

Physical Geodesy

ژئودزی فیزیکی

قسمت اول

مدرس:

مهدي گلي

منابع:

- 1- Physical Geodesy: W. Heiskanen and H. Moritz
 - 2- Geodesy the concepts: P. Vanicek and E. Krakiwsky
 - 3- Physical Geodesy: N., Sneeuw
- available at <http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/dipl/erdmessung/LNErdm.pdf>

۴- کتاب درس هایی از ژئودزی فیزیکی: دکتر مهدی نجفی علمداری و دکتر اصغر راست بود. انتشارات سازمان نقشه برداری

۵- جزوه درسی دکتر ابولقاسم.

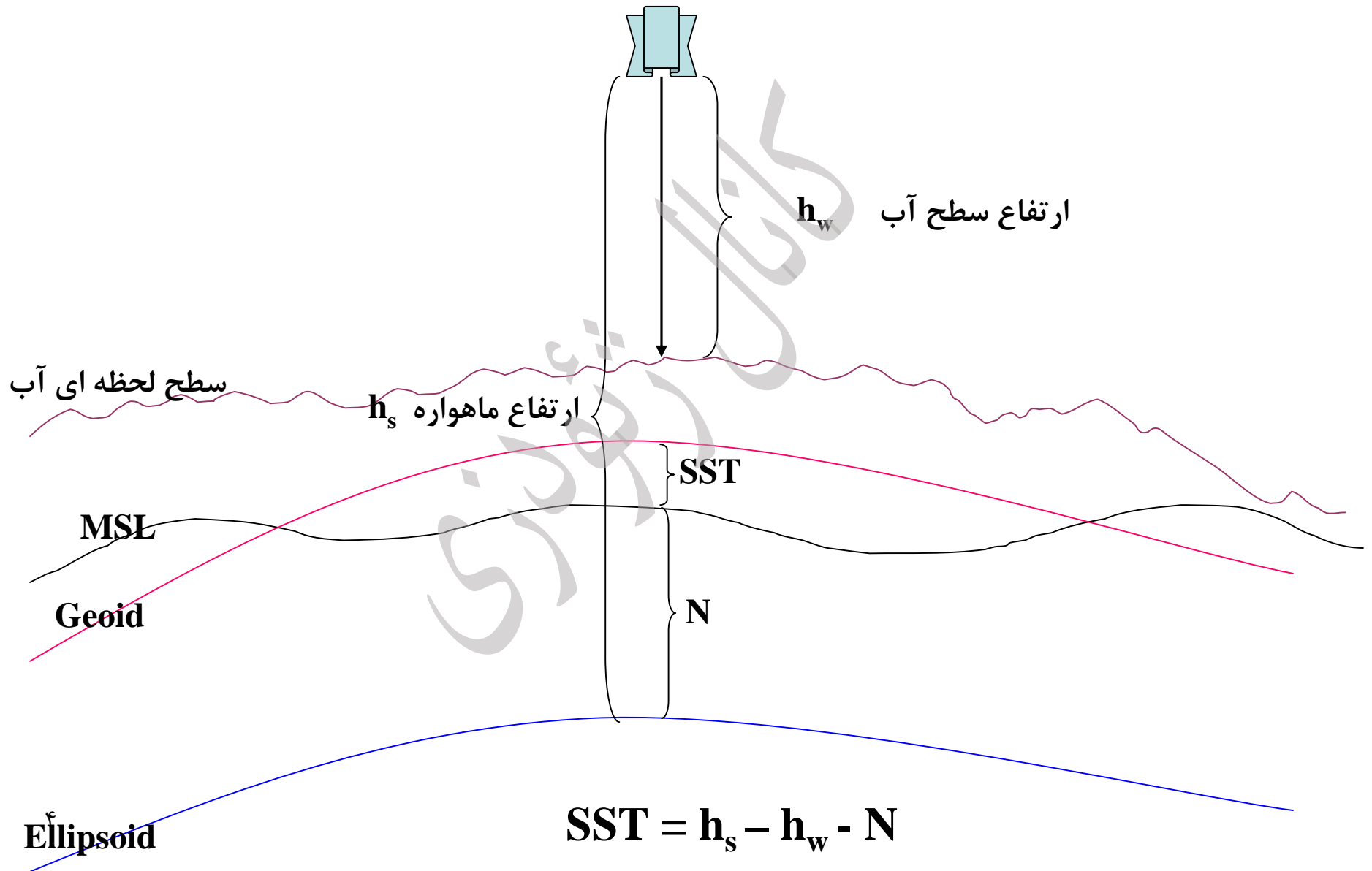
نحوه ارزشیابی:

- ۱- ۸ نمره نیم ترم
- ۲- ۸ نمره پایان ترم
- ۳- ۴ نمره تمرین های کلاسی

تعاریف اولیه

- شاخه های ژئودزی:
 - ۱- ژئودزی هندسی: هدف تعیین موقعیت
 - ۲- ژئودزی فیزیکی: مطالعه میدان ثقل آن
 - ۳- ژئودینامیک: مطالعه دینامیک زمین (تغییر شکل، هندسه و میدان ثقل زمین با زمان)
 - هدف فیزیکی ژئودزی: مطالعه میدان ثقل زمین با استفاده از مشاهدات در خارج زمین
 - ارتباط با علوم دیگر:
- ۱- اقیانوس شناسی: ژئوئید سطح هم پتانسیل و تعادلی اقیانوسهاست در صورتی که جذر و مد، باد، آب و هوا و عوامل دیگر را در نظر نگیریم. البته این سطح از سطح تعادلی بمیزان ۱ متر دور است که به آن SST می گویند. SST تعادل دینامیکی در اقیانوس ها را نشان می دهد.

اصول ارتفاع سنجی ماهواره ای Satellite Altimetry



۲- کاربردهای ژئوفیزیکی

فیزیکی مطالعه فیزیک داخل زمین است. بر خلاف ژئودزی که بیشتر به سطح و بالای آن متمرکز می شود. فیزیکال ژئودزی می تواند اطلاعاتی در مورد

۱- توزیع دانسیته در داخل جرم (با کمک داده های دیگری نظیر لرزه نگاری و مغناطیس)

۲- تعیین ایزوستازی پوسته و منتل

را در اختیار قرار دهد

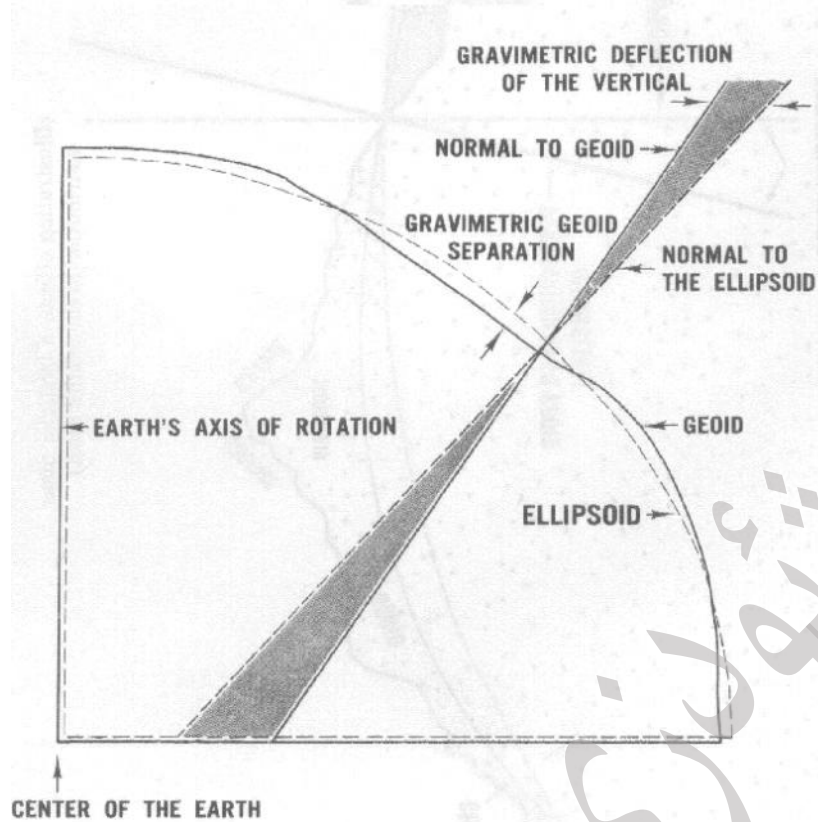
۳- **زمین شناسی**: اطلاعات جاذبه سطح زمین در مطالعات زمین شناسی و تعیین جنس سنگها می تواند کمک کند. با استفاده از این اطلاعات در کنار اطلاعات دیگر در اکتشاف معادن بکار می رود.

۴- **هیدرولوژی**: تغییر سطح آبهای زیر زمینی یکی از کاربردهای جدید فیزیکال ژئودزی است که با استفاده از تغییرات میدان ثقل زمین با استفاده از آنالیز مدار ماهواره های جدید میسر است.

۵- **مطالعه یخچالها و سطح آبهای آزاد**: بعلت گرم شدن زمین و ذوب شدن یخهای قطبی سطح آبهای آزاد در حال بالا آمدن است. مطالعه تغییرات سطح آبهای آزاد از طریق مطالع تغییرات زمانی ژئوئید میسر است.

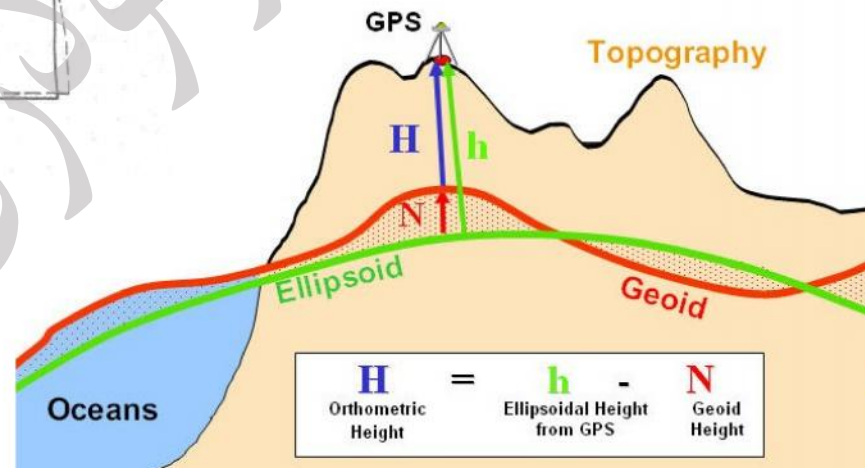
۶- **مطالعات ژئوتکنیک**: مطالعه جنس خاک و کشف فضای های خالی و دانسیته خاک برای سازه های بزرگ که در مناطق شهری ساخته می شوند از دیگر کاربردهای جدید میدان ثقل زمین است. بعنوان مثال کشف حفره های خالی بوجود آمده بر اثر قناتها، معادن متروکه و تونلهای زیر زمینی در احداث سازه های بزرگ نظیر برجها.

PRODUCTS OF THE GRAVIMETRIC METHOD

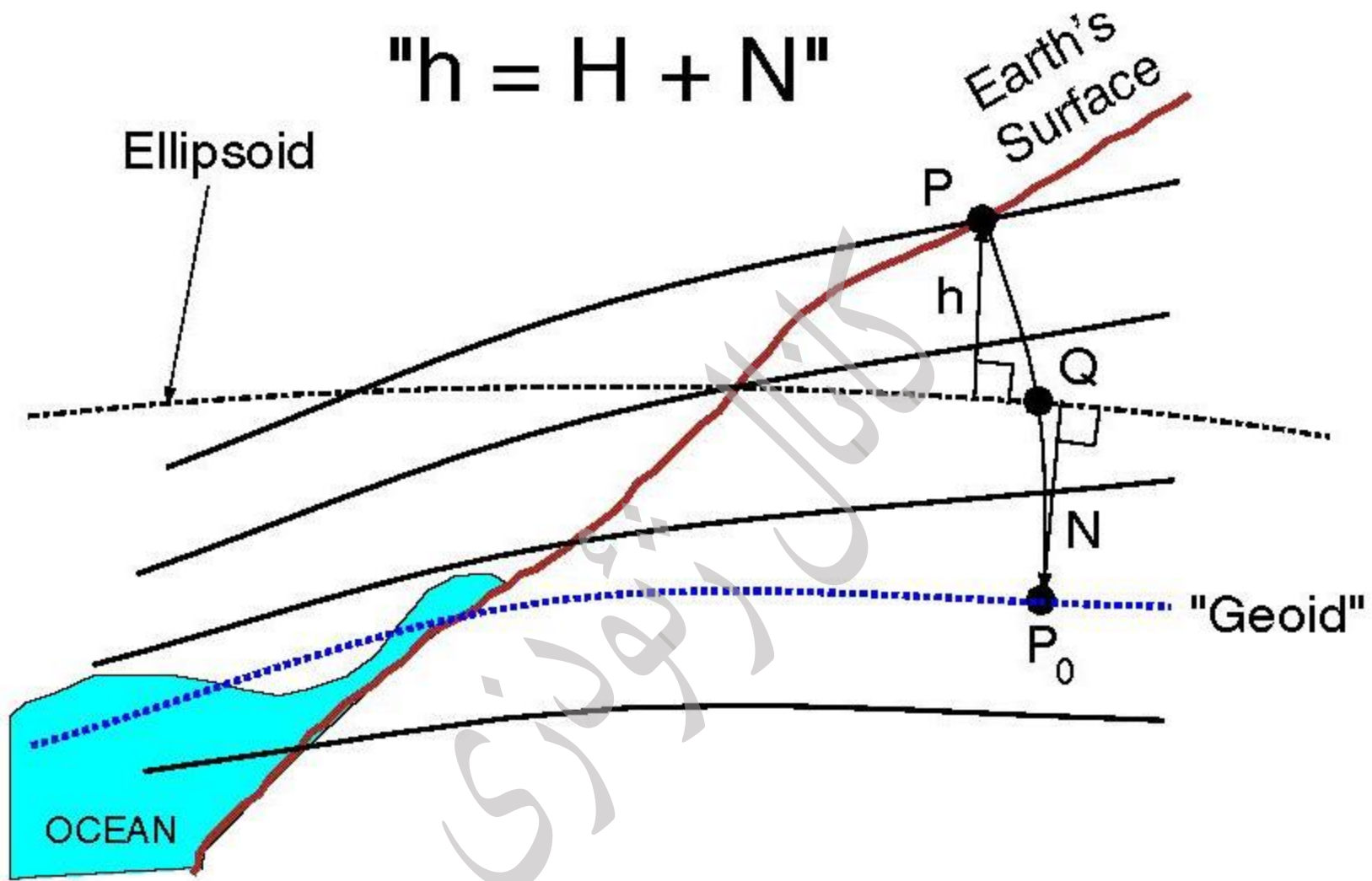


کاربردهای فیزیکی ژئودزی در نقشه برداری:

- ۱- تعیین موقعیت کلاسیک
- ۲- سطح مبنای ارتفاعات
- ۳- تعیین ارتفاع
- ۴- مطالعات ژئودینامیک
- ۵- تعیین مدار ماهواره ها



$$"h = H + N"$$



- h (Ellipsoid Height) = Distance along ellipsoid normal (Q to P)
- N (Geoid Height) = Distance along ellipsoid normal (Q to P₀)
- H (Orthometric Height) = Distance along Plumb line (P₀ to P)

میدان جاذبه زمین

- **قانون نیوتن:**

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ (or N m}^2 \text{ kg}^{-2}\text{)}.$$

- سرعت انتشار امواج جاذبه برابر سرعت نور است. هرچند بر اساس عقیده نیوتن این سرعت بینهایت است.
- در مطالعات فیزیکیال ژئودزی از مکانیک نیوتنی استفاده می شود.
- شتاب جاذبی ناشی از یک جرم m عبار تست از:

$$a = G \frac{m}{r^2},$$

- **واحد های شتاب جاذبه:**

واحد در سیستم متریک برای شتاب m/s^2 است. اما این واحد برای تغییراتی که در شتاب جاذبی زمین اتفاق می افتد بزرگ است. بجای آن از گال و واحدهای کوچکتر استفاده می شود:

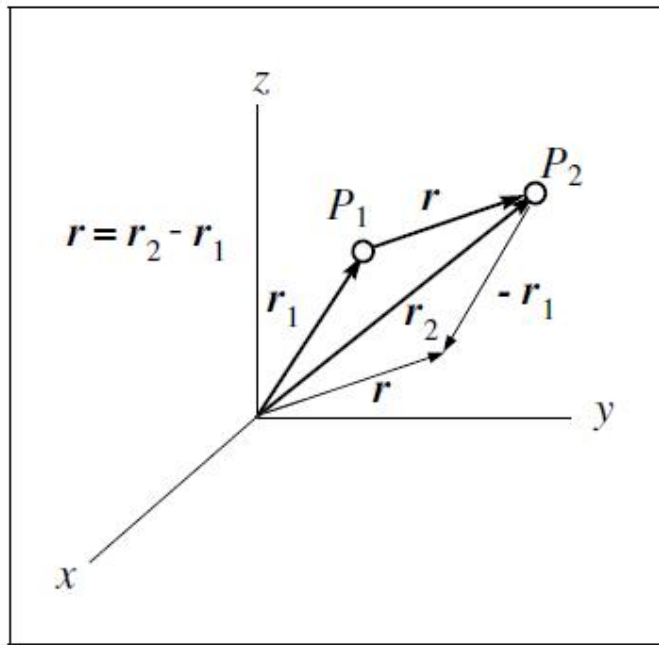
$$1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ cm/s}^2$$

$$1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2 .$$

میدان جاذبه زمین

- بردار شتاب جاذبه



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \text{ and } r = |\mathbf{r}|$$

$$\mathbf{a} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_{12} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -G \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

$$= -G \frac{m}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

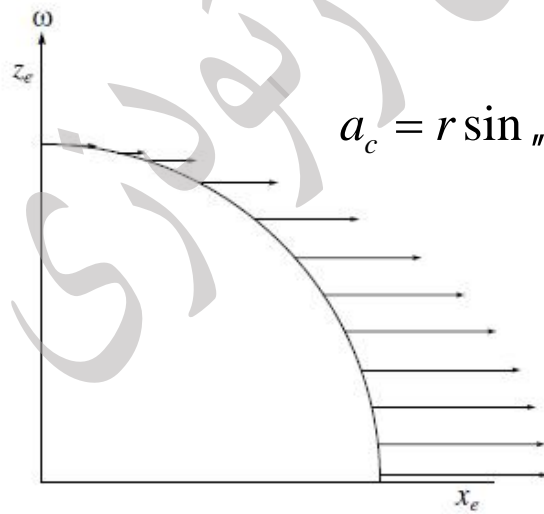
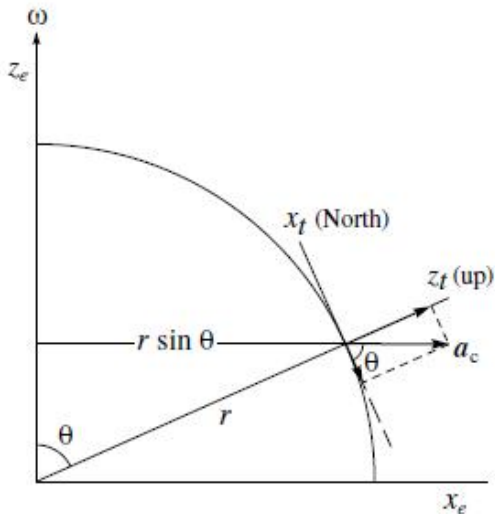
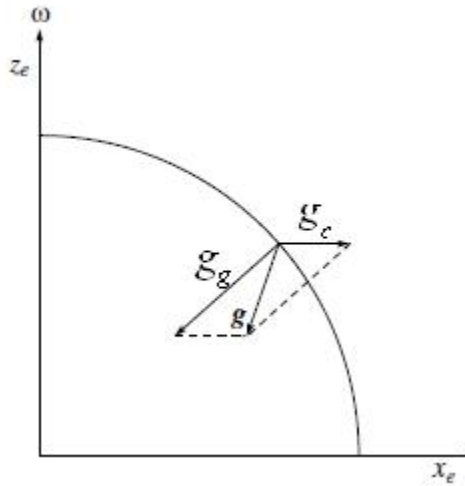
میدان ثقل زمین

نیروی ثقل زمین برآیند دو نیروی جاذبه و گریز از مرکز است:

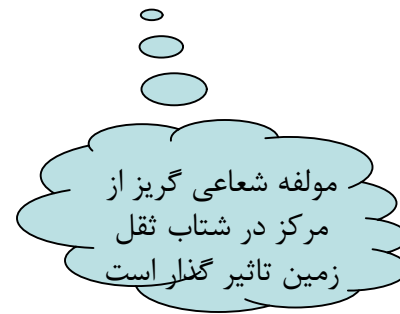
نیروی گریز از مرکز + نیروی جاذبه = نیروی ثقل
شتاب گریز از مرکز + شتاب جاذبه = شتاب ثقل

$$\vec{g} = \vec{g}_g + \vec{g}_c$$

شتاب گریز از مرکز تقریباً ۰.۰۰۱ شتاب جاذبه کوچکتر است.



$$a_c = r \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \Rightarrow g_c = r \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$



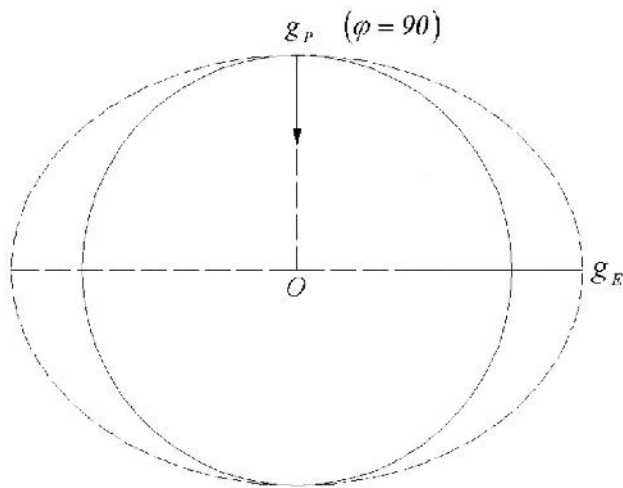
تغییرات شتاب ثقل زمین

۱- تغییرات با عرض جغرافیایی

- تغییرات بواسطه دور شدن از مرکز زمین (تمرین ۲: با در نظر گرفتن GM و قطرهای بزرگ و کوچک بیضوی WGS84 اختلاف شتاب جاذبه بین استوا و قطب چند گال است)

- تغییرات بعثت تغییر در شتاب گریز از مرکز

- تغییرات ناشی از کمر بند استوایی



$$a - b = 21\text{km} \Rightarrow g_P - g_E = 6.63 \text{ Gal} \quad \text{فاصله}$$

$$g_P - g_E = 3.39 \text{ Gal} \quad \text{دوران}$$

$$g_E > g_P \Rightarrow g_P - g_E = -4.85 \text{ Gal} \quad \text{کمر بند استوایی}$$

$$g_P \approx g_E + 5.17 \text{ Gal}$$

تمرین ۳: با در نظر گرفتن GM و شعاع بیضوی گراف تغییرات شتاب جاذبه روی بیضوی از استوا تا قطب را ترسیم کنید.

تغییرات شتاب ثقل زمین

۲- تغییرات با ارتفاع

با فرض خالی بودن بالای ژئوئید:

$$g = \frac{Gm}{r^2};$$

$$dh \approx dr;$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{dg}{dr} = -\frac{Gm}{r^3} = \frac{Gm}{r^2} \frac{1}{r} \approx \frac{g}{r} \approx 0.308$$

$$\Rightarrow dg = -0.308 dh \quad \text{Free-air formula}$$

تمرین ۴: تغییرات شتاب جاذبه را بواسطه تغییر ارتفاع از [0:4000] متر محاسبه و ترسیم کنید.

۳- تغییرات با دانسیته:

به علت نامنظم بودن توزیع جرم شتاب ثقل حدود ۲۰۰ الی ۳۰۰ میلی گال تغییر می کند. پس از حذف تغییرات ناشی از عرض جغرافیای و ارتفاع از روی شتاب ثقل تغییرات شتاب ثقل نشانه تغییرات دانسیته در داخل زمین است. از این در اکتشاف معادن می توان استفاده کرد.

اندازه گیری شتاب ثقل

گراویمتری **Gravimetry**: اندازه گیری شتاب ثقل زمین.

در گراویمتری بیشتر اندازه بردار شتاب ثقل اندازه گیری می شود. در حالیکه در برخی از تکنیکهای جدید بردار شتاب ثقل نیز اندازه گیری می شود.

محل های اندازه گیری شتاب ثقل

۱. در خشکی های روی سطح زمین
۲. در سطح دریا: کشتی های هیدروگرافی.
۳. در هوا (ثقل سنجی هوایی **Airborne Graviymetry**): اندازه گیری شتاب ثقل در هواپیما
۴. در فضا (ثقل سنجی ماهواره ای **Satellite Gravimetry**): اندازه گیری شتاب ثقل در ارتفاع ماهواره

اندازه گیری شتاب ثقل با دستگاهی موسوم به گراویمتر انجام می شود:

اندازه گیری شتاب ثقل با آونگ

• **آونگ ریاضی:** یک آونگ ساختگی شامل یک جرم مادی و یک میله بدون بعد است. این آونگ حول یک مرکز بدون اصطکاک می چرخد.

$$s = l\phi$$

دوبار مشتق گیری از رابطه فوق:

$$\ddot{s} = l\ddot{\phi} = -g \sin \phi \approx -g\phi \Leftrightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi \approx 0$$

معادله دیفرانسیل
حرکت آونگ

معادله دیفرانسیل حرکت هارمونیک ساده:

$$x(t) = c_1 \cos(\check{S}t) + c_2 \sin(\check{S}t) = A \cos(\check{S}t + \{)$$

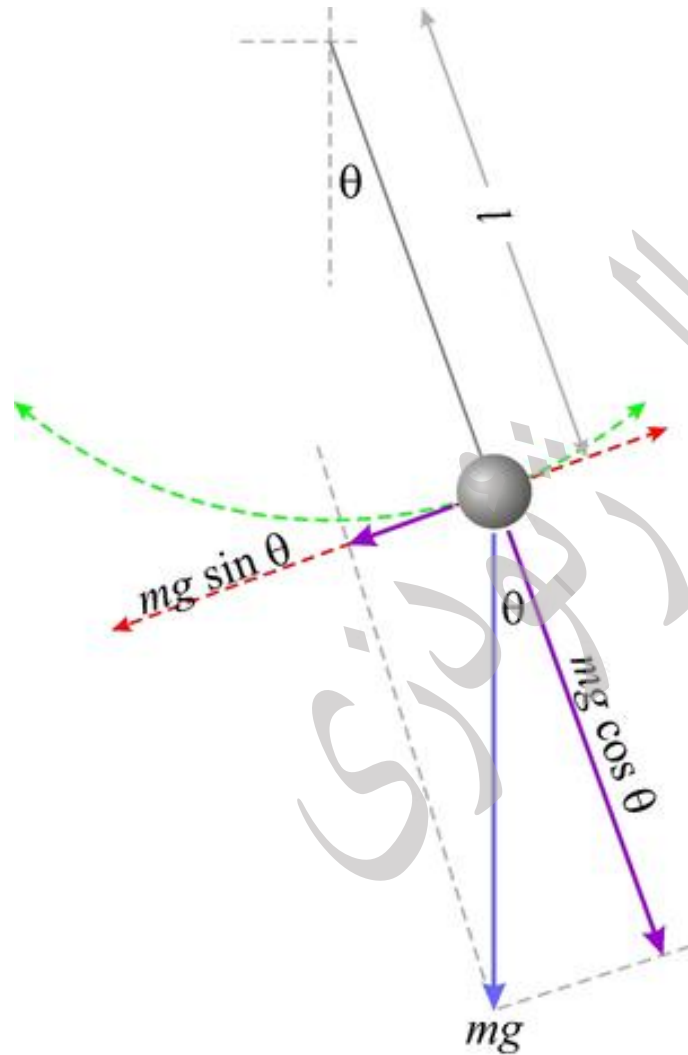
$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \check{S} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \tan \{ = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad =:$$

$$g = l\omega^2 = l \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

اساس اندازه گیری شتاب ثقل با استفاده از آونگ

اثبات معادله دیفرانسیل آونگ:



$$F = ma$$

$$F = -mg \sin \theta = ma$$

$$a = -g \sin \theta$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$$

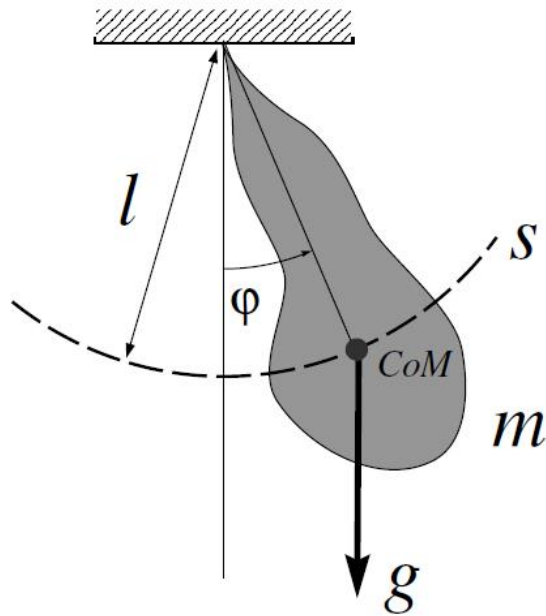
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

اندازه گیری شتاب ثقل با آونگ

آونگ فیزیکی



برای روابط این آونگ مراجعه کنید به

physical Geodesy: N, Sneeuw

آنالیز خطا:

خطای مطلق:

$$dg = -\frac{2}{T} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l dT + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 dl,$$

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dT}{T} + \frac{dl}{l}.$$

خطای نسبی:

فرض طول آونگ برابر ۱ متر باشد ($l=1m$). مقدار تقریبی پریود آن برابر ۲ ثانیه می شود. اگر بخواهیم با دقت 1mGal گراویتی را اندازه گیری کنیم، در این صورت دقت نسبی برابر است با $dg/g = 10^{-6}$

در اینصورت باید زمان را با دقت $1\mu s$ و طول آونگ را با دقت $1\mu m$ اندازه گیری کنیم.

اندازه گیری شتاب ثقل با آونگ

اندازه گیری شتاب ثقل با آونگ دقت بالایی را برای g در اختیار قرار نمی دهد. علت این است که در عمل نمی توان یک آونگ فیزیکی ایده ال ساخت. هر چند که با Reversible pendulums و Kater's pendulum دقت مطلق گراویمترهای آونگی به یک میلی گال هم رسید اما این روش برای تعیین مطلق دارای دقت کافی نیست. در عوض می توان از آن برای تعیین نسبی g استفاده کرد.

در حالت نسبی داریم:

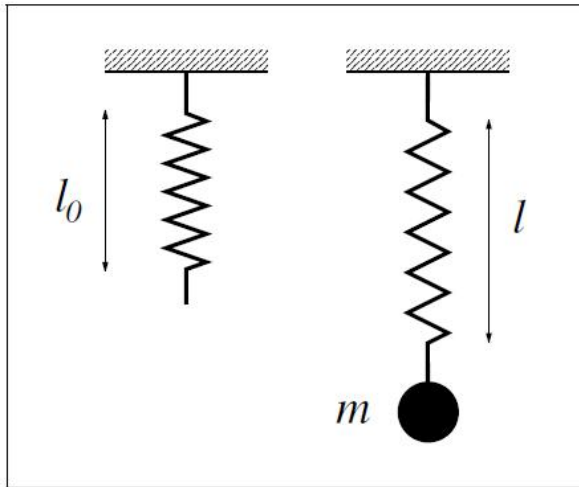
$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

برای استفاده از رابطه فوق نیاز به یک نقطه مبدا (دیتوم گراویتی) و دو نقطه با گراویتی معلوم برای کالیبره کردن دستگاه داریم. در کالیبره کردن دستگاه یک ضریب مقیاس برای رابطه فوق بدست می آید:

$$\frac{g_1}{g_2} = a \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

Scale factor

اندازه گیری شتاب ثقل با فنر



قانون هوک

$$k(l - l_0) = mg \quad \Rightarrow \quad g = \frac{k}{m} \Delta l$$

استفاده از سیستم فنر برای تعیین شتاب ثقل مطلق

معمولا انجام نمی شود. زیرا که طول فنر در حالت

اول l_0 معلوم نیست. این روش معمولا برای حالت نسبی بکار می رود:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} \quad \Delta g_{1,2} = g_2 - g_1 = \frac{k}{m} (\Delta l_2 - \Delta l_1) = \frac{k}{m} (l_2 - l_1)$$

$$\Delta g = \kappa \Delta l$$

آنالیز خطا

absolute: $d\Delta g = \Delta l d\kappa + \kappa d\Delta l$,

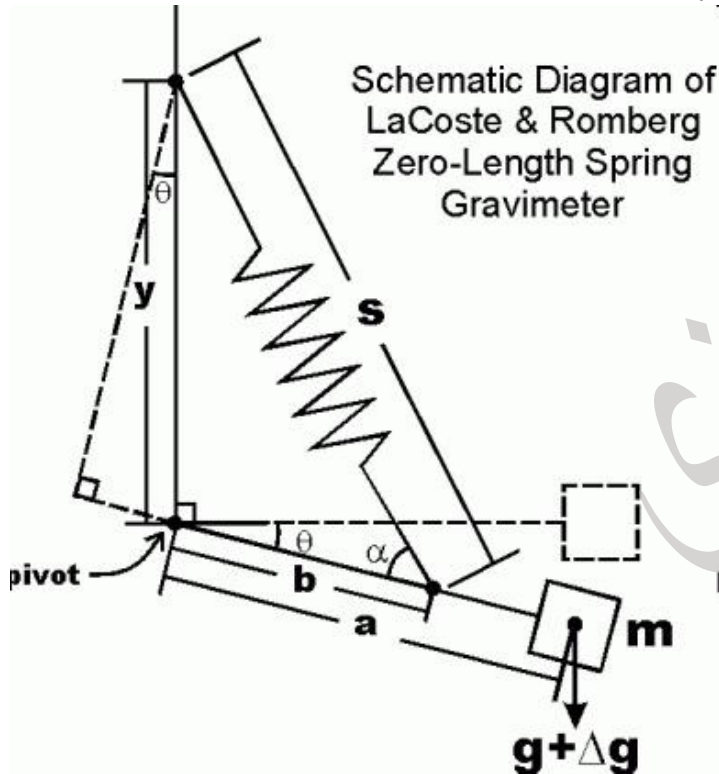
۱۸ relative: $\frac{d\Delta g}{g} = \frac{d\kappa}{\kappa} + \frac{d\Delta l}{\Delta l}$.

اندازه گیری شتاب ثقل با فنر

فرض حرکت فنر را یک حرکت نوسانی ساده در نظر بگیریم:

$$T = 2f \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{k} = \frac{T^2}{4f^2}$$

$$\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{\Delta g} \quad \left\{ \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta l}{\Delta g} = \frac{T^2}{4f^2} \right.$$



دقت اندازه گیری g تابعی از پریود T است، هرچه پریود بزرگتر باشد دقت اندازه گیری g بیشتر است.

راه حل فنر با طول صفر

$$F = k(l - l_0)$$

$$mg \cos \theta = k(l - l_0)b \sin \theta$$

$$mg \cos \theta = k(l - l_0)b \frac{y \cos \theta}{l}$$

$$g = \frac{k b}{m a} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) y$$

$$\frac{dg}{dl} = \frac{k b z y}{m a l l}$$

هرچه l کمتر شود حساسیت فنر g/l بیشتر می شود

اندازه گیری شتاب ثقل با فنر

راه حل فنر با طول صفر

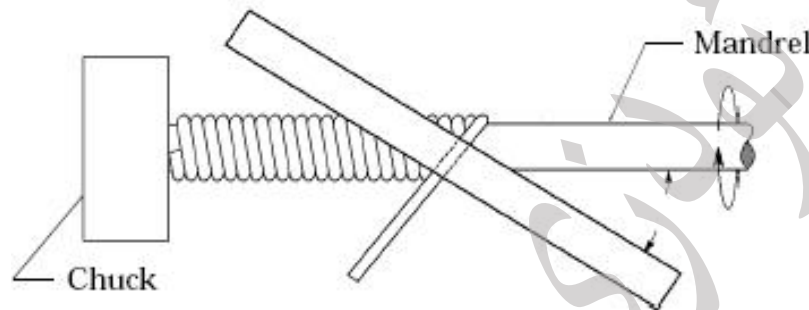
فنر با طول صفر فیزیکی است که زمانی که هیچ نیرویی بدان وارد نشود دارای طول صفر است

$$l_0 = 0$$

$$g = \frac{k}{m} \frac{b}{a} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) y$$

$$dg = \frac{k}{m} \frac{b}{a} \frac{z}{l} \frac{y}{l} dl$$

$$dg = k dl$$



فنر با طول صفر بینهایت حساس است. لذا اثرات ناخواسته باعث تغییرات دائم آن می شود. برای جلوگیری از این حالت در عمل از یک فنر با طول نزدیک به صفر استفاده می شود. بطوریکه دیوار تکیه گاهی فنر را کمی از حالت قائم خارج می کنند و یک تیلت کوچک به آن می دهند.

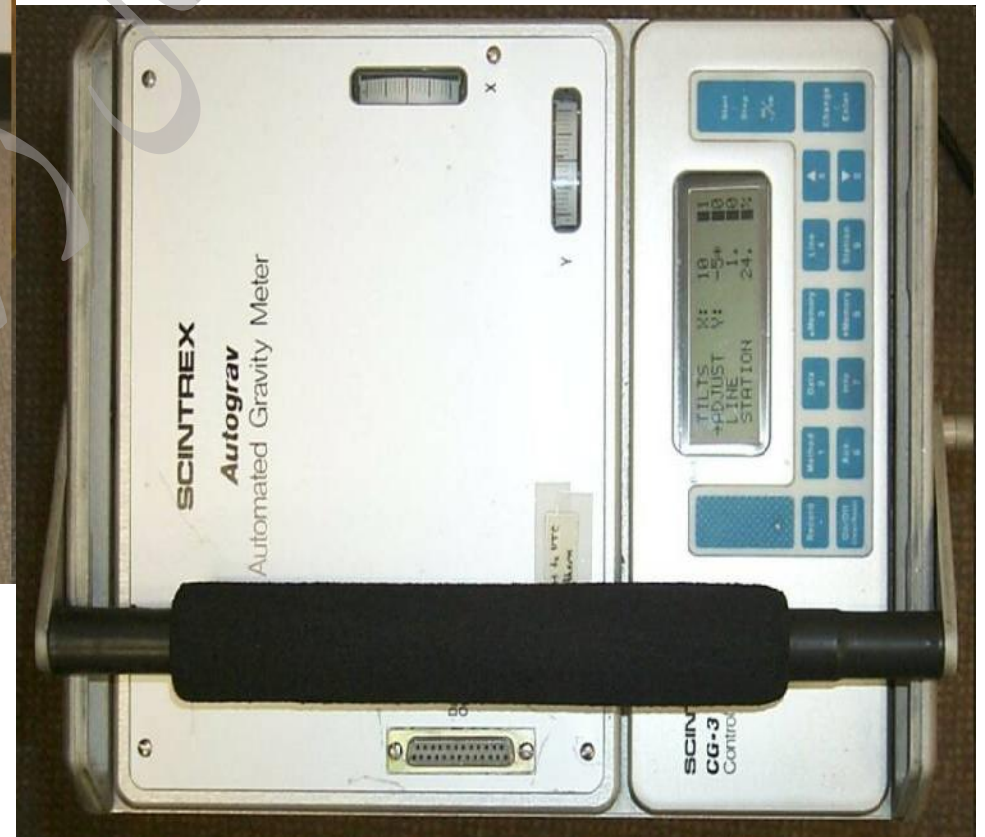
اندازه گیری شتاب ثقل با فنر

ایده طراحی فنر با طول صفر از سوی LoCoste and Lomborg مطرح شد. آنها کارخانه ای با همین نام ایجاد کردند که گراویمترهای فنری نسبی تولید می کند. دقت این گراویمترها در حدود چند میکروگال است.



اندازه گیری شتاب ثقل با فنر

یکی از گراویمترهای فنری نسبی که در ایران استفاده می شود محصول شرکت کانادایی SCINTREX است. دو مدل CG3M و CG5M در سازمان نقشه برداری استفاده می شود.



اندازه گیری شتاب ثقل با سقوط آزاد

معادله دیفرانسیل حرکت در راستای قائم بدلیل جاذبه (سقوط آزاد): $\ddot{z} = g$.

حل این معادله دیفرانسیل: $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$

با فرض سرعت و مکان صفر در $t=0$

$$z_0 = v_0 = 0 \quad g = \frac{2z}{t^2}$$

با اندازه گیری زمان و طول می توان شتاب جاذبه را اندازه گیری کرد:

آنالیز خطا

$$\text{absolute: } dg = \frac{2}{t^2} dz - \frac{2z}{t^3} dt$$

$$\text{relative: } \frac{dg}{g} = \frac{dz}{z} - 2\frac{dt}{t}$$

بطور مثال اگر زمان سقوط برابر $t=1s$ باشد، طول سقوط برابر تقریباً $l=5m$ است. در این حالت برای رسیدن به دقت $1mGal$ معادل دقت نسبی $dg/g=10^{-6}$ دقت مورد نیاز برای سنجش طول $5\mu m$ و دقت سنجش زمان $5\mu s$ خواهد بود. چنین دقتی برای سنجش طول نیاز به تداخل سنجش امواج (و با استفاده از لیزر) دارد.

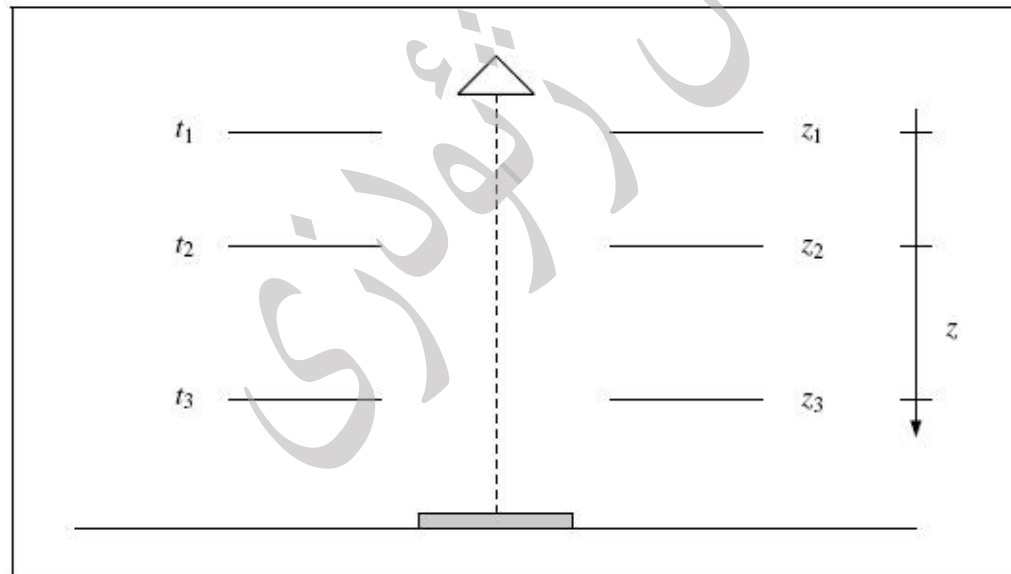
دستگاه سقوط آزاد برای اندازه گیری شتاب ثقل یک لوله خلا است که در آن زمان و مکان سقوط آزاد یک پرتابه ۲۳ اندازه گیری می شود.

اندازه گیری شتاب ثقل با سقوط آزاد

با توجه به اینکه سرعت و مکان اولیه باید صفر باشد و امکان اندازه گیری دقیق آنها وجود ندارد در عمل از سه مشاهده زمان و طول برای هر پرتاب استفاده می شود. در این حالت مکان و زمان اولیه بعنوان مجهول برآورد می شود. با تشکیل سه معادله و سه مجهول و با حذف مان و زمان اولیه پرتابه شتاب ثقل نقطه از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$g = 2 \frac{(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

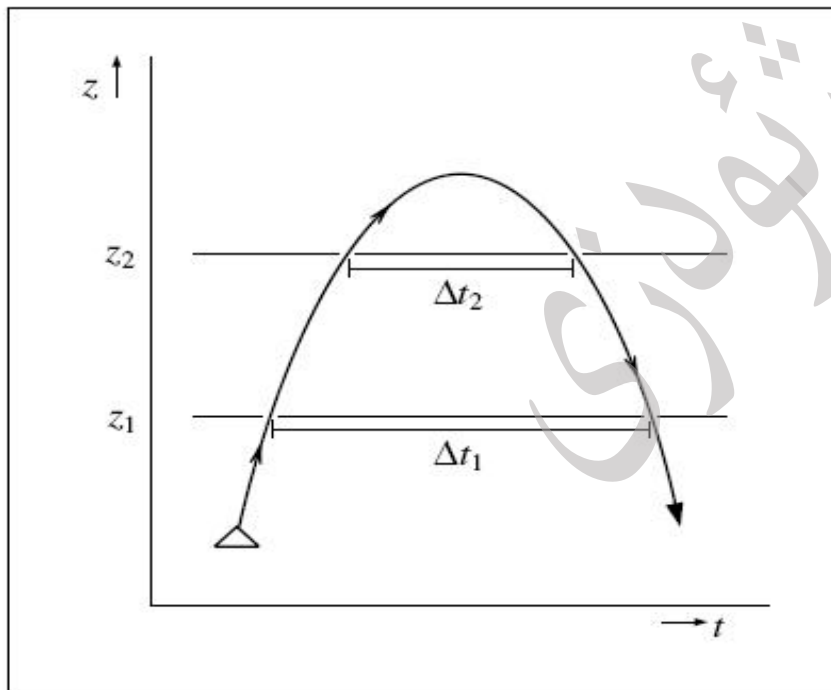
تمرین : رابطه بالا را اثبات نمایید.



اندازه گیری شتاب ثقل با سقوط آزاد

اگرچه با ایجاد خلا مقاومت هوا در برابر حرکت پرتابه در دستگاه سقوط آزاد کم می شود. اما برای حذف باقیمانده احتمالی این اثر معمولا از پرتاب و سقوط آزاد همزمان استفاده می شود. با توجه به تقارن کامل این دو حرکت اثر مقاومت هوا در مشاهدات تفاضلی حذف می شود. چنانچه در دو ارتفاع z_1 و z_2 زمانهای t_1 و t_2 ثبت شود داریم:

تمرین: رابطه زیر را اثبات نمایید.



$$g = \frac{8\Delta z}{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2}$$

اندازه گیری شتاب ثقل با سقوط آزاد

دستگاه FG5 یکی از دستگاه قابل حمل اندازه گیری شتاب ثقل مطلق با دقت ۲ میکروگال است. بیشتر نقاط دارای ثقل مطلق در ایران با این دستگاه اندازه گیری شده اند.



اثراتی که در هنگام اندازه گیری شتاب ثقل مطلق بروز سقوط آزاد باید در نظر گرفته شود:

1. اثرات جذر و مدی
2. تغییرات ناشی از حرکت قطبی در g_c
3. فشار هوا
4. گرادیان ثقل در طول مسیر پرتاب
5. تغییر سطح آبهای زیر زمینی

شبکه های گراویمتری

- یک شبکه گراویتی شامل یکسری نقاط با اختلاف ثقل اندازه گیری شده و تعدادی نقطه با ثقل مطلق معلوم (حداقل یک نقطه) است.

- اصول ریاضی حاکم بر این شبکه ها شبیه شبکه های ارتفاعی است.

- شبکه های گراویتی شبکه های 1D هستند.

- بیشتر مشاهدات این شبکه ها شامل مشاهدات نسبی با گراویمترهای فنی می باشند.

- کیفیت گراویمترهای فنی معمولا با سپری شدن زمان عوض می شود. این پدیده را دیررفت Drift می گویند. در حقیقت دیررفت پیر شدن دستگاه بر اثر استعمال و تغییر شرایط محیطی است.

• انواع دیررفت:

۱- **دیررفت بلند مدت:** بر اثر استعمال دستگاه در طول چند ماه یا حتی سال اتفاق می افتد. بر اثر این نوع دیررفت اختلاف قرائت در دو مکان $(R_2 - R_1)$ دقیقا اختلاف گراویتی نبوده و باید در یک ضریبی بنام scale factor ضرب شود:

$$g_{1,2} = (R_2 - R_1)$$

راه حل کالیبره کردن دستگاه روی نقاطی است که قبلا گراویتی آنها با دقت بالا معلوم است (خط کالیبراسیون).

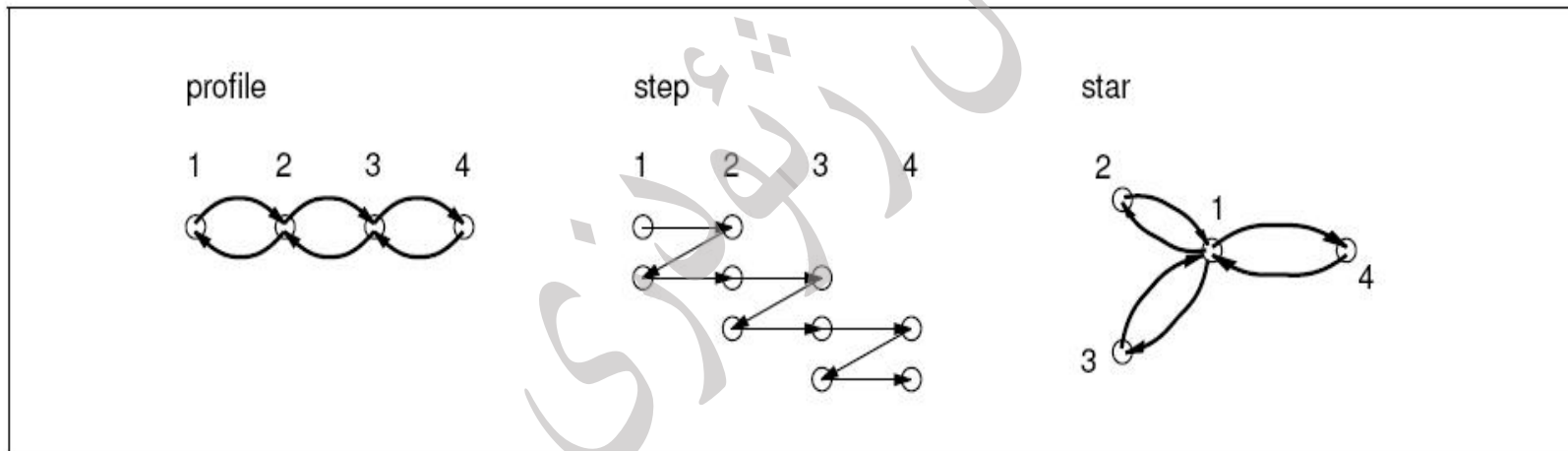
۲- **دیررفت کوتاه مدت:** بر اثر تغییرات محیطی و حمل و نقل در طول مدت اندازه گیری (چندین دقیقه تا چندین ساعت) این دیررفت اتفاق می افتد. برای حل این دیررفت از مشاهدات اضافی (رفت و برگشت) استفاده کرده و دیررفت را بعنوان مجهول برآورد می کنیم.

شبکه های گراویمتری

روشهای اندازه گیری شتاب ثقل در یک شبکه گراویتی

برای غلبه بر دیررفت کوتاه مدت می توان از روشهای زیر استفاده کرد:

1. روش پروفیل یا رفت و برگشت که یک دیررفت برای کل مشاهدات بر آورد می شود. این روش سریع است.
2. روش پله ای این روش بیشتر برای کالیبراسیون گراویمتر روی خطوط کالیبراسیون استفاده می شود.
3. روش ستاره ای: در این روش دیررفت در هر قرائت محاسبه و اعمال می شود.



شبکه های گراویمتری

1. شبکه جهانی پوتسدام:

- این شبکه در فاصله بین سال‌های ۱۹۷۱-۱۹۰۹ اندازه‌گیری و استفاده شد.
- نقطه مبنای آن در شهر پوتسدام در آلمان قرار دارد. نقطه مبنای پوتسدام توسط پاندول دو طرفه اندازه‌گیری شده است.
- شتاب ثقل در این شبکه بمیزان ۱۴ میلی گال بایاس دارد.

2. شبکه جهانی (IGSN71) International Gravity Standardization Net 1971

در فاصله سالهای ۱۹۷۰-۱۹۵۰ شبکه جهانی IGSN71 ایجاد گردید
در سال ۱۹۷۱ این شبکه در اتحادیه بین‌المللی ژئودزی و ژئوفیزیک بعنوان مبنای شتاب ثقل به رسمیت شناخته شد.

مشخصات شبکه جهانی IGSN71:

- ۱- شامل ۱۸۵۴ نقطه است که ۵۰۰ نقطه از شبکه قدیمی پوتسدام را در بر می‌گیرد.
- ۲- دارای ۱۰ نقطه با اندازه‌گیری گرویتی مطلق است.
- ۳- شامل ۲۵۰۰۰ مشاهده گرویتی با گراویمتر است.
- ۴- شامل ۱۲۰۰ مشاهده گرویتی مطلق بروش آونگ است.
- ۵- دقت نقاط بعد از سرشکنی در سال ۱۹۷۱ حدود $36 \mu\text{Gal}$ است

شبکه های گراویمتری

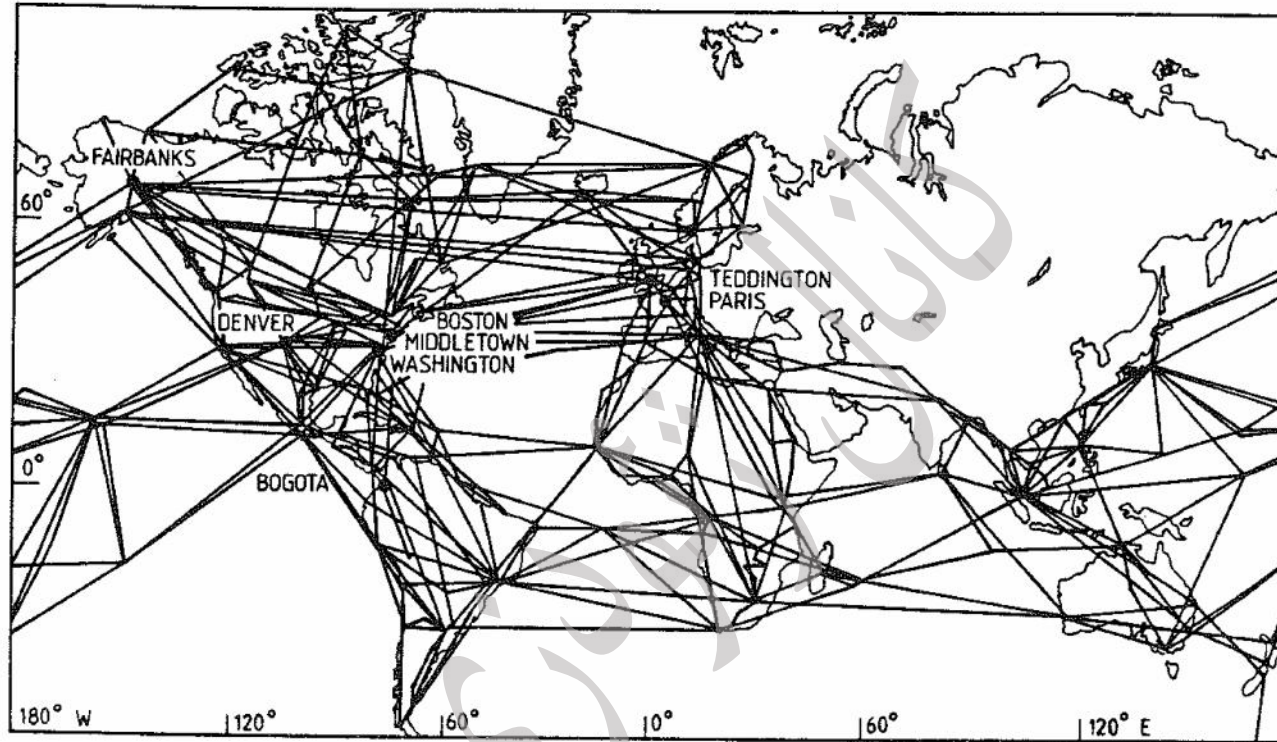
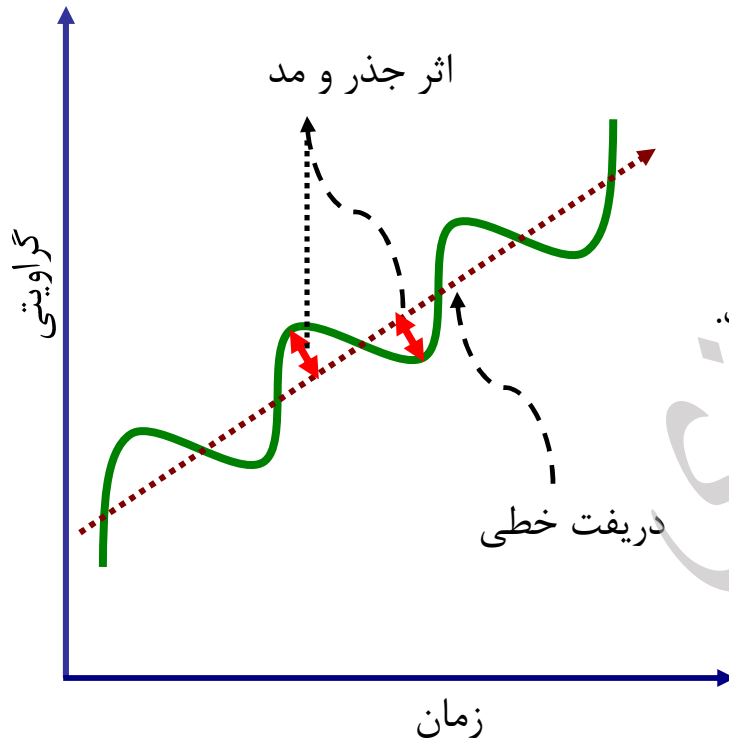


Fig. 9.1: International Gravity Standardization Net 1971 (I.G.S.N.71): Absolute gravity stations and selected network ties, after MORELLI et al. (1974)

سرشکنی شبکه های گراویمتری

معادله مشاهده گراویمتر فیزی با دریافت خطی:

$$g_i - g_j = r (R_i - R_j) + D (t_i - t_j)$$



g_i : گراویتی در نقطه i ، مجهول یا معلوم

g_j : گراویتی در نقطه j ، معلوم یا مجهول

: ضریب مقیاس گراویمتر (مربوط به دریافت بلند مدت)، معمولا معلوم است.

R_i : قرائت گراویمتر در نقطه i ، مجهول یا معلوم

R_j : قرائت گراویمتر در نقطه j ، معلوم یا مجهول

D : دریافت خطی، مجهول

t_2 : زمان قرائت رد نقطه i ، معلوم

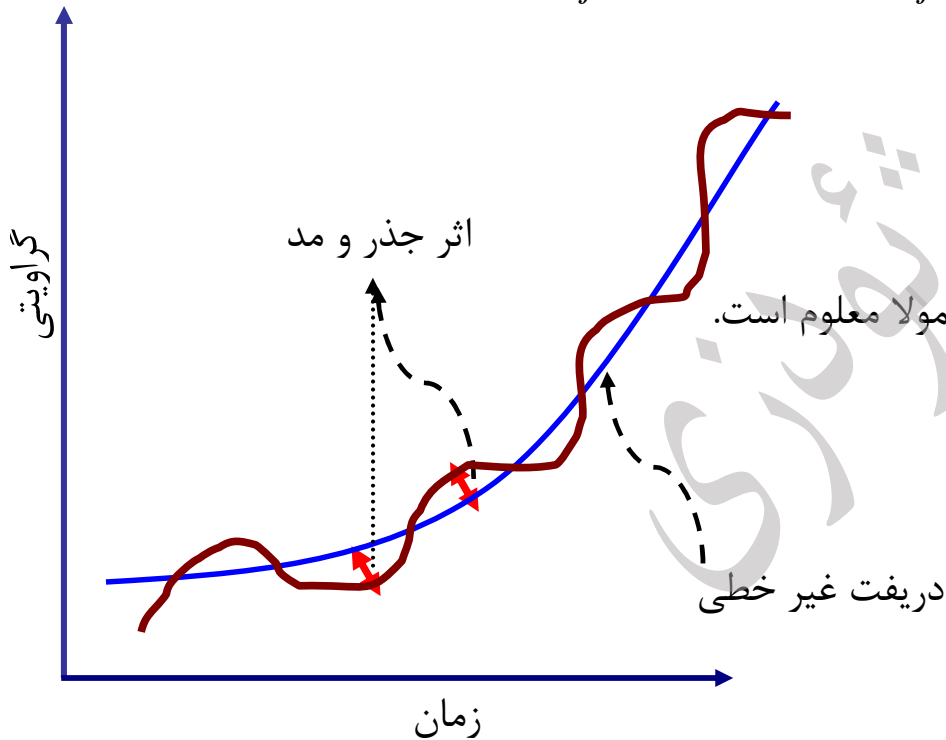
t_1 : زمان قرائت در نقطه j ، معلوم

سرشکنی شبکه های گراویمتری

معادله مشاهده گراویمتر فنی با دریافت غیر خطی:

مثال دریافت درجه دوم:

$$g_i - g_j = \gamma (R_i - R_j) + D_1 (t_i - t_j)^2 + D_2 (t_i - t_j)$$



g_i : گراویتی در نقطه i ، مجهول یا معلوم

g_j : گراویتی در نقطه j ، معلوم یا مجهول

: ضریب مقیاس گراویمتر (مربوط به دریافت بلند مدت)، معمولاً معلوم است.

R_i : قرائت گراویمتر در نقطه i ، مجهول یا معلوم

R_j : قرائت گراویمتر در نقطه j ، معلوم یا مجهول

D_1 و D_2 : پارامترهای دریافت، مجهول

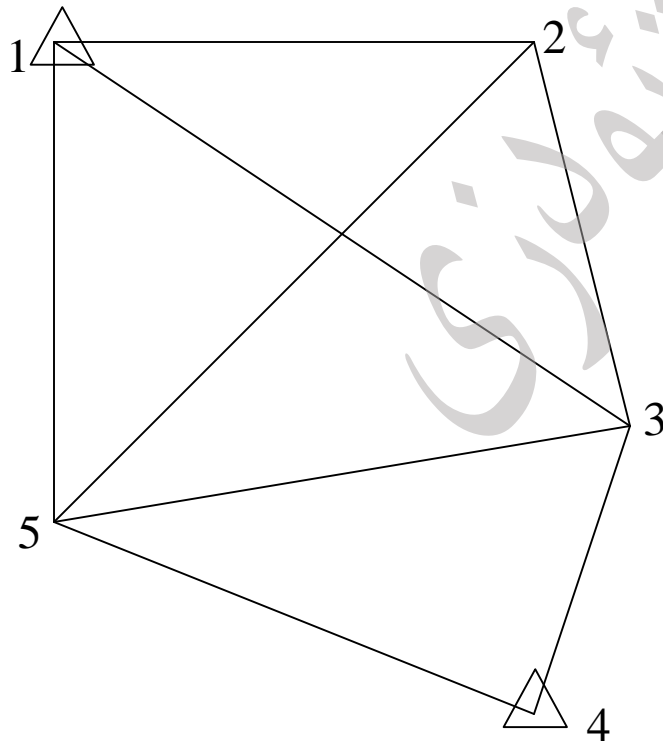
t_2 : زمان قرائت رد نقطه i ، معلوم

t_1 : زمان قرائت در نقطه j ، معلوم

سرشکنی شبکه های گراویمتری

سرشکنی بروش کمترین مربعات با پارامترهای وزندار

در این روش معلومات مساله نیز که در حالت استاندارد ثابت بوده و دارای دقت بینهایت هستند، را با دقت خود وارد پروسه کمترین مربعات کرده و به آنها اجازه سرشکنی در حدود دقت خودشان خواهیم داد. بدین ترتیب در این مدل معلومات مساله به میزان دقتشان سرشکن می شوند. با توجه به اینکه چنانچه نسبت به معلومات هم بخواهیم مشتق گیری کنیم ماتریس ضرایب کمبود رنک پیدا می کند، معلومات بعنوان یک شبه مشاهده در قالب یک مدل ریاضی جدید وارد شده و به مجهولات مساله اضافه می شوند. حضور این دسته از معادلات (اضافی) مانع از سینگولار شدن معادلات نرمال خواهد شد.



مشاهدات:

$$u g_{ij} = R_j - R_i; \quad C_{ug}$$

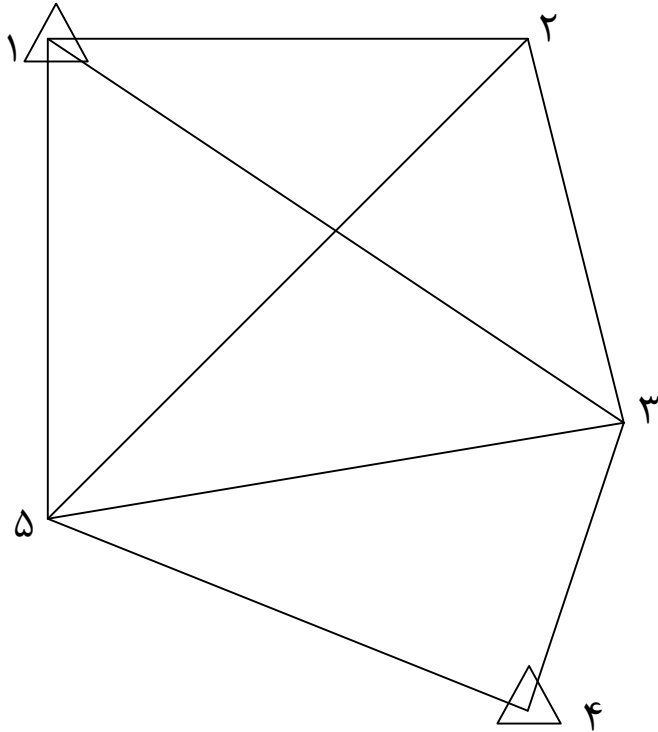
$$L = u g = \begin{bmatrix} u g_{12} \\ u g_{23} \\ u g_{34} \\ u g_{45} \\ u g_{51} \\ u g_{13} \\ u g_{35} \\ u g_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_5 - R_2 \end{bmatrix}$$

سرشکنی شبکه های گراویمتری

نقاط معلوم

مجهولات

مدل ریاضی:



$$g^{(0)} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix}; \quad C_{g^{(0)}}$$

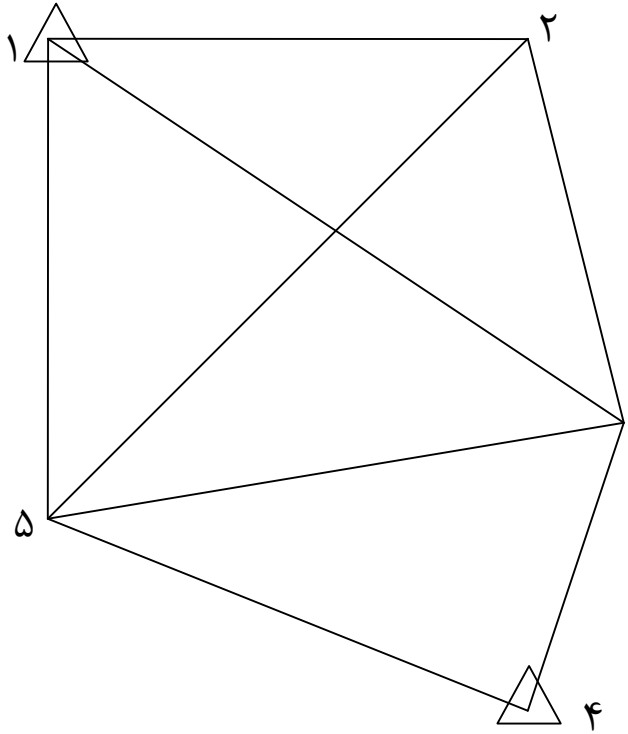
$$X = g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ D \end{bmatrix} = ?; \quad C_g = ?$$

$$\begin{cases} L = AX; \\ L^* = BX \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u g = A g; \\ g^{(0)} = B g \end{cases}$$

$$\hat{g} = \underbrace{(A^T C_{u g}^{-1} A)}_{\text{Singular}} + \underbrace{B^T C_{u g^{(0)}}^{-1} B}_{\text{effect of second model}} \underbrace{\quad}_{\text{Regular}}^{-1} (A^T C_{u g}^{-1} u g + B^T C_{u g^{(0)}}^{-1} g^{(0)})$$

$$C_{\hat{g}} = \left(A^T C_{u g}^{-1} A + B^T C_{u g^{(0)}}^{-1} B \right)^{-1}$$

سروشکنی شبکه های گراویمتری



$$L = u g = \begin{bmatrix} u g_{12} \\ u g_{23} \\ u g_{34} \\ u g_{45} \\ u g_{51} \\ u g_{13} \\ u g_{35} \\ u g_{52} \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_3 \\ \vdots \\ R'_5 - R'_2 \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{G_{8 \times 9}} \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R'_3 \\ R'_5 \\ R'_2 \end{bmatrix}}_{R_{9 \times 1}}$$

$$C_{u g} = G C_R G^T$$

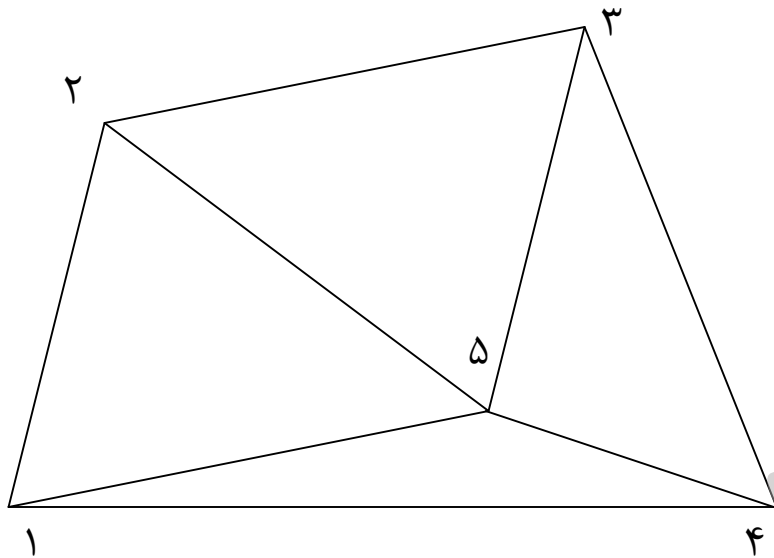
$$A = \frac{\partial L}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u g_1}{\partial g_1} & \frac{\partial u g_1}{\partial g_2} & \frac{\partial u g_1}{\partial g_3} & \frac{\partial u g_1}{\partial g_4} & \frac{\partial u g_1}{\partial g_5} & \frac{\partial u g_1}{\partial D} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial u g_8}{\partial g_1} & \frac{\partial u g_8}{\partial g_2} & \frac{\partial u g_8}{\partial g_3} & \frac{\partial u g_8}{\partial g_4} & \frac{\partial u g_8}{\partial g_5} & \frac{\partial u g_1}{\partial D} \end{bmatrix}$$

۳۵

$$\begin{cases} g_1^{(0)} - g_1 = 0; \\ g_4^{(0)} - g_4 = 0. \end{cases} \quad B = \frac{\partial L^*}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1^*}{\partial g_1} & \frac{\partial L_1^*}{\partial g_2} & \frac{\partial L_1^*}{\partial g_3} & \frac{\partial L_1^*}{\partial g_4} & \frac{\partial L_1^*}{\partial g_5} & \frac{\partial L_1^*}{\partial D} \\ \frac{\partial L_2^*}{\partial g_1} & \frac{\partial L_2^*}{\partial g_2} & \frac{\partial L_2^*}{\partial g_3} & \frac{\partial L_2^*}{\partial g_4} & \frac{\partial L_2^*}{\partial g_5} & \frac{\partial L_2^*}{\partial D} \end{bmatrix}$$

$$C_{g^{(0)}} = \begin{bmatrix} \dagger_1^2 & \dagger_{14} \\ \dagger_{41} & \dagger_4^2 \end{bmatrix}$$

سرشکنی شبکه های گراویمتری



نقطه	قرائت میلی گال	زمان	دقت قرائت میکروگال
1	۳۲۲۵.۲۳۵	۱۰:۲۰	۲۳
2	۳۴۲۵.۵۶۲	۱۰:۴۵	۱۶
3	۳۵۶۲.۸۹۵	۱۱:۰۳	۲۵
۴	۳۷۶۳.۲۰۱	۱۱:۳۳	۱۹
1	۳۲۲۵.۲۴۰	۱۱:۵۲	۲۴
۵	۳۳۲۱.۰۸۹	۱۲:۱۲	۲۵
۳	۳۵۶۲.۹۰۷	۱۲:۲۶	۲۱
۵	۳۳۲۱.۰۹۳	۱۲:۴۸	۲۸
۴	۳۷۶۳.۲۱۱	۱۳:۰۹	۱۴
۵	۳۳۲۱.۰۹۸	۱۳:۳۱	۲۲
۲	۳۴۲۵.۵۸۱	۱۴:۰۹	۱۸

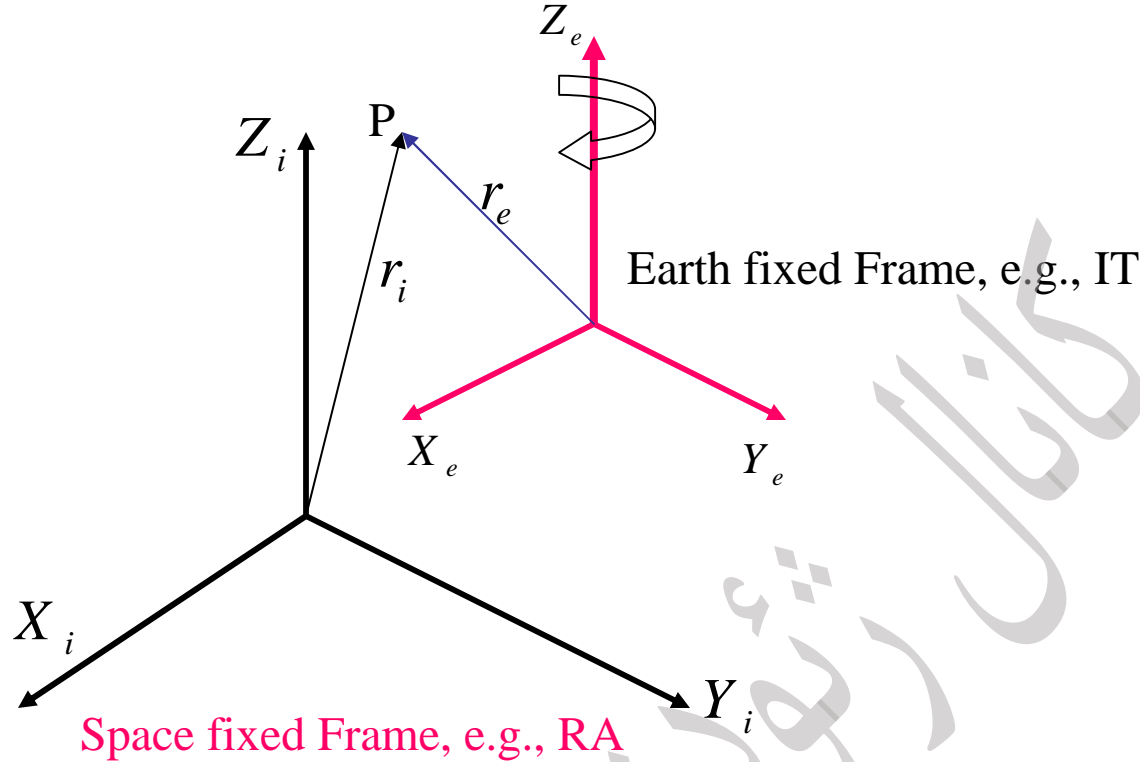
تمرین شبکه گراویمتری با اطلاعات فوق را با در فرض خطی بودن دریافت در دو حالت

۱- معلوم بودن ضریب مقیاس $=0.999970$

۲- مجهول بودن آن سرشکن نمایید.

نقاط ۲ و ۴ ثابت هستند. شتاب ثقل مطلق و دقت اندازه گیری آنها معلوم است.

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوه‌های متحرک



معادله حرکت در یک فریم دورانی:

$$R\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_e; \quad R = R(\check{S}(t))$$

$$\mathbf{r}_i = R^T \mathbf{r}_e; \quad \xrightarrow{\text{time derivative}} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = R^T \dot{\mathbf{r}}_e + \dot{R}^T \mathbf{r}_e \quad \xrightarrow{\times R} \quad R\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_e + RR^T \mathbf{r}_e$$

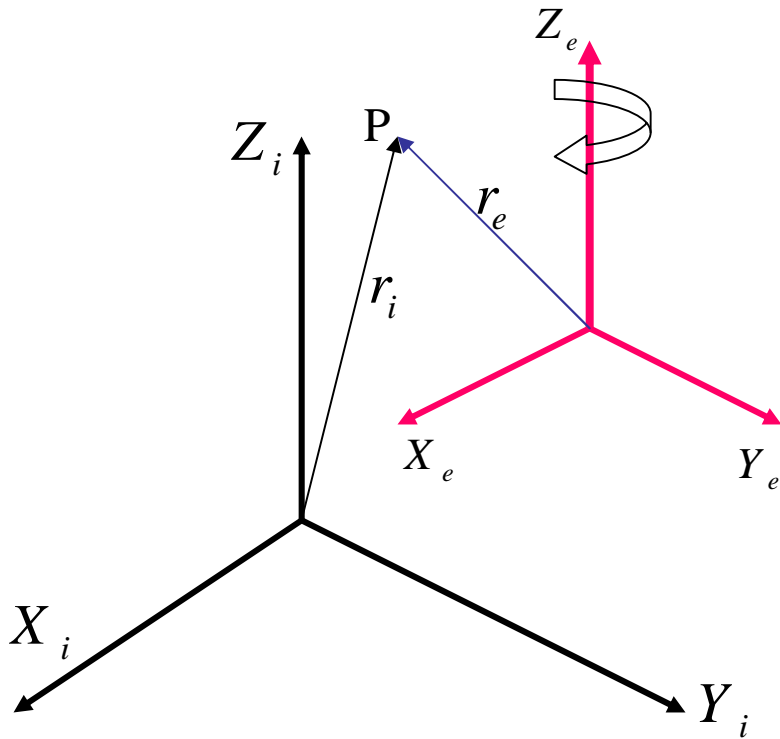
$$R\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_e + \Omega \mathbf{r}_e$$

ماتریس کارتان نرخ دوران را می دهد:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک



$$R^T \Omega \dot{\mathbf{r}}_e = \underbrace{R^T R}_{I} \dot{R}^T \dot{\mathbf{r}}_e = \dot{R}^T \dot{\mathbf{r}}_e$$

$$RR^T = I \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(RR^T) = \underbrace{\dot{R}R^T}_{\Omega^T} + \underbrace{R\dot{R}^T}_{\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega^T = -\Omega$$

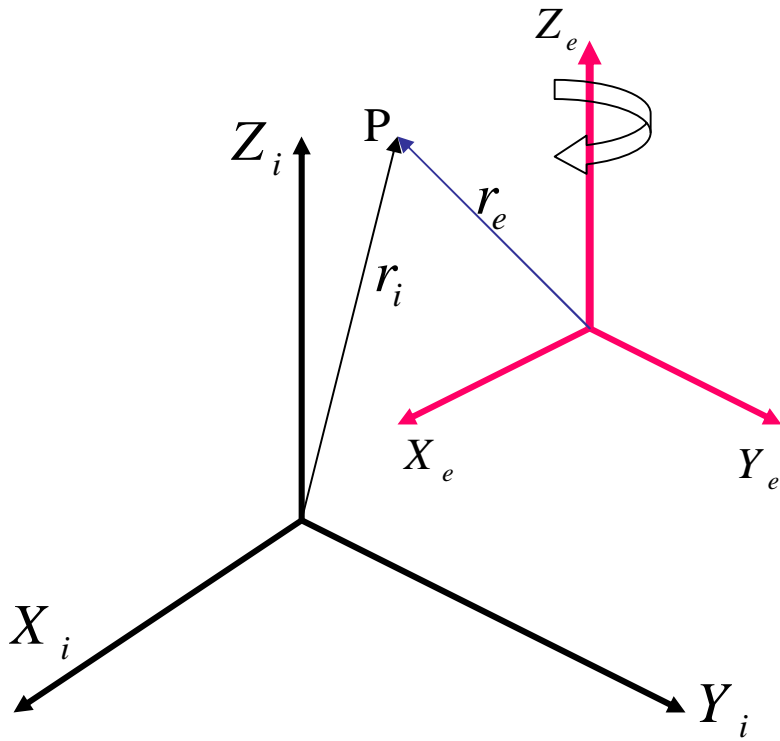
$$R\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_e + \Omega \mathbf{r}_e \xrightarrow{\times R^T} R^T R \dot{\mathbf{r}}_i = R^T \dot{\mathbf{r}}_e + R^T \Omega \mathbf{r}_e \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i = R^T \dot{\mathbf{r}}_e + R^T \Omega \mathbf{r}_e$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = R^T \dot{\mathbf{r}}_e + R^T \Omega \mathbf{r}_e \xrightarrow{\text{time derivative}} \ddot{\mathbf{r}}_i = R^T \ddot{\mathbf{r}}_e + \dot{R}^T \dot{\mathbf{r}}_e + \dot{R}^T \Omega \mathbf{r}_e + R^T \dot{\Omega} \mathbf{r}_e + \underbrace{R^T \Omega \dot{\mathbf{r}}_e}_{\text{circled}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = R^T \ddot{\mathbf{r}}_e + 2\dot{R}^T \dot{\mathbf{r}}_e + \dot{R}^T \Omega \mathbf{r}_e + R^T \dot{\Omega} \mathbf{r}_e \xrightarrow{\times R} R\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_e + 2\Omega \dot{\mathbf{r}}_e + \Omega \Omega \mathbf{r}_e + \dot{\Omega} \mathbf{r}_e$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = R\ddot{\mathbf{r}}_i - 2\Omega \dot{\mathbf{r}}_e - \Omega \Omega \mathbf{r}_e - \dot{\Omega} \mathbf{r}_e$$

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک



$$\ddot{\mathbf{r}}_e = R\ddot{\mathbf{r}}_i - 2\Omega\dot{\mathbf{r}}_e - \Omega\Omega\mathbf{r}_e - \dot{\Omega}\mathbf{r}_e$$

$R\ddot{\mathbf{r}}_i$: شتاب ذره P نسبت به فریم اینرسیال

$2\Omega\dot{\mathbf{r}}_e$: شتاب کریولیس: ناشی از حرکت روی فریم دورانی زمین

$\Omega\Omega\mathbf{r}_e$: شتاب گریز از مرکز: ناشی از موقعیت روی فریم زمین

$\dot{\Omega}\mathbf{r}_e$: شتاب اوپلر: ناشی از ثابت نبودن وضعیت دوران

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوه‌های متحرک

$$\Omega r = \check{S} \times r$$

$$R_1(\check{S}_1 t) : \Omega_1 = R_1(\check{S}_1 t) \cdot \dot{R}_1^T(\check{S}_1 t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \check{S}_1 t & \sin \check{S}_1 t \\ 0 & -\sin \check{S}_1 t & \cos \check{S}_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \check{S}_1 t & \cos \check{S}_1 t \\ 0 & -\cos \check{S}_1 t & -\sin \check{S}_1 t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\check{S}_1 \\ 0 & \check{S}_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_2(\check{S}_2 t) : \Omega_2 = R_2(\check{S}_2 t) \cdot \dot{R}_2^T(\check{S}_2 t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \check{S}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\check{S}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_3(\check{S}_3 t) : \Omega_3 = R_3(\check{S}_3 t) \cdot \dot{R}_3^T(\check{S}_3 t) = \begin{pmatrix} 0 & -\check{S}_1 & 0 \\ \check{S}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\check{S}_3 & \check{S}_2 \\ \check{S}_3 & 0 & -\check{S}_1 \\ -\check{S}_2 & \check{S}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{پاد متقارن} \quad \Omega \times r = -r \times \Omega$$

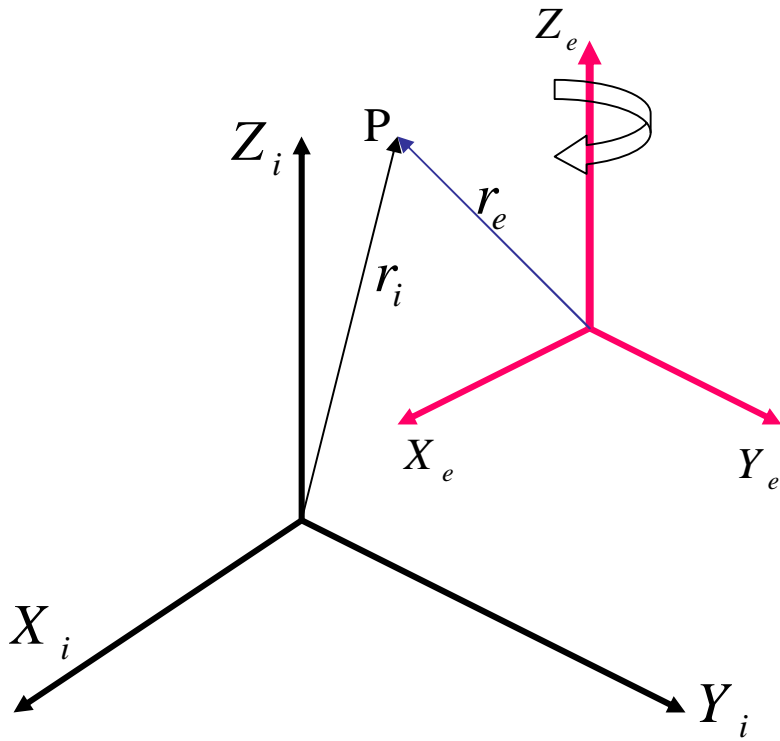
$$\begin{pmatrix} 0 & -\check{S}_3 & \check{S}_2 \\ \check{S}_3 & 0 & -\check{S}_1 \\ -\check{S}_2 & \check{S}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\check{S}_3 y + \check{S}_2 z \\ \check{S}_3 x - \check{S}_1 z \\ -\check{S}_2 x + \check{S}_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{S}_1 \\ \check{S}_2 \\ \check{S}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن رابطه بالا می توان شتابهای کریولیس، گریز از مرکز و اویلر را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \dot{r}_e &= R \dot{r}_i - \omega \times r_e \\ \ddot{r}_e &= R \ddot{r}_i - 2\omega \times \dot{r}_e - \omega \times (\omega \times r_e) - \dot{\omega} \times r_e \end{aligned}$$

تمرین: درستی روابط را نشان دهید

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک



$$\mathbf{r}_e = R_3(\text{GAST})\mathbf{r}_i \quad \text{or} \quad \mathbf{r}_e = R_3(\omega t)\mathbf{r}_i$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \dot{\Omega} = 0$$

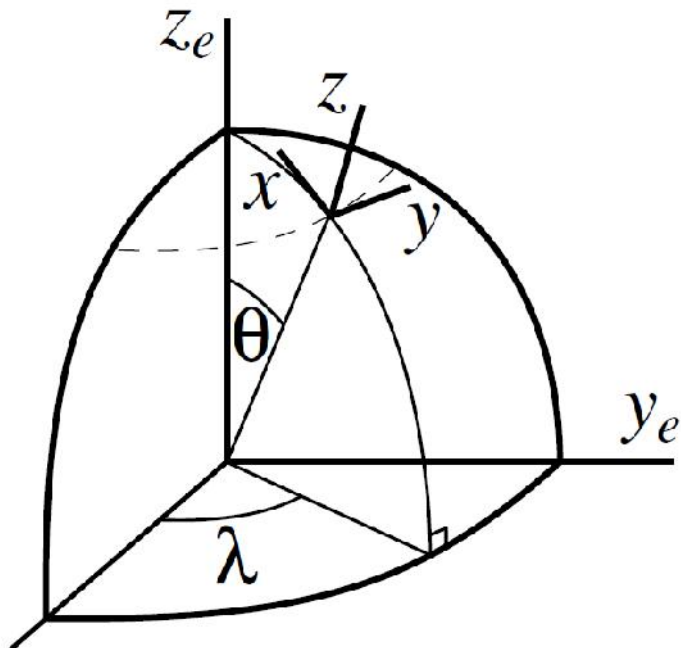
$$\text{coriolis} = -2\Omega\dot{\mathbf{r}}_e = -2 \begin{pmatrix} 0 & -\check{S} & 0 \\ \check{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} = -2\check{S} \begin{pmatrix} \dot{y}_e \\ -\dot{x}_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{centrifugal} = -\Omega\Omega\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\check{S} & 0 \\ \check{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\check{S} & 0 \\ \check{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = -\check{S}^2 \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Euler} = -\dot{\Omega}\mathbf{r}_e = 0$$

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک

با فرض عدم حرکت روی مولفه ارتفاع r



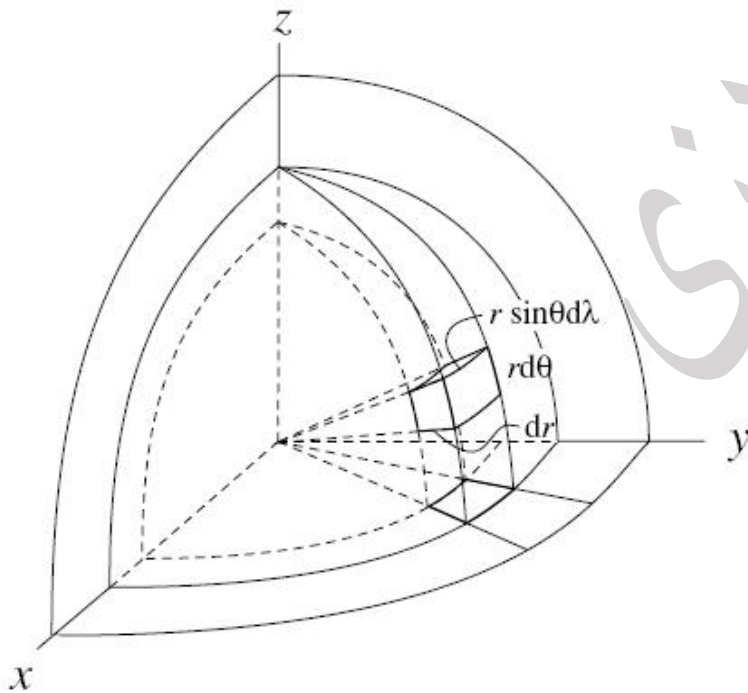
$$\mathbf{r}_e = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_e = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \dot{\theta} + r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\lambda}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \lambda v_N - \sin \lambda v_E \\ -\cos \theta \sin \lambda v_N + \cos \lambda v_E \\ \sin \theta v_N \end{pmatrix}$$

$$v_N = -r\dot{\theta} \quad \text{and} \quad v_E = r \sin \theta \dot{\lambda}.$$

$$\mathbf{a}_{\text{Cor.,e}} = 2\omega \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \lambda v_N + \cos \lambda v_E \\ \cos \theta \cos \lambda v_N + \sin \lambda v_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

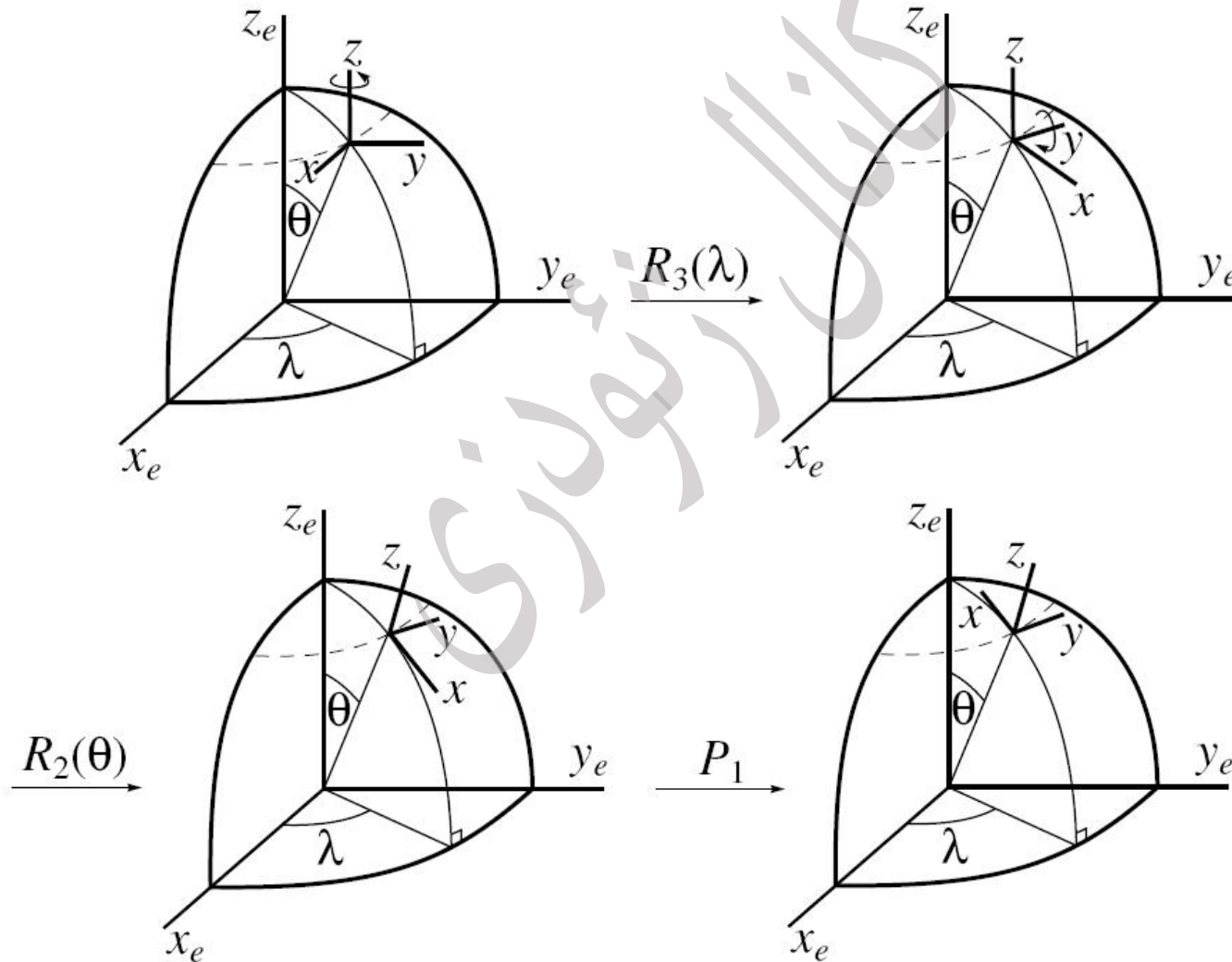


$$\mathbf{a}_{\text{Cor.,t}} = P_1 R_2(\theta) R_3(\lambda) \mathbf{a}_{\text{Cor.,e}} = 2\omega \begin{pmatrix} -\cos \theta v_E \\ \cos \theta v_N \\ \sin \theta v_E \end{pmatrix}$$

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوه‌های متحرک

$$\mathbf{a}_{\text{Cor.,t}} = P_1 R_2(\theta) R_3(\lambda) \mathbf{a}_{\text{Cor.,e}} = 2\omega \begin{pmatrix} -\cos \theta v_E \\ \cos \theta v_N \\ \sin \theta v_E \end{pmatrix}$$

تبدیل سیستم ژئوسنتریک به محلی




اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک

$$\mathbf{a}_{Cor.,t} = P_1 R_2(\theta) R_3(\lambda) \mathbf{a}_{Cor.,e} = 2\omega \begin{pmatrix} -\cos \theta v_E \\ \cos \theta v_N \\ \sin \theta v_E \end{pmatrix}$$

همانطور که در فرمول فوق دیده می شود، تنها حرکت در راستای شرقی-غربی کشتی مولفه قائم ایجاد می کند. می توان گفت که حرکت شرقی-غربی سرعت دوران زمین را تغییر می دهد. این حرکت را می توان با حرکت دورانی زمین تلفیق کرد. در این حالت می توان دو اثر (حرکت + گریز از مرکز) را در یک اثر لحاظ کرد:

$$g_{Cor} = 2\check{S} \sin \alpha \hat{E}$$

$$g_{Eto} = r\check{S}'^2 \sin^2 \alpha = r(\check{S} + d\check{S})^2 \sin^2 \alpha$$


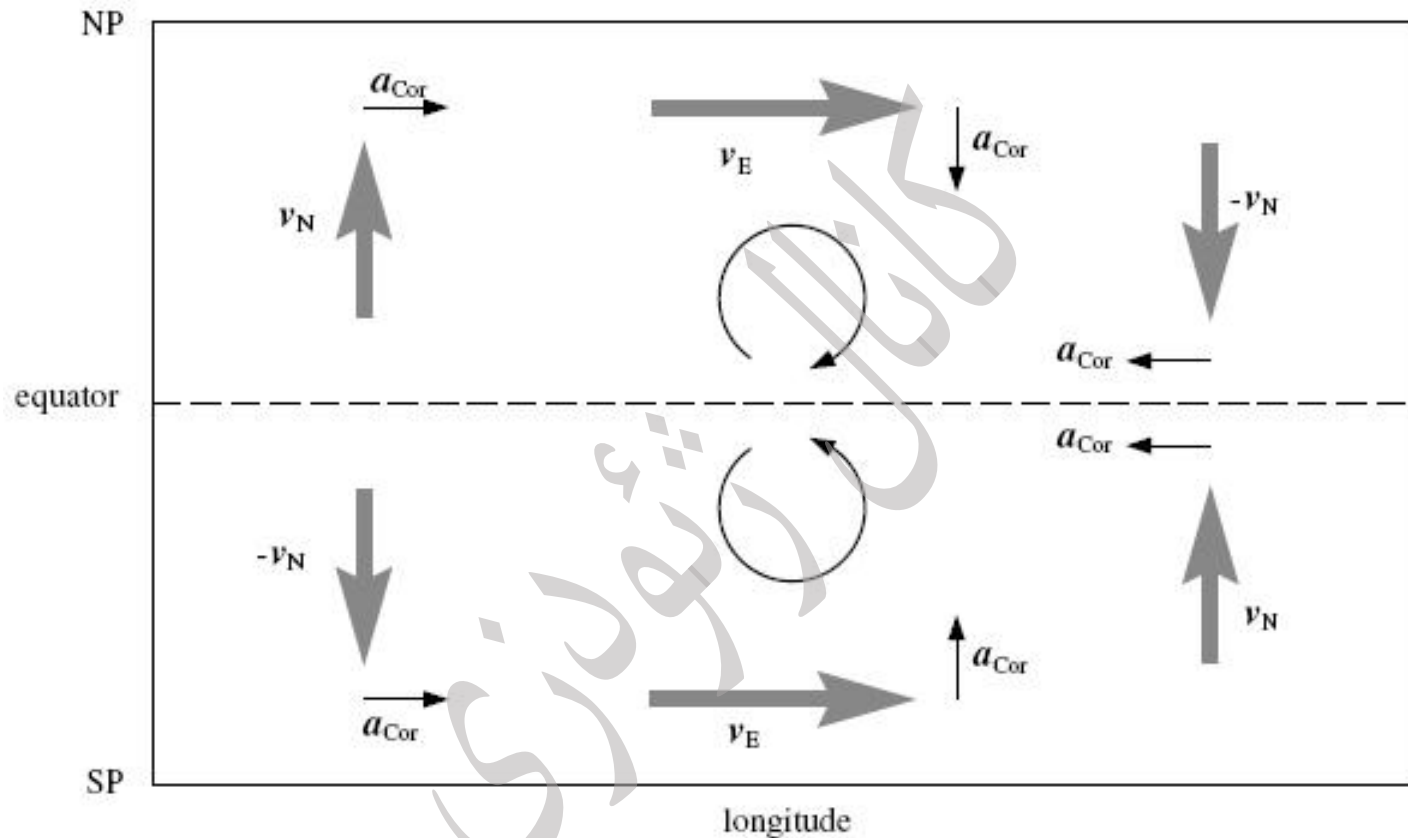
مجموع دو تصحیح را تصحیح انوش می گویند:

$$g_{Eto} \approx \underbrace{r\check{S}^2 \sin^2 \alpha}_{\text{Centrifugal}} + \underbrace{2\check{S} r d\check{S} \sin^2 \alpha}_{\text{Coriolis}} = r\check{S}^2 \sin^2 \alpha + 2\check{S} r \frac{\hat{E}}{r \sin \alpha} \sin^2 \alpha$$

$$g_{Eto} = r\check{S}^2 \sin^2 \alpha + 2\check{S} \hat{E} \sin \alpha$$

اندازه گیری شتاب ثقل در سکوهای متحرک

مولفه افقی شتاب کریولیس عامل ایجاد جریانهای جوی و اقیانوسی است.

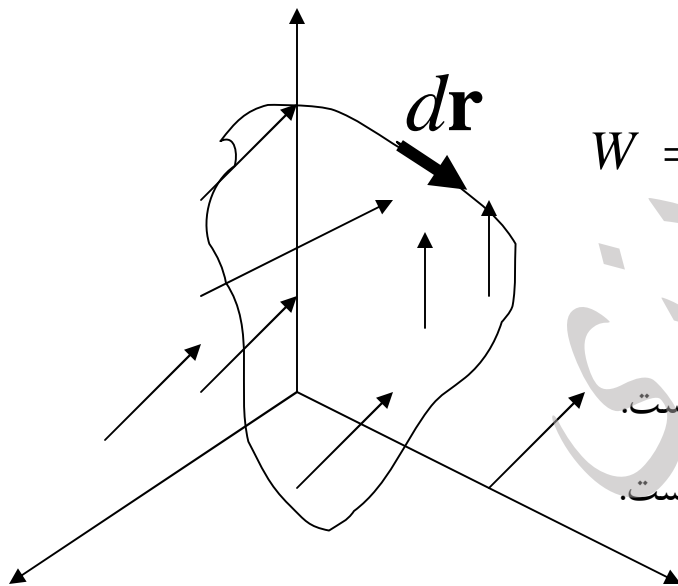


Suppose you are doing airborne gravimetry. You are flying with a constant 400 km/h in Eastward direction. Calculate the horizontal Coriolis acceleration. How large is the Eotvos correction? How accurately do you need to determine your velocity to have the Eotvos correction precise down to 1mGal? Do the same calculations for a Northbound flight-path.

مبانی تئوری پتانسیل

برای مطالعه میدان ثقل زمین کار کردن با شتاب جاذبه زمین متناظر با کار کردن با یک میدان برداری ۳ بعدی است. یعنی برای هر نقطه از زمین ما نیاز به ۳ مولفه (g_x, g_y, g_z) داریم. می توان میدان ۳ بعدی را با یک میدان اسکالر (عددی) جایگزین کرد بطوریکه هیچ اطلاعاتی را از دست نداد. البته این تنها برای میدانهای برداری کنسرواتیو (پایا، پایستار، غیردورانی) امکان پذیر است.

بنا به تعریف میدان برداری V را کنسرواتیو می گوئیم، اگر کار انجام شده در این میدان به مسیر حرکت بستگی نداشته باشد. بنا به تعریف ریاضی داریم:

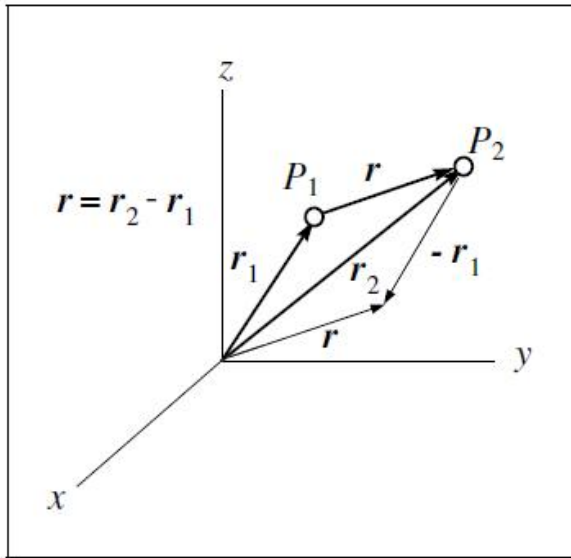


$$W = G \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0$$

می توان اثبات کرد که میدان پتانسیل زمین نیز یک میدان غیر دورانی است. برای این منظور می توان نشان داد که کرل شتاب گرانش زمین g صفر است.

مبانی تئوری پتانسیل

• ثابت کنید که میدان جاذبی غیر دورانی است



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \text{ and } r = |\mathbf{r}|$$

$$\mathbf{a} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_{12} = -G \frac{m \mathbf{r}}{r^2 r} = -G \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

$$= -G \frac{m}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \frac{GM}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix} = GM \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x-x_1}{r^3} & \frac{y-y_1}{r^3} & \frac{z-z_1}{r^3} \end{pmatrix}$$

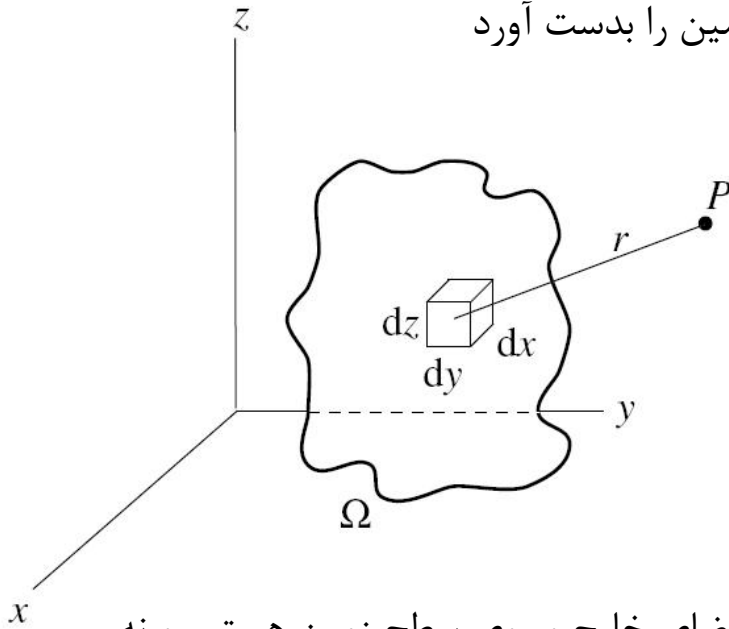
$$= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z-z_1}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-y_1}{r^3} \right) + \mathbf{j} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{z-z_1}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{x-x_1}{r^3} \right) + \mathbf{k} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \frac{x-x_1}{r^3} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{y-y_1}{r^3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z-z_1}{r^3} = \frac{(z-z_1)(y-y_1)}{r^5}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-y_1}{r^3} = \frac{(y-y_1)(z-z_1)}{r^5}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{z-z_1}{r^3} = \frac{(z-z_1)(x-x_1)}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{x-x_1}{r^3} = \frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r^5}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-x_1}{r^3} = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r^5}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{y-y_1}{r^3} = \frac{(y-y_1)(x-x_1)}{r^5}$$

مبانی تئوری پتانسیل

بر اساس انتگرال نیوتن (ژئودزی ۱) تنها در صورتی می توان میدان پتانسیل زمین را بدست آورد که توزیع دانسیته و مختصات سطح زمین موجود باشد:



$$W_g(x, y, z) = G \iiint_B \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz'$$

تمرین: رابطه انتگرال نیوتن را اثبات نمایید.

با توجه به مجهول بودن توزیع دانسیته در داخل جرم زمین،

انتگرال نیوتن نمی تواند کمکی برای تعیین پتانسیل زمین داشته باشد.

البته باید توجه داشته باشیم که معمولاً ما نیازمند به تعیین میدان پتانسیل در فضای خارج و روی سطح زمین هستیم و نه داخل زمین. (پتانسیل داخل زمین مورد توجه ژئوفیزیک است).

سوالی که مطرح می شود این است که آیا بدون اطلاع از توزیع دانسیته در داخل یک جسم نظیر زمین می توان به میدان پتانسیل آن در فضای خارج آن پی برد؟

جواب: بلی. این مساله مقدار مرزی (Boundary Values Problem (BVP) است.

تئوری پتانسیل شاخه ای از فیزیک ریاضی است که در آن به پتانسیل، خواص آن و انواع مسایل مقدار مرزی می پردازد.

قبل از ورود به تئوری پتانسیل گرانشی باید کمی در مورد بردارها و قضیه های مورد نیاز ریاضی بپردازیم.

مبانی تئوری پتانسیل

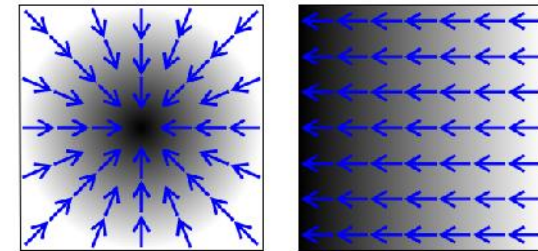
تعاریف اولیه

gradient: $\nabla f = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

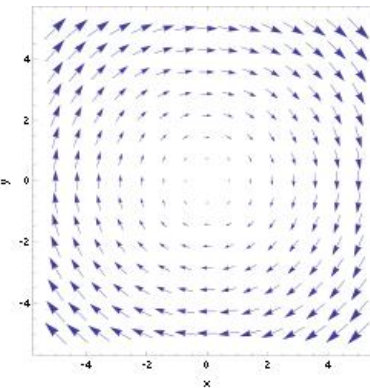
divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

curl, rotation: $\nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Laplace: $\Delta f = \text{delf} = \nabla \cdot \nabla f = \text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$



$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\hat{x} - x\hat{y}$$



گرادیان برداری است که بیشترین تغییرات یک تابع در آن جهت رخ می دهد.

دیورژانس یک تابع در ارتباط با فلو یا شار آن میدان است.

کرل یک فضای برداری در هر نقطه یک بردار است که جهت و اندازه دوران را تعریف می کند. عموماً حاصلضرب خارجی در ارتباط با تعریف یک دوران است. مثل تعریف گشتاور

مبانی تئوری پتانسیل

خواص اولیه:

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$r = |\underline{\mathbf{r}}| \quad \nabla r^n = nr^{n-2} \underline{\mathbf{r}}$$

$$\nabla \cdot r^n \underline{\mathbf{r}} = (n+3)r^n$$

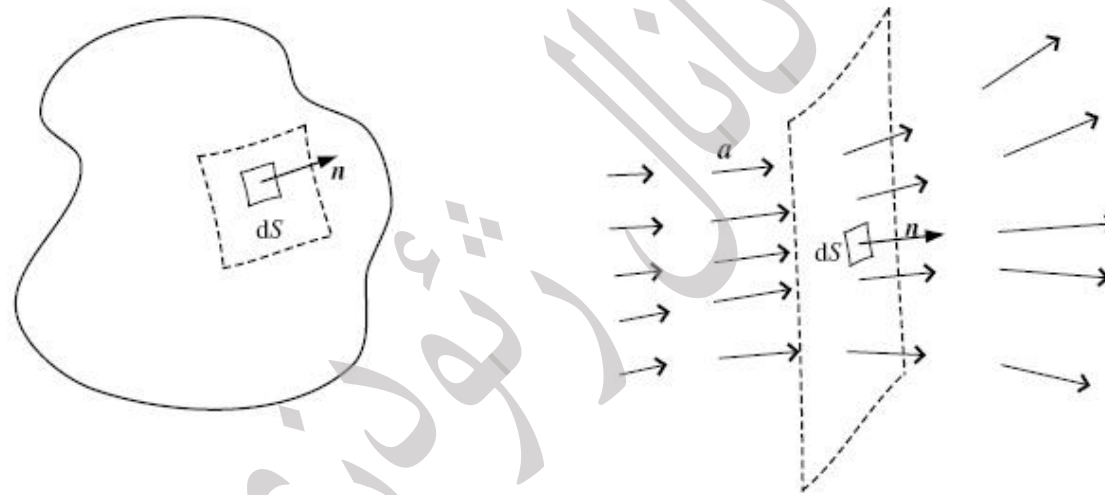
$$\nabla \times r^n \underline{\mathbf{r}} = 0$$

$$\Delta r^n = \nabla \cdot (nr^{n-2} \underline{\mathbf{r}}) = n(n+1)r^{n-2}$$

مبانی تئوری پتانسیل

دیورژانس میدان - قانون گوس

شار یا فلوی یک میدان تعداد خطوط گذرنده بر واحد سطح است. برای مثال معمولا می توان میزان جریان عبوری از یک رودخانه را در نظر گرفت و یا تعداد عبور خطوط میدان مغناطیسی ناشی از یک آهنربا. شار یا فلوی را می توان از حاصلضرب بردار نرمال بر سطح و بردارهای میدان بدست آورد.

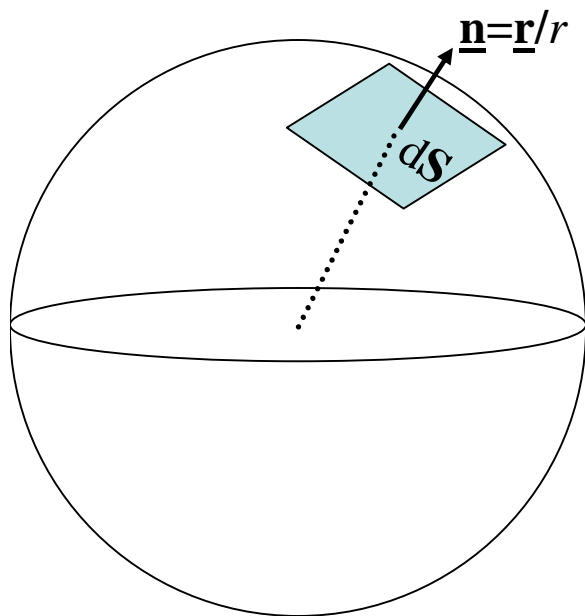


کل شار یا فلوی یک میدان گذرنده از یک سطح بسته برابر است با:

$$\text{total flow} = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

مبانی تئوری پتانسیل

دیورژانس میدان - قانون گوس:
میدان یا شار یک کره با شعاع r :



$$d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \mathbf{r} r \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=f} \int_{\phi=0}^{\phi=2f} -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} r \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\theta=0}^{\theta=f} \int_{\phi=0}^{\phi=2f} GM \sin \theta d\theta d\phi = -GM \int_0^{2f} \int_0^f \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -2f GM \cos \theta \Big|_0^f = -4f GM$$

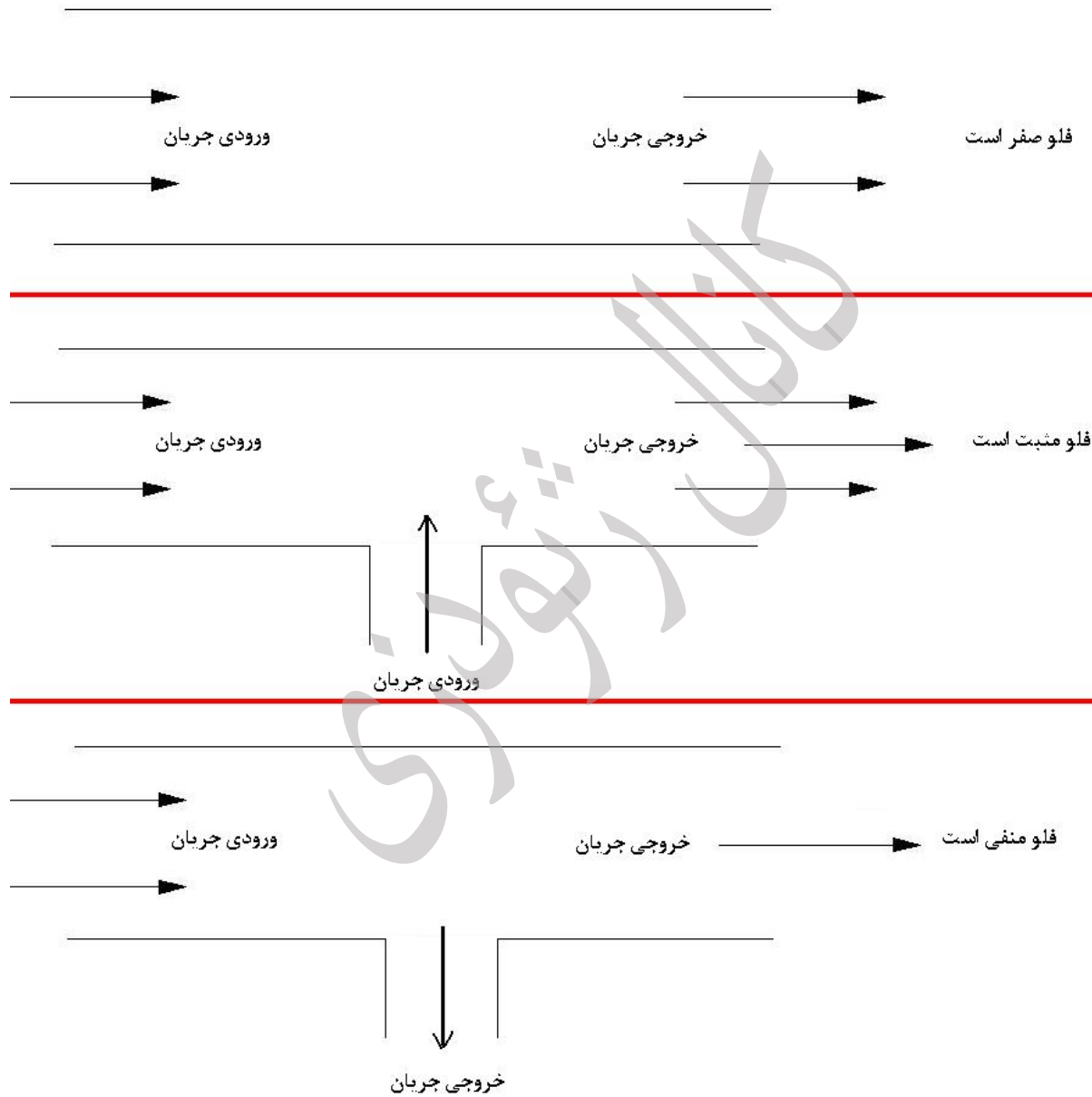
حد فلوئید گذرنده از سطح بسته S وقتی که حجم سطح بسته S به سمت صفر میل کند تعبیر فیزیکی دیورژانس می باشد.

$$\text{div } \mathbf{g} = \nabla \cdot \mathbf{g} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{-4f GM}{V} = -4f G \dots$$

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{a} dV = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

مبانی تئوری پتانسیل

دیورژانس میدان



مبانی تئوری پتانسیل

دیورژانس میدان

دیورژانس برای مطالعه نقطه به نقطه میدان ثقل است که کدام نقطه چشمه و کدام نقطه سوراخ است. در این جا دو حالت کلی زیر اتفاق می افتد:

۱- در جایی که جرم وجود دارد (فضای داخل زمین):
باتوجه به اینکه G و مقادیر مثبتی هستند، پس یعنی در همه جای میدان ثقل دیورژانس منفی است. همچنین در سطح زمین با عوض شدن دانسیته، دیورژانس هم عوض می شود.

۲- در فضای خارج زمین:
با نبود جرم و صفر بودن دانسیته دیورژانس هم صفر می شود.

$$\operatorname{div} a = \begin{cases} -4\pi G\rho & (\text{inside}) \rightarrow \text{Poisson معادله} \\ 0 & (\text{outside}) \rightarrow \text{Laplace معادله} \end{cases}$$

مبانی تئوری پتانسیل

میدان لاپلاس و توابع هارمونیک

هر میدان برداری غیر دورانی که دیورژانس آن صفر باشد، میدان لاپلاس نامیده می شود. میدان جاذبه زمین در فضای بالای سطح زمین یک میدان لاپلاس است. زیرا اولاً غیر دورانی است و ثانیاً با توجه به صفر بودن دانسیته دارای دیورژانس صفر است.

با توجه به غیر دورانی بودن میدان جاذبه می توان نوشت:

$$\mathbf{g}_g = \nabla W_g$$

و با توجه به صفر بودن دیورژانس داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_g = 0$$

لذا داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_g = \nabla \cdot \nabla W_g = \nabla^2 W_g = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_g(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g(x, y, z)}{\partial z^2} = 0$$

توابع هارمونیک: هر تابع اسکالر که لاپلاسیان آن صفر باشد، تابع هارمونیک نامیده می شود. توابع هارمونیک توابعی تحلیلی بوده و دارای مستقات متوالی هستند.

تمرین: نشان دهید که تابع معکوس فاصله هارمونیک است:

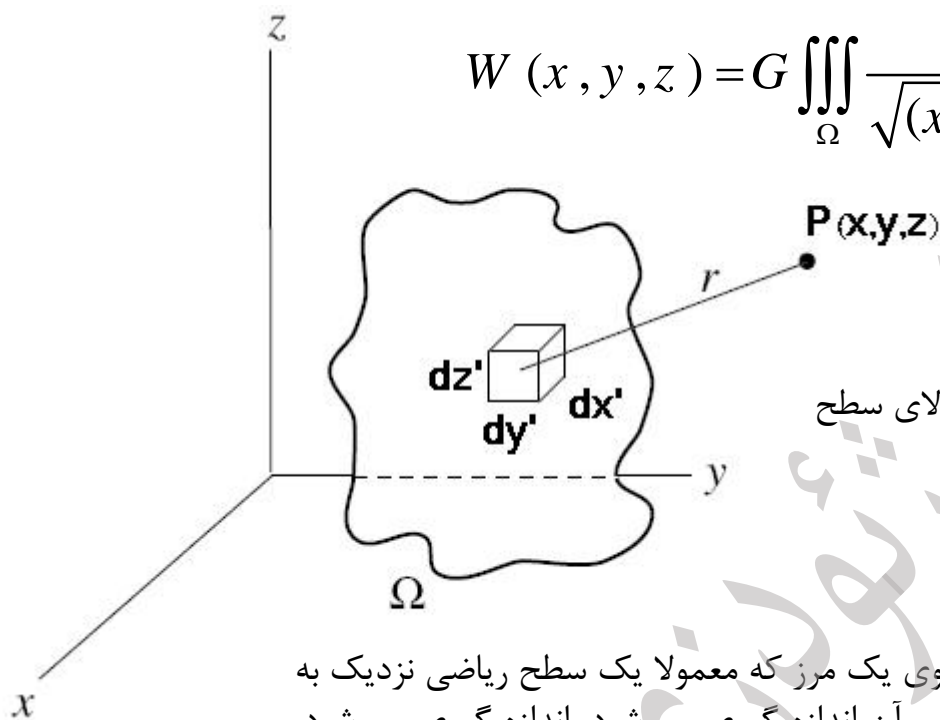
$$L = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که پتانسیل ناشی از یک جرم نقطه مادی بجرم M هارمونیک است. ۵۵

مسایل مقدار مرزی

با استفاده از انتگرال نیوتن می توان پتانسیل جاذبی در هر نقطه را بدست آورد:

$$W(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$



تنها مشکل عدم آگاهی از تابع دانسیته (x', y', z') است.

برای این منظور باید با استفاده از اطلاعاتی که از سطح زمین و یا بالای سطح زمین اندازه گیری می شود، پی به میدان جاذبه زمین برد.

این مساله همان مسائل مقدار مرزی است. در مساله مقدار مرزی، روی یک مرز که معمولا یک سطح ریاضی نزدیک به سطح جسم مورد نظر است مقادیر تابع و یا گرادیان (مشتق) ارتفاعی آن اندازه گیری می شود، اندازه گیری می شود. این مقادیر همان مقادیر مرزی هستند. سپس با استفاده از حل یک معادله دیفرانسیل مقدار تابع در فضا بدست می آید.

پس در هر مساله مقدار مرزی همیشه بدنبال (۱) یک مرز (بهمراه مقادیر مرزی) و

(۲) یک معادله دیفرانسیل که رفتار جسم در فضا را بما نشان بدهد.

مسائل مقدار مرزی

بر این اساس معمولاً سه نوع مساله مقدار مرزی وجود دارد.

۱- مساله دیریکله: مقدار تابع روی یک مرز مشخص است. هدف تعیین آن در فضای بیرون مرز (جسم) است.

۲- مساله نیومن: مقادیر گرادیان ارتفاعی روی مرز معلوم است.

۳- مساله مخلوط: یک ترکیب خطی از مقدار تابع و مقدار گرادیان ارتفاعی روی مرز معلوم است.

1 st BVP	2 nd BVP	3 rd BVP
Dirichlet	Neumann	Robin
Φ	$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$	$\Phi + c \frac{\partial \Phi}{\partial n}$

شرط منظم بودن تابع در بینهایت. بدون استفاده از این شرط نمی توان مساله مقدار مرزی را حل کرد.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0$$

حل معادله دیفرانسیل $\Phi(x, y, z) = 0$ در سیستم مختصات کارتزین

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

$$\Phi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 W_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial z^2} = f(x)''g(y)h(z) + f(x)g''(y)h(z) + f(x)g(y)h''(z)$$

$$\Phi(x, y, z) = f''gh + fg''h + fgh''$$

$$\div fgh \Rightarrow \Delta W_g(x, y, z) = \underbrace{\frac{f''}{f}}_{n^2} + \underbrace{\frac{g''}{g}}_{m^2} + \underbrace{\frac{h''}{h}}_{n^2+m^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f''}{f} = n^2 \Rightarrow f'' - n^2 f = 0 \\ \frac{g''}{g} = m^2 \Rightarrow g'' - m^2 g = 0 \\ \frac{h''}{h} = (n^2 + m^2) \Rightarrow h'' - (n^2 + m^2) h = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow f_1 = \cos nx, \quad f_2 = \sin nx$$

$$\rightarrow g_1 = \cos my, \quad g_2 = \sin my$$

$$\rightarrow h_1 = e^{\sqrt{m^2+n^2}z}, \quad h_2 = e^{-\sqrt{m^2+n^2}z}$$