فراکتال

علی شریفی نژاد؛ دبیرستان مرحوم حاج حبیب الله شریفی، شهرستان رفسنجان
عباس شریفی پور؛ دبیرستان غیر دولتی علوی دوره دوم، شهرستان رفسنجان
محمدحسین علیپور؛ دبیرستان غیر دولتی علوی دوره دوم، شهرستان رفسنجان

معلم راهنما: دکتر محمد رضا شریفی پور؛ اداره آموزش و پروش منطقه نوق

چکیده:

امروزه فراکتال یا بطور عام هندسهٔ فراکتالی در تئوری اطلاعات، اقتصاد، پزشکی، علوم هوا و فضا، طراحی سخت افزار، پردازش تصاویر و بسیاری از زمینه های دیگر علوم مهندسی و تجربی استفاده می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم هندسهٔ فراکتالی این است که دارای خاصیت بی‌نظمی در اندازه‌های مختلف می‌باشد و این در حالیست که هندسهٔ اقلیدسی دارای چنین ویژگی‌ای نیست. مهمترین ویژگی فراکتال و هندسهٔ فراکتالی، بعد فراکتال است. در هندسهٔ اقلیدسی، بعد نقطه ۰، بعد خط ۱، بعد مربع ۲ و بعد مکعب ۳ است و به طور کلی بعد یک مجموعه به صورت مقدار فضایی که اشغال می‌کند، توصیف می‌شود. اما در هندسهٔ فراکتالی چندین نوع بعد مختلف وجود دارد که عبارتند از: بعد توپولوژیکی، بعد تشابهی، بعد هاسدورف و بعد شمارش جعبه.

واژگان کلیدی:ریاضی، هندسه، ابعاد، هندسهٔ فراکتال، بعد هاسدورف

1– مقدمه:

ریاضی:

اگر بخواهیم ریاضیات را در یک جمله تعریف کنیم باید بگوییم که ریاضیات مطالعهٔ عناوینی مانند کمیت، ساختار، فضا، الگوها، روابط و تغییرات است. ریاضیات با مدل کردن پدیده‌های مختلف توسط فرمول‌ها و ساختارهای ریاضی و با استفاده از روش‌ها، محاسبات و اثبات‌های ریاضی، به دنبال توضیح، توصیف و پیش‌بینی پدیده‌هاست. ریاضیات همواره همراه با تمدن انسانی پیشرفت، تکامل و گسترش یافته است. تمدن مصر، تمدن بین النهرین و ایران باستان، تمدن هند و چین و سپس تمدن های یونان و روم، تمدن‌هایی هستند که ریاضیات با آنها رشد و توسعه پیدا کرده است. این موضوع بیانگر اهمیت ریاضی نه صرفاً به عنوان نشانه‌ای از تمدن انسانی بلکه به عنوان یک دانش کاربردی است. ریاضیات را می‌توان به دو شاخهٔ کاربردی و محض تقسیم کرد.

شاخه‌های کاربردی به دنبال کاربرد ریاضی در پدیده‌های واقعی جهان هستند و شاخه‌های محض بدون توجه به کاربرد عملی ریاضی، به دنبال مطالعهٔ خود ریاضی به مفهوم مجرد آن می‌باشند. نکتهٔ قابل توجه در مورد ریاضی محض آن است که بسیاری از مباحث ریاضی محض با پیشرفت سایر علوم، کاربردهای عملی پیدا کرده‌اند.

هندسه:

هندسه حوزهٔ اصلی ریاضیات و در واقع قدیمی‌ترین علم محسوس بشری است. در ابتدا هندسه مورد مطالعه قرار گرفت تا جهان فیزیکی‌ای که در آن زندگی می‌کنیم را درک کند و همچنان تا به امروز ادامه دارد. این علم یکی از زیرشاخه های ریاضی محض و در عین حال از پرکاربرد ترین مباحث ریاضی است. مثلا نظریهٔ عظیم نسبیت عام انیشتین، یک نظریهٔ صرفاً هندسی است که گرانش را از لحاظ انحنای یک فضای زمان چهار بعدی توصیف می‌کند. با این حال، هندسه فراتر از برنامه‌های فیزیکی است و غیر منطقی است که بگوییم که ایده‌ها و روش‌های هندسی همیشه در هر زمینه ریاضیات نفوذ کرده‌اند.

بُعد:

شاید با شنیدن واژهٔ بعد چیزی که در ذهن آدمی تداعی پیدا می‌کند نقطه، خط، صفحه و یک مکعب باشد. درحالی که بررسی ابعاد هندسی در ریاضیات، بسیار پیچیده بوده و هر غیر ریاضیدانی را در نگاه اول کاملاً گیج و سردرگم می‌کند. از تساراکت (tesseract) چهار بعدی گرفته تا ابعاد فراکتالی که بسیار فراتر از طول، عرض و ارتفاع می‌باشند. ابعاد هندسی ماورای تصور امروزی ماست. بعد انواع مختلفی دارد که انواعی از آن شناخته شده است. ما در این مقاله با ابعادی آشنا می‌شویم که زیاد شناخته شده نیستند.

مقدمه ای برفراکتال:

نخستین بار در سال ۱۹۷۵ میلادی، یکه متخصص رشته رایانه در شرکت «A.B.M» به نام مندلبروت هندسهٔ فراکتال را به شکل جدید که زبانی برای توصیف طبیعت است، توضیح داد. البته قبل از او ریاضی دانانی مانند جرج کانتور، پتانو، دیوید هیلبرت، هلگ فون کاخ، سیر پنسکی، هاسدورف و گاستون ژولیا نکاتی را کشف کرده بودند که در کشف این هندسه توسط مندلبروت مؤثر بودند. لیکن او به این معنی پی برد که هندسهٔ اقلیدسی زبان دقیقی برای توصیف اشکال طبیعی نیست. او معتقد بود توصیف اشکال نامنظم و پیچیده دنیای واقعی، معادلات جدید ریاضی و مدل‌های هندسی خاصی را می طلبد.

واژهٔ فراکتال از کلمه لاتین «fractus» به معنی شکسته گرفته شده است که اول بار توسط مندلبروت به کار رفت. او معتقد بود که برای تعریف فراکتال‌ها باید همانند زیست شناسان عمل کنیم. زیست شناسان تعریف دقیقی از یک موجود زنده ندارند اما برای یک موجود زنده ویژگی‌هایی مانند حرکت، تنفس، رشد و... قائلند. مندلبروت می‌گوید بسیاری از اشکال نامتقارن در طبیعت، ویژگی‌های یک فراکتال را دارند. به خاطر این ویژگی هاست که می‌توان شکل آنها را به زبان جدید ریاضی بیان کرد.

او می‌گوید اگر F یک مجموعهٔ فراکتالی باشد، F نموداری است با این مشخصات:

الف) بی قاعده تر از آن است که بتوان آن را با زبان هندسهٔ اقلیدسی توصیف کرد.
ب) دارای ساختاری خود متشابه است. بدین معنی که F شامل کپی‌هایی از خودش در مقیاس‌های متفات است. به عبارت دیگر، هر زیر قسمت از F که بزرگ شود، مجدداً بیانگر تمام F است.
ج) ساختمان ظریفی دارد و تمام جزئیات F را روی زیر قسمت‌های F با مقیاس کوچکتر می‌توان یافت.

۲- فراکتال:

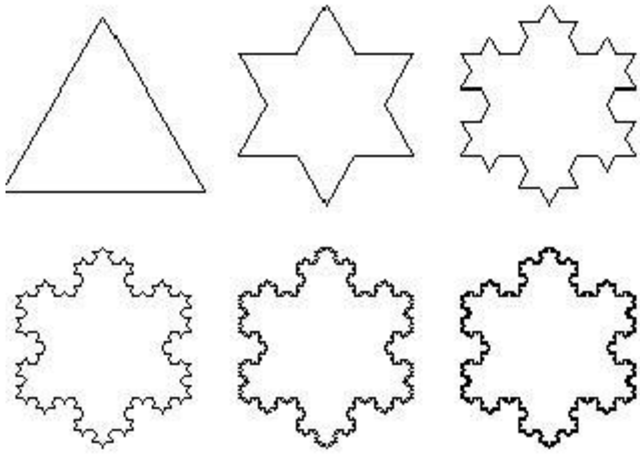
فراکتال (Fractal) ساختاری هندسی است متشکل از اجزایی که با بزرگ کردن هر جزء به نسبت معین، همان ساختار اولیه به دست آید. به عبارتی دیگر فرکتال ساختاری است که هر جزء از آن با کلش همانند است. فراکتال‌ها در بسیاری از ساختارهای طبیعی مثل برفدانه ها، کوه ها، ابرها، ریشه، تنه و برگ درختان، رویش بلورها در سنگ‌های آذرین، شبکه آبراهها و رودخانه‌ها، رسوب‌گذاری الکتروشیمیایی، رویش تودهٔ باکتری‌ها و سیستم عروق خونی،DNA و ... دیده می‌شوند و با آنها می‌توان پدیده‌های طبیعی بسیاری را تشریح، تفسیر و پیش بینی کرد.

یک فراکتال، شکل هندسی چند پاره یا ناهموار است که می‌تواند به بخش‌هایی تقسیم شود که هرکدام از آنها یک کپی تعدیل یافته از لحاظ اندازه، از کل شکل می‌باشد. هندسهٔ فرکتالی به توصیف اشیائی می‌پردازد که خود متشابه یا متقارن هستند، این بدان معنا است که وقتی این اشیاء بزرگنمایی شوند به نظر می‌رسد که بین اجزای آنها تشابه دقیقی برقرار است و این شباهت جزء به جزء تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. این اشیاء ساختاری خود مشابه در یک امتداد؛ اما در بازهٔ مقیاس محدودی را نشان می‌دهند. یک فرکتال به عنوان یک شکل هندسی، به طور کلی خصوصیات زیر را دارا می‌باشد.

۱- دارای خاصیت خود همانندی باشد.
2- در مقیاس خرد بسیار پیچیده باشد.
۳- بعد آن یک عدد صحیح نباشد زیرا الگوهای فرکتالی تحت دامنهٔ محدودی از مقیاس‌ها گسترش می‌یابند.

۱-۲- انواعی از فراکتال:

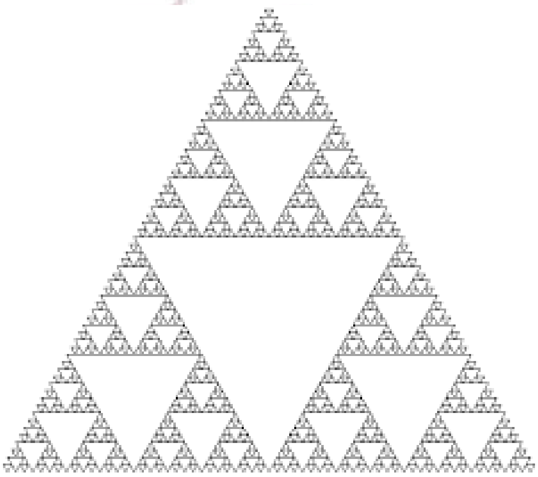
۲-۱-۱- برفدانهٔ کخ:



شکل(۱) برفدانۀ کخ

به شکل(۱) دقت کنید. در هر مرحله، یک سوم میانی هر پاره خط را برداشته و دو پاره خط به همین اندازه اضافه می کنیم. اگر این عمل را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، شکلی به دست می‌آید که آن را برفدانۀ کخ می‌گوییم.
نکتۀ جالب این است که برفدانۀ کخ، شکلی با محیط نامتناهی ولی مساحت متناهی است!

۲-۱-۲- مثلث سرپینسکی:



شکل(۲) مثلث سرپینسکی

مطابق شکل(۲) مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر بگیرید. وسطهای ضلع‌های آن را به هم وصل کنید و مثلث متساوی الاضلاعی که در وسط پدید می‌آید را از آن حذف نمائید. اکنون سه مثلث متساوی الاضلاع باقی مانده در شکل را در نظر بگیرید، وسطهای ضلع‌ها را در هر مثلث به هم وصل کرده و از درون هر یک, مثلث

متساوی الاضلاعی که در وسط پدید می‌آید را حذف نمائید. با تکرار این روش در دو گام بعدی این شکل ها حاصل می‌شوند: اگر این فرآیند را تا بی‌نهایت تکرار کنیم شکل به دست آمده را مثلث سرپینسکی گویند.

۲-۱-۳- مجموعهٔ کانتور:

شکل(۳) مجموعهٔ کانتور

با توجه به شکل(۳) برای رسم مجموعهٔ کانتور، کافی است که یک پاره خط را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و سپس قسمت میانی آن را حذف کنیم. اگر همین الگو را با خط‌های بدست آمده تا بینهایت ادامه دهیم شکل حاصل مجموعهٔ کانتور نامیده می‌شود.

۲-۲- ابعاد فراکتالی:

یکی از نکات بسیار جالب در بررسی فراکتال‌ها، بعد آنهاست. مثلا می‌دانیم که مربع یک شیء ریاضی دو بعدی است. این بعد دوم را می‌توان اینگونه بدست آورد که از تقسیم هر ضلع مربع بهN قسمت مساوی و وصل کردن نقاط رو به رو به هم،N^2 مربع بدست می‌آید که اندازهٔ هرکدام $1/N^2$ برابر مساحت مربع اولی است. این شکل، یک ساختار فراکتالی دارد که هر ضلع مربع‌های کوچک با ضریبN به اندازهٔ ضلع مربع اصلی تبدیل می‌شود. بنابراین بعد هر جسم را می‌توان اینگونه تعریف کرد: نسبت لگاریتم تعداد اشکال خود متشابه به لگاریتم عامل بزرگنمایی.

$$D=\frac{\log N^2}{\log N}=2 \qquad (1)$$

اگر به شکل مجموعهٔ کانتور نگاه کنیم، ما می‌بینیم که این مجموعه نه یک خط کامل است که بعد یک داشته باشد و نه یک نقطه که بعد آن صفر باشد بلکه شکلی بین آن دو با بعد۰/۶۳۰۹ است.

یا برای فراکتال سرپینسکی که به یک صفحهٔ کامل نمی رسد، داریم: $D=1/58$

در فراکتال‌ها این بعد فراکتالی است که مهم است و نه مقیاس. زیرا در هر اندازه ای، این بعد فراکتالی حفظ می‌شود و بیانگر خاصیت اصلی فراکتال است. همین امر کاربرد فراکتال‌ها را در علم امروزی زیاد کرده است.

در ادامه به بررسی چند فرمول برای بدست آوردن ابعاد فراکتالی می‌پردازیم:

۲-۲-۱- بعد تشابه ای:

برای مجموعه ای شامل N قطعهٔ مقیاس شده در همهٔ جهات به وسیلهٔ یک فاکتور r بعد D به وسیلهٔ زیر تعریف می‌شود .

$$D = \frac{-\log N}{\log r} \qquad (۲)$$

به عنوان مثال، منحنی ونکچ از چهار کپی از خودش مقیاس شده به وسیلهٔ یک فاکتور $\frac{1}{3}$ است، بنابراین بعد تشابه ای آن $D=\frac{\log 4}{\log 3} = 1/262$ است. و همچنین مجموعهٔ کانتور از دو کپی از خودش مقیاس شده به وسیلهٔ یک فاکتور $\frac{1}{3}$ است، بنابراین بعد تشابه ای آن $D=\frac{\log 2}{\log 3}=0/6309$ است.

تعمیم این بعد برای مجموعه‌های خود متشابه دارای مقیاس‌های متفاوت برای قطعات مختلف، کار سختی نیست،

برای یک مجموعهٔ فرکتال چندگانه شامل N قطعه که i امین قطعه به وسیلهٔ فاکتور r_i مقیاس شده است، بعد D جواب یکتای معادلهٔ موران است.

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1 \quad (۳)$$

متأسفانه، "بعد تشابه ای" تنها برای یک کلاس کوچک از مجموعه‌های خود متشابه معنادار است، به همین دلیل در عمل زیاد کاربرد ندارد.

۲-۲-۲- بعد هاسدورف: قبل از تعریف بعد هاسدورف، چون اندازهٔ هاسدورف را نیاز داریم ابتدا اندازهٔ هاسدورف را تعریف کرده سپس تعدادی از خواص آن را بیان می‌کنیم.

اندازهٔ هاسدورف: اگر U یک زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای اقلیدسی n – بعدی، R^n باشد، قطر U به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|U| = Sup\{|x-y| : x.y \in U\} \quad (۴)$$

یعنی بزرگترین فاصلهٔ هر دو جفت از نقاط در U است. اگر $\{U_i\}$ یک خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌هایی از قطر حداکثر δ ، که F را می‌پوشانند، باشد. یعنی $F \subseteq U_{i=1}^{\infty} U_i$ با $0 \le U_i \le \delta$ برای هر i، به $\{U_i\}$ یک δ-پوشش از F گوییم.

فرض کنیم F یک زیرمجموعهٔ R^n و s یک عدد نامنفی باشد. برای هر $\delta > 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$H_\delta^s(F) = Inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}\ is\ a\ \delta - cover\ of\ F\} \quad (۵)$$

بنابراین تمام پوش‌های F از قطر حداکثر δ را بررسی کرده و مجموع توان s از قطرهای آن را مینیمم می‌کنیم. وقتی δ کاهش یابد، کلاس پوش‌های مجاز از F در معادله کاهش می‌یابد. پس اینفیمم $H_\delta^s(F)$ افزایش می‌یابد و بنابراین به یک حد وقتی $\delta \longrightarrow 0$ می‌رسیم، می‌نویسیم:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (۶)$$

این حد باری هر زیرمجموعهٔ F از R^n موجود است. باید توجه داشت که مقدار حد می‌تواند ۰ یا ∞ باشد. $H^s(F)$ را "اندازهٔ هاسدورف s-بعدی" از F می‌نامیم.

یک خاصیت در این باره وجود دارد. فرض کنیم S یک تبدیل متشابه کننده با فاکتور مقیاس $\lambda > 0$ باشد. اگر $F \subset R^n$ ، آنگاه:

$$H^s\big(S(F)\big) = \lambda^s H^s(F) \quad (۷)$$

اثبات: اگر $\{U_i\}$ یک δ-پوش از F باشد، آنگاه $\{S(U_i)\}$ یک $\lambda\delta$-پوش از $S(F)$ است. بنابراین:

$$\sum|S(U_i)|^s = \lambda^s \sum|U_i|^s \quad (۸)$$

پس با اینفیمم گرفتن داریم:

$$H^s_{\lambda\delta}(S(F)) \leq \lambda^s H^s_\delta(F) \quad (۹)$$

وقتی که $\delta \longrightarrow 0$ نتیجه می‌دهد که $H^s\big(S(F)\big) \leq \lambda^s H^s(F)$

S را با S^{-1} و λ را با λ^{-1} و F را با $S(F)$ جایگزین می‌کنیم و طرف دیگر نامساوی را ثابت می‌کنیم. بنابراین حکم ثابت است.

بعد هاسدورف: معادلهٔ ۵ را در نظر می‌گیریم. واضح است که برای هرمجموعهٔ داده شده $F \subseteq R^n$ و $\delta < 1$ ، $H^s_\delta(F)$ غیر صعودی با s است.

همچنین وسیلهٔ معادلهٔ ۶ ، $H^s(F)$ غیر صعودی است. علاوه بر این داریم:

اگر $t > s$ و $\{U_i\}$ یک δ-پوش از F باشد. داریم:

$$\sum_i|U_i|^t \leq \sum_i|U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s}\sum_i|U_i|^s \quad (۱۰)$$

بنابراین $H^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}H^s_\delta(F)$. فرض کنیم $\delta \longrightarrow 0$. می‌بینیم که اگر $H^s_\delta(F) < \infty$ ، آنگاه $H^t(F)$ برای $t > s$. بنابراین یک گراف از $H^S(F)$ نسبت به s نشان می‌دهد که یک مقدار بحرانی از s که $H^s(F)$ از ∞ به ۰ "می‌پرد" ، وجود دارد. این مقدار بحرانی، " بعد هاسدورف" یا "بعد هاسدورف-بشیکفیچ" از F نامیده و به وسیلهٔ $dim_H F$ نمایش داده می‌شود که برای هر مجموعهٔ $F \subseteq R^n$ تعریف شده است.

به بیان دیگر، داریم:

$$dim_H F = Inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = Sup\{s : H^s(F) = \infty\} \quad (۱۱)$$

(سوپریمم از مجموعهٔ تهی را صفر در نظر می‌گیریم) بنابراین:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & if\ 0 \leq s < dim_H F \\ 0 & if\ s > dim_H F \end{cases} \quad (۱۲)$$

اگر $s = dim_H F$ باشد، آنگاه $H^S(F)$ می‌تواند صفر یا بی‌نهایت یا $0 < H^S(F) < \infty$ باشد.

برای یک مثال ساده، فرض کنیم F یک دیسک مسطح یا شعاع یک در R^3 باشد. از خواص معمولی طول، مساحت و حجم داریم:

$$H^3(F) = \frac{6}{\pi}vol(F) = 0 . 0 < H^2(F) = \frac{4}{\pi}area(F) = 4 < \infty \quad H^1(F) = length(F) = \infty$$

بنابراین $dim_H F = 2$ با $H^S(F) = \infty$ اگر $s < 2$ و $H^S(F) = 0$ اگر $s > 2$.

۳- بحث و نتیجه گیری:

جهان هستی پیرامون، فراتر از تصور کنونی ماست و با هندسهٔ اقلیدسی قابل درک نیست. نقش های عجیب، تداعی زمان و مکان، پدیده‌های گوناگون اطراف و … همگی پیامی به سمت پیشرفت علم می‌دهند. فراکتال‌ها به عنوان پله ای بالاتر از هندسهٔ گذشته، نقش‌ها و کاربردات فوق العاده گسترده تری دارند و قطعاً مسیری برای پیشرفت علم ریاضیات می‌باشند. نوعی هندسه که کمکی شایان به مطالعه و درک بسیاری از مفاهیم علمی از جمله رشد باکتری، طرح یخ زدن آب، نقش دانه‌های برف، امواج مغزی و بسیاری دیگر از الگوها می‌باشد. وجود طرح و الگو در یک سامانهٔ طبیعی، قطعاً شانس زیادی برای وجود نوعی فراکتال محسوس دارد. فراکتال پیشرفت علوم ریاضی را تسریع بخشیده و پلی محکم تر برای ارتباط با سایر علوم در راستای کشف جهان شگفت انگیز کنونی است.

منابع:

دلخوش، مهدی، ۱۳۹۶، معرفی فراکتال‌ها و بعدهای کسری، چاپ دوم، اصفهان، ریاضی و جامعه

غفاری, هیمن و فرهاد جانباز امیرانی، ۱۳۹۳، انواع مختلف ابعاد فراکتال و هندسه فراکتالی، اولین همایش ملی الکترونیکی پیشرفت های تکنولوژی در مهندسی برق، الکترونیک و کامپیوتر، بصورت الکترونیکی، دانشگاه خیام الکتریک

بابلیان، اسماعیل، ویژگی ها و تولید فراکتال ها، مجله رشد آموزش ریاضی

THE GEOMETRY OF SCHEMES, David Eisenbud and Joe Harris, 2000, Vol. 28. No. 1. 5-17