فصل چهارم

مدارهای مرتبه دوم RLC

اگر معادله دیفرانسیل یک مدار الکتریکی از مرتبه دوم باشد به مدار مورد مطالعه مدار مرتبه دوم گفته می شود. در مدار مرتبه دوم حداقل ۲ عنصر ذخیره کننده انرژی (سلف و خازن) وجود دارد. همانطور که در درس معادلات دیفرانسیل گفته شد، برای حل کردن یک معادله مرتبه دوم به ۲ شرط اولیه نیاز است. یکی مقدار تابع در صفر یعنی $y(0)$ و دیگری مقدار مشتق تابع در صفر یعنی $y'(0)=\frac{dy}{dt}(0)$

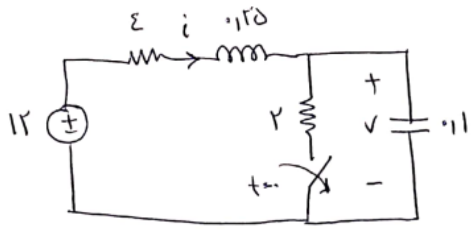
بنابر این برای حل یک مدار مرتبه دوم نیز به دو شرط اولیه نیاز است که با تحلیل مدار در لحظه صفر بدست می ایند. برای مثال:

۱- اگر معادله دیفرانسیل بر حسب جریان سلف باشد $\frac{di_L}{dt}(0^+), i_L(0^+)$ نیاز است. که اولی از پیوستگی جریان سلف یعنی $i_L(0^-)=i_L(0^+)$ بدست می آید و شرط دوم از تحلیل مدار در صفر مثبت و از رابطه $v_L(0^+)=L\frac{di_L}{dt}(0^+)$ مشخص میشود.

۲- اگر معادله دیفرانسیل بر حسب ولتاژ خازن باشد $\frac{dv_C}{dt}(0^+), v_C(0^+)$ نیاز است. که اولی از پیوستگی ولتاژ خازن یعنی $v_C(0^-)=v_C(0^+)$ بدست می آید و شرط دوم از تحلیل مدار در صفر مثبت و از رابطه $i_C(0^+)=C\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ مشخص میشود.

بنابر این مشابه مدارهای مرتبه اول باید مدار مرتبه دوم برای تعیین شرایط اولیه در صفر منفی و صفر مثبت تحلیل شود. بعد از مشخص شدن شرایط اولیه معادله دیفرانسیل قابل حل است.

مثال ۱: در مدار زیر کلید در لحظه صفر باز میشود مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



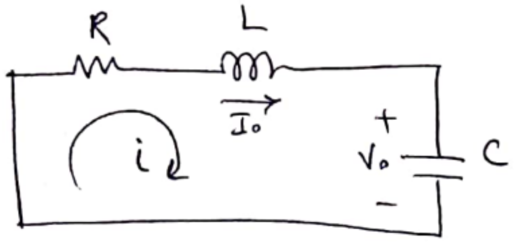
a) $i(0^+)$, $v(0^+)$

b) $\frac{di(0^+)}{dt}$, $\frac{dv(0^+)}{dt}$

c) $i(\infty)$, $v(\infty)$

مدار RLC سری ورودی صفر (بدون منبع)

ساده ترین نوع مدار مرتبه دوم بستن سری مقاومت، خازن و سلف به یکدیگر است. در این مدار سلف و خازن جریان و ولتاژ اولیه دارند که شرایط اولیه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را مشخص میکند و جواب نهایی آن بدست خواهد آمد.



$$KVL: \quad Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق و تقسیم بر L}} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

شرایط اولیه مورد نیاز برای حل این مدار

$i(0) = I_0$

$\frac{di(0)}{dt}$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود و ضرایب ثابت با استفاده از شرایط اولیه بدست خواهند آمد.

معادله مشخصه $\quad s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$

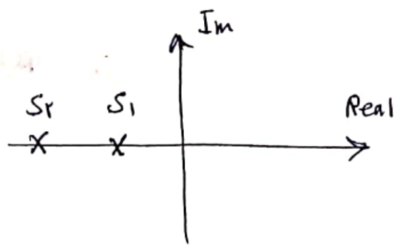
$$\begin{cases} s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{cases}$$

با تعریف دو پارامتر ثابت میرایی و فرکانس تشدید به صورت زیر

$$\underbrace{\alpha \triangleq \frac{R}{2L}}_{\text{ثابت میرایی}} \qquad \underbrace{\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}}_{\text{فرکانس تشدید}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

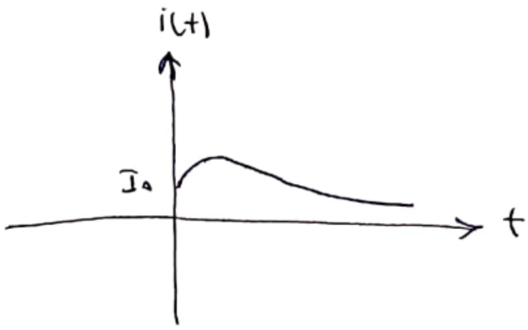
چهار حالت برای پاسخ معادله دیفرانسیل وجود دارد که به علامت این دو پارامتر بستگی دارد.

۱- اگر $\alpha > \omega$ باشد زیر رادیکال عدد مثبت شده و دو ریشه معادله مشخصه **مقادیر حقیقی** خواهند شد.

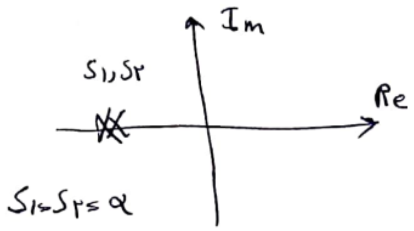


در این حالت نوع پاسخ **میرایی شدید** است و به صورت کلی زیر است.

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

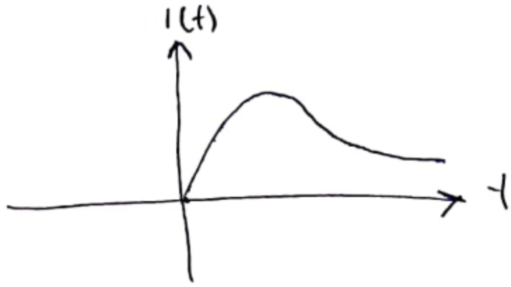


۲- اگر $\alpha = \omega$ باشد زیر رادیکال صفر شده و دو ریشه معادله مشخصه **مقادیر حقیقی** برابر یعنی **ریشه مضاعف** خواهند شد.

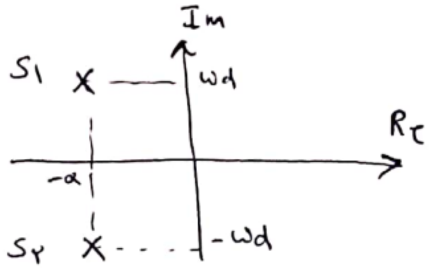


در این حالت نوع پاسخ **میرایی بحرانی** است و به صورت کلی زیر است.

$$i(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$$



۳- اگر $\alpha<\omega$ باشد زیر رادیکال عدد منفی شده و دو ریشه معادله مشخصه **مقادیر مختلط** خواهند شد.



در این حالت نوع پاسخ **میرایی ضعیف یا میرایی نوسانی** است و به صورت کلی زیر است.

$$S_1=-\alpha+\sqrt{-(\omega_0^2-\alpha^2)}=-\alpha+j\omega_d$$ فرکانس طبیعی ω_d

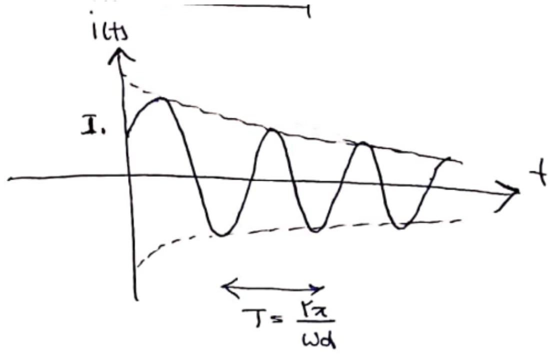
$$S_2=-\alpha-\sqrt{-(\omega_0^2-\alpha^2)}=-\alpha-j\omega_d$$

$$i(t)=A_1e^{-\alpha+j\omega_d}+A_2e^{-\alpha-j\omega_d}=e^{-\alpha t}(A_1e^{j\omega_d t}+A_2e^{-j\omega_d t})$$

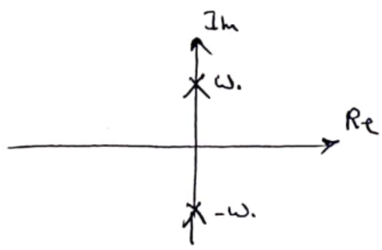
$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$$\Rightarrow i(t)=e^{-\alpha t}[A_1(\cos\omega_d t+j\sin\omega_d t)+A_2(\cos\omega_d t-j\sin\omega_d t)]$$

$$\boxed{i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)}$$

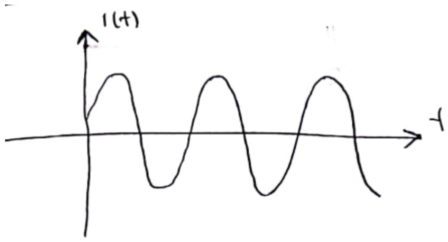


۴- اگر $\alpha=0$ باشد دو ریشه معادله مشخصه **کاملا موهومی** خواهند شد.

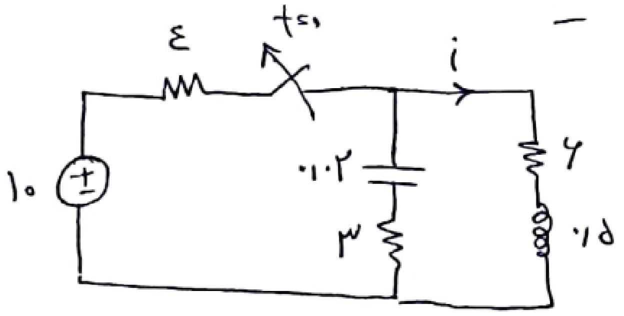


در این حالت نوع پاسخ **بی اتلاف و نوسانی** است و به صورت کلی زیر است.

$$i(t)=A_1e^{-j\omega_0 t}+A_2e^{j\omega_0 t}\boxed{=A\cos(\omega_0 t+\theta)}$$



مثال ۲: در مدار زیر جریان را بدست آورید. و به صورت حدودی رسم کنید



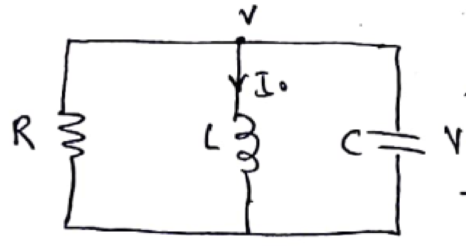
راهنمایی: با استفاده از تحلیل مدار در صفر منفی و پیوستگی جریان سلف و ولتاژ خازن شرط اولیه جریان و با استفاده از تحلیل مدار در صفر مثبت شرط اولیه مشتق جریان را بدست می آوریم.

$$\frac{di(0)}{dt} = -6 \qquad i(0) = 1$$

معادله مشخصه را تشکیل داده و جواب نهایی میرایی ضعیف است. مقادیر ثابت را با جایگذاری شرط اولیه بدست می آوریم.

مدار RLC موازی ورودی صفر (بدون منبع)

مقاومت، خازن و سلف به صورت موازی به یکدیگر بسته شده اند. در این مدار سلف و خازن جریان و ولتاژ اولیه دارند که شرایط اولیه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را مشخص میکند و جواب نهایی آن بدست خواهد آمد.



$$KCL:\ \frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt + C\frac{dv}{dt}=0$$

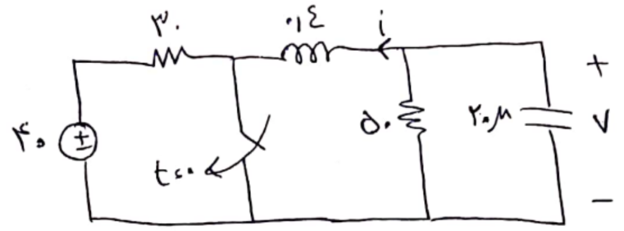
$$\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=0$$

معادله مشخصه $\quad s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0$

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{2RC}\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

پاسخ کاملا شبیه حالت سری است فقط فرمول α متفاوت است.

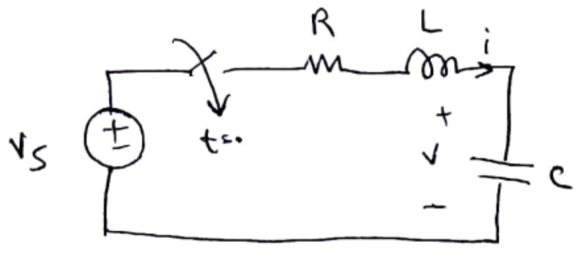
مثال ۳: مقدار ولتاژ مشخص شده را بدست آورید.



مدار مرتبه دوم RLC سری یا موازی با ورودی منبع

در این حالت جواب مشابه حالت بدون منبع است اما یک جمله ثابت به جواب نهایی اضافه میشود که در واقع جواب خصوصی معادله دیفرانسیل است. اما چون بعد از گذشت زمان زیاد شرایط اولیه از بین میرود و فقط منبع باقی می ماند تاثیر منبع را میتوان با یک عدد ثابت که در واقع از تحلیل مدار در بینهایت بدست می آید مشخص کرد.

RLC سری یا با منبع:



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = V_s$$

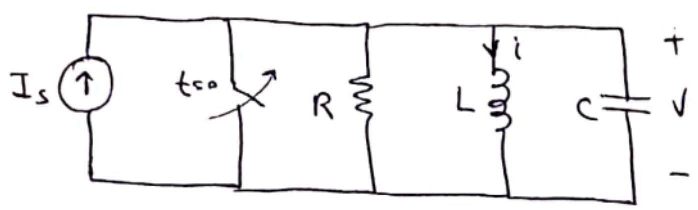
$$V(t) = V_t(t) + V_{ss}(t)$$

$$V_{ss}(t) = V(\infty) = V_s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & \text{میرای شدید} \\ V(t) = V_s + (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t} & \text{میرای بحرانی} \\ V(t) = V_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)\, e^{-\alpha t} & \text{میرای ضعیف} \\ V(t) = V_s + A \cos(\omega_0 t + \alpha) & \text{نوسانی} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{R}{2L}$ $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ $\quad$ در RLC سری

RLC موازی با منبع



$$\frac{d^2 i}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}$$

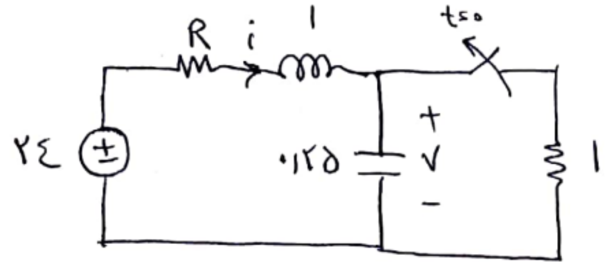
$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t)$$

$$i_{ss}(t) = i(\infty) = I_s$$

$$\begin{cases} i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & \text{میرای شدید} \\ i(t) = I_s + (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t} & \text{میرای بحرانی} \\ i(t) = I_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)\, e^{-\alpha t} & \text{میرای ضعیف} \\ i(t) = I_s + A \cos(\omega_0 t + \alpha) & \text{نوسانی} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{2RC}$ $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$

مثال ۴: در مدار زیر ولتاژ خازن را در دو حالت R=1,R=5 بدست آورده و رسم کنید.



روش کلی حل معادلات مرتبه دوم

مدارهای مرتبه دوم در حالت کلی ممکن است هیچکدام از دو مدار سری یا موازی نباشند. در این حالت به صورت زیر عمل میکنیم:

۱- متغیر $x(t)$ را در نظر میگیریم که هم میتواند ولتاژ و هم جریان مورد سوال باشد.

۲- مقدار شرط اولیه $x(0)$ را با استفاده از تحلیل مدار در صفر منفی و پیوستگی جریان سلف و ولتاژ خازن و مشتق شرط اولیه $dx/dt(0)$ با استفاده از تحلیل مدار در صفر مثبت بدست می آوریم.

۳- منابع مستقل را صفر میکنیم و با استفاده از KVL,KCL معادله دیفرانسیل را برای $x(t)$ بدست می آوریم. با توجه به ریشه های معادله مشخصه نوع پاسخ را شامل میرایی شدید، میرایی بحرانی، میرایی ضعیف یا نوسانی تعیین میشود و جواب نهایی معادله دیفرانسیل با استفاده از جایگذاری شرایط اولیه برای مشخص شدن ۲ ثابت A_1,A_2 بدست می آید.

۴- برای بدست آوردن مقدار x_{ss} پاسخ مدار در بینهایت را با اتصال کوتاه کردن سلف و مدار باز کردن خازن بدست می آوریم.

مثال ۵: در مدار زیر ولتاژ خازن و جریان سلف را بدست آورید.