی، هنگامی که به ازای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$.
۲. صفر. نماد 0 برای نمایش ماتریس یا برداری که هر یک از عناصر آن صفر است به کار می رود.
۳. جمع. مجموع دو ماتریس $m \times n$ با ماتریسی تعریف می شود که هر عنصر آن مجموع دو عنصر متناظر است:

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \quad (2)$$

بنابراین تعریف، جمع ماتریسی جابه جایی و شرکت پذیر است

$$A+B=B+A, \quad A+(B+C)=(A+B)+C \quad (3)$$

۴. ضرب در یک عدد. ضرب ماتریس A در یک عدد مختلط α به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \quad (4)$$

قانونهای توزیع پذیری

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (5)$$

برای این نوع ضرب برقرارند. به ویژه، منفی A که آن را با $-A$ نشان می دهند به صورت زیر تعریف می شود

$$-A = (-1)A \quad (6)$$

۵. تفریق. $A-B$ تفاضل دو ماتریس $m \times n$ با

$$A-B = A+(-B) \quad (7)$$

تعریف می شود. بدین سان

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}) \quad (8)$$

که مشابه رابطه (۲) است.

۶. ضرب. \mathbf{AB} حاصل ضرب دوماتریس هنگامی معین است که تعداد ستونهای سازه اول با تعداد سطرهای سازه دوم برابر باشد. اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} به ترتیب ماتریسهای $m \times n$ و $n \times r$ باشند، آنگاه حاصل ضرب $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ يك ماتریس $m \times r$ است. عنصر سطر i ام و ستون j ام \mathbf{C} از ضرب هر عنصر سطر i ام \mathbf{A} در عنصر متناظر ستون j ام \mathbf{B} و جمع حاصل ضربها به دست می آید. به طور نمادی،

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (9)$$

با محاسبه مستقیم می توان نشان داد که ضرب ماتریسی در قانون شرکت پذیری

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (10)$$

و قانون توزیع پذیری

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (11)$$

صدق می کند. اما، به طور کلی ضرب ماتریسی جابه جایی نیست. برای آنکه هر دو حاصل ضرب \mathbf{AB} و \mathbf{BA} وجود داشته باشند، لازم است که \mathbf{A} و \mathbf{B} ماتریسهای مربعی و هم مرتبه باشند. حتی در این حالت لزومی ندارد که این دو حاصل ضرب برابر باشند، بدین سان معمولاً

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (12)$$

مثال ۱. برای توضیح ضرب ماتریسها، و نیز بیان این نکته که ضرب ماتریسی لزوماً جابه جایی نیست، ماتریسهای زیر را در نظر می گیریم

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابر تعریف ضرب که با رابطه (۹) بیان شد، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به همین طریق، خواهیم داشت

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

روشن است که، $AB \neq BA$.

۷. ضرب بردارها. ضرب ماتریسها را به صورتی که در بالا بیان شد می توان به عنوان حالت خاص هنگامی که ماتریسهای A و B به ترتیب $1 \times n$ و $n \times 1$ یعنی بردارهای سطری و ستونی باشند به کار گرفت. اگر این بردارها را با x^T و y نشان دهیم خواهیم داشت

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (13)$$

حاصل این عمل يك عدد (مختلط) است، و مستقیماً از رابطه (۱۳) نتیجه می شود که

$$x^T y = y^T x, \quad x^T (y+z) = x^T y + x^T z, \quad (\alpha x)^T y = \alpha (x^T y) = x^T (\alpha y) \quad (14)$$

برای بردارها ضرب دیگری وجود دارد، که بسیار مفید است و به ازای هر دو بردار که تعداد مؤلفه های آنها یکی باشد معین است. این حاصل ضرب را با (x, y) نشان می دهند و آن را ضرب داخلی یا اسکالر می نامند، و با

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (15)$$

تعریف می شود. حاصل ضرب اسکالر نیز يك عدد (مختلط) است، و از مقایسه روابط (۱۳) و (۱۵) دیده می شود که

$$(x, y) = x^T \bar{y} \quad (16)$$

از (۱۵) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} (x, y) &= \overline{(y, x)}, \quad (x, y+z) = (x, y) + (x, z), \\ (\alpha x, y) &= \alpha (x, y), \quad (x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y) \end{aligned} \quad (17)$$

توجه شود که حتی اگر بردار x دارای عناصری با قسمتهای موهومی ناصفر باشد، از ضرب اسکالری x در خودش يك عدد حقیقی نامنفی حاصل می شود،

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (18)$$

اگر $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ، آنگاه بردارهای \mathbf{x} و \mathbf{y} را متعامد گویند. مثلاً، بردارهای یکه $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ در هندسه برداری سه‌بعدی يك مجموعه متعامد را تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر، امکان دارد که حاصل ضرب ماتریسی

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (19)$$

يك عدد حقیقی نباشد. اگر همه مؤلفه‌های سازه دوم در روابط (۱۳) و (۱۵) حقیقی باشند، آنگاه هردو حاصل ضرب برابرند، و به همان ضرب نقطه‌ای که معمولاً در متون هندسی و فیزیکی با $n=3$ برخورد می‌شود تبدیل می‌گردند. به عنوان مثال، فرض کنیم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4 + 3i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2 + 7i,$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3 + 2i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7$$

۸. واحد. واحد ضربی، یا به‌طور ساده ماتریس واحد \mathbf{I} با

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

معین می‌شود. بنابراین اگر یکی از ماتریسها ماتریس واحد باشد خاصیت جابه‌جایی برقرار می‌شود.

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (21)$$

۹. دادن. به منظور آنکه در مورد ماتریسهای مربع عملی نظیر تقسیم اعداد تعریف کنیم، لازم است متناظر به هر ماتریس \mathbf{A} يك ماتریس دیگر \mathbf{B} تعیین کنیم به طوری که

\mathbf{I} ، ماتریس واحد است. اگر \mathbf{B} وجود داشته باشد، آن را وارون ضربی، یا به طور ساده وارون \mathbf{A} می نامند، و می نویسند $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. می توان نشان داد که اگر \mathbf{A}^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (22)$$

به عبارت دیگر، ضرب بین ماتریس و وارونش جابه جایی است. اگر \mathbf{A} دارای وارون ضربی \mathbf{A}^{-1} باشد، آنگاه \mathbf{A} را عادی گویند؛ وگرنه \mathbf{A} را غیرعادی نامند.

برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} از \mathbf{A} ، با فرض آنکه وجود داشته باشد، روشهای گوناگونی در دست است. یکی از روشها مبتنی بر استفاده از دترمینانهاست. بهر عنصر a_{ij} از ماتریس مفروض يك مینور M_{ij} متناظر می شود که دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس اصلی، یعنی، سطر و ستونی که شامل a_{ij} می باشند به دست می آید. همچنین به هر عنصر a_{ij} يك همسازه C_{ij} متناظر است که با معادله

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (23)$$

تعریف می شود. اگر $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ ، آنگاه می توان نشان داد که عنصر عمومی b_{ij} عبارت است از

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}} \quad (24)$$

گرچه رابطه (۲۴) برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} چندان کارآمد نیست، اما شرطی را که باید \mathbf{A} در آن صدق کند تا دارای وارون باشد روشن می کند. در واقع، این شرط هم لازم است و هم کافی: \mathbf{A} يك ماتریس عادی است اگر، و فقط، اگر $\det \mathbf{A} \neq 0$. اگر $\det \mathbf{A} = 0$ ، آنگاه \mathbf{A} غیرعادی است.

روش دیگری که معمولاً برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} مناسبتر است مبتنی بر استفاده از اعمال سطری مقدماتی است. این اعمال بر سه نوعند:

۱. تعویض دو سطر با هم.
۲. ضرب يك سطر در اسکلاری ناصفر.
۳. اضافه کردن هر ضربی از يك سطر به سطر دیگر.

هر ماتریس عادی \mathbf{A} را می توان با دنباله منظمی از این عملیات به واحد \mathbf{I} تبدیل کرد.

۱. به ازای مقادیر بزرگ n تعداد ضربهای لازم برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} با استفاده از رابطه (۲۴) متناسب با $n!$ است. اگر شخص روشهای کارآمدتری از قبیل روش تحویل سطری را که ذیلاً بیان می شود به کارگیرد تعداد ضربها فقط با n^3 متناسب است. حتی به ازای مقادیر کوچک n (مانند $n=4$)، روش دترمینانی برای محاسبه وارون چندان اقتصادی نیست، و روش تحویل سطرها مرجح است.

می توان نشان داد که اگر همان دنباله عملیات روی \mathbf{I} انجام گیرد آن را به \mathbf{A}^{-1} تبدیل می کند. این تبدیل را معمولاً "تحویل سطری" نامند. مثال زیر این روش را توضیح می دهد.

مثال ۲. مطلوب است تعیین وارون

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ماتریس \mathbf{A} را می توان با دنباله عملیات زیر به \mathbf{I} تبدیل کرد. نتیجه هر مرحله در ستون سمت چپ دیده می شود

(الف) برای صفر کردن عناصر ستون اول واقع در زیر قطر، (-3) برابر سطر اول را به سطر دوم و (-2) برابر سطر اول را به سطر سوم می افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ب) برای آنکه عنصر قطری واقع در ستون دوم برابر یک شود، سطر دوم را در $1/2$ ضرب می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ج) برای آنکه عناصر غیر قطری در ستون دوم صفر شوند، سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم و (-4) برابر سطر دوم را به سطر سوم می افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(د) برای آنکه عنصر قطری ستون سوم برابر یک شود سطر سوم را در $(-1/5)$ ضرب می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ه) برای آنکه عناصر غیر قطری ستون سوم صفر شوند، $(-3/2)$ سطر سوم را به سطر اول و $(-5/2)$ سطر سوم را به سطر دوم می افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر این دنباله عملیات را به همین ترتیب روی I انجام دهیم، متوالیاً ماتریسهای زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

آخرین ماتریس، A^{-1} است، این نتیجه را می‌توان مستقیماً با ضرب آن در A تحقیق کرد.

این مثال بدان سبب که عنصر واقع در گوشه چپ فوقانی در ماتریس اصلی A برابر يك بود ($a_{11} = 1$) اندکی ساده شد. اگر چنین نباشد آنگاه نخستین گام آن است که سطر اول را در $1/a_{11}$ ضرب کنیم تا عنصر مزبور به يك بدل شود، البته هنگامی که $a_{11} \neq 0$. اگر $a_{11} = 0$ ، آنگاه سطر اول را با يك سطر دیگر تعویض می‌کنیم تا قبل از شروع عملیات فوق در بالای ستون چپ عنصری ناصفر قرار داشته باشد.

توابع ماتریسی. گاهی لازم است به بررسی بردارها یا ماتریسهایی که عناصر آنها توابعی از متغیر حقیقی t هستند پردازیم، به ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

ماتریس $A(t)$ را در $t = t_0$ یا روی فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته گویند اگر هر يك از عناصر A در نقطه t_0 یا روی فاصله مزبور تابعی پیوسته باشد. به همین نحو، $A(t)$ را مشتق پذیر گویند اگر هر يك از عناصر آن مشتق پذیر باشد، و مشتق آن dA/dt به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right) \quad (26)$$

یعنی، هر عنصر dA/dt مشتق عنصر متناظر A است. به همین طریق انتگرال يك ماتریس تابعی به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right) \quad (27)$$

مثلاً، اگر

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi A(t) dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

بسیاری از قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال را می توان به آسانی به توابع ماتریسی تعمیم داد؛ به ویژه

$$\frac{d}{dt}(CA) = C \frac{dA}{dt} \quad (28)$$

که در آن C يك ماتریس ثابت است.

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = A \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} B \quad (30)$$

در روابط (۲۸) و (۳۰) باید توجه داشت که ترتیب عوامل ضرب تغییر نکنند. تعاریفی که با روابط (۲۶) و (۲۷) بیان شد به عنوان حالت خاص درمورد بردارها نیز به کار می روند.

مسائل

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۱}$$

مطلوب است

(الف) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، (ب) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ ، (ج) \mathbf{AB} ، (د) \mathbf{BA} .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۲}$$

مطلوب است

(الف) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ ، (ب) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، (ج) \mathbf{AB} ، (د) \mathbf{BA} .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۳}$$

مطلوب است

(الف) \mathbf{A}^T ، (ب) \mathbf{B}^T ، (ج) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ، (د) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۴}$$

مطلوب است

(الف) \mathbf{A}^T ، (ب) $\overline{\mathbf{A}}$ ، (ج) \mathbf{A}^* .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۵}$$

تحقیق کنید که $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۶}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تحقیق کنید که

$$(A+B)+C=A+(B+C) \quad (ب) \quad (AB)C=A(BC) \quad (الف)$$

$$. A(B+C)=AB+AC \quad (ج)$$

۷. هر يك از قواعد زیر را در مورد جبر ماتریسی ثابت کنید:

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad (ب) \quad A+B=B+A \quad (الف)$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad (د) \quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \quad (ج)$$

$$A(B+C)=AB+AC \quad (و) \quad A(BC)=(AB)C \quad (ه)$$

$$۸. اگر \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix} \quad و \quad y = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{مطلوب است}$$

$$(الف) \quad x^T y \quad (ب) \quad y^T y \quad (ج) \quad (x, y) \quad (د) \quad (y, y)$$

$$۹. اگر \quad x = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \quad و \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{نشان دهید که}$$

$$(الف) \quad x^T y = y^T x \quad (ب) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

در هر يك از مسائل ۱۰ تا ۱۹ وارون ماتریس داده شده را محاسبه کنید یا نشان دهید که غیرعادی است.

$$۱۰. \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad ۱۱. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad ۱۲. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$۱۳. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ۱۴. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$۱۵. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ۱۶. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot ۱۸ \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot ۱۷$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot ۱۹$$

۲۰. ثابت کنید که اگر A عادی باشد، آنگاه A^{-1} یکناست؛ یعنی، نشان دهید که نمی توان دو ماتریس متمایز B و C را طوری تعیین کرد که $AB=I$ و $AC=I$.
 ۲۱. ثابت کنید که اگر A عادی باشد، آنگاه $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ ؛ یعنی، ضرب هر ماتریس عادی در وارون آن جابه جایی است.

$$۲۲. \text{ اگر } A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$، B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

مطلوب است

$$(الف) A+2B, (ب) AB, (ج) \frac{dA}{dt}, (د) \int_0^1 A(t) dt$$

در هر يك از مسائل ۲۳ تا ۲۵ تحقیق کنید که بردار داده شده در معادله دیفرانسیل متناظر صدق می کند.

$$۲۳. x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$۲۴. x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t, \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad ۰۲۵$$

درهر يك از مسائل ۲۶ و ۲۷ تحقيق كنيد كه ماتريس داده شده در معادله ديفرانسييل متناظر صدق مي كند.

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi \quad ۰۲۶$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi \quad ۰۲۷$$

۴.۷ دستگاههای معادلات جبری خطی؛ استقلال خطی، مقادير ويژه، بردارهای ويژه

در اين بند برخي از نتايج جبر خطي را كه براي حل دستگاههای معادلات ديفرانسييل خطي داراي اهميت اند يادآوری مي كنيم. اثبات برخي از اين نتايج آسان و برخي دشوار است؛ اما چون هدف ما تنها تلخيص اطلاعات مفيدی به صورت فشرده است، به اثبات هيچ يك از آنها نمی پردازيم. همه نتايج اين بند برچند نکته اساسی درباره جواب دستگاههای معادلات جبری خطی مبتنی است.

دستگاههای معادلات جبری خطی. مجموعه ای از دستگاههای n معادله جبری خطی n متغیری

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (۱)$$

را می توان چنین نوشت

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (۲)$$

که در آن \mathbf{A} ماتريس $n \times n$ ، و بردار \mathbf{b} داده شده اند و باید مؤلفه های \mathbf{x} را تعیین کرد. اگر $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، دستگاه را همگن؛ وگرنه ناهمگن نامند. دو دستگاه که دقیقاً دارای يك مجموعه جواب باشند دستگاههای هم ارز نامیده می شوند.

اگر \mathbf{A} ، ماتريس ضرایب، عادی باشد، یعنی، اگر $\det \mathbf{A}$ صفر نباشد، آنگاه دستگاه (۲)

دارای جوابی یکتاست. چون A عادی است، A^{-1} وجود دارد، و می توان جواب را با ضرب A^{-1} از چپ در هر دو طرف معادله (۲) به دست آورد؛ بدین سان

$$x = A^{-1}b. \quad (3)$$

به ویژه، مسئله دستگاه همگن $Ax = 0$ ، متناظر با $b = 0$ در معادله (۲)، تنها دارای جواب بدیهی $x = 0$ است.

از طرف دیگر، اگر A غیر عادی باشد، یعنی، اگر $\det A$ صفر باشد، آنگاه جواب معادله (۲) یا وجود ندارد یا وجود دارد اما یکتا نیست. چون A غیر عادی است، A^{-1} وجود ندارد، بنابراین رابطه (۳) دیگر برقرار نیست. دستگاه همگن

$$Ax = 0 \quad (4)$$

علاوه بر جواب بدیهی صفر دارای بینهایت جواب ناصفر است. وضعیت در مورد دستگاه ناهمگن (۲) دشوارتر است. این دستگاه دارای جواب نیست مگر آنکه بردار b در شرط دیگری، که به هیچ وجه لزوم آن بدیهی نیست، صدق کند. این شرط عبارت است از آنکه رابطه

$$(b, y) = 0 \quad (5)$$

به ازای هر بردار y که در $A^*y = 0$ صدق کند برقرار باشد، A^* ماتریس الحاقی A است. اگر شرط (۵) برقرار باشد، آنگاه دستگاه (۲) دارای (بینهایت) جواب است. هر يك از این جوابها به صورت

$$x = x^{(0)} + \xi, \quad (6)$$

است که در آن $x^{(0)}$ يك جواب خصوصی معادله (۲) و ξ جوابی از دستگاه همگن (۴) است. شباهت بین رابطه (۶) و جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن، رابطه (۴) بند ۶.۳ شایان توجه است؛ $x^{(0)}$ و ξ به ترتیب با جواب خصوصی y_p و جواب مکمل y_c متناظرند. اثبات برخی از گزاره های فوق در مسائل ۲۱ تا ۲۵ طرح شده است.

گرچه رابطه (۳)، حداقل هنگامی که A عادی باشد، فرمول فشرده ای برای جواب معادله (۲) است، اما اغلب آسانتر است که معادله (۲) را با استفاده از عملیات مقدماتی سطری به دستگاه هم ارز بسیار ساده تری تبدیل کرد که جواب آن را بتوان به آسانی به دست آورد. به ویژه، ممکن است بخواهیم ماتریس ضرایب را به يك ماتریس مثلثی تبدیل کنیم؛ یعنی، ماتریسی بیابیم که عناصر واقع در زیر قطر اصلی همه صفر باشند. مثال زیر این روش را توضیح می دهد.

مثال ۰۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (7)$$

مناسب است که معادلات (۷) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (۸)$$

این معادله با عناصر ماتریس ضریب و بردار طرف دوم معادله (۸) مشخص می شود، به ویژه، مقدار و محل هر یک از عناصر به دست می آید. بدین سان می توان از x ها صرف نظر کرد و به اختصار نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 7 \\ -1 & 1 & -2 & : & -5 \\ 2 & -1 & -1 & : & 4 \end{pmatrix} \quad (۹)$$

ماتریس (۹) را ماتریس افزوده دستگاه (۷) می نامند. خط نقطه چین جانشین علامتهای تساوی است و می گوئیم ماتریس را افزاز می کند. اکنون به انجام عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس (۹) به منظور صفر کردن عناصر قسمت پایین چپ ماتریس مزبور می پردازیم. باید توجه داشت که عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس (۹) با عملیات مجاز روی دستگاه معادلات (۷) متناظر است. هر گام را در زیر توضیح داده ایم، و نتیجه در طرف چپ نوشته شده است.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 7 \\ 0 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 3 & -7 & : & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(الف) سطر اول را به سطر دوم و} \\ \text{(۲-) برابر سطر اول را به سطر سوم} \\ \text{می افزاییم.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 7 \\ 0 & 1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 3 & -7 & : & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ب) سطر دوم را در (۱-) ضرب} \\ \text{می کنیم.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 7 \\ 0 & 1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & -4 & : & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ج) (۳-) برابر سطر دوم را به سطر} \\ \text{سوم می افزاییم.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 7 \\ 0 & 1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(د) سطر سوم را به (۴-) تقسیم} \\ \text{می کنیم.} \end{array}$$

ماتریسی که بدین سان به دست آمد با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\x_2 - x_3 &= -2, \\x_3 &= 1,\end{aligned}\quad (10)$$

متناظر است و این دستگاه با دستگاه اصلی (۷) هم ارز است. باید توجه داشت که ضرایب معادلات (۱۰) تشکیل يك ماتریس مثلثی می دهند. از آخرین معادله دستگاه (۱۰) داریم $x_3 = 1$ ، از دومین معادله $x_2 = -2 + x_3 = -1$ ، و از اولین معادله

$$x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

بدین سان داریم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که جواب دستگاه (۷) یا (۸) داده شده است.

این روش برای حل دستگاههای همگن و دستگاههایی که تعداد معادلات آنها با تعداد مجهولات مساوی نباشد نیز مفید است.

استقلال خطی. هنگامی گویند مجموعه ای از k بردار $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند که بتوان مجموعه اعداد (مختلط) c_1, \dots, c_k را که حداقل یکی از آنها ناصفر باشد طوری تعیین کرد که

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (11)$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند اگر يك رابطه خطی بین آنها باشد. از طرف دیگر، اگر تنها مجموعه c_1, \dots, c_k که به ازای آن معادله (۱۱) برقرار گردد $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ باشد، آنگاه $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ را مستقل خطی گویند.

اکنون مجموعه n بردار را که هریک دارای n مؤلفه است در نظر می گیریم. فرض کنیم $x_{ij} = x_i^{(j)}$ مؤلفه i ام بردار $\mathbf{x}^{(j)}$ باشد، و فرض کنیم $\mathbf{X} = (x_{ij})$. آنگاه معادله (۱۱) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \dots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \dots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \dots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \dots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0} \quad (12)$$

اگر $\det \mathbf{X} \neq 0$ ، آنگاه تنها جواب معادله (۱۲)، $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ است، اما اگر $\det \mathbf{X} = 0$ ،

جوابهای ناصفري وجود دارد. بدین سان مجموعه بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ مستقل خطی اند اگر، فقط اگر، $\det \mathbf{X} \neq 0$.

مثال ۲. تعیین کنید که آیا بردارهای

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (13)$$

مستقل خطی اند یا نه. اگر مستقل خطی نیستند يك رابطه خطی بین آنها بیابید. برای بررسی استقلال خطی $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ به محاسبه $\det(x_{ij})$ که ستونهای آن به ترتیب مؤلفه های $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ می باشند می پردازیم.

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

و محاسبه ساده ای نشان می دهد که این دترمینان صفر است. بدین سان $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ مستقل خطی نیستند و ثابتهای c_1, c_2, c_3 را می توان طوری تعیین کرد که

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + c_3 \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

معادله (۱۴) را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

و آن را با عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ -1 & 3 & -11 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

مانند مثال ۱ حل کرد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 9 & \vdots & 0 \\ 0 & 5 & -15 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{الف) } (-2) \text{ برابر سطر اول را با سطر} \\ \text{دوم جمع می کنیم و سطر اول را به سطر سوم} \\ \text{می افزاییم.} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ب) سطر دوم را بر ۳ - تقسیم می کنیم؛} \\ \text{آنگاه (۵-) برابر سطر دوم را با سطر سوم} \\ \text{جمع می کنیم.} \end{array}$$

بدین سان دستگاه هم ارز

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

به دست می آید. از معادله دوم (۱۷) داریم $c_2 = 3c_3$ ، و از معادله اول حاصل می شود $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. بدین سان c_1 و c_2 را بر حسب c_3 به دست آورده ایم و c_3 دلخواه باقی می ماند. اگر برای سهولت قرار دهیم $c_3 = -1$ ، آنگاه $c_1 = 2$ و $c_2 = -3$. در این حالت رابطه مطلوب (۱۴) به صورت زیر درمی آید

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

در بسیاری موارد مفید است که ستونها یا سطرهاى ماتریس \mathbf{A} را به عنوان بردار در نظر بگیریم. این بردارهای ستونی (یا سطری) مستقل خطی اند اگر، فقط اگر، $\det \mathbf{A} \neq 0$. علاوه بر این، اگر $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ، آنگاه می توان نشان داد که $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. بنابراین، اگر ستونها یا سطرهاى هر دو ماتریس \mathbf{A} و \mathbf{B} مستقل خطی باشند، آنگاه ستونها یا سطرهاى \mathbf{C} نیز مستقل خطی اند.

اکنون به تعمیم مفاهیم استقلال و عدم استقلال خطی در مورد مجموعه ای از توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ که روی فاصله $\alpha < t < \beta$ معین اند می پردازیم. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ را روی فاصله $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی گویند اگر ثابتهای c_1, \dots, c_k را که همگی صفر نباشند بتوان طوری تعیین کرد که به ازای هر t در فاصله مزبور $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}$. در غیر این صورت، $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ را مستقل خطی گویند. توجه شود که اگر $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ روی فاصله ای وابسته خطی باشند، در هر نقطه فاصله مزبور وابسته خطی اند. اما، اگر $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ روی فاصله ای مستقل خطی باشند، در هر نقطه فاصله مزبور ممکن است مستقل خطی یا وابسته خطی باشند؛ در واقع امکان دارد در هر نقطه وابسته خطی باشند، اما مجموعه های ثابتها در نقاط متفاوت مختلف باشند. به عنوان مثال مسئله ۹ را ببینید.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه. معادله

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (۱۸)$$

را می توان به عنوان يك تبدیل خطی که هر بردار مفروض \mathbf{x} را به بردار جدید \mathbf{y} می نگارد (یا تبدیل می کند) در نظر گرفت. بردارهایی که به مضاربى از خود تبدیل می شوند در بسیاری

کار بردها نقش مهمی ایفا می کنند.^۱ برای تعیین چنین بردارهایی قرار می دهیم $y = \lambda x$ ، که در آن اسکالر λ ضریب تناسب است، و به جستجوی جوابهای معادلات

$$Ax = \lambda x \quad (19)$$

یا

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (20)$$

می پردازیم. معادله اخیر دارای جوابهای ناصفر است اگر، و فقط اگر، λ به گونه ای تعیین شود که

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \quad (21)$$

مقادیر λ که در معادله (۲۱) صدق می کنند مقادیر ویژه ماتریس A نام دارند، و جوابهای معادله (۱۹) یا (۲۰) که به ازای این مقادیر λ به دست می آیند بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه مزبور نامیده می شوند. بردارهای ویژه با تقریب یک ثابت ضریبی دلخواه تعیین می گردند، اگر این ثابت را به نحوی مشخص کنیم، آنگاه بردارهای ویژه مزبور را نرمال شده نامند. اغلب مناسب است که بردار ویژه x با قید $(x, x) = 1$ نرمال شود. در برخی موارد ممکن است بخواهیم یکی از مؤلفه ها برابر واحد باشد.

چون معادله (۲۱) یک معادله چندجمله ای از درجه n بر حسب λ است، n مقدار ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود دارد که برخی از آنها ممکن است مکرر باشند. اگر یک مقدار ویژه m بار به عنوان ریشه معادله (۲۱) ظاهر شود، آنگاه گفته می شود که مقدار ویژه مزبور دارای مرتبه تکرار m است. هر مقدار ویژه حداقل دارای یک بردار ویژه متناظر است، و هر مقدار ویژه که دارای مرتبه تکرار m باشد ممکن است دارای q بردار ویژه مستقل خطی باشد، به طوری که

$$1 \leq q \leq m. \quad (22)$$

حالتی را که در آن q کوچکتر از m است ذیلاً* با مثال ۳ توضیح داده ایم. اگر همه مقادیر ویژه یک ماتریس A ساده باشند (یعنی مرتبه تکرارشان یک باشد)، آنگاه می توان نشان داد که n بردار ویژه A ، به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار، مستقل خطی اند. از طرف دیگر، اگر A دارای یک یا چند مقدار ویژه مکرر باشد، آنگاه ممکن است تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس A از n کمتر باشد، زیرا به ازای هر مقدار ویژه مکرر ممکن است داشته باشیم $m < q$. این نکته بعداً در حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل ایجاد مشکلاتی می کند.

مثال ۳. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

۱. به عنوان مثال، در تعیین محورهای اصلی استرس یا استرین یک جسم کشسان، و در تعیین مدهای ارتعاش آزاد دستگاه کنسرواتو با تعداد درجات آزادی محدود به این مسئله برمی خوریم.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

مقادیر ویژه λ و بردارهای ویژه x در معادله $(A - \lambda I)x = 0$ ، یا

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادله

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0. \quad (25)$$

بدین‌سان دومقدار ویژه مزبور عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 2$ ؛ یعنی، مقدار ویژه ۲ دارای مرتبه تکرار دو است.

برای تعیین بردارهای ویژه باید به معادله (۲۴) برگردیم و در آن به‌جای λ مقدار ۲ را منظور کنیم. از آنجا

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

بدین ترتیب تنها يك شرط $x_1 + x_2 = 0$ حاصل می‌شود، که x_2 را برحسب x_1 یا برعکس معین می‌کند. اگر $x_1 = c$ ، آنگاه $x_2 = -c$ و بردار ویژه $x^{(1)}$ چنین است

$$x^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

معمولاً پس از تعیین بردارهای ویژه از ثابت دلخواه c صرف‌نظر می‌کنیم؛ بدین‌سان به‌جای رابطه (۲۷) می‌نویسیم

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

و به‌خاطر می‌سپاریم که هر ضرب این بردار نیز يك بردار ویژه است. توجه شود که تنها يك بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه مضاعف مزبور به‌دست آمد.

مثال ۴. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

مقادیر ویژه λ و بردارهای ویژه x در معادله $(A - \lambda I)x = 0$ ، یا

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادله

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \quad (31)$$

از حل معادله (۳۱)، مثلاً با آزمون و خطا، سه ریشه به دست می‌آید که عبارتند از $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -1$ و $\lambda_3 = -1$. بدین سان ۲ یک مقدار ویژه ساده، و ۱ مقدار ویژه با مرتبه تکرار دو است.

برای تعیین بردار ویژه $x^{(1)}$ متناظر به مقدار ویژه λ_1 ، با جایگزینی $\lambda = 2$ در معادله (۳۰)؛ به دستگاه زیر می‌رسیم

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

می‌توان آن را با عملیات مقدماتی سطری به دستگاه هم‌ارز

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

ساده کرد. از حل این دستگاه بردار ویژه زیر به دست می‌آید

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

به ازای $\lambda = -1$ ، معادلات (۳۵) فوراً به يك معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (35)$$

تبدیل می شوند. بدین سان برای دو کمیت از سه کمیت x_1 ، x_2 ، x_3 می توان مقادیر دلخواهی انتخاب کرد و سومی را از معادله (۳۵) به دست آورد. مثلاً، اگر $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ ، آنگاه $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

يك بردار ویژه است. هر مضرب $\mathbf{x}^{(2)}$ نیز يك بردار ویژه است، اما بردار ویژه مستقل دوم را می توان با انتخاب مقادیر دیگری برای x_1 و x_2 مثلاً $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ به دست آورد. در اینجا نیز $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

يك بردار ویژه است که با $\mathbf{x}^{(2)}$ بستگی خطی ندارد. بنابراین در این مثال دو بردار ویژه مستقل خطی به مقدار ویژه مضاعف متناظر قرار گرفته است.

طبقه خاص مهمی از ماتریسها، موسوم به ماتریسهای هرمیتی یا خودالحاقی عبارتند از ماتریسهایی که در $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ صدق می کنند؛ یعنی، $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. ماتریسهای هرمیتی شامل ماتریسهای متقارن حقیقی می باشند؛ یعنی، ماتریسهایی که دارای عناصر حقیقی اند و به ازای آنها $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. این ماتریسها زیرطبقه ای از ماتریسهای هرمیتی تشکیل می دهند. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای هرمیتی دارای خواص مفید زیر هستند.

۱. همه مقادیر ویژه حقیقی اند.
۲. مرتبه تکرار مقادیر ویژه هر چه باشد همواره يك مجموعه کامل از n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.
۳. اگر $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ دو بردار ویژه متناظر به دو مقدار ویژه متمایز باشند، آنگاه $\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0$. بدین سان، اگر همه مقادیر ویژه ساده باشند، آنگاه بردارهای ویژه متناظر تشکیل يك مجموعه بردارهای متعامد می دهند.
۴. متناظر با هر مقدار ویژه با مرتبه تکرار m ، می توان m بردار ویژه دو به دو متعامد انتخاب کرد. بدین سان مجموعه کامل n بردار ویژه را همواره می توان طوری انتخاب کرد که هم متعامد و هم مستقل خطی باشند.

مثال ۴ بالا شامل يك ماتریس متقارن حقیقی است و خواص ۱، ۲ و ۳ را توضیح می‌دهد، اما با انتخابی که برای $\mathbf{x}^{(2)}$ و $\mathbf{x}^{(3)}$ کردیم خاصیت ۴ برقرار نیست. اما، همواره می‌توان $\mathbf{x}^{(2)}$ و $\mathbf{x}^{(3)}$ را طوری انتخاب کرد که $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. مثلاً امکان داشت بردارهای ویژه متناظر به مقدار ویژه $\lambda = -1$ (در مثال ۴) را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر ماتریس هرمیتی نباشد، مقدار ویژه مکرر باشد، آنگاه امکان دارد با کمبود بردارهای ویژه مواجه شویم. اثبات گزاره‌های ۱ و ۳ در مسائل ۲۷ تا ۲۹ طرح شده است.

در حل دستگاههای معادلات جبری و موارد دیگری گاهی لازم می‌آید که ماتریس مفروضی را به صورت قطری درآوریم، یعنی، ماتریسی که تنها روی قطر دارای عناصر ناصفر باشد. برای انجام این کار می‌توان از بردارهای ویژه استفاده کرد. فرض کنیم که \mathbf{A} دارای يك مجموعه کامل n بردار ویژه مستقل خطی باشد (خواه \mathbf{A} هرمیتی باشد خواه نباشد). این بردارهای ویژه را با $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ و مقادیر ویژه متناظر را به $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ نشان می‌دهیم، ماتریس \mathbf{T} را که ستونهای آن از بردارهای ویژه $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ تشکیل شده‌اند در نظر می‌گیریم. چون ستونهای \mathbf{T} بردارهای مستقل خطی‌اند، $\det \mathbf{T} \neq 0$ ؛ بنابراین \mathbf{T} عادی است و \mathbf{T}^{-1} وجود دارد. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که ستونهای ماتریس \mathbf{AT} دقیقاً از بردارهای $\mathbf{Ax}^{(1)}, \dots, \mathbf{Ax}^{(n)}$ تشکیل شده‌اند. چون $\mathbf{Ax}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$ ، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1^{(1)} & \dots & \lambda_n \mathbf{x}_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{x}_n^{(1)} & \dots & \lambda_n \mathbf{x}_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \quad (38)$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (39)$$

يك ماتریس قطری است که عناصر قطری آن همان مقادیر ویژه \mathbf{A} می‌باشند. از رابطه (۳۸)

نتیجه می شود که

$$T^{-1}AT = D \quad (40)$$

بدین سان، اگر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A معلوم باشند، A را می توان با روشی که در رابطه (۴۰) بیان شده است به يك ماتریس قطری تبدیل کرد. این روش به تبدیل تشابهی موسوم است، و رابطه (۴۰) معادل با آن است که بگوییم A با ماتریس قطری D متشابه است. به عبارت دیگر می توان گفت A قطری شدنی است. در بقیه این فصل امکان قطری کردن ماتریسها دارای اهمیت شایانی است.

اگر A هرمیتی باشد، آنگاه تعیین T^{-1} بسیار ساده است. بردارهای ویژه $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ ماتریس A را طوری انتخاب می کنیم که به ازای هر i با $(x^{(i)}, x^{(i)}) = 1$ نرمال شده و متعامد باشند. آنگاه به آسانی می توان تحقیق کرد که $T^{-1} = T^*$ ؛ به عبارت دیگر، وارون T همان ماتریس الحاقی آن (ترانپوزه مزدوج مختلط آن) است.

بالاخره، متذکر می شویم که اگر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس A از n کمتر باشد، آنگاه نمی توان ماتریس T را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $T^{-1}AT = D$. در این حالت، A با يك ماتریس قطری متشابه نیست، به عبارت دیگر قطری شدنی نیست.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۵ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید، یا نشان دهید که دارای جواب نیست.

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$	۰۲	$x_1 - x_3 = 0$	۰۱
$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$		$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$	
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$		$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$	
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$	۰۴	$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$	۰۳
$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$		$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$	
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$		$x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$	
		$x_1 - x_3 = 0$	۰۵
		$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$	
		$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$	

۶. تعیین کنید که آیا مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی اند. اگر وابسته خطی باشند، رابطه خطی بین آنها را بیابید. بردارها را از لحاظ صرف جویی در جا به صورت

سطری نوشته ایم، اما می توان آنها را به صورت بردارهای ستونی در نظر گرفت؛ یعنی، به جای بردارها می توان از ترانهاده آنها استفاده کرد.

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1), \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1), \quad (\text{د})$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1), \quad (\text{ه})$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$$

۷. فرض کنیم که بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ هر يك دارای n مؤلفه باشند و $n < m$. نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ وابسته خطی اند.

۸. تعیین کنید که آیا هر يك از مجموعه بردارهای زیر به ازای $-\infty < t < \infty$ مستقل خطی اند. اگر وابسته خطی باشند، رابطه خطی بین آنها را پیدا کنید. مانند مسئله ۶ برای صرفه جویی در جا بردارها را به صورت سطری نوشته ایم.

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \sin t, \sin t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (\sin t, 2 \sin t). \quad (\text{ب})$$

۹. فرض کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ در هر نقطه از فاصله $0 \leq t \leq 1$ وابسته خطی اند. با وجود این، نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ روی $0 \leq t \leq 1$ مستقل خطی اند.

در هر يك از مسائل ۱۰ تا ۱۹ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس داده شده را بیابید.

$$10. \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 11. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad 12. \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot 15 \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot 14 \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot 13 \\ & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot 17 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 16 \\ & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 19 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot 18 \end{aligned}$$

۲۰. به ازای هر ماتریس داده شده A ، ماتریس T را طوری تعیین کنید که $T^{-1}AT = D$ که در آن D یک ماتریس قطری است.

(الف) A ماتریس مسئله ۱۰ است.

(ب) A ماتریس مسئله ۱۱ است.

(ج) A ماتریس مسئله ۱۴ است.

مسائل ۲۱ تا ۲۵ مربوط به حل $Ax = b$ در حالت $\det A = 0$ است.

۲۱. فرض کنیم که به ازای ماتریس داده شده A ، بردار ناصفر x وجود دارد به طوری که $Ax = 0$. نشان دهید که بردار ناصفر y نیز وجود دارد به طوری که $A^*y = 0$.

۲۲. نشان دهید که به ازای هر بردار x و y داریم $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

۲۳. فرض کنیم که $\det A = 0$ ، اما $Ax = b$ دارای جواب باشد. نشان دهید که $(b, y) = 0$ ، که در آن y هر جواب $A^*y = 0$ است. درستی این گزاره را درباره مجموعه معادلات مسئله ۳ تحقیق کنید.

دانهایی: از نتیجه مسئله ۲۲ استفاده کنید.

۲۴. فرض کنیم که $\det A = 0$ و $x = x^{(0)}$ یک جواب $Ax = b$ است. نشان دهید که اگر ξ یک جواب $A\xi = 0$ و α ثابت دلخواهی باشد، آنگاه $x = x^{(0)} + \alpha\xi$ نیز یک جواب $Ax = b$ است.

*۲۵. فرض کنیم که $\det A = 0$ ، و y یک جواب $A^*y = 0$ باشد. نشان دهید که اگر $(b, y) = 0$ ، آنگاه $Ax = b$ دارای جواب است. توجه شود که این گزاره عکس مسئله ۲۳ است؛ صورت جواب در مسئله ۲۴ داده شده است.

۲۶. ثابت کنید که $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه A است اگر، و فقط اگر، A غیرعادی باشد.

۲۷. ثابت کنید که اگر A هرمیتی باشد، آنگاه $(Ax, y) = (x, Ay)$ ، که در آن

x و y بردارهای دلخواه اند.

۲۸. در این مسئله نشان می‌دهیم که مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی A حقیقی‌اند.

گیریم x يك بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد.

(الف) نشان دهید که $(Ax, x) = (x, Ax)$. راهنمایی: مسئله ۲۷ را ببینید.

(ب) نشان دهید که $\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x)$. راهنمایی: توجه شود که $Ax = \lambda x$.

(ج) نشان دهید که $\lambda = \bar{\lambda}$ ؛ یعنی، مقدار ویژه λ حقیقی است.

۲۹. نشان دهید که اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه يك ماتریس هرمیتی A باشند، و اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، آنگاه بردارهای ویژه متناظر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ متعامدند.

راهنمایی: با استفاده از نتایج مسائل ۲۷ و ۲۸ نشان دهید که $(\lambda_1 - \lambda_2)(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$.

۵.۲ نظریه اساسی دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول

نظریه عمومی دستگاه n معادله خطی مرتبه اول

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \quad (1)$$

دقیقاً همانند نظریه يك معادله خطی مرتبه n ام است. از این رو در این بند با پیروی از همان خطوط کلی بندهای ۲.۳، ۳.۳ و ۲.۵ به بحث می پردازیم. برای آنکه دستگاه (۱) را به بهترین وجه بررسی کنیم، آن را با نماد ماتریسی می نویسیم. یعنی، توابع $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ را به عنوان مؤلفه های بردار $x = \Phi(t)$ در نظر می گیریم؛ به همین نحو $g_1(t), \dots, g_n(t)$ مؤلفه های بردار $g(t)$ ، و $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ عناصر يك ماتریس $n \times n, P(t)$ می باشند. بدین سان معادله (۱) به صورت

$$x' = P(t)x + g(t) \quad (2)$$

درمی آید.

کاربرد بردارها و ماتریسها نه تنها موجب صرفه جویی بزرگی درجا و تسهیل محاسبات می شود، بلکه شباهت بین يك دستگاه معادلات و يك معادله (اسکالر) تنها را نمایان می سازد. بردار $x = \Phi(t)$ را هنگامی جواب معادله (۲) نامند که مؤلفه های آن در دستگاه معادلات (۱) صدق کند. در سراسر این بند فرض بر آن است که P و g روی فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته اند؛ یعنی، هر يك از توابع اسکالر $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ روی فاصله مزبور پیوسته اند. بنا بر قضیه ۲.۷، این شرط برای وجود جواب معادله (۲) روی فاصله $\alpha < t < \beta$ کافی است.

مناسبت است که نخست معادله همگن

$$x' = P(t)x \quad (3)$$

را که از معادله (۲) به ازای $g(t) = 0$ به دست می آید بررسی کنیم. همینکه معادله همگن حل

شد، با استفاده از روش تغییر پارامترها می‌توان معادله ناهمگن (۲) را حل کرد؛ در بند ۱۵۰۷ به این موضوع می‌پردازیم. برای نمایش جوابهای خاص دستگاه (۳) از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \dots \quad (4)$$

توجه شود که $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ نمایشگر مؤلفه i ام از جواب j ام $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ است. نکات اصلی درخصوص ساختمان جوابهای دستگاه (۳) در قضایای ۳۰۷ تا ۶۰۷ بیان شده است. این قضایا کاملاً شبیه قضایای متناظر در بندهای ۲۰۳، ۳۰۳، و ۲۰۵ می‌باشند؛ برخی از برهانها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده ایم.

قضیه ۳۰۷. اگر توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ نیز به ازای ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 يك جواب است.

این همان اصل انطباق است؛ و به آسانی با مشتق‌گیری از $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ و با استفاده از این نکته که $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در معادله (۳) صدق می‌کنند اثبات می‌شود. با استفاده مکرر از قضیه ۳۰۷ به این نتیجه می‌رسیم که اگر $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ جوابهای معادله (۳) باشند، آنگاه

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \quad (5)$$

نیز به ازای ثابتهای دلخواه c_1, \dots, c_k يك جواب است. به عنوان مثال می‌توان تحقیق کرد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (6)$$

در معادله

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (7)$$

صدق می‌کند. طبق قضیه ۳۰۷

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

نیز در معادلهٔ (۷) صدق می‌کند. این جواب دستگاه (۷) را در بند ۲.۷ با روش حذفی به دست آوردیم.

چنانکه در بالا اشاره کردیم، با استفادهٔ مکرر از قضیهٔ ۳.۷ نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی متناهی از جوابهای معادلهٔ (۳) نیز يك جواب است. اکنون این مسئله پیش می‌آید که آیا تمام جوابهای معادلهٔ (۳) را می‌توان بدین طریق به دست آورد. از قیاس با موارد پیش می‌توان حدس زد که برای دستگاه مرتبهٔ n ام (۳) کافی است ترکیبهای خطی n جواب را که درست انتخاب شده باشند تشکیل داد. بنابراین فرض می‌کنیم که $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ جواب دستگاه مرتبهٔ n ام (۳) باشند، و ماتریس $X(t)$ را که ستونهای آن بردارهای $X^{(1)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$ می‌باشند در نظر می‌گیریم؛

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

بردارهای ستونی $X(t)$ ، همان‌طور که در بند ۴.۷ دیدیم، به‌ازای مقدار داده شدهٔ t مستقل خطی‌اند اگر، و فقط اگر، به‌ازای این مقدار t ، $\det X \neq 0$. این درمیان را رونسکین n جواب $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ می‌نامند و با $W[X^{(1)}, \dots, X^{(n)}]$ نشان می‌دهند؛ یعنی

$$W[X^{(1)}, \dots, X^{(n)}] = \det X \quad (10)$$

بنابراین جوابهای $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ در يك نقطهٔ مستقل خطی‌اند اگر، و فقط اگر، در آن $W[X^{(1)}, \dots, X^{(n)}]$ صفر نباشد.

قضیهٔ ۴.۷. اگر توابع برداری $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ به‌ازای هر نقطهٔ فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ جوابهای مستقل خطی دستگاه (۳) باشند، آنگاه هر جواب $X = \Phi(t)$ دستگاه (۳) را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ دقیقاً به يك طریق بیان کرد.

$$\Phi(t) = c_1 X^{(1)}(t) + \dots + c_n X^{(n)}(t) \quad (11)$$

پیش از اثبات قضیهٔ ۴.۷، توجه شود که طبق قضیهٔ ۳.۷ همهٔ عبارت‌های به‌شکل (۱۱) جوابهای دستگاه (۳) می‌باشند، و بنا بر قضیهٔ ۴.۷ همهٔ جوابهای معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت (۱۱) نوشت. اگر ثابتهای c_1, \dots, c_n را دلخواه تلقی کنیم، آنگاه رابطهٔ (۱۱) شامل تمام جوابهای دستگاه (۳) می‌باشد، و معمولاً آن را جواب عمومی می‌نامند. هر مجموعهٔ $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ از جوابهای معادلهٔ (۳) را که در هر نقطهٔ فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ مستقل خطی باشند يك مجموعهٔ اساسی جوابها در این فاصله می‌نامند.

برای اثبات قضیهٔ ۴.۷ نشان می‌دهیم که هر جواب داده شدهٔ معادلهٔ (۳) مانند Φ به‌ازای مقادیر مناسب c_1, \dots, c_n به‌صورت

$$\Phi(t) = c_1 X^{(1)}(t) + \dots + c_n X^{(n)}(t)$$

نوشته می‌شود. فرض کنیم که $t = t_0$ نقطه‌ای در فاصله $\alpha < t < \beta$ باشد و فرض کنیم $\Phi(t_0) = \xi$. اکنون می‌خواهیم بدانیم که آیا جوابی به صورت

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$$

وجود دارد که در همان شرط اولیه $\xi = x(t_0)$ نیز صدق کند. یعنی، می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان مقادیر c_1, \dots, c_n را طوری تعیین کرد که

$$c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_n x^{(n)}(t_0) = \xi \quad (12)$$

یا به صورت اسکالری

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \quad (13)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه معادلات (۱۳) دارای جواب یکتای c_1, \dots, c_n باشند، دقیقاً آن است که درمیان ضرایب که همان رونسکین $[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در نقطه $t = t_0$ است مخالف صفر باشد. فرض آنکه $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در سراسر $\alpha < t < \beta$ مستقل خطی اند متضمن آن است که $[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در $t = t_0$ صفر نیست، و بنا براین جوابی (یکتا) برای معادله (۳) به صورت $x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ وجود دارد که در شرط اولیه (۱۲) نیز صدق می‌کند. بنا بر قسمت یکتایی قضیه ۲.۷ این جواب همان $\Phi(t)$ است، و از این رو $\Phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ همان مطلبی که باید اثبات می‌شد.

قضیه ۵.۷. اگر $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای معادله (۳) در فاصله $\alpha < t < \beta$ باشند، آنگاه در این فاصله $[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ یا متحد با صفر است یا هیچگاه صفر نمی‌شود.

اهمیت قضیه ۵.۷ در این است که ما را از ضرورت بررسی $[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در همه نقاط فاصله مورد توجه معاف می‌کند، و موجب می‌شود که بتوان فقط با محاسبه رونسکین در يك نقطه مناسب در فاصله مزبور، تعیین کرد که آیا $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ يك مجموعه اساسی جواب تشکیل می‌دهند یا نه.

برای اثبات قضیه ۵.۷ نخست نشان می‌دهیم که رونسکین $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در معادله دیفرانسیل (مسئله ۲ را ببینید)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn})W. \quad (14)$$

صدق می‌کند. بنا براین W يك تابع نمایی است، و مدعای قضیه فوراً نتیجه می‌شود. عبارت

W که با حل معادله (۱۴) بدست می آید به فرمول آبل موسوم است؛ به شباهت این معادله با معادله (۱۳) بند ۲.۳ توجه شود.

طریق دیگر، برای اثبات قضیه ۵.۷ این است که نشان دهیم اگر n جواب $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ معادله (۳) در يك نقطه $t = t_0$ وابسته خطی باشند، آنگاه باید در هر نقطه $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی باشند (مسئله ۸ را ببینید). در نتیجه، اگر $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در يك نقطه مستقل خطی باشند باید در هر نقطه فاصله مزبور مستقل خطی باشند. قضیه زیر مبین آن است که همواره دستگاه (۳) حداقل دارای يك مجموعه اساسی جواب است.

قضیه ۶.۷. فرض کنیم

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و علاوه بر این گیریم $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند که به ترتیب در شرایط اولیه

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \dots, x^{(n)}(t_0) = e^{(n)} \quad (15)$$

صدق می کنند، t_0 نقطه ای در $\alpha < t < \beta$ است. آنگاه $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ يك مجموعه اساسی جواب دستگاه (۳) است.

برای اثبات این قضیه، توجه شود که قضیه ۲.۷ وجود و یکتایی جوابهای $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ را که در قضیه ۶.۷ آمده است تأمین می کند. به آسانی می توان دید که رونسکین این جوابها برای $t = t_0$ برابر يك است؛ بنابراین $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ يك مجموعه اساسی جواب است.

همینکه يك مجموعه اساسی جواب به دست آمد مجموعه های دیگر را می توان با تشکیل ترکیبهای خطی (مستقل) مجموعه اول ایجاد کرد. از لحاظ نظری ساده ترین مجموعه همان است که قضیه ۶.۷ به دست می دهد.

خلاصه آنکه، هر مجموعه n جواب مستقل خطی دستگاه (۳) تشکیل يك مجموعه اساسی جواب می دهد. تحت شرایطی که در این بند بیان شد، این قبیل مجموعه های اساسی همواره وجود دارند، و هر جواب دستگاه (۳) را می توان به صورت ترکیبی خطی از هر مجموعه اساسی جواب نمایش داد.

مسائل

۱. با استفاده از جبر ماتریسی، درستی گزاره ذیل قضیه ۳.۷ را به ازای مقدار صریح دلخواه k اثبات کنید.

۲. در این مسئله به طرح اثباتی برای قضیه ۵.۷ در حالت $n = 2$ می پردازیم. فرض کنیم $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ به ازای $\alpha < t < \beta$ جوابهای معادله (۳) و W رونسکین $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ باشد.

(الف) نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(ب) با استفاده از معادله (۳)، نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

(ج) $W(t)$ را با حل معادله دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (ب) بیابید. با استفاده از این عبارت نتیجه مذکور در قضیه ۵.۷ را به دست آورید.
 * (د) این روش را طوری تعمیم دهید که قضیه ۵.۷ را به ازای مقدار دلخواه n اثبات کند.

۳. نشان دهید که رونسکین دو مجموعه اساسی جواب دستگاه (۳) حداکثر می توانند در یک ضرب ثابت تفاوت داشته باشند.
 راهنمایی: از معادله (۱۴) استفاده کنید.

۴. اگر $x_1 = y$ و $x_2 = y'$ ، آنگاه معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (\text{يك})$$

با دستگاه

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{aligned} \quad (\text{دو})$$

متناظر است. نشان دهید که اگر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ يك مجموعه اساسی جواب معادلات (دو)، و $y^{(1)}$ و $y^{(2)}$ يك مجموعه اساسی جواب معادله (يك) باشند، آنگاه $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[x^{(1)}, x^{(2)}]$ که در آن c مقدار ثابت ناصفر است.

راهنمایی: $y^{(1)}(t)$ و $y^{(2)}(t)$ باید ترکیبهای خطی $x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$ باشند.

۵. نشان دهید که جواب عمومی $x' = P(t)x + g(t)$ برابر مجموع يك جواب

خصوصی $\mathbf{x}^{(p)}$ این معادله و جواب عمومی $\mathbf{x}^{(c)}$ مربوط به معادله همگن متناظر است.

۶. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم.

(الف) رونسکین $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ را حساب کنید.

(ب) $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در چه فاصله هایی مستقل خطی اند؟

(ج) درباره ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل همگنی که $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در آن

صادق می کنند چه نتیجه ای می توان گرفت؟

(د) این دستگاه معادلات را بیابید و نتایج قسمت (ب) را تحقیق کنید.

۷. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید، و به همان

سؤالات مسئله ۶ پاسخ دهید.

دو مسئله زیر روش دیگری برای اثبات قضیه ۴.۷ به دست می دهند.

۸. فرض کنیم که $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ جوابهای $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ روی فاصله $\alpha < t < \beta$ باشند. فرض کنیم که \mathbf{P} پیوسته است و گیریم t_0 نقطه دلخواهی در فاصله مزبور باشد. نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ به ازای $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی اند اگر (و فقط اگر) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ وابسته خطی باشند. بد عبارت دیگر، $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ روی فاصله (α, β) وابسته خطی اند اگر در نقطه ای از این فاصله وابسته خطی باشند. راهنمایی: می توان ثابتهای c_1, \dots, c_m را طوری تعیین کرد که $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + c_m \mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$ قرار دهید

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_m \mathbf{x}^{(m)}(t)$$

و با استفاده از قضیه یکتایی نشان دهید که به ازای هر t در $\alpha < t < \beta$ داریم $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$.

۹. فرض کنیم $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ جوابهای مستقل خطی معادله $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ باشند، که در آن \mathbf{P} روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته است.

(الف) نشان دهید که هر جواب $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ را می توان با انتخاب مناسب ثابتهای

c_1, \dots, c_n به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$$

راهنمایی: از نتیجه مسئله ۷ بند ۴.۷، مسئله ۸ فوق استفاده کنید.

(ب) نشان دهید که عبارت متناظر با جواب $\mathbf{z}(t)$ در قسمت (الف) یکتاست؛

یعنی، اگر

$$\mathbf{z}(t) = k_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + k_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$$

آنگاه $k_1 = c_1, \dots, k_n = c_n$.

داهنمایی: نشان دهید که به ازای هر t در $\alpha < t < \beta$ داریم

$$(k_1 - c_1)x^{(1)}(t) + \dots + (k_n - c_n)x^{(n)}(t) = 0$$

و از استقلال خطی $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ استفاده کنید.

۶.۷ دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

در این بند مقدمتاً به بررسی طرز ساختن جواب عمومی دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت یعنی، دستگاهی به صورت

$$x' = Ax \quad (1)$$

را که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است می پردازیم. همانند روش حل معادلات خطی مرتبه دوم در بند ۵.۳، برای معادله (۱) جوابهایی به صورت

$$x = \xi e^{rt} \quad (2)$$

در نظر می گیریم که در آن r و بردار ثابت ξ باید تعیین شوند. چون x را از رابطه (۲) در دستگاه (۱) قرار دهیم به دست می آید

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}.$$

با حذف سازه اسکالری ناصفر e^{rt} داریم $A\xi = r\xi$ یا

$$(A - rI)\xi = 0, \quad (3)$$

که در آن I ماتریس واحد $n \times n$ است. بدین سان، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) باید دستگاه معادلات جبری (۳) را حل کرد. این دقیقاً همان مسئله تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A است. بنابراین بردار x که بارابله (۲) داده شده است، هنگامی جواب معادله (۱) است که r مقدار ویژه ماتریس ضرایب A و ξ بردار ویژه متناظر با آن باشد.

مثال ۱. مطلوب است جواب عمومی دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x. \quad (4)$$

فرض کنیم که $x = \xi e^{rt}$ ، با قرار دادن x در معادله (۴)، به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت ۳۸۷

می‌رسیم. دستگاه معادلات (۵) دارای جواب ناصفر است اگر، فقط اگر، دترمینان ضرایب صفر شود. بدین‌سان مقادیر مطلوب r از معادله

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 \\ = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad (6)$$

به دست می‌آید. معادله (۶) دارای ریشه‌های $r_1 = 3$ و $r_2 = -1$ است که همان مقادیر ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۴) می‌باشند. اگر $r = 3$. آنگاه دستگاه (۵) به یک معادله

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0 \quad (7)$$

تبدیل می‌شود. بدین‌سان $\xi_2 = 2\xi_1$ و بردار ویژه متناظر با $r_1 = 3$ را می‌توان به صورت

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

اختیار کرد. به همین ترتیب، متناظر با $r_2 = -1$ داریم $\xi_2 = -2\xi_1$ ، بنابراین بردار ویژه عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

متناظر با جوابهای معادله دیفرانسیل عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (10)$$

رونسکین این جوابها عبارت است از

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t} \quad (11)$$

که هیچگاه صفر نمی‌شود. بنابراین جوابهای $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند، و جواب عمومی دستگاه (۴) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (12)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه اند. این با جوابی که در بند ۲.۷ باروش حذف یافتیم یکی است.

در مورد دستگاه عمومی (۱) نیز همانند مثال بالا عمل می‌کنیم. برای تعیین جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A را از دستگاه جبری متناظر (۳) به دست آورد. مقادیر ویژه r_1, \dots, r_n (که لزومی ندارد همه آنها متفاوت باشند) ریشه‌های معادله چند جمله‌ای

$$\det(A - rI) = 0 \quad (13)$$

هستند. ماهیت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر، ماهیت جواب عمومی دستگاه (۱) را تعیین می‌کند.

دستگاههای هرمیتی. ساده‌ترین حالت آن است که A يك ماتریس هرمیتی باشد. چنانکه در بند ۴.۷ بیان شد، مقادیر ویژه r_1, \dots, r_n در این حالت همه حقیقی اند. علاوه بر این، حتی هنگامی که برخی از مقادیر ویژه مکرر باشند، همواره يك مجموعه متشکل از n بردار ویژه مستقل خطی $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ وجود دارد. بنابراین جوابهای متناظر دستگاه دیفرانسیلی (۱) عبارتند از

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \dots, x^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (14)$$

برای اثبات آنکه این جوابها تشکیل يك مجموعه اساسی می‌دهند، به محاسبه رونسکین می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (15) \end{aligned}$$

نخست دیده می‌شود که تابع نمایی مزبور هیچگاه صفر نیست. دیگر آنکه، چون بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ مستقل خطی اند، دترمینان موجود در جمله آخر معادله (۱۵) نیز هیچگاه صفر نیست. در نتیجه رونسکین $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t)$ هیچگاه صفر نیست، و بنا بر این $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ تشکیل يك مجموعه اساسی جواب می‌دهند. بدین سان هنگامی که A ماتریس هرمیتی باشد، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (16)$$

طبقه مهمی از ماتریسهای هرمیتی را ماتریسهای متقارن حقیقی تشکیل می دهند. اگر A متقارن و حقیقی باشد، آنگاه بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ و همچنین مقادیر ویژه r_1, \dots, r_n همه حقیقی اند. بنابراین جوابهایی که با رابطه (۱۴) داده شده اند توابعی با مقادیر حقیقی اند. اما، اگر ماتریس هرمیتی A حقیقی نباشد، آنگاه عموماً بردارهای ویژه دارای قسمت های موهومی ناصفرند، و جوابهای (۱۴) توابعی با مقادیر مختلط اند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} x. \quad (17)$$

ماتریس ضرایب در معادله (۱۷) متقارن و حقیقی است، بنابراین می توان به همان روشی که در بالا بیان شد عمل کرد. فرض $x = \xi e^{rt}$ به دستگاه جبری زیر می انجامد

$$\begin{pmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

مقادیر ویژه در معادله

$$\begin{vmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{vmatrix} = (1-r)(-1-r) - 3 \\ = r^2 - 4 = 0 \quad (19)$$

صدق می کنند. بدین سان $r_1 = 2$ و $r_2 = -2$. به ازای $r = 2$ ، معادله (۱۸) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

بنابراین $\xi_1 = \sqrt{3}\xi_2$ و $\xi^{(1)}$ بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه $r_1 = 2$ را می توان به صورت

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

اختیار کرد. به همین طریق، متناظر به مقدار ویژه $r_2 = -2$ داریم $\xi_2 = -\sqrt{3}\xi_1$ ، بنابراین بردار ویژه عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

بدین سان جواب عمومی معادله (۱۷) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-2t} \quad (23)$$

مثال ۳. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (24)$$

در اینجا نیز دیده می شود که ماتریس ضرایب متقارن و حقیقی است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را در مثال ۴ بند ۴.۷ یافتیم،

$$r_1 = 2; \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

بنابراین يك مجموعه اساسی جواب معادله (۲۴) عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (27)$$

و جواب عمومی چنین است

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (28)$$

این مثال، مبین این نکته است که حتی هنگامی که یکی از مقادیر ویژه ($r = -1$) مضاعف

باشد، بازهم امکان دارد بتوان دو بردار ویژه مستقل خطی $\xi^{(2)}$ و $\xi^{(3)}$ به دست آورد و در نتیجه جواب عمومی (۲۸) را ساخت.

دستگاههای ناهرمیتی. اگر ماتریس ضرایب A در دستگاه (۱)

$$x' = Ax$$

هرمیتی نباشد، آنگاه تعیین جواب پیچیده ترمی شود. نخست فرض کنیم که A حقیقی است. در این صورت برای مقادیر ویژه A سه حالت وجود دارد:

۱. همه مقادیر ویژه حقیقی و متمایزند.
۲. برخی از مقادیر ویژه به صورت زوجهای مختلط مزدوج اند.
۳. برخی از مقادیر ویژه مکررند.

در حالت اول به اشکالی بر نمی خوریم. متناظر به هر مقدار ویژه تنها يك بردار ویژه حقیقی مستقل خطی وجود دارد، و در نتیجه n جواب مستقل خطی به صورت (۱۴) به دست می آید. بنابراین جواب عمومی بازهم به وسیله معادله (۱۶) داده می شود که در آن r_1, \dots, r_n همه متمایز فرض شده اند. مثال ۱ بالا این حالت را توضیح می دهد.

اگر برخی از مقادیر ویژه به صورت زوجهای مختلط مزدوج باشند، آنگاه بازهم n جواب مستقل خطی به صورت (۱۴) وجود دارد، به شرط آنکه همه مقادیر ویژه متمایز باشند. البته، جوابهای حاصل از مقادیر ویژه مختلط توابعی با مقدار مختلط اند. اما، همانند بند ۱۰۵.۳، می توان يك مجموعه کامل جواب با مقدار حقیقی به دست آورد. این موضوع را در بند ۷۰۷ بررسی می کنیم.

هنگامی که مقدار ویژه ای مکرر باشد با دشواریهای مهمتری مواجه می شویم. در این حالت امکان دارد تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر، کوچکتر از مرتبه تکرار مقدار ویژه مزبور باشد، مانند مثال ۳ بند ۴۰۷. در این حالت تعداد جوابهای مستقل خطی به صورت e^{rt} از n کوچکتر است و برای ساختن يك مجموعه اساسی جواب لازم می آید که جوابهایی به صورت دیگر جستجو کنیم. این وضعیت تا اندازه ای مشابه حالتی از معادله خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت است که در آن بدای يك ریشه مکرر معادله مشخصه جوابهایی به صورت $e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \dots$ به دست آمد. حالت مقادیر ویژه مکرر را در بند ۸۰۷ بررسی می کنیم.

بالاخره، اگر A مختلط باشد، اما هرمیتی نباشد، در این صورت لزومی ندارد که مقادیر ویژه مختلط به صورت زوجهای مزدوج باشند، و بردارهای ویژه نیز معمولاً مختلط اند حتی اگر مقدار ویژه متناظر حقیقی باشد. هنگامی که مقادیر ویژه متمایز باشند جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) بازهم به صورت (۱۴) خواهند بود، اما، عموماً همه جوابها توابعی با مقدار مختلط اند.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۱۰ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .2 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .4 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .6 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .5$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .8 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .7$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .10 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .9$$

در هر يك از مسائل ۱۱ تا ۱۴ مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .11$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .12$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .13$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .14$$

۱۵. دستگاه $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ نظیر معادلهٔ اوایل مرتبه دوم است (بند ۴.۴). فرض کنیم که

$\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ که در آن ξ يك بردار ثابت است، نشان دهید که ξ و r باید در $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$

صدق کنند؛ و نیز نشان دهید که برای پیدا کردن جوابهای ناصفر معادلهٔ دیفرانسیل مزبور باید r ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ $\det(A - rI) = 0$ باشد.

باتوجه به مسئلهٔ ۱۵، دستگاه معادلات هریک از مسائل ۱۶ تا ۱۹ را حل کنید. فرض کنید که $t > 0$.

$$tX' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \quad .17 \quad tX' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \quad .16$$

$$tX' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X \quad .19 \quad tX' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} X \quad .18$$

۲۰. دستگاه مرتبهٔ دوم $X' = AX$ را در نظر می گیریم. با فرض $r_1 \neq r_2$ ، جواب عمومی عبارت است از

$$X = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

به شرط آنکه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مستقل خطی باشند. در این مسئله می خواهیم استقلال خطی $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ را با اثبات آنکه فرض بستگی خطی آنها به تناقض می انجامد نشان دهیم.

(الف) توجه شود که $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ به ترتیب در معادلات ماتریسی $(A - r_1 I)\xi^{(1)} = 0$ و $(A - r_2 I)\xi^{(2)} = 0$ صدق می کنند.

(ب) نشان دهید که $(A - r_1 I)\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$

(ج) فرض کنیم که $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ وابسته خطی اند. آنگاه $c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} = 0$ حداقل یکی از مقادیر c_1 و c_2 صفر نیست؛ فرض کنیم $c_1 \neq 0$. نشان دهید که

$$(A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = 0.$$

و نیز نشان دهید که

$$(A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\xi^{(1)}$$

بنابراین $c_1 = 0$ ، که يك تناقض است. در نتیجه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مستقل خطی اند.

(د) استدلال قسمت (ج) را برای اثبات حالتی که c_1 برابر صفر و c_2 مخالف صفر است تغییر دهید.

(ه) استدلال مشابهی برای حالت $n = 3$ طرح کنید؛ توجه شود که این روش را می توان به مقدار دلخواه n تعمیم داد.

۲۱. معادلهٔ

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{يك})$$

را که در آن a ، b و c ثابت اند در نظر می گیریم. در فصل ۳ نشان داده شد که جواب عمومی بستگی به ریشه های معادلهٔ مشخصهٔ

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{دو})$$

دارد.

(الف) معادله (يك) را با قرار دادن $x_1 = y$ ، $x_2 = y'$ به يك دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل كنید. دستگاه معادلات $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را كه در آن $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ صدق می كند، بیابید.

(ب) معادله ای بیابید كه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب \mathbf{A} در قسمت (الف) را به دست دهد. توجه شود كه این معادله درست همان معادله مشخصه (دو) متناظر به معادله (يك) است. ۲۲. در این مسئله طرز استفاده از روش کاهش مرتبه را برای دستگاهیای معادلات نشان می دهیم. این روش در مورد دستگاهیایی كه دارای يك مجموعه كامل جواب به صورت $e^{\lambda t}$ نیستند به كار می رود. دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{يك})$$

را در نظر می گیریم.

(الف) تحقیق كنید كه $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ در معادله دیفرانسیل داده شده صدق می كند.

(ب) متغیر وابسته جدیدی با تبدیل

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (\text{دو})$$

در نظر می گیریم. توجه شود كه این تبدیل از ماتریس واحد با قرار دادن جواب معلوم به جای ستون دوم آن به دست آمده است. با جایگذاری \mathbf{x} در معادله (يك) نشان دهید كه \mathbf{y} در دستگاه معادلات زیر صدق می كند

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (\text{سه})$$

(ج) معادله (سه) را حل كنید و نشان دهید كه

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{چهار})$$

كه در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه اند.

(د) با استفاده از معادله (دو)، نشان دهید كه

$$x = -\frac{c_1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (\text{بج})$$

جمله اول يك جواب مستقل دیگر معادله (يك) است. این همان روش کاهش مرتبه است که درباره دستگاه معادلات مرتبه دوم اعمال می شود.

در مسائل ۲۳ و ۲۴ با استفاده از روش کاهش مرتبه (مسئله ۲۲) دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad .24 \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x \quad .23$$

مدارهای الکتریکی . مسائل ۲۵ و ۲۶ درباره مدار الکتریکی مذکور در مسئله ۹ بند ۱۰۷ می باشند که برای آن دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به دست آمد

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{يك})$$

۲۵. (الف) مطلوب است تعیین جواب عمومی معادله (يك) در صورتی که اهم $R_1 = 1$ اهم $R_2 = 3/5$ ، هانری $L = 2$ و فاراد $C = 2/3$.
 (ب) نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، مقادیر اولیه $I(0)$ و $V(0)$ هر چه باشند $I(t) \rightarrow 0$ و $V(t) \rightarrow 0$.

۲۶. دستگاه معادلات دیفرانسیل (يك) بالا را در نظر می گیریم.
 (الف) مطلوب است تعیین شرطی که R_1 ، R_2 ، C و L باید در آن صدق کنند تا مقادیر ویژه ماتریس ضرایب حقیقی و متمایز باشند.
 (ب) اگر شرطی که در قسمت (الف) به دست آمد برقرار باشد، نشان دهید که هر دو مقدار ویژه منفی اند. آنگاه نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، شرایط اولیه هر چه باشند $I(t) \rightarrow 0$ و $V(t) \rightarrow 0$.
 * (ج). اگر شرطی که در قسمت (الف) به دست آمد برقرار نباشد، آنگاه مقادیر ویژه یا مختلط اند یا مکرر. آیا فکر می کنید که در این حالتها نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ خواهیم داشت $I(t) \rightarrow 0$ و $V(t) \rightarrow 0$ ؟
 راهنمایی: یکی از راه حلها برای قسمت (ج) آن است که دستگاه (يك) را به يك معادله مرتبه دوم تبدیل کنیم. در بندهای ۷.۷ و ۸.۷ نیز به بحث درباره مقادیر ویژه مختلط و مکرر می پردازیم.

۷.۷ مقادیر ویژه مختلط

در این بند نیز به بررسی دستگاه n معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

می‌پردازیم و فرض می‌کنیم که در آن ماتریس ضرایب \mathbf{A} حقیقی باشد. اگر بخواهیم جوابهایی به صورت $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ پیدا کنیم، آنگاه همانند بند ۶.۷ نتیجه می‌شود که r باید یک مقدار ویژه و $\boldsymbol{\xi}$ بردار ویژه متناظر باشد. توجه شود که مقادیر ویژه r_1, \dots, r_n ماتریس \mathbf{A} ریشه‌های معادله

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \quad (2)$$

هستند و بردارهای ویژه متناظر در

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (3)$$

صدق می‌کنند.

اگر \mathbf{A} حقیقی باشد، آنگاه ضرایب معادله چند جمله‌ای (۲) حقیقی‌اند و مقادیر ویژه مختلط باید به صورت زوج‌های مزدوج باشند. مثلاً، اگر $r_1 = \lambda + i\mu$ ، که در آن λ و μ حقیقی‌اند، یک مقدار ویژه \mathbf{A} باشد، آنگاه $r_2 = \lambda - i\mu$ نیز یک مقدار ویژه است. علاوه بر این بردارهای ویژه $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ نیز مختلط مزدوج‌اند. برای اثبات این نکته، فرض کنیم که r_1 و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ در

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = 0 \quad (4)$$

صدق کنند. چون از این معادله مزدوج مختلط بگیریم، با توجه به آنکه \mathbf{A} و \mathbf{I} با مقادیر حقیقی‌اند، خواهیم داشت

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = 0 \quad (5)$$

که در آن r_1 و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ به ترتیب مزدوجهای مختلط r_1 و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ ‌اند. به عبارت دیگر، $r_2 = \bar{r}_1$ نیز یک مقدار ویژه، و $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$ بردار ویژه متناظر با آن است. جوابهای

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t} \quad (6)$$

که بدین‌سان برای معادله دیفرانسیل (۱) به دست می‌آیند نیز مزدوج یکدیگرند. بنابراین، با تعمیم قضیه ۹.۳ در مورد دستگاهها (که به آسانی انجام می‌گیرد) می‌توان دوجواب با مقدار حقیقی برای معادله (۱) متناظر با مقادیر ویژه r_1 و r_2 با محاسبه قسمت‌های حقیقی و موهومی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ یا $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ که با روابط (۶) داده شده‌اند به دست آورد.

اگر قرار دهیم $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} حقیقی‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \sin \mu t) \end{aligned} \quad (7)$$

با جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ بدست می آید

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (۸)$$

اگر قرار دهیم $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ ، آنگاه بردارهای

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \quad (۹ \text{ الف})$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (۹ \text{ ب})$$

جوابهای با مقدار حقیقی معادله (۱) خواهند بود. می توان نشان داد که \mathbf{u} و \mathbf{v} جوابهای مستقل خطی اند (مسئله ۱۳ را ببینید).

به عنوان مثال، فرض کنیم که $r_1 = \lambda + i\mu$ ، $r_2 = \lambda - i\mu$ ، و ریشه های دیگر، r_3, \dots, r_n همه حقیقی و متمایزند. اگر بردارهای ویژه مختلط را به صورت

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}^{(3)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$$

در نظر بگیریم، آنگاه جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \boldsymbol{\xi}^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t} \quad (۱۰)$$

که در آن $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ با روابط (۹) داده شده اند. باید توجه داشت که این تحلیل تنها هنگامی که ماتریس ضرایب \mathbf{A} در معادله (۱) حقیقی باشد قابل اجراست، زیرا تنها در این حالت مقادیر ویژه مختلط و بردارهای ویژه مختلط به صورت زوج می باشند.

مثال ۱. مطلوب است تعیین يك مجموعه اساسی جوابهای با مقدار حقیقی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (۱۱)$$

با فرض

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt} \quad (۱۲)$$

به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۳)$$

می رسم که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه \mathbf{A} را معین می کند. معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \quad (۱۴)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از $r_1 = -1 + i$ و $r_2 = -1 - i$. از معادله (۱۳) با محاسبه ساده ای بردارهای ویژه متناظر بدست می آیند

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \quad (15)$$

بنابراین يك مجموعه اساسی جواب دستگاه (۱۱) چنین است

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t} \quad (16)$$

برای تعیین يك مجموعه جواب با مقدار حقیقی، باید قسمتهای حقیقی و موهومی $\mathbf{x}^{(1)}$ یا $\mathbf{x}^{(2)}$ را به دست آوریم. در واقع

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} \quad (18)$$

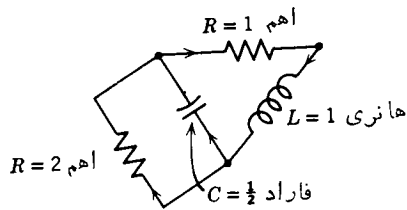
يك مجموعه جواب با مقدار حقیقی معادله (۱۱) می باشند. برای تحقیق آنکه $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ مستقل خطی اند به محاسبه رونسکین آنها می پردازیم:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ e^{-t}(2 \cos t + \sin t) & e^{-t}(-\cos t + 2 \sin t) \end{vmatrix} \\ &= e^{-2t} (-\cos^2 t + 2 \sin t \cos t - 2 \sin t \cos t - \sin^2 t) \\ &= -e^{-2t}. \end{aligned}$$

چون این رونسکین هیچگاه صفر نیست، نتیجه می شود که $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ يك مجموعه اساسی جواب (با مقدار حقیقی) برای دستگاه (۱۱) تشکیل می دهند.

مثال ۲. مدار الکتریکی که در شکل ۶.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (19)$$



شکل ۶.۷

بیان می‌شود که در آن I جریان در خود القا، و V افت ولتاژ بین دو سر خازن است. این معادلات در مسئله ۸ بند ۱۰.۷ به دست آمد. فرض کنیم که در زمان $t=0$ جریان برابر ۱ آمپر و ولتاژ برابر ۲ ولت باشد. $I(t)$ و $V(t)$ را بر حسب زمان بیابید. اگر فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \xi e^{rt} \quad (20)$$

معادلات جبری زیر به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

مقادیر ویژه از شرط زیر تعیین می‌شوند

$$\begin{vmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 3 = 0 \quad (22)$$

بدین سان $r_1 = -1 + \sqrt{2}i$ و $r_2 = -1 - \sqrt{2}i$ بردارهای ویژه متناظر از معادله (۲۱) به دست می‌آیند

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} \quad (23)$$

بدین سان بردارهای ویژه به صورت $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ هستند، که در آن

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

اگر همانند مثال ۱ عمل کنیم، یا از فرمولهای (۹) استفاده شود، جوابهای با مقدار حقیقی

مستقل خطی زیر برای دستگاه (۱۹) عاید می‌شود:

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin \sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix}. \quad (25)$$

بنابراین جواب عمومی دستگاه (۱۹) عبارت است از

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin \sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix}. \quad (26)$$

با اعمال شرایط اولیه

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

خواهیم داشت

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

بدین‌سان $c_1 = 1$ و $c_2 = -\sqrt{2}$. با منظور کردن این مقادیر به‌جای c_1 و c_2 در رابطه (۲۶) جواب مسئله مزبور معین می‌شود.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۶، جواب عمومی دستگاه معادلات را بر حسب توابعی با مقدار حقیقی بیان کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .2 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .4 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .6 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .5$$

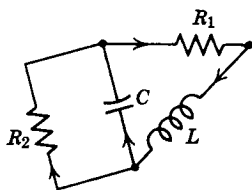
درهر يك از مسائل ۷ و ۸ جواب مسئله مقدار اولیه را بیابید.

$$7. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

درهر يك از مسائل ۹ و ۱۰ دستگاه معادلات را با روش مسئله ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید.
فرض کنید که $t \geq 0$.

$$9. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad 10. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$



شکل ۷.۷

۱۱. مدار الکتریکی را که در شکل ۷.۷ نشان داده شده در نظر می گیریم. فرض کنیم

که اهم $R_1 = R_2 = 4$ ، فاراد $C = \frac{1}{4}$ ، و هنری $L = 8$.

(الف) نشان دهید که این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بیان می شود

$$(يك) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

که در آن I جریان در خود القا، و V افت ولتاژ بین دوسر خازن است.

دانهمایی: مسئله ۷ بند ۱۰.۷ را ببینید.

(ب) جواب عمومی معادلات (يك) را بر حسب توابعی با مقدار حقیقی بیابید.

(ج) مطلوب است تعیین $I(t)$ و $V(t)$ اگر $I(0) = 2$ آمپر و $V(0) = 3$ ولت.

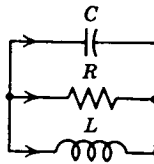
(د) مقادیر حدی $I(t)$ و $V(t)$ را وقتی $t \rightarrow \infty$ تعیین کنید. آیا این مقادیر حدی

به شرط اولیه بستگی دارند؟

۱۲. مدار الکتریکی که در شکل ۸.۷ نمایش داده شده است با دستگاه معادلات

دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{یک})$$



شکل ۸.۷

بیان می‌شود که در آن I جریان در خود القا و V افت ولتاژ بین دوسر خازن است. این معادلات دیفرانسیل را در مسئله ۷ بند ۱.۷ به دست آوردیم.

(الف) نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایزند اگر $L > 4R^2C$ و مزدوج مختلط‌اند اگر $L < 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $R=1$ ، فاراد $C=\frac{1}{4}$ و هنری $L=1$. جواب عمومی

دستگاه (یک) را در این حالت بیابید.

(ج) مطلوب است تعیین $I(t)$ و $V(t)$ اگر $I(0)=2$ آمپر و $V(0)=1$ ولت.

(د) برای مدار قسمت (ب) مقادیر حدی $I(t)$ و $V(t)$ را وقتی $t \rightarrow \infty$ بیابید.

آیا این مقادیر حدی به شرایط اولیه بستگی دارند؟

۱۳. در این مسئله طرز اثبات استقلال خطی $u(t)$ و $v(t)$ را که در فرمول‌های (۹)

داده شده‌اند نشان می‌دهیم.

(الف) فرض کنیم $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$ یک زوج مقدار ویژه مزدوج A ،

ماتریس ضرایب معادله (۱) باشند؛ و $\xi^{(1)} = a + ib$ و $\bar{\xi}^{(1)} = a - ib$ بردارهای ویژه

متناظر را نشان دهند. یادآور می‌شویم که در بند ۴.۷ بیان شد که اگر $r_1 \neq \bar{r}_2$ ، آنگاه $\xi^{(1)}$

و $\bar{\xi}^{(1)}$ مستقل خطی‌اند. بامحاسبه رونسکین $\xi^{(1)}$ و $\bar{\xi}^{(1)}$ نشان دهید که a و b نیز مستقل خطی‌اند.

(ب) بامحاسبه رونسکین $u(t)$ و $v(t)$ ، وبا استفاده از این نکته که a و b مستقل

خطی‌اند نشان دهید که $u(t)$ و $v(t)$ مستقل خطی‌اند.

۸.۷ مقادیر ویژه مکرر

بحث در باره دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

را با بررسی حالتی که در آن ماتریس \mathbf{A} دارای مقدار ویژه مکرر باشد به پایان می‌بریم. این بحث نیز هنگامی که \mathbf{A} حقیقی یا مختلط باشد معتبر است. اگر $r = \rho$ یک ریشه مکرر مرتبه k ام معادله دترمینانی

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \quad (2)$$

باشد، آنگاه ρ را یک مقدار ویژه مرتبه k ماتریس \mathbf{A} می‌نامند. در اینجا دو حالت پیش می‌آید: یا به ازای ρ ، k بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد یا تعداد این بردارهای ویژه از k کمتر است. این حالتها را در مثالهای ۳ و ۴ بند ۴.۷ دیدیم، در مثال ۴ متناظر به یک مقدار ویژه مضاعف دوبردار ویژه مستقل خطی وجود داشت، اما در مثال ۳ به مقدار ویژه مضاعف تنها یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر قرار گرفت.

در حالت اول، اگر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر به مقدار ویژه ρ با مرتبه تکرار k را با $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ نشان دهیم، آنگاه $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \xi^{(k)} e^{\rho t}$ جواب مستقل خطی معادله (۱) خواهند بود. بدین سان در این حالت مکرر بودن مقدار ویژه $r = \rho$ تأثیری ندارد و همچنان یک مجموعه اساسی جواب برای معادله (۱) به صورت $\xi e^{\rho t}$ وجود دارد. این حالت همواره هنگامی که ماتریس ضرایب \mathbf{A} هرمیتی باشد پیش می‌آید.

اما، اگر ماتریس ضرایب هرمیتی نباشد، آنگاه امکان دارد تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر به ρ از k کمتر باشد، و در این صورت تعداد جوابهای معادله (۱) به شکل $\xi e^{\rho t}$ که به مقدار ویژه مزبور متناظرند از k کمتر است. بنابراین، برای ساختن جواب عمومی معادله (۱) لازم است جوابهای دیگری به شکل متفاوتی پیدا کرد. بادر نظر گرفتن نتایج پیش درمورد معادلات خطی مرتبه n ام، طبیعی است جوابهای دیگری که شامل حاصل ضرب توابع چند جمله‌ای و نمایی باشند جستجو کنیم. نخست به ذکر مثالی می‌پردازیم.

مثال . مطلوب است تعیین یک مجموعه اساسی جواب دستگاه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

بافرض $\mathbf{x} = \xi e^{\rho t}$ از معادله (۳) به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

در نتیجه مقادیر ویژه \mathbf{A} عبارتند از $r_1 = r_2 = 2$. به ازای این مقدار r ، از معادلات (۴) نتیجه می‌شود که $\xi_1 + \xi_2 = 0$. بنابراین متناظر با مقدار ویژه مضاعف مزبور تنها یک بردار

ویژه ξ وجود دارد که با $\xi^T = (1, -1)$ معین می‌گردد. بدین‌سان يك جواب دستگاه (۳) عبارت است از

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad (5)$$

و جواب دیگری به‌صورت $x = \xi e^{2t}$ وجود ندارد. طبیعی است جواب دوم دستگاه (۳) را به‌صورت

$$x = \eta t e^{2t} \quad (6)$$

در نظر بگیریم، که در آن η يك بردار ثابت است. با گذاشتن x در معادله (۳) داریم

$$2\eta t e^{2t} + \eta e^{2t} - A\eta t e^{2t} = 0. \quad (7)$$

برای آنکه رابطه (۷) به‌ازای همه مقادیر t برقرار باشد لازم است که ضرایب $t e^{2t}$ و e^{2t} صفر باشند. از جمله e^{2t} نتیجه می‌شود که

$$\eta = 0. \quad (8)$$

بنا بر این دستگاه (۳) دارای جواب مخالف صفری به‌صورت (۶) نیست. وجود جمله‌های $t e^{2t}$ و e^{2t} در رابطه (۷) نشان می‌دهد که جواب دوم علاوه بر $\eta t e^{2t}$ باید شامل جمله‌ای به‌صورت ζe^{2t} باشد؛ به‌عبارت دیگر لازم است که فرض کنیم

$$x = \eta t e^{2t} + \zeta e^{2t} \quad (9)$$

که در آن η و ζ بردارهای ثابت‌اند. با قراردادن این عبارت به‌جای x در معادله (۳) داریم

$$2\eta t e^{2t} + (\eta + 2\zeta) e^{2t} = A(\eta t e^{2t} + \zeta e^{2t}) \quad (10)$$

با برابر قراردادن ضرایب $t e^{2t}$ و e^{2t} در دو طرف رابطه (۱۰) برای تعیین η و ζ شرایط زیر عاید می‌شود

$$(A - 2I)\eta = 0, \quad (11)$$

و

$$(A - 2I)\zeta = \eta. \quad (12)$$

معادله (۱۱) هنگامی برقرار است که η بردار ویژه ماتریس A متناظر به مقدار ویژه $r = 2$ باشد، یعنی، $\eta^T = (1, -1)$. چون $\det(A - 2I) = 0$ ، ممکن است گمان رود که معادله (۱۲) را نمی‌توان حل کرد. اما، این حدس لزوماً درست نیست زیرا معادله (۱۲) را می‌توان به‌ازای برخی از بردارهای η حل کرد. برای این منظور η باید در شرط $(\eta, y) = 0$ به‌ازای هر جواب y از معادله $(A^* - 2I)y = 0$ صدق کند. بررسی تحقق

این شرط آسان است؛ و آن را در مسئله ۱۵ مطرح کرده ایم. جواب معادله (۱۲) یکتا نیست زیرا می تواند شامل هر مضرب دلخواه η باشد. از حل معادله (۱۲) به دست می آید

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

که در آن k ثابتی دلخواه است. با قرار دادن η و ζ در معادله (۹) داریم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (14)$$

آخرین جمله در رابطه (۱۴) فقط مضربی از جواب اول $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ است، و می توان از آن صرف نظر کرد، اما دو جمله اول جواب جدیدی را تشکیل می دهند

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (15)$$

محاسبه ساده ای نشان می دهد که $\mathbf{W}[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ ، و بنابراین $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ برای دستگاه (۳) یک مجموعه اساسی جواب را تشکیل می دهند. جواب عمومی عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

از مثال بالا یک وجه تمایز بین دستگاه دو معادله مرتبه اول و یک معادله مرتبه دوم آشکار می گردد. چنانکه می دانیم برای یک معادله خطی مرتبه دوم که معادله مشخصه آن دارای ریشه مکرر r_1 باشد، در جواب دوم به جمله $c_2 e^{r_1 t}$ نیازی نیست، زیرا مضربی از جواب اول است. از طرف دیگر، در مورد دستگاه دو معادله مرتبه اول، جمله ζe^{2t} در رابطه (۹) به ازای $r_1 = 2$ مضربی از جواب اول ξe^{2t} نیست مگر آنکه ζ با ξ بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه r_1 متناسب باشد و چون معمولاً چنین نیست، جمله ζe^{2t} را باید حفظ کرد.

همین روش را می توان در حالت کلی به کار گرفت. دستگاه (۱) را در نظر گرفته و فرض کنیم که $r = \rho$ یک مقدار ویژه مضاعف A باشد، که تنها یک بردار ویژه ξ با آن متناظر است. آنگاه

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t} \quad (17)$$

با فرض آنکه ξ در

$$(A - \rho I)\xi = 0 \quad (18)$$

صدق کند يك جواب است [همانند رابطه (۵)]. با همان روشی که در مثال به کار رفت، جواب دوم به صورت

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (19)$$

به دست می آید [همانند رابطه (۱۵)] که در آن ξ در معادله (۱۸) صدق می کند و η از

$$(A - \rho I)\eta = \xi \quad (20)$$

حاصل می شود. به آسانی ثابت می شود که می توان معادله (۲۰) را همواره بر حسب η حل کرد، حتی اگر $\det(A - \rho I) = 0$.

هنگامی که $r = \rho$ مقدار ویژه ماتریس A دارای مرتبه تکرار بزرگتر از دو باشد، آنگاه تنوع حالتها افزایش می یابد. این موضوع را می توان با در نظر گرفتن مقدار ویژه ای با مرتبه تکرار سه توضیح داد. نخست فرض کنیم که مقدار ویژه سه گانه $r = \rho$ دارای سه بردار ویژه مستقل خطی $\xi^{(1)}$ ، $\xi^{(2)}$ ، $\xi^{(3)}$ باشد. در این حالت مجموعه جوابهای مستقل متناظر عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi^{(3)} e^{\rho t}. \quad (21)$$

اکنون فرض کنیم که متناظر به مقدار ویژه سه گانه $r = \rho$ تنها يك بردار ویژه مستقل خطی وجود داشته باشد. آنگاه نخستین جواب با رابطه (۱۷)، و دومین جواب با رابطه (۱۹)، و سومیین جواب به صورت زیر تعیین می گردد

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi \frac{t^2}{2!} e^{\rho t} + \eta t e^{\rho t} + \zeta e^{\rho t} \quad (22)$$

که در آن ξ در معادله (۱۸) و η در معادله (۲۰) صدق می کند، و ζ از

$$(A - \rho I)\zeta = \eta \quad (23)$$

به دست می آید. در اینجا نیز حل معادله (۲۳) بر حسب ζ همواره امکان دارد. آخرین حالت آنکه تنها دو بردار ویژه مستقل خطی $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ با مقدار ویژه $r = \rho$ متناظر قرار گیرد. در این صورت دو جواب دستگاه (۱) عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)} e^{\rho t} \quad (24)$$

جواب سوم به صورت

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (25)$$

است که در آن ξ در معادله (۱۸) صدق می کند و η جوابی از معادله (۲۰) است. در اینجا لازم است که ξ را به صورت يك ترکیب خطی $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ طوری انتخاب کرد که معادله

$$(A - \rho I)\eta = \xi \quad (26)$$

قابل حل باشد. اگر قراردادیم

$$\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} \quad (27)$$

آنگاه باید c_1 و c_2 را طوری انتخاب کرد که به ازای هر y که در $(A^* - \rho I)y = 0$ صدق کند، داشته باشیم $(\xi, y) = 0$. به ازای این انتخاب ξ می توان η را از معادله (۲۶) به دست آورد. جوابهای $x^{(1)}(t)$ ، $x^{(2)}(t)$ و $x^{(3)}(t)$ که باروابط (۲۴) و (۲۵) تعیین می شوند در این حالت يك مجموعه جوابهای مستقل متناظر به مقدار ویژه $\rho = r$ را تشکیل می دهند. برای توضیح و مثال این حالت مسئله ۱۱ را ببینید.

روشن است که اگر مقدار ویژه ای دارای مرتبه تکرار بالاتری باشد، آنگاه ممکن است وضعیت از این هم پیچیده تر گردد. به عنوان مثال، اگر $r = \rho$ مقدار ویژه ای از مرتبه تکرار چهار باشد، آنگاه باید حالت های مختلفی را بر حسب آنکه چهار، سه، دو، یا يك بردار ویژه مستقل خطی وجود داشته باشد در نظر گرفت. می توان حالت کلی مسائلی را که دارای مقادیر ویژه مکررند مورد بررسی قرارداد، اما این کار متضمن مباحث پیشرفته ای از نظریه ماتریسها است و خارج از محدوده این کتاب است. ما توجه خود را به فنون محاسباتی لازم برای تعیین مجموعه اساسی جواب در مواردی که مرتبه تکرار مقادیر ویژه از سه تجاوز نکند متمرکز می کنیم.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x \quad 2. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad 1.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad 4. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad 3.$$

در هر يك از مسائل ۵ و ۶ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 5.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix} \quad 6.$$

۷. نشان دهید $r=2$ ریشه سه گانه معادله مشخصه دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} x$$

است و سه جواب مستقل خطی برای آن بیابید.

در هر يك از مسائل ۸ و ۹ دستگاه معادلات داده شده را با روش مسئله ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید. فرض کنیم که $t > 0$.

$$tx' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x \quad ۹ \quad tx' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۸$$

۱۰. دستگاه معادلات مذکور در مثال متن را در نظر می گیریم،

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x$$

این دستگاه متناظر به مقدار ویژه مضاعف $r=2$ دارای يك بردار ویژه η است که با $\eta^T = (1, -1)$ داده می شود.

(الف) نشان دهید که همه جوابهای $(A^* - 2I)y = 0$ به صورت $y^T = c(1, 3)$ می باشند، که در آن c ثابت دلخواهی است.

(ب) نشان دهید که به ازای همه y ها که در قسمت (الف) به دست آمد داریم $(\eta, y) = 0$.

(ج) دستگاه $\zeta' = (A - 2I)\zeta = \eta$ را حل کرده، نشان دهید که ζ باید به صورتی که در رابطه (۱۳) متن آمده است باشد.

۱۱. در این مسئله به بیان طرز عمل در حالتی که متناظر به مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم تنها دوبردار ویژه وجود داشته باشد می پردازیم. دستگاه زیر را در نظر می گیریم

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x \quad (\text{يك})$$

(الف) نشان دهید که $r=1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس ضرایب A است، و تنها دوبردار ویژه مستقل خطی وجود دارد

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{دو})$$

برای معادله (یک) دو جواب مستقل خطی $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ بیابید.

(ب) برای تعیین جواب سوم قرار دهید

$$x^{(3)}(t) = \xi t e^t + \eta e^t \quad (\text{سه})$$

و نشان دهید که ξ و η باید در معادلات زیر صدق کنند

$$(A - I)\xi = 0 \quad (\text{چهار})$$

$$(A - I)\eta = \xi \quad (\text{پنج})$$

(ج) نشان دهید $\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهند، عمومی ترین جواب معادله (چهار) است. برای حل معادله (پنج) لازم است که c_1 و c_2 را طوری انتخاب کنیم که ξ به همه جوابهای دستگاه الحاقی $(A^* - I)y = 0$ متعامد باشد. A^* را تعیین کنید و نشان دهید که جواب عمومی دستگاه الحاقی عبارت است از

$$y = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{شش})$$

که در آن α و β ثابتهای دلخواهند.

(د) (ξ, y) را حساب کرده و تحقیق کنید که تنها اگر $c_1 = c_2$ این مقدار به ازای همه مقادیر α و β برابر صفر است. برای آسانی $c_1 = c_2 = 2$ انتخاب کنید. آنگاه

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{هفت})$$

(ه) برای ξ مقداری را که با رابطه (هفت) داده شده است در نظر گرفته معادله (پنج) را حل کنید و نشان دهید که

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\text{هشت})$$

k_1 و k_2 ثابتهای دلخواهند. با استفاده از روابط (هفت) و (هشت) برای معادله (يك) سومین جواب مستقل خطی $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ را بیابید.

۱۲. نشان دهید که همه جوابهای دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ به سوی صفر می گرایند اگر، فقط اگر، $a+d < 0$ و $ad-bc > 0$. این نتیجه را با نتیجه مسئله ۱۰ بند ۱.۵.۳ مقایسه کنید.

۱۳. بار دیگر مدار الکتریکی مسئله ۱۲ بند ۷.۷ را در نظر می گیریم. این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

بیان می شود.

(الف) نشان دهید که مقادیر ویژه آن حقیقی و برابرند اگر $L = 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $R=1$ ، فاراد $C=1$ و هنری $L=4$ و نیز آمپر $I(0)=1$ و ولت $V(0)=2$. $I(t)$ و $V(t)$ را بیابید.

۹.۷ ماتریسهای اساسی

نظریه دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی را می توان با به کار گرفتن مفهوم ماتریس اساسی گسترش بیشتری داد. در بند بعدی که به تعمیم روش تغییر پارامترها در مورد دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول می پردازیم این مفهوم اهمیت ویژه ای خواهد داشت. فرض کنیم که $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ يك مجموعه اساسی جواب معادله

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

را روی فاصله $\alpha < t < \beta$ تشکیل دهند. آنگاه ماتریس

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

که ستونهای آن بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ می باشند، ماتریس اساسی دستگاه (۱) نامیده

می‌شود. توجه شود که هر ماتریس اساسی يك ماتریس عادی است، زیرا ستونهای آن بردارهای مستقل خطی اند.

مثال ۰۱. مطلوب است تعیین يك ماتریس اساسی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

در بند ۶.۷ دیده شد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (4)$$

جوابهای مستقل خطی معادله (۳) می‌باشند. بدین‌سان يك ماتریس اساسی دستگاه (۳) عبارت است از

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (5)$$

جواب يك مسئله مقدار اولیه را می‌توان به‌طور بسیار فشرده برحسب ماتریس اساسی نوشت. جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) \quad (6)$$

یا، برحسب $\Psi(t)$ ،

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \mathbf{c} \quad (7)$$

که در آن \mathbf{c} بردار ثابتی با مؤلفه‌های دلخواه c_1, \dots, c_n است. هنگامی که مسئله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (8)$$

تشکیل شده باشد که در آن t_0 نقطه مفروضی در $\alpha < t < \beta$ و \mathbf{x}^0 بردار اولیه داده شده است، تنها لازم است که بردار \mathbf{c} موجود در رابطه (۷) را طوری تعیین کرد که شرط اولیه (۸) برقرار باشد. از این‌رو \mathbf{c} باید در

$$\Psi(t_0) \mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \quad (9)$$

صدق کند. بنابراین، چون $\Psi(t)$ عادی است،

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0) \mathbf{x}^0 \quad (10)$$

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) \mathbf{x}^0 \quad (11)$$

جواب مسئله مقدار اولیه مزبور است. اما باید تأکید کرد که برای حل مسئله مقدار اولیه معمولاً بهتر است معادله (۹) را به روش ساده کردن سطری حل کرد، و \mathbf{C} را به دست آورده در معادله (۷) قرارداد، به جای اینکه $\Psi^{-1}(t_0)$ را مستقیماً محاسبه کرده و از معادله (۱۱) استفاده کنیم.

گاهی آسانتر است که از ماتریس اساسی خاصی که با $\Phi(t)$ نشان داده می شود استفاده کرد، ستونهای این ماتریس همان بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ مذکور در قضیه ۶.۷ بند ۵.۷ می باشند. علاوه بر معادله دیفرانسیل (۱) این بردارها در شرایط اولیه

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)} \quad (12)$$

صدق می کنند، که در آن $\mathbf{e}^{(j)}$ بردار یکه مذکور در قضیه ۶.۷ است، مؤلفه n ام آن یک و مؤلفه های دیگر آن صفرند. بدین سان $\Phi(t)$ دارای این ویژگی است که

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (13)$$

ما همواره نماد Φ را برای نمایش ماتریس اساسی که در شرط اولیه (۱۳) صدق کند اختصاص می دهیم، و هرگاه مقصود یک ماتریس اساسی دلخواه باشد از نماد Ψ استفاده می کنیم. جواب مسئله مقدار اولیه (۱) و (۸) بر حسب $\Phi(t)$ حتی دارای ظاهری ساده تر است؛ چون $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$ ، از رابطه (۱۱) نتیجه می شود که

$$\mathbf{x} = \Phi(t) \mathbf{x}^0 \quad (14)$$

گرچه ماتریس اساسی $\Phi(t)$ غالباً از $\Psi(t)$ پیچیده تر است، اما هنگامی که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را باید مکرراً با چندین شرایط اولیه متفاوت حل کرد بسیار سودمند است. این وضعیت متناظر به یک دستگاه فیزیکی است که می تواند در چندین حالت اولیه متفاوت آغاز به کار کند. اگر ماتریس اساسی $\Phi(t)$ تعیین شده باشد، آنگاه جواب متناظر به هر مجموعه شرایط اولیه را می توان تنها با ضرب ماتریسی چنانکه در رابطه (۱۴) مشخص شده است به دست آورد. بدین سان ماتریس $\Phi(t)$ نمایشگر تبدیل شرایط اولیه \mathbf{x}^0 به جواب $\mathbf{x}(t)$ در زمان دلخواه t است. از مقایسه روابط (۱۱) و (۱۴) دیده می شود که

$$\Phi(t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0).$$

مثال ۲. برای دستگاه (۳)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

که در مثال ۱ مورد بحث قرار گرفت، ماتریس اساسی Φ را طوری تعیین کنید که $\Phi(0) = I$. ستونهای Φ عبارتند از جوابهای معادله (۳) که در شرایط اولیه زیر صدق کنند

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

چون جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

می توان با انتخاب $c_1 = c_2 = 1/2$ ، جوابی را به دست آورد که در نخستین شرط اولیه صدق کند؛ به همین ترتیب جوابی که در شرط اولیه دوم صدق کند با انتخاب $c_1 = 1/4$ و

$c_2 = -1/4$ معین می شود. بنابراین

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \quad (16)$$

توجه شود که عنصرهای $\Phi(t)$ از عنصرهای ماتریس اساسی $\Psi(t)$ که با رابطه (۵) داده شده است پیچیده ترند؛ اما، اکنون به آسانی می توان جواب متناظر به هر دسته شرایط اولیه را تعیین کرد.

اکنون بار دیگر دستگاه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (17)$$

را در نظر می گیریم، که در آن \mathbf{A} يك ماتریس ثابت است که می تواند حقیقی نباشد. قبلاً دو روش حل این گونه دستگاهها را بیان کردیم: در بند ۲.۷ روش حذفی، و در بند ۶.۷ با فرض آنکه $\mathbf{x} = \mathbf{\xi}e^{rt}$. در اینجا می خواهیم علاوه بر آنها نظر دیگری را مطرح کنیم. علت اساسی دشواری دستگاه معادلات آن است که معادلات معمولاً بهم مرتبط اند؛ به عبارت دیگر، برخی از معادلات یا همه آنها شامل بیش از یک تابع، شاید هم شامل همه توابع باشند. این حالت هنگامی اتفاق می افتد که ماتریس ضرایب \mathbf{A} قطری نباشد. بنابراین معادلات دستگاه را به جای آنکه متوالیاً حل کنیم باید قوماً حل کرد. از اینجا نتیجه می شود که يك راه حل دستگاه معادلات آن است که آن را به يك دستگاه هم ارز نامرتبط تبدیل کنیم که در آن هر معادله فقط شامل يك تابع باشد. این عمل متناظر با آن است که ماتریس ضرایب \mathbf{A} را به يك ماتریس قطری تبدیل کنیم.

بر اساس نتایج مذکور در بند ۴.۷، هرگاه \mathbf{A} دارای يك دسته کامل n بردار ویژه

مستقل خطی باشد می توان این تبدیل را انجام داد. اگر $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ بردارهای ویژه متناظر به مقادیر ویژه r_1, \dots, r_n ماتریس A باشند و T ماتریس تبدیلی باشد که ستونهای آن $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ باشند، آنگاه

$$T = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

چون تابع جدید y را با رابطه

$$x = Ty \quad (19)$$

تعریف کنیم، از معادله (۱۷) داریم

$$Ty' = ATy, \quad (20)$$

یا

$$y' = (T^{-1}AT)y. \quad (21)$$

بنابر رابطه (۴۰) بند ۴.۷،

$$T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

يك ماتریس قطری است که عنصرهای قطری آن همان مقادیر ویژه A می باشند. بدین سان y در دستگاه معادلات نامرتبط زیر صدق می کند

$$y' = Dy \quad (23)$$

که ماتریس اساسی آن عبارت است از ماتریس قطری

$$Q(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

ماتریس اساسی Ψ مربوط به دستگاه (۱۷) را می توان با تبدیل (۱۹) از Q به دست آورد،

$$\Psi = TQ \quad (25)$$

یعنی،

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix} \quad (26)$$

معادله (۲۶) همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آمد. این روش قطری کردن هیچ امتیاز محاسباتی بر روش مذکور در بند ۶.۷ ندارد، زیرا در هر دو حالت لازم است که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. با وجود این شایان توجه است که مسئله حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با مسئله قطری کردن ماتریس، از نظر ریاضی یکی است.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۰ ماتریس اساسی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. در هر مورد ماتریس اساسی $\Phi(t)$ را نیز که در $\Phi(0) = I$ صدق می‌کند به دست آورید.

$$1. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \quad 2. \quad x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x$$

$$3. \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x \quad 4. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$5. \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x \quad 6. \quad x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$7. \quad x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x \quad 8. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$9. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} x \quad 10. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

۱۱. با استفاده از تعریف $\Phi(t)$ و $\Psi(t)$ که در این بند آمد، نشان دهید که

$$\Phi(t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0)$$

۱۲*. روش تقریبات متوالی (بند ۱۱.۲ را ببینید) را می‌توان در مورد دستگاه معادلات نیز به کار برد. در این مسئله به طور صوری طرز استفاده از آن را در مورد دستگاههای

خطی با ضرایب ثابت نشان می‌دهیم. مسئله مقدار اولیه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{یک})$$

را که در آن \mathbf{A} یک ماتریس ثابت، و $\boldsymbol{\eta}$ بردار مفروضی است در نظر می‌گیریم.

(الف) فرض کنیم که برای معادله (یک) جواب $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)$ وجود دارد، نشان دهید که $\boldsymbol{\Phi}(t)$ باید در معادله انتگرالی زیر صدق کند

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_0^t \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(s) ds \quad (\text{دو})$$

(ب) با تقریب اولیه $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}(t) = \boldsymbol{\eta}$ آغاز کرده آن را به جای $\boldsymbol{\Phi}(s)$ در طرف دوم معادله (دو) قرار دهید و تقریب جدید $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(t)$ را به دست آورید. نشان دهید که

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\boldsymbol{\eta} \quad (\text{سه})$$

(ج) این روش را تکرار کرده عبارت (سه) را به جای $\boldsymbol{\Phi}(s)$ در طرف دوم معادله (دو) بگذارید تا تقریب جدید $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(t)$ به دست آید. نشان دهید که

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} \right) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{چهار})$$

(د) با ادامه این روش دنباله تقریبات $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}, \boldsymbol{\Phi}^{(1)}, \boldsymbol{\Phi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\Phi}^{(n)}, \dots$ را به دست آورید. با استقراء نشان دهید که

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} \right) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{پنج})$$

(ه) مجموعی که در رابطه (پنج) وجود دارد، یک جمع ماتریسی است. می‌توان نشان داد که هر مؤلفه این مجموع هنگامی که $n \rightarrow \infty$ همگراست، و بنا بر این می‌توان ماتریس $\mathbf{M}(t)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\mathbf{M}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} \right) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (\text{شش})$$

با فرض آنکه مشتق‌گیری جمله به جمله جایز باشد، نشان دهید که $\mathbf{M}(t)$ در $\mathbf{M}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)$ صدق می‌کند. بدین سان نشان دهید که $\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$ ، $\mathbf{M}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$.
(و) سری (شش) شبیه به سری نمایی است. بدین سان طبیعی است که نماد $e^{\mathbf{A}t}$ را برای این مجموع بپذیریم:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (\text{هفت})$$

نشان دهید که جواب مسئله متدار اولیه (يك) را می توان به صورت $x = e^{At}\eta$ نوشت.

*۱۳. فرض کنیم $\Phi(t)$ نمایشگر يك ماتریس اساسی است که در $\Phi' = A\Phi$ ، $\Phi(0) = I$ صدق می کند. همان طور که در مسئله ۱۲ دیده شد می توان آن را با e^{At} نمایش داد. در این مسئله نشان می دهیم که Φ واقعاً دارای خواص جبری اصلی تابع نمایی است.

(الف) نشان دهید که $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$ ؛ یعنی $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$.

(اهنمایی: نشان دهید که اگر s ثابت و t متغیر باشد، آنگاه $\Phi(t)\Phi(s)$ و $\Phi(t+s)$ هر دو در مسئله مقدار اولیه $Z' = AZ$ ، $Z(0) = \Phi(s)$ صدق می کنند.

(ب) نشان دهید که $\Phi(t)\Phi(-t) = I$ یا $e^{At}e^{A(-t)} = I$ و از این رو $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.

(ج) نشان دهید که $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

۱۰.۷ دستگاههای خطی ناهمگن

در این بند به اختصار روشهای حل دستگاههای خطی ناهمگن را مورد بحث قرار می دهیم. بحث را با دستگاههایی به صورت

$$x' = Ax + g(t) \quad (۱)$$

آغاز می کنیم که در آن A يك ماتریس ثابت $n \times n$ قطری شدنی است و $g(t)$ به ازای $\alpha < t < \beta$ پیوسته است. در اینجا به روش مذکور در پایان بند ۹.۷ عمل می کنیم. ماتریسی را که ستونهای آن $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ بردارهای ویژه ماتریس A باشد با T نمایش داده و تابع جدید y را با

$$x = Ty \quad (۲)$$

تعریف می کنیم.

آنگاه با جایگزینی x در معادله (۱) داریم

$$Ty' = ATy + g(t)$$

از ضرب در T^{-1} نتیجه می شود که

$$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}g(t) \\ = Dy + h(t) \quad (۳)$$

که در آن $h(t) = T^{-1}g(t)$ ، و D ماتریسی است قطری که عنصرهای قطری آن r_1, \dots, r_n مقادیر ویژه ماتریس A می باشند که به همان ترتیب بردارهای ویژه متناظر $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ در ستونهای T قرار گرفته اند. معادله (۳) يك دستگاه متشکل از n معادله نامرتبط بر حسب $y_1(t), \dots, y_n(t)$ می باشد؛ در نتیجه می توان هر معادله را جداگانه حل کرد. صورت اسکالری معادله (۳) عبارت است از

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (۴)$$

که در آن $h_j(t)$ يك تركيب خطی از $g_1(t), \dots, g_n(t)$ است. معادله (۴) يك معادله خطی مرتبه اول است و می‌توان آن را با روش بند ۱.۲ حل کرد. در واقع، داریم

$$y_j(t) = e^{r_j t} \int_{t_0}^t e^{-r_j s} h_j(s) ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \dots, n \quad (۵)$$

که در آن c_j ثابت دلخواهی است. بالاخره، \mathbf{x} جواب معادله (۱) از رابطه (۲) عاید می‌شود.

مثال. جواب عمومی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -۴ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-۱} \\ ۲t^{-۱} + ۴ \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۶)$$

را روی فاصله $t > 0$ بیابید.

چون همانند بند ۶.۷ عمل کنیم دیده می‌شود که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضریب برابرند با $r_1 = 0$ و $r_2 = -5$ ، و بردارهای ویژه متناظر عبارتند از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix} \quad (۷)$$

پیش از آنکه به تشکیل \mathbf{T} ماتریس بردارهای ویژه پردازیم، یادآوری می‌کنیم که سرانجام باید \mathbf{T}^{-1} را نیز به دست آورد. ماتریس \mathbf{A} حقیقی و متقارن است، بنابراین می‌توان از نتیجه مذکور در پایان بند ۴.۷ استفاده کرد: اگر بردارهای ویژه \mathbf{A} یکانی باشند، یعنی $(\xi, \xi) = 1$ آنگاه \mathbf{T}^{-1} با \mathbf{T}^* ماتریس وابسته آن و چون \mathbf{T} حقیقی است با \mathbf{T}' یعنی با ترانزپوز آن برابر است. بدین‌سان، با یکانی کردن $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ داریم

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{۵}} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}. \quad (۸)$$

چون قرار دهیم $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ و آن را در معادله (۶) بگذاریم، دستگاه معادلات زیر برای تابع جدید \mathbf{y} به دست می‌آید:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{۵}} \begin{pmatrix} ۵t^{-۱} + ۸ \\ ۲ \end{pmatrix} \quad (۹)$$

بدین‌سان

$$y_1' = \frac{1}{\sqrt{۵}} \left(\frac{۵}{t} + ۸ \right), \quad y_2' = -5y_2 + \frac{۲}{\sqrt{۵}} \quad (۱۰)$$

و

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{pmatrix} 5 \ln t + 8t + c_1 \\ \frac{4}{5} + c_2 e^{-5t} \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

بالاخره

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{c}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \hat{c}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} \quad (12)$$

دوجمله آخر در جواب (۱۲) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر را تشکیل می‌دهند. سه جمله نخست جواب خصوصی دستگاه ناهمگن مزبور است. بدین‌سان جوابی که در اینجا به دست آمد دارای همان ساختمان بنیادی است که در فصول ۳ و ۵ برای معادلات اسکالری خطی به دست آمد.

اکنون به مسائل کلیتری که در آنها ماتریس ضرایب ثابت نیست و یا قطری پذیر نمی‌باشد، برمی‌گردیم. فرض کنیم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (13)$$

که در آن $\mathbf{P}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند. فرض کنیم ماتریس اساسی $\Psi(t)$ مربوط به دستگاه همگن متناظر

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (14)$$

را یافته‌ایم. با استفاده از روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی، و در نتیجه جواب عمومی دستگاه ناهمگن (۱۳) را به دست می‌آوریم.

چون جواب عمومی دستگاه همگن (۱۴) به صورت $\mathbf{c}\Psi(t)$ است، طبعاً می‌توان همانند بند ۲.۶.۳ عمل کرد، و با گذاردن تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ به جای بردار ثابت \mathbf{c} به جستجوی جوابی برای دستگاه ناهمگن (۱۳) پرداخت. بدین‌سان، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t) \quad (15)$$

که در آن $\mathbf{u}(t)$ برداری است که باید تعیین شود. با مشتق‌گیری از \mathbf{x} که با رابطه (۱۵) داده شده است و توجه به معادله (۱۳) داریم

$$\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t) \quad (16)$$

چون $\Psi(t)$ ماتریس اساسی است، $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$ ، و بنا بر این معادله (۱۶) به صورت ساده زیر درمی‌آید

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t) \quad (17)$$

چون $\Psi(t)$ روی هر فاصله‌ای که P پیوسته باشد عادی است بنا بر این $\Psi^{-1}(t)$ وجود دارد، و از آنجا

$$u'(t) = \Psi^{-1}(t)g(t). \quad (18)$$

بدین‌سان هر بردار از رده بردارهایی را که در معادله (۱۸) صدق می‌کنند می‌توان به‌عنوان بردار $u(t)$ انتخاب کرد؛ این بردارها با تقریب يك (بردار) ثابت دلخواه جمعی معین می‌شوند؛ از این‌رو $u(t)$ را با

$$u(t) = \int^t \Psi^{-1}(s)g(s) ds + c, \quad (19)$$

نشان می‌دهیم که در آن بردار ثابت c دلخواه است. بالاخره، با گذاشتن $u(t)$ در رابطه (۱۵)، x جواب دستگاه (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$x = \Psi(t)c + \Psi(t) \int^t \Psi^{-1}(s)g(s) ds \quad (20)$$

چون c دلخواه است، هر شرط اولیه در نقطه $t = t_0$ را می‌توان با انتخاب مناسب c برقرار کرد. بدین‌سان، عبارتی که با رابطه (۲۰) داده شده است شامل هر جواب دستگاه (۱۳) می‌باشد و بنا بر این جواب عمومی معادله (۱۳) است. توجه شود که جمله اول طرف دوم رابطه (۲۰) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر (۱۴) است، و جمله دوم يك جواب خصوصی خود معادله (۱۳) می‌باشد.

اکنون مسئله مقدار اولیه مشتمل بر معادله (۱۳) و شرط اولیه

$$x(t_0) = x^0 \quad (21)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر به‌عنوان جواب خصوصی در رابطه (۲۰) جوابی را انتخاب کنیم که به‌ازای $t = t_0$ برابر صفر باشد، جواب این مسئله را به‌ساده‌ترین وجه می‌توان نوشت. برای این منظور حد پایین انتگرال موجود در رابطه (۲۰) را برابر t_0 می‌گیریم، بدین‌سان جواب عمومی معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$x = \Psi(t)c + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s) ds \quad (22)$$

شرط اولیه (۲۱) نیز با انتخاب

$$c = \Psi^{-1}(t_0)x^0 \quad (23)$$

برقرار می‌گردد. بنا بر این

$$x = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x^0 + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s) ds \quad (24)$$

جواب مسئله مقدار اولیه است. بار دیگر، متذکر می‌شویم که گرچه استفاده از Ψ^{-1} برای

نوشتن جوابهای (۲۰) و (۲۴) مفید است، اما معمولاً در حالت‌های خاص بهتر است که معادلات لازم را با روش ساده کردن سطری حل کنیم به جای اینکه Ψ^{-1} را محاسبه کرده و در رابطه‌های (۲۰) و (۲۴) جایگزین کنیم.

جواب (۲۴) را می‌توان با استفاده از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در شرط $\Phi(t_0) = I$ صدق می‌کند به صورت ساده‌تری درآورد. در این حالت داریم

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (25)$$

هنگامی که ماتریس ضرایب $\mathbf{P}(t)$ ماتریسی ثابت باشد رابطه (۲۵) را می‌توان بازهم ساده‌تر کرد (مسئله ۱۳ را ببینید).

در برخی از حالتها برای تعیین جواب خصوصی دستگاه ناهمگن (۱۳) آسانتر است که از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم. در این روش، جواب را به صورت مناسبی که در آن همه یا برخی از ضرایب نامشخصند در نظر گرفته و سپس ضرایب را به گونه‌ای تعیین می‌کنند که در معادله دیفرانسیل صدق کند. عملاً، این روش تنها هنگامی قابل استفاده است که ماتریس ضرایب \mathbf{P} ماتریسی ثابت و مؤلفه‌های \mathbf{g} توابع چند جمله‌ای، نمایی، یا سینوسی، یا مجموع حاصل ضربهای این توابع باشند. تنها در این حالتها می‌توان صورت صحیح جواب را به آسانی و طبق قواعدی پیش‌بینی کرد. روش انتخاب صورت جواب ذاتاً همان است که در بند ۱.۶.۳ در مورد معادلات خطی مرتبه دوم بیان شد. تفاوت اساسی آنها را می‌توان در حالتی که جمله ناهمگن به صورت $ve^{\lambda t}$ است و λ یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد مشاهده کرد. در این شرایط، به جای آنکه جواب را به صورت $ate^{\lambda t}$ فرض کنیم لازم است عبارت $ate^{\lambda t} + be^{\lambda t}$ را در نظر بگیریم و با گذاردن در معادله دیفرانسیل، \mathbf{a} و \mathbf{b} را تعیین کنیم.

مسائل

در هر يك از مسائل ۱ تا ۷ دستگاه داده شده را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix} \quad .2$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix} \quad .4$$

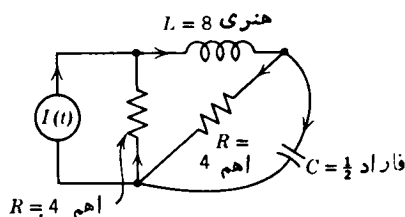
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad .5$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi \quad .6$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi \quad .7$$

۸. مدار الکتریکی که در شکل ۹.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t) \quad (\text{يك})$$



شکل ۹.۷

بیان شده است که در آن x_1 جریان در سیم پیچ، و x_2 افت ولتاژ بین دوسر خازن، و $I(t)$ جریان وارده از منبع خارجی است.

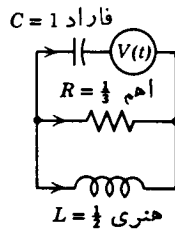
(الف) ماتریس اساسی $\Psi(t)$ را برای دستگاه همگن متناظر به معادلات (يك) بیابید. به مسئله ۱۱ بند ۷.۷ رجوع شود.

(ب) اگر $I(t) = e^{-t/2}$ ، جواب دستگاه (يك) را که در شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = 0$ نیز صدق کند بیابید.

۹. مدار الکتریکی که در شکل ۱۰.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} V(t) \quad (\text{يك})$$

که در آن x_1 جریان در خود القا، و x_2 افت ولتاژ بین دوسر خازن، و $V(t)$ ولتاژ وارده



شکل ۱۰.۷

از منبع خارجی است.

(الف) ماتریس اساسی $\Psi(t)$ را برای دستگاه همگن متناظر به معادلات (یک) بیابید.
 (ب) با فرض

$$V(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

جواب دستگاه (یک) را که در شرایط اولیه $x(0) = 0$ صدق می کند بیابید.

در هر یک از مسائل ۱۰ و ۱۱ تحقیق کنید که بردار داده شده جواب عمومی دستگاه همگن متناظر است، و سپس دستگاه ناهمگن را حل کنید. $t > 0$ فرض شود.

$$tX' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad X^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1} \quad ۱۰$$

$$tX' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}, \quad X^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \quad ۱۱$$

۱۲. نشان دهید که جواب عمومی دستگاه $x' = P(t)x + g(t)$ را می توان به صورت $x = x^{(c)}(t) + x^{(p)}(t)$ بیان کرد، که در آن $x^{(c)}$ جواب عمومی دستگاه همگن متناظر، و $x^{(p)}$ یک جواب دستگاه ناهمگن داده شده است.
 ۱۳°. مسئله مقدار اولیه

$$x' = Ax + g(t), \quad x(0) = x^0$$

را در نظر می گیریم.

(الف) با مراجعه به مسئله ۱۳ (ج) بند ۹.۷ نشان دهید که

$$x = \Phi(t)x^0 + \int_0^t \Phi(t-s)g(s) ds.$$

(ب) همچنین نشان دهید که

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{g}(s) ds$$

۱۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین جواب عمومی هر يك از دستگاه‌های زیر را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad (\text{ب})$$

مراجع

کتاب ذیل نمونه‌ای است از کتابهای بسیار زیادی که اخیراً دربارهٔ ماتریسها و جبر خطی انتشار یافته است:

Campbell, H. G., *Linear Algebra with Applications*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1971.

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra*, Macmillan, New York, 1970.

Noble, B., *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Schneider, H. and Barker, G. P., *Matrices and Linear Algebra*, Holt, New York, 1968.

Stewart, F. M., *Introduction to Linear Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1976.

Williams, G., *Computational Linear Algebra with Models*, Allyn and Bacon, Boston, 1975.

درموضوع شبکه‌های الکتریکی کتب زیادی وجود دارد، کتاب زیر نمونه‌ای از آنها است:

Bose, A. G. and Stevens, K. N., *Introductory Network Theory*, Harper and Row, New York, 1965.