آنالیز ریاضی ۱

۱-$C[0\,,1]$ مجموعه تمام توابع پیوسته بر بازه‌ی $[0\,,1]$ است. اگر $\| f \| = \sup\{\,|f(x)| \quad ; 0 \le x \le 1\}$ و g و h توابعی با ضابطه $g(x) = 4\sqrt{x}$ و $h(x) = x^2$ فرض شوند، مقدار $d(h, g) = \| g - f \|$ را بدست آورید.

۲- فرض کنید $Z\,,Y$ و X سه فضای متریک و $g\colon X \to Y\,,\, h\colon X \to Z$ و $f\colon Y \to Z$ به طوری‌که $fog=h$ که در آن h پیوسته و g نگاشتی باز است.ثابت کنید f پیوسته است.

۳- اگر $(X\,,d)$ یک فضای متریک و $x_0\,,y_0 \epsilon X$ ، تابع f را باضابطه $f(x) = \frac{d(x\,,x_0)}{1+d(x,x_0)} + d(x_0, y_0)$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید f پیوسته یکنواخت و کران‌دار است.

۴- فرض کنید ${[0\,,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}}^{\infty}$ در اینصورت در مورد پیوستگی تابع $f(x) = \sum_{r_n \le x} \frac{1}{2^n}$ روی بازه $[0\,,1]$ چه می‌توان گفت؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۵-مشخص کنید کدام یک از توابع زیر بر$(0\,,+\infty)$ پیوسته یکنواخت هستند؟ (با ذکر دلیل)

الف) $f(x) = x^2 sinx$ ب) $f(x) = x\ sinx$ ج) $f(x) = sinx^2$ د) $f(x) = \frac{sinx}{x}$

۶- فرض کنید f بر $[a\,,b]$ پیوسته باشد اگر g را بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شود ثابت کنید g بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

$$f(x) = \begin{cases} f(a) & x < a \\ f(x) & a \le x \le b \\ f(b) & b < x \end{cases}$$

۷- فرض کنید S زیر مجموعه‌ی همبند و ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد و $f\,,g : S \to [0\,,1]$ پیوسته یاشند و g تابعی پوشا باشد. نشان دهید وجود دارد $c \in S$ به طوریکه $f(c) = g(c)$

۸- فرض کنید $(X\,,d)$ یک فضای متریک و $S = \{x_1\,,x_2, \dots\}$ زیر مجموعه‌ی شمارایی از X باشدو $f\colon X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = x_n, n = 1,2, \dots. \\ 0 & x \in X - S \end{cases}$$

ثابت کنید f در هر نقطه‌ی S ناپیوسته و در هر نقطه‌ی $X - S$ پیوسته است.

۹- فرض کنید X یک فضای متریک و E زیرمجموعه‌ی همبند از X باشد و $f\colon E \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $x \in E\,,\, f(x) \neq 0$.

ثابت کنید که اگر در نقطه‌ای چون $x_0 \in E$ داشته باشیم $f(x_0) > 0$، انگاه برای هر $x \in E$ داریم $f(x) > 0$

۱۰- فرض کنید $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\,,\ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$ ثابت کنید $g(x) = cx + a$

.

۱۱- فرض کنید f بر $[a\ ,b]$ پیوسته باشد تابع g ,را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ثابت کنید g بر $[a\ ,b]$ پیوسته است.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \quad , \quad x=a \\ \sup\{\ f(t) \quad ,: a\le t\le x\}\ , \quad x>a \end{cases}$$

۱۲- فرض کنید $f:[a\ ,b]\to\mathbb{R}$ تابعی یکنوا باشد ثابت کنید هر زیر بازه از $[a\ ,b]$ یکی از نقاط پیوستگی f را در بر دارد.

۱۳ فرض کنید $D=\{\ d_k\ :\ k\in\mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای شمارای نامتناهی از اعدادحقیقی متمایز باشد. به ازای هر عدد حقیقی مانند x،

فرض کنید $P_x=\{k\in\mathbb{N}\quad : d_k<x\}$، تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را این طور تعریف کنید: اگر $P_x=\emptyset$، $f(x)=0$ و اگر $P_x\neq\emptyset$ ف

$$f(x)=\sum_{k\in P_x}2^{-k}$$

الف) ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ صعودی و D مجموعه‌ی ناپیوستگیهایش است.

ب) فرض کنید $D=\mathbb{Q}$. ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

۱۴- فرض کنید f روی $(a\ ,b)$ تعریف شده باشد وبه ازای هر $x\in(a,b)$ ، عددی مثبت مانند r_x وجود دارد که f روی

$(x-r_x\ ,x+r_x)$ صعودی است. ثابت کنید f روی $(a\ ,b)$ صعودی است.

۱۵- فرض کنید $f:[a\ ,b]\to\mathbb{R}$ تابعی یک به یک باشد که در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند. در اینصورت f اکیدا یکنواست.

۱۶- فرض کنید $(X\ ,d)$ یک فضای متریک فشرده و $f:X\to X$ تابعی پیوسته باشد و $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n(X)$. ثابت کنید A فشرده و ناتهی است و $f(A)=A$. نماد f^n ترکیب n مرتبه تابع f با خودش است.

۱۷- فرض کنید $(X\ ,d)$ یک فضای متریک فشرده باشد و $f:X\to X$ تابعی باشد که به ازای هر $x\ ,y\ \in X$،

$$d\big(f(x),f(y)\big)<d(x\ ,y).$$

نشان دهید f نقطه ثابت دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید که شرط فشرده بودن X را نمی‌توان با شرط تام بودن آن عوض کرد.

۱۸-تعریف: فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار بر بازه‌ی I باشد. نوسان f روی I را با نماد $w(f,I)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود. $w(f,I)=\sup\{\ |f(x)-f(y)|;\quad x\ ,y\ \in I\}$

الف) ثابت کنید f در نقطه $x_0\epsilon I$ پیوسته است اگر وتنها اگر $\inf\{w(f\ ,(x_0-\delta\ ,x_0+\delta)) \quad ;\ \delta>0\}=0$

ب) فرض کنید f یک تابع کراندار بر بازه I باشد ثابت کنید $w(f,I)=\sup\{f(x);\quad x\ \in I\}-\inf\{f(x)\ \ ;x\epsilon I\}$

۱۹-تعریف: فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که در همسایگی x_0 تعریف شده است نوسان f در نقطه x_0 را با نماد $w(f,x_0)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w(f\ ,x_0)=\inf\{w(f\ ,(x_0-\delta\ ,x_0+\delta)) \quad ;\ \delta>0\}\ .$$

ثابت کنید اگر f یک تابع حقیقی مقدار بر بازه‌ی بسته I باشد و $\beta > 0$، سپس مجموعه $\{x \ ; w(f\,,x) > \beta\}$ باز است و مجموعه‌ی $\{x \ ; w(f\,,x) \geq \beta\}$ بسته است.

۲۰- فرض کنید $f:[a\,,b] \to \mathbb{R}$ و f' بر $(a\,,b)$ کراندار باشد ثابت کنید $\lim_{x\to a^+} f(x)$ وجود دارد.

۲۱-فرض کنید f بر $(0\,,\infty)$ مشتق پذیر بوده و $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+f'(x)\big) = L < \infty$ در اینصورت در مورد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ چه می‌توان گفت؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲۲- فرض کنید $f:\mathbb{R} \to [0,\infty)$ مشتق پذیر بوده و تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$ نزولی باشد. ثابت کنید f بر بازه $(-\infty\,,0)$ نزولی است.

۲۳- فرض کنید g و f دو تابع مشتق پذیر بر $\mathbb{R}$ باشند و برای $a \in \mathbb{R}$ داریم $f(a) \geq g(a)$. همچنین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) > g'(x)$. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ که $a < x$ داریم $f(x) > g(x)$.

۲۴- اگر f تابعی حقیقی روی $\mathbb{R}$ و در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد. همچنین اگر N و M اعداد طبیعی باشند آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(f\left(x_0+\frac{N}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{M}{n}\right)\right)\right)$$

را بدست آورید.

۲۵- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q}^c \\ \cos x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ و $g(x) = [x]$ (تابع جز صحیح) در مورد مشتق پذیری تابع fog روی $\mathbb{R}$ چه می‌توان گفت؟

۲۶- فرض کنید $f:(0\,,1) \to [1\,,2]$ تابعی مشتق پذیر و پوشا باشد ثابت کنید f' حداقل دو ریشه در این بازه دارد.

۲۷- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ روی بازه $(-1\,,1)$ تعریف شده است در این صورت مشتق پذیری تابع $g(x) = x^2 f(x)$ را روی بازه $(-1\,,1)$ بررسی کنید.

۲۸- فرض کنید $f:[a\,,b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد ثابت کنید $f'([a\,,b])$ همبند است.

۲۹- فرض کنید f تابعی نامنفی و f'' بر $(0\,,1)$ موجود باشد. اگر حداقل به ازای دو مقدار x در $(0\,,1)$، $f(x) = 0$ آنگاه معادله

$f''(x) = 0$ در $(0\,,1)$ چند ریشه دارد. (با ذکر دلیل)

۳۰- فرض کنید $f:[a\,,b] \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید f' بر $[a\,,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \ ; f'(x) = \alpha\}$ بسته باشد.

۳۱- فرض کنید f بر بازه $[a\,,b]$ مشتق پذیر باشد و عددی مانند A موجود باشد که به ازای هر x در $[a\,,b]$، $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ اگر $f(a) = 0$ ثابت کنید روی $[a\,,b]$ ، $f \equiv 0$

۳۲- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر است.

الف) اگر به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f''(x)<0$ ثابت کنید f کران پایین ندارد.

ب) فرض کنید عددی مثبت مانند M وجود دارد که به ازای هر x ، اگر $|x|>M$ آنگاه $f''(x)<0$ و $f(x)>0$. ثابت کنید پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ یکنواخت است.

۳۳- ثابت کنید اگر تابع f روی بازه $[a\,,b]$ پیوسته و مشتق آن به جز در تعداد متناهی از نقاط $[a\,,b]$ مساوی صفر باشد، آنگاه تابع f روی $[a\,,b]$ ثابت است.

۳۴- هرگاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f'(a)$ وجود داشته باشد، نشان دهید

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

با ذکر مثالی نشان دهید که وجود این حد مشتق پذیری در نقطه a را ایجاب نمی‌کند.

۳۵- فرض کنید $f:[0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ در $(0\,,+\infty)$ مشتق پذیر است.

الف) هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید برای هر $h>0$ داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b$$

ب) اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\mathrm{a}<\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید $b=0$.

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=b$

۳۶- فرض کنید $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی $(a\,,b)$ مشتق پذیر باشد. هرگاه $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ ثابت کنید $f'(a)$ وجود دارد و برابر b است.

۳۷- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اگر برای هر همسایگی v از x_0 وجود داشته باشد $x\in v$ ، $x\neq x_0$ که $f(x)=f(x_0)$ آنگاه یا $f'(x_0)$ وجود ندارد یا $f'(x_0)=0$.

۳۸- اگر g و f دو تابع محدب باشند در مورد محدب بودن fog چه می‌توان گفت؟

۳۹- فرض کنید f روی بازه‌ی باز I محدب باشد ثابت کنید اگر f روی این بازه مشتق پذیر باشد آنگاه f' روی این بازه پیوسته است.

۴۰- فرض کنید f یک تابع محدب روی بازه $(a\,,b)$ باشد. و $[c\,,d]\subset(a,b)$ قرار دهید $M=\max\{f'_+(c)\,,f'_-(d)\}$ ثابت کنید به ازای هر $x\,,y\in[c\,,d]$ داریم: $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$.