۹۱- در پرتاب دو تاس سالم با هم، اگر A پیشامد آن‌که عدد رو شده‌ی تاس اول ۴ باشد و B پیشامد آن‌که اعداد رو شده‌ی دو تاس متمایز باشند، $P(A-B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۹۲- چهار وجه مکعب سالمی سفید و دو وجه دیگر آن سیاه است. این مکعب را ۳ مرتبه می‌اندازیم. احتمال این‌که هیچ دو پرتابی با رنگ یکسان پشت سر هم رخ ندهد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۲۷}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۹۳- اگر $A=\{x \mid x<۲x+۱\leq ۳\}$ و $B=[a,b)$، آنگاه $A\cap B=[۰,۱)$ و $A\cup B=(-۱,۴)$. دوتایی مرتب $(a,b)$ کدام است؟

۱) $(-۱,۴)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۰,۴)$ ۴) $(۰,۲)$

۹۴- اگر $x=a$ یک جواب معادله‌ی $\frac{a-۱}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-a}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر a چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

۹۵- اگر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۲x^۲-۱}{x}$ در بازه‌ی $(-۰/۵,b)$ بالای خط به معادله‌ی $y=۱$ قرار گیرد، آنگاه بیش‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۹۶- اگر $\cot x=۱+\tan x$، حاصل $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

۹۷- به ازای کدام مقدار $\alpha$، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱+\cos x}{\sin^۲ x} & ,\ \pi<x<۲\pi\\ \frac{\pi}{x}+\frac{\alpha}{\pi} & ,\ ۰<x\leq \pi\end{cases}$ در $x=\pi$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۸- آهنگ متوسط تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع وقتی شعاع از $r=۱$ به $r=۳$ تغییر می‌کند، چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت در $r=۱/۵$ بیش‌تر است؟

۱) $\pi$ ۲) صفر ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۹۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{x-1}$، آهنگ متوسط تغییر از $x_1=2$ تا $x_2=5$، برابر آهنگ لحظـه‌ای تغییر در $x=\alpha$ است. $\alpha$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) $1+\sqrt{3}$
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۰- اگر $y=\sin^2 u$ و $u=\frac{\pi}{6}x^3$، حاصل $\frac{dy}{dx}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $-\frac{\pi}{4}$
۳) $-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

۱۰۱- حداقل یکی از فرزندان یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، دختر است. احتمال آن‌که در این خانواده تعداد فرزندان دختر بیش‌تر از فرزندان پسر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۰۲- در جعبه‌ای ۲ لامپ خراب و ۳ لامپ سالم یکسان وجود دارد، به‌تصادف یک لامپ از جعبه خارج کرده و آن‌را از لحاظ سالم بودن تست می‌کنیم و به جعبه برمی‌گردانیم. اگر $X$ تعداد آزمایش‌هایی باشد که در آن برای اولین بار لامپ سالم خارج شود، $P(X \le ۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۵}{۱۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱۹}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲۰}{۱۲۵}$

۱۰۳- هر یک از بیماران حاضر در اتاق انتظار یک مطب، با احتمال ۴۰ درصد بیماری آنفولانزا دارند. اگر ۵ بیمار در اتاق انتظار مطب نشسته باشند، چقدر احتمال دارد که حداقل ۳ نفر بیماری آنفولانزا داشته باشند ولی همه‌ی آن‌ها مبتلا به این بیماری نباشند؟

۱) ۰/۳۰۲۷ ۲) ۰/۲۷۸۲ ۳) ۰/۳۰۷۲ ۴) ۰/۲۶۸۲

۱۰۴- بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۴x + ۵$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

۱) $x = -۱$ ۲) $x = ۲$ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = ۴$

۱۰۵- در صورتی‌که منحنی تابع $y = ۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲}$، محور $x$ها را در طرفین محور $y$ها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات $a$ چگونه است؟

۱) $a > ۶$ یا $a < ۲$ ۲) $۲ < a < ۶$

۳) $a < \frac{۳}{۲}$ ۴) $a > \frac{۳}{۲}$

۱۰۶- مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x - ۳| + |x - ۱| = ۵$ کدام است؟

۱) جواب ندارد. ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۴

۱۰۷- اگر مجموعه‌ی $\{x \in R | -۲ < x < ۲\}$، دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ + ۳x$ باشد، آنگاه برد تابع با ضابطه‌ی $y = |f(x)|$ کدام بازه است؟

۱) $(-۲,۱۰)$ ۲) $(۲,۱۰)$ ۳) $[۰,۱۰)$ ۴) $(\frac{۹}{۴},۱۰)$

۱۰۸- اگر $[\frac{۱-x}{x}] = ۱$، آن‌گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[-۶x]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰۹- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[x]+[۳x]=۰$، بازه‌ی $[a,b)$ است؛ مقدار $b-a$ کدام است؟ ($[\ ]$ : جزء صحیح)

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax+۲a$ مفروض است. اگر عرض از مبدأ نمودار تابع $f^{-۱}$ برابر $(-۱)$ باشد، $a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۱۱- به ازای کدام مقدار k، رابطه‌ی $f=\{(-۱,۳k),(۲+k,۵),(-۱,-۹),(۶,k)\}$ یک تابع است؟

۱) $k=-۱$ ۲) $k=-۳$

۳) $k=-۹$ ۴) هیچ مقدار k

۱۱۲- اگر $\log_{(x-۱)}^{(۳x-۱)}=۳$، آنگاه $\log_{\frac{۱}{۳}}^{(۲x+۳)}$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۱۳- اگر $-۲۵^\circ<x<۳۰^\circ$ و $\cos ۲x=\frac{۲m-۱}{۲}$، آنگاه حدود تغییرات m کدام فاصله است؟

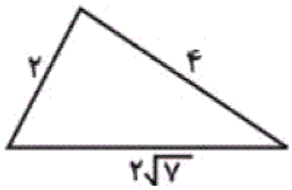
۱) $(۱,\frac{۳}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$

۳) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۲},\cos ۵۰^\circ)$

۱۱۴- با فرض $\tan ۲۲^\circ=\frac{۲}{۵}$، حاصل عبارت $\frac{\sin(-۱۱۲^\circ)+\sin ۱۵۸^\circ}{\cos(۲۰۲^\circ)}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۱۵- در مثلث شکل روبه‌رو، مقدار سینوس زاویه‌ی روبروی کوچک‌ترین ضلع کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۷}}{۱۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۱۴}$

۱۱۶- از تساوی $\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}\times B=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$، ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}$

۱۱۷- ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره همه‌ی رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد اعداد پنج‌رقمی حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۱۱۸- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموع ارقام آن‌ها ۶ باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

**۱۱۹-از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟**

۱) ۲۵ ۲) ۳۲

۳) ۳۰ ۴) ۳۵

**۱۲۰-مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی و چهار عضوی یک مجموعه‌ی ۸ عضوی، با تعداد زیرمجموعه‌های ... عضوی یک مجموعه‌ی ... عضوی برابر است.**

۱) ۳- ۹ ۲) ۵- ۸

۳) ۴- ۸ ۴) ۵- ۹

# پاسخ:

**-۹۱** *(حسن نصرتی ناهوک)*

$$A=\{(۴,۱),(۴,۲),\ldots,(۴,۶)\}$$

$$B'=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

$$A-B=A\cap B'=\{(۴,۴)\}\Rightarrow n(A-B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}\Rightarrow P(A-B)=\frac{۱}{۳۶}$$

*(ریاضی ۳، صفحه‌های ۴ تا ۷)*

۱ ۲ ۳ ۴

**-۹۲** *(محمدصادق نیک‌کار)*

با توجه به این‌که دو وجه مکعب سیاه و چهار وجه دیگر آن سفید هستند، بنابراین:

$$\begin{cases}P(\text{سفید آمدن هر پرتاب})=\frac{۲}{۳}\\ P(\text{سیاه آمدن هر پرتاب})=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

دو حالت وجود دارد:

$P$ (پرتاب سوم سفید، پرتاب دوم سیاه، پرتاب اول سفید)

$+P$ (پرتاب سوم سیاه، پرتاب دوم سفید، پرتاب اول سیاه)

$$=(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۲۷}+\frac{۲}{۲۷}=\frac{۶}{۲۷}=\frac{۲}{۹}$$

*(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸ تا ۱۳ و ۱۷ تا ۱۹)*

۱ ۲ ۳ ۴

**۹۳-** (حسین اسفینی)

ابتدا مجموعه‌ی $A$ را می‌یابیم:

$$x < \overbrace{2x+1}^{(2)} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} (1): x < 2x+1 \Rightarrow x > -1 \\ (2): 2x+1 \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -1 < x \leq 1 \Rightarrow A = (-1,1]$$

از آن‌جا که $A \cap B = [0,1]$ ، داریم:

$$\begin{cases} A = (-1,1] \\ B = [a,b) \end{cases} \xrightarrow{A\cap B=[0,1]} a = 0$$

از طرفی $A \cup B = (-1,4)$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} A = (-1,1] \\ B = [0,b) \end{cases} \xrightarrow{A\cup B=(-1,4)} b = 4$$

بنابراین دوتایی مرتب $(a,b)$ به صورت $(0,4)$ است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴

**۹۴-** (میثم حمزه‌لویی)

با جای‌گذاری $a$ در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{a-1}{a+2}+\frac{2}{a}=\frac{4a-4}{a^2-a}\Rightarrow\frac{a^2-a+2a+4}{a(a+2)}=\frac{4a-4}{(a-1)a}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+a+4}{a(a+2)}=\frac{4(a-1)}{(a-1)a}\xrightarrow{a\neq 0,1}\frac{a^2+a+4}{a+2}=4$$

$$\xrightarrow{a\neq -2}a^2+a+4=4a+8\Rightarrow a^2-3a-4=0\Rightarrow a=4,-1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴

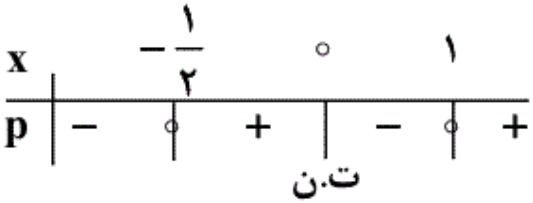
**۹۵-** (میثم حمزه‌لویی)

منحنی $y=\frac{۲x^۲-۱}{x}$ بالای خط $y=۱$ قرار می‌گیرد، یعنی:

$$\frac{۲x^۲-۱}{x}>۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲-۱}{x}-۱>۰ \Rightarrow \frac{۲x^۲-x-۱}{x}>۰ \Rightarrow p=\frac{(x-۱)(۲x+۱)}{x}>۰$$

حال عبارت سمت چپ را تعیین علامت می‌کنیم:




$$\Rightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = (-\frac{۱}{۲},۰)\cup(۱,+\infty) \Rightarrow \max(b)=۰$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴

**-۹۶** (تبدیل به تست: میثم حمزه‌لوئی)

می‌دانیم: $\cot x - \tan x = ۲\cot ۲x$

طبق صورت سؤال: $\cot x - \tan x = ۱$

بنابراین: $\Rightarrow ۲\cot ۲x = ۱ \Rightarrow \cot ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan ۲x = ۲$

(ریاضی ۳، مشابه تمرین ۵-ک، صفحه‌ی ۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴

**-۹۷** (حسین حاجیلو)

$$f(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} (\frac{\pi}{x} + \frac{\alpha}{\pi}) = \frac{\pi}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} = ۱ + \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{۱+\cos x}{\sin^۲ x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{۱+\cos x}{۱-\cos^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{۱}{۱-\cos x} = \frac{۱}{۲}$$

برای آن‌که تابع $f$ در $x=\pi$ پیوسته باشد، باید $f(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x)$، پس:

$$۱ + \frac{\alpha}{\pi} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{۲}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴

**-۹۸** (حمید علیزاده)

آهنگ متوسط تغییر مساحت دایره:

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{S(۳)-S(۱)}{۳-۱}=\frac{\pi(۳^۲-۱^۲)}{۳-۱}=۴\pi$$

$$S(r)=\pi r^۲ \Rightarrow S'(r)=۲\pi r$$

$S'(۱/۵)=۳\pi$ : آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت در $r=۱/۵$

اختلاف مورد نظر $=۴\pi-۳\pi=\pi$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰ و ۱۳۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**-۹۹** (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

آهنگ متوسط تغییر تابع $f$ از $x=x_۱$ تا $x=x_۲$، برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-۱} \\ x_۱=۲\ ,\ x_۲=۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\frac{۵}{۴}-\frac{۲}{۱}}{۵-۲}=\frac{-\frac{۳}{۴}}{۳}=-\frac{۱}{۴}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f$ در $x=x_۰$، برابر $f'(x_۰)$ است، پس:

$$f(x)=\frac{x}{x-۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱(x-۱)-۱(x)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۱}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-۱}{(\alpha-۱)^۲}$$

طبق فرض مسأله، باید مقداری از $\alpha$ را بیابیم که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$-\frac{۱}{(\alpha-۱)^۲}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow (\alpha-۱)^۲=۴ \Rightarrow \alpha-۱=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۳ \\ \alpha=-۱ \end{cases}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰ و ۱۳۸)

۴ ۳ ۲ ۱

-۱۰۰ (محمد بحیرایی)

$$y = \sin^{۲}(\frac{\pi}{۶}x^{۳}) \Rightarrow y' = ۲\sin(\frac{\pi}{۶}x^{۳}) \times \cos(\frac{\pi}{۶}x^{۳}) \times \frac{۳\pi}{۶}x^{۲} \xrightarrow{x=۱}$$

$$y'(۱) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۳\pi}{۶} \Rightarrow y'(۱) = \frac{\sqrt{۳}\pi}{۴}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۴ ۳ ۲ ۱

**-۱۰۱** (غلامرضا علی)

اگر فرزند پسر را با **b** و فرزند دختر را با **g** نشان دهیم، داریم:

$$S=\{ggg,gbb,bbg,bgb,bgg,ggb,gbg\}$$

$$A=\{ggg,bgg,ggb,gbg\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}: P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۷}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

**-۱۰۲** (محمدرضا میرجلیلی)

احتمال این‌که لامپ سالم از جعبه خارج شود $\frac{۳}{۵}$ و احتمال خارج شدن لامپ خراب $\frac{۲}{۵}$ است، طبق توزیع احتمال داریم:

| X | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{۳}{۵}$ | $\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}$ | $\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}$ |

$$P(X\le ۳)=P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)=\frac{۳}{۵}+\frac{۶}{۲۵}+\frac{۱۲}{۱۲۵}=\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

**-۱۰۳** *(حسین حاجیلو)*

حداقل ۳ نفر بیماری آنفولانزا داشته باشند، یعنی ۳ یا ۴ یا ۵ نفر مبتلا باشند. همه مبتلا نباشند یعنی حالت ۵ نفر حذف می‌شود، در نتیجه احتمال پیشامد مطلوب برابر است با: (دقت کنید که احتمال داشتن آنفولانزا ۰/۴، پس احتمال نداشتن این بیماری ۰/۶ = ۰/۴ − ۱ است.)

$$P(۳ \le X \le ۴) = P(X = ۳) + P(X = ۴)$$

$$P = \binom{۵}{۳}(۰/۴)^{۳}(۰/۶)^{۲} + \binom{۵}{۴}(۰/۴)^{۴}(۰/۶)^{۱}$$

۱ ۲ ۳ ۴

**-۱۰۴** *(رضا بخشنده)*

می‌دانیم که بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دومی که در آن ضریب $x^۲$ عددی منفی است، برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع $f$ را $S$ بنامیم، داریم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۴)}{۲a} = \frac{-۲}{a}$$

$$\Rightarrow y_S = f(-\frac{۲}{a}) = a(-\frac{۲}{a})^۲ + ۴(-\frac{۲}{a}) + ۵ = \frac{-۴}{a} + ۵ \qquad (*)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۹ است، یعنی:

$$y_S = ۹ \xrightarrow{(*)} \frac{-۴}{a} + ۵ = ۹ \Rightarrow a = -۱$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۴)}{۲(-۱)} = ۲$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

*(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)*

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

**۱۰۵-** (میثم حمزه‌لویی)

باید معادله‌ی $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$، دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y = ۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲}$، محور $x$ها را در طرفین محور $y$ها قطع کند. برای آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < ۰$، پس:

$$\frac{a - \frac{۳}{۲}}{۲} < ۰ \Rightarrow a - \frac{۳}{۲} < ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴

**-۱۰۶** *(عباس رحیمی)*

**راه حل اول:**

$$|x-۱|+|x-۳|=۵$$

برای حل این معادله، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ x<۱ \Rightarrow -(x-۱)-(x-۳)=۵ \Rightarrow -۲x=۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ ۱\le x\le ۳ \Rightarrow (x-۱)-(x-۳)=۵ \Rightarrow ۲=۵$$ غیرقابل قبول

$$۳)\ x>۳ \Rightarrow (x-۱)+(x-۳)=۵ \Rightarrow ۲x=۹ \Rightarrow x=\frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = -\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}=۴$$

**راه حل دوم:**

نکته: اگر معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=k$ دارای دو جواب متمایز باشد، آنگاه مجموع این دو جواب متمایز برابر با $a+b$ است، توجه کنید که اگر $k>|b-a|$، آنگاه این معادله دو جواب متمایز دارد.

با توجه به نکته‌ی بالا، معادله‌ی مفروض سؤال دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

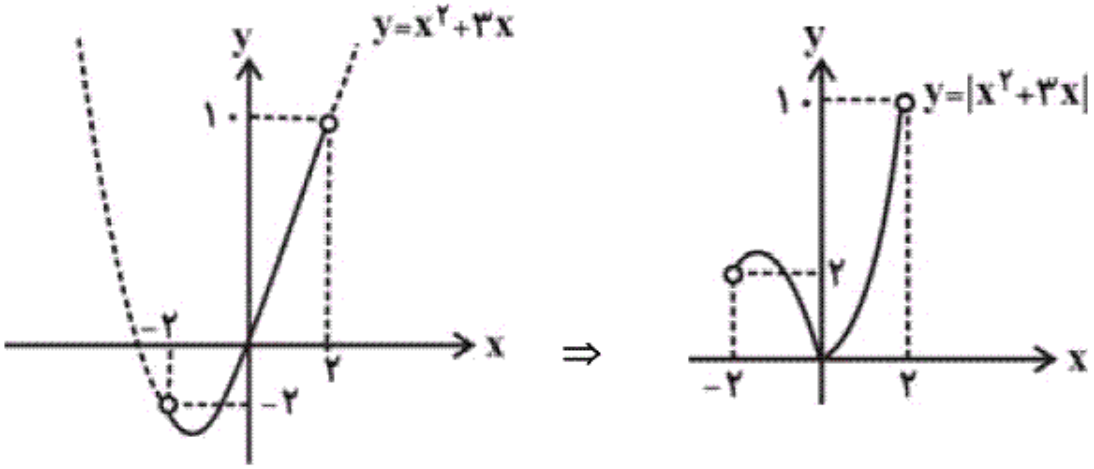
$$۱+۳=۴$$

*(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۰۷-** (حسین حاجیلو)

با توجه به شکل زیر، اگر دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=|x^2+3x|$ به‌صورت $\{x\in R \mid -2<x<2\}$ باشد، برد آن، بازه‌ی $[0,10)$ است.




(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴ و ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۰۸-** (حسین حاجیلو)

$$[\frac{1-x}{x}]=1\Rightarrow 1\le\frac{1-x}{x}<2\Rightarrow 1\le\frac{1}{x}-1<2\xrightarrow{+1}2\le\frac{1}{x}<3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\ge\frac{1}{\frac{1}{x}}>\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}\xrightarrow{\times(-6)}-2>-6x\ge-3\Rightarrow[-6x]=-3$$

با توجه به توضیحات بالا، اگر $[\frac{1-x}{x}]=1$، آن‌گاه $[-6x]=-3$، یعنی برای $[-6x]$، تنها یک مقدار امکان‌پذیر است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱ ۲ ۳ ۴

**۱۰۹-** *(فرهاد حامی)*

چون همواره $[x].[۳x] \geq ۰$ ، پس مجموع $[x]$ و $[۳x]$ زمانی صفر است که هر دو برابر صفر باشند:

$$[x]+[۳x]=۰ \Rightarrow \begin{cases} [x]=۰ \Rightarrow ۰ \leq x < ۱ & (*) \\ [۳x]=۰ \Rightarrow ۰ \leq ۳x < ۱ \Rightarrow ۰ \leq x < \frac{۱}{۳} & (**) \end{cases}$$

از اشتراک نامعادله‌های (*) و (**)، مجموعه‌ی جواب معادله، بازه‌ی $[۰, \frac{۱}{۳})$ است، پس $a = ۰$ و $b = \frac{۱}{۳}$، بنابراین $b - a = \frac{۱}{۳}$.

*(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)*

۱ ۲ ۳ ۴

**۱۱۰-** *(حسین اسفینی)*

عرض از مبدأ تابع $f^{-۱}$ برابر $(-۱)$ است. یعنی $(۰,-۱) \in f^{-۱}$ و در نتیجه $(-۱,۰) \in f$، پس با توجه به ضابطه‌ی $f$ داریم:

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow -۱-a+۲a=۰ \Rightarrow a=۱$$

*(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)*

۱ ۲ ۳ ۴

**-۱۱۱** *(علیرضا زواره)*

از آن‌جا که $(-۱,۳k)$ و $(-۹,-۱)$ هر دو عضو $f$ هستند، با توجه به تعریف تابع باید: $۳k=-۹$ و در نتیجه $k=-۳$. اما با این مقدار $k$ نیز رابطه‌ی $f$ تابع نخواهد بود، زیرا در این‌صورت زوج مرتب $(۲+k,۵)$ به‌صورت $(-۱,۵)$ در خواهد آمد و خواهیم داشت:

$$f=\{(-۱,-۹),(-۱,۵),(۶,-۳)\}$$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**-۱۱۲** *(علی‌اکبر جعفری)*

می‌دانیم که اگر $\log_v^u=a$، آنگاه $v^a=u$، پس:

$$\log_{(x-۱)}^{(۳x-۱)}=۳\Rightarrow(x-۱)^۳=۳x-۱\Rightarrow x^۳-۳x^۲+۳x-۱=۳x-۱$$

$$\Rightarrow x^۳-۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲(x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غیرقابل قبول}\\ x=۳\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۳}}^{(۲x+۳)}=\log_{\frac{۱}{۳}}^{۹}=\log_{\frac{۱}{۳}}^{(\frac{۱}{۳})^{-۲}}=-۲\end{cases}$$

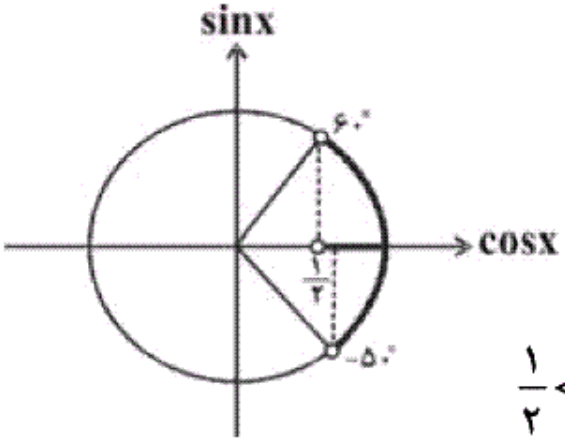
توجه کنید که مقدار $x=۰$ را نمی‌پذیریم، چون به ازای آن، عبارت $\log_{(x-۱)}^{(۳x-۱)}$ تعریف نشده است.

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۱۰ تا ۱۱۲، ۱۱۶ و ۱۱۷)*

۱ ۲ ۳ ۴

**۱۱۳-** (حبیب شفیعی)

$$-۲۵^\circ < x < ۳۰^\circ \Rightarrow -۵۰^\circ < ۲x < ۶۰^\circ$$




کمانی را که ۲x روی دایره‌ی مثلثاتی می‌پیماید مشخص می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$\frac{۱}{۲} < \cos ۲x \leq ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۲m-۱}{۲} \leq ۱$$

$$\Rightarrow ۱ < ۲m-۱ \leq ۲ \Rightarrow ۲ < ۲m \leq ۳ \Rightarrow ۱ < m \leq \frac{۳}{۲}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۳)

۱ ۲ ۳ ۴

**۱۱۴-** (فرهاد حامی)

داریم:

$$\begin{cases} \sin(-۱۱۲^\circ) = -\sin ۱۱۲^\circ = -\sin(۹۰^\circ + ۲۲^\circ) = -\cos ۲۲^\circ \\ \sin ۱۵۸^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۲۲^\circ) = \sin ۲۲^\circ \\ \cos ۲۰۲^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۲^\circ) = -\cos ۲۲^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(-۱۱۲^\circ) + \sin ۱۵۸^\circ}{\cos ۲۰۲^\circ} = \frac{-\cos ۲۲^\circ + \sin ۲۲^\circ}{-\cos ۲۲^\circ}$$

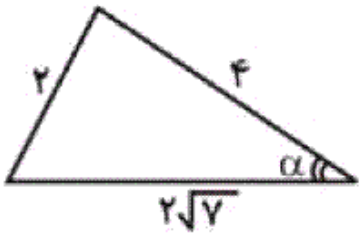
$$= ۱ - \tan ۲۲^\circ = ۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴

**۱۱۵-** (بهرام طالبی)

ابتدا از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم و کسینوس زاویه‌ی $\alpha$ را پیدا می‌کنیم:




$$۲^۲ = ۴^۲ + (۲\sqrt{۷})^۲ - ۲(۴)(۲\sqrt{۷})\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۴ = ۱۶ + ۲۸ - ۱۶\sqrt{۷}\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۱۶\sqrt{۷}\cos\alpha = ۴۰ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۵}{۲\sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - (\frac{۵}{۲\sqrt{۷}})^۲ = ۱ - \frac{۲۵}{۲۸} = \frac{۳}{۲۸} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۷}} = \frac{\sqrt{۲۱}}{۱۴}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌ی ۱۵۴)

۴ ✓ ۳ ۲ ۱

**-۱۱۶** *(بهرام طالبی)*

روش اول:

با فرض $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}$ و $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ ، معادله‌ی ماتریسی $\mathbf{A.B=C}$

را داریم که اگر طرفین این معادله را از سمت چپ در $\mathbf{A^{-۱}}$ ضرب کنیم،

داریم:

$$\mathbf{A^{-۱}.A.B=A^{-۱}.C\Rightarrow I.B=A^{-۱}.C\Rightarrow B=A^{-۱}C}$$

$$\mathbf{B=-\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}}$$

روش دوم:

$$\mathbf{\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۴a+c & ۴b+d\\ ۲a-c & ۲b-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow\begin{cases}۴a+c=-۶\\ \underline{۲a-c=۰}\end{cases}}$$

$$\mathbf{۶a=-۶\Rightarrow a=-۱\Rightarrow c=-۲}$$

$$\mathbf{\Rightarrow\begin{cases}۴b+d=۰\\ \underline{۲b-d=-۶}\end{cases}}$$

$$\mathbf{۶b=-۶\Rightarrow b=-۱\Rightarrow d=۴\Rightarrow B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}}$$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۶ تا ۱۷۴)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**۱۱۷-** *(سراسری تجربی- ۸۲)*

ارقام فرد را کنار هم قرار داده و یک شئ در نظر می‌گیریم که با اعداد ۲ و ۴، در مجموع $3!$ جایگشت دارند. از طرفی ارقام فرد در کنار هم نیز $3!$ جایگشت دارند، بنابراین:

۲۴ (۱۳۵) : یکی از جایگشت‌های مطلوب

$\Rightarrow$ تعداد کل پنج‌رقمی‌های مطلوب $= 3!\times 3! = 6\times 6 = 36$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۶)*

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

**۱۱۸-** *(عباس رحیمی)*

دسته‌ی اعدادی که مجموع هر یک از آن‌ها ۶ است و با استفاده از آن‌ها می‌توان اعداد سه رقمی ساخت، همراه با تعداد حالات آن‌ها عبارت است از:

$$(2,2,2),(3,2,1),(3,3,0),(4,2,0),(4,1,1),(5,1,0),(6,0,0) \xrightarrow{\text{کل حالات}} 21$$
$$\downarrow\ 1 \quad \downarrow\ 6 \quad \downarrow\ 2 \quad \downarrow\ 4 \quad \downarrow\ 3 \quad \downarrow\ 4 \quad \downarrow\ 1$$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۶)*

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

**۱۱۹-** *(سراسری ریاضی- ۸۹)*

حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول یعنی یا ۴ پرسش از ۵ پرسش اول که در این صورت باید ۴ پرسش بعدی را از ۵ پرسش دوم پاسخ داد یا ۵ پرسش از ۵ پرسش اول که در این صورت باید ۳ پرسش بعدی را از ۵ پرسش دوم پاسخ داد، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد حالت‌های مورد نظر} = \binom{۵}{۴} \times \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} \times \binom{۵}{۳}$$

$$= ۵ \times ۵ + ۱ \times ۱۰ = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵$$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۶ تا ۱۹۰)*

۱ ۲ ۳ ۴✔

**۱۲۰-** *(علیرضا اسفندیار)*

طبق رابطه‌ی پاسکال داریم:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+۱} = \binom{n+۱}{r+۱} \Rightarrow \binom{۸}{۳} + \binom{۸}{۴} = \binom{۹}{۴}$$

در ضمن می‌دانیم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{۹}{۴} = \binom{۹}{۵}$$

*(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۸ تا ۱۹۰)*

۱ ۲ ۳ ۴✔