(ابراهیم شاه ابراهیمی - آبان ۹۷)

«حد - مشتق»

حد

۱) هم ارزی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

بسط مک لورن

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

۲) مبهم توانی (1^{∞}) $\xrightarrow{\text{Ln گیری}}$ رسیدن به فرم $0 \times \infty$ ← تبدیل به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ ← HOP

(* پیوستگی : برابری حد چپ و حد راست با مقدار تابع)

مشتق

۱) قواعد مشتق گیری (زنجیره‌ای، ضمنی، معادلات خط، اکسترمم)

۲) قضایای مهم

۱) بولتزانو (حداقل ریشه)

$$\xrightarrow[\text{بازه}]{(a,b)} f(a)f(b) < 0 \;\; \xrightarrow{\exists c \in (a,b)} f(c) = 0$$

۲) مقدار میانگین

$$\xrightarrow[\text{بازه}]{(a,b)} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

۳) رول

$$\xrightarrow[\text{اگر } f(a)=f(b)]{(a,b)} 0 = f'(c)$$

(* قضیه مقدار میانگین ۲ تیپ سؤال مهم دارد)

مثال ۱) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x+1}\right)^{x} \overset{\text{بالاترین درجه صورت}}{\underset{\text{بالاترین درجه مخرج}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{4}\right)^{x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$ (هر کسری کمتر از یک)

مثال ۲) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x} = 1^{\infty}$ (مبهم)

$\longrightarrow A = \lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x} \xrightarrow{\text{Ln میگیری}} \ln A = \lim\limits_{x\to 1} \ln(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$

$\xrightarrow[\text{Ln قوانین مهم}]{\ln a^{n} = n\ln a} \ln A = \lim\limits_{x\to 1} \cot\pi x \cdot \ln(1+\sin\pi x) \xrightarrow[\frac{0}{0}\ \text{به}]{0\times\infty\ \text{تبدیل}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sin\pi x)}{\tan\pi x}$

$= \dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{HoP} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\cancel{\pi}\cos\pi x}{1+\cancel{\sin\pi x}}}{\cancel{\pi}(1+\cancel{\tan^{2}\pi x})} = -1$

$\longrightarrow \ln A = -1 \longrightarrow \boxed{A = e^{-1}}$

مثال ۳) (میانترم آبان ۹۴ خواجه نصیر) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\tan 2x} = 1^{\infty}$ (مبهم)

$\longrightarrow A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\tan 2x} \xrightarrow[\ln a^{n} = n\ln a]{\text{Ln میگیری}} \ln A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \ln(\sin 2x)$

$\xrightarrow[\frac{0}{0}\ \text{به}]{0\times\infty\ \text{تبدیل}} \ln A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\cot 2x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{HoP} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{-2(1+\cot^{2}2x)} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$\longrightarrow \ln A = 0 \longrightarrow \boxed{A = 1}$

مثال ۴) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right)^{x} = \sqrt{e} \qquad n = ?$

$\xrightarrow{1^{\infty}} A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right)^{x} \xrightarrow[\ln a^{n} = n\ln a]{\text{Ln میگیری}} \ln A = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right) \xrightarrow[\frac{0}{0}\ \text{به}]{0\times\infty\ \text{تبدیل}} \lim \dfrac{\ln\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\xrightarrow[\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b]{\text{ساده سازی}} \ln(nx+1) - \ln(nx-1)$

$\xrightarrow{HoP} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{n}{nx+1} - \dfrac{n}{nx-1}}{\dfrac{-1}{x^{2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} -x^{2}\left(\dfrac{-2n}{n^{2}x^{2}-1}\right) \overset{\text{بالاترین درجه صورت}}{\underset{\text{بالاترین درجه مخرج}}{=}} \boxed{\dfrac{2}{n}} \longrightarrow \ln A = \dfrac{2}{n} \longrightarrow \boxed{A = e^{\frac{2}{n}}}$

$\xrightarrow[A = \sqrt{e}]{\text{طبق صورت سوال}} e^{\frac{2}{n}} = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \dfrac{2}{n} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \boxed{n = 4}$

مثال ۵) (میانترم آبان ۹۴ خواجه نصیر)

math-teacher.blog.ir
ابراهیم شاه ابراهیمی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x) - 2x + \frac{4}{3}x^{3}}{x\cos(x) - x + \frac{x^{3}}{2}} = \frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

هم ارزی: $\sin(2x) \sim (2x) - \dfrac{(2x)^{3}}{3!} + \dfrac{(2x)^{5}}{5!}$

$\cos x \sim 1 - \dfrac{x^{2}}{2!} + \dfrac{x^{4}}{4!}$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2x} - \cancel{\frac{8x^{3}}{6}} + \frac{32}{120}x^{5} - \cancel{2x} + \cancel{\frac{4}{3}x^{3}}}{x\left(1 - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{4}}{24}\right) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^{3}}{2}}}$

$\cancel{x} - \cancel{\dfrac{x^{3}}{2}} + \dfrac{x^{5}}{24}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{32}{120}\cancel{x^{5}}}{\frac{1}{24}\cancel{x^{5}}} = \dfrac{32\times 24}{120} = \boxed{6.4}$

مثال ۱) $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c}$ اگر $b < a < c$

نشان دهید معادله دارای حداقل ۲ ریشه در بازه $[a, c]$ است.

(میانترم آبان ۹۶ _ خواجه نصیر)

$\xrightarrow{(a,b)} \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty + \frac{2}{a-b} + \frac{3}{a-c} = +\infty \\ \lim_{x\to b^-} f(x) = \frac{1}{b-a} + -\infty + \frac{3}{b-c} = -\infty \end{cases} \mapsto f(a)\,f(b) < 0 \xrightarrow{\text{بولتزانو}} \exists x_1 \in (a,b) \to f(x_1) = 0$

$\xrightarrow{(b,c)} \begin{cases} \lim_{x\to b^+} f(x) = \frac{1}{b-a} + \infty + \frac{3}{b-c} = +\infty \\ \lim_{x\to c^-} f(x) = \frac{1}{c-a} + \frac{2}{c-b} + -\infty = -\infty \end{cases} \mapsto f(b)\,f(c) < 0 \xrightarrow{\text{بولتزانو}} \exists x_2 \in (b,c) \to f(x_2) = 0$

مثال ۲) (میانترم اردیبهشت ۹۷ خواجه نصیر) ثابت کنید معادله $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی در بازه $(0, 1)$ دارد.

$\xrightarrow{(0,1)} \begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 1 \end{cases} \mapsto f(0)\,f(1) < 0 \xrightarrow{\text{بولتزانو}} \exists x_0 \in (0,1) \to f(x_0) = 0$

روش اثبات دقیقاً ۱ ریشه:

$\xrightarrow{\text{روش اول}} f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 \xrightarrow{0<x<1} f'(x) > 0$ ، اکیداً صعودی

$\mapsto$ تنها یک ریشه دارد.

$\xrightarrow{\text{روش دوم}}$ فرض کنیم ۲ ریشه دارد $\to \begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه رل}} \exists c \in (0,1) \to f'(c) = 0$

$\to f'(c) = 5c^4 + 3c^2 + 2 \neq 0$ (f همواره مثبت است پس صفر نمی‌شود) $\to$ بنابراین فرض باطل است و معادله تنها ۱ ریشه دارد.

math-teacher.blog.ir | ابراهیم شاه ابراهیمی

مثال ۱) با استفاده از قضیه مقدار میانگین درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید؛
تیپ ۱

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad x>0$$

$$\ln(1+x)<x \rightarrow f(x)=\ln(1+x)-x$$

قدم اول: یافتن $f(x)$ مناسب (کافیست تمام عبارات به یک سمت آورده شوند)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

قدم دوم: فرمول مقدار میانگین

$$\xrightarrow[\text{بازه}]{(0,x)} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)-x-0}{x-0} \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق از } f(x)} f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x} \xrightarrow{x>0} f'(x)<0 \rightarrow f'(c)<0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{\ln(1+x)-x}{x}<0 \xrightarrow{x>0} \ln(1+x)-x<0 \rightarrow \boxed{\ln(1+x)<x}$$

$$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x} \rightarrow f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\xrightarrow{(0,x)} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}-0}{x-0} \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق از } f(x)} f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2} \xrightarrow{x>0} f'(x)>0 \rightarrow f'(c)>0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x}>0 \xrightarrow{x>0} \ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0 \rightarrow \boxed{\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}}$$

$$\boxed{\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x} \leftarrow \text{بنابراین}$$

مثال ۲) ثابت کنید $\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x<x \quad \forall x>0$
تیپ ۱

$$\operatorname{tg}^{-1}x<x \rightarrow \operatorname{tg}^{-1}x-x<0 \rightarrow f(x)=\operatorname{tg}^{-1}x-x \xrightarrow{(0,x)} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{tg}^{-1}x-x-0}{x-0} \quad (I)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2} \xrightarrow{x>0} f'(x)<0 \rightarrow f'(c)<0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{\operatorname{tg}^{-1}x-x}{x}<0 \xrightarrow{x>0} \operatorname{tg}^{-1}x-x<0 \rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^{-1}x<x}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x>\frac{x}{1+x^2} \rightarrow \operatorname{tg}^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}>0 \rightarrow f(x)=\operatorname{tg}^{-1}x-\frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{(0,x)} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{tg}^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}}{x-0} \quad (I)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \xrightarrow{x>0} f'(x)>0 \rightarrow f'(c)>0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{\operatorname{tg}^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}}{x}>0 \xrightarrow{x>0} \operatorname{tg}^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}>0 \rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^{-1}x>\frac{x}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{tg}^{-1}x<x} \leftarrow \text{بنابراین}$$

math-teacher.blog.ir ابراهیم شاه‌ابراهیمی

مثال ۱ — تیپ (میانترم دکتر فاطمی / خواجه نصیر)

فرض کنید $0<a<b<\pi/2$ ، با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید:

$$(b-a)\,tg\,a < Ln\left(\frac{\cos a}{\cos b}\right) < (b-a)\,tg\,b$$

قدم اول: یافتن $f(x)$ مناسب (همان عبارت وسط نامساوی است)

$$f(x) = Ln(\cos x)$$

قدم دوم: فرمول قضیه مقدار میانگین

$$\xrightarrow{c\in(a,b)} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{Ln(\cos b) - Ln\cos(a)}{b-a} \quad (I)$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg\,x \longrightarrow f'(c) = -tg\,c \quad (II)$$

$$\xrightarrow{c\in(a,b)} a<c<b \xrightarrow{f'(c)\ \text{یعنی در بازه}} tg\,a < tg\,c < tg\,b \xrightarrow{\text{تغییر علامت}} -tg\,b < \underset{f'(c)}{-tg\,c} < -tg\,a \quad (III)$$

$$\xrightarrow{(III)\text{ و }(II)\text{ و }(I)} -tg\,b < \frac{Ln(\cos b) - Ln(\cos a)}{b-a} < -tg\,a$$

$$\xrightarrow[\ominus\times\ \text{ضرب در}]{Ln A - Ln B = Ln\frac{A}{B}} tg\,a < \frac{Ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)}{b-a} < tg\,b \xrightarrow{\times(b-a)} \boxed{(b-a)\,tg\,a < Ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right) < (b-a)\,tg\,b}$$

مثال ۲ — تیپ (میانترم دکتر خدایی / خواجه نصیر)

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

$$\longrightarrow x_2 - x_1 \leq \sin x_1 - \sin x_2 \leq x_1 - x_2 \longrightarrow f(x) = \sin x$$

$$\xrightarrow{(x_1,x_2)} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \quad (I)$$

$$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(c) = \cos c \xrightarrow{-1\leq \cos x\leq 1} -1 \leq \underset{f'(c)}{\cos c} \leq 1 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II)\text{ و }(I)} -1 \leq \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \leq 1 \xrightarrow{\times(x_2-x_1)} -(x_2-x_1) \leq \sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1$$

$$\xrightarrow{|x|\leq a \Leftarrow -a\leq x\leq a} |\sin x_2 - \sin x_1| \leq x_2 - x_1 \quad \text{یا} \quad \boxed{|\sin x_1 - \sin x_2| \leq x_1 - x_2}$$