

بسمه تعالی

مرحله اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران

زمان : ۲۴۰ دقیقه

(۱) ۵ گونی شکر به وزن های ۲، ۳، ۴، ۴ و ۶ و یک گونی خالی داده شده اند. می خواهیم همه ی شکر ها را در یک گونی بریزیم. هر بار می توانیم یک عمل «ادغام» انجام دهیم. هر ادغام یعنی انتخاب دو عدد از گونی های شکر، مثلا با وزن های a و b ، و یک گونی خالی، و ریختن کامل شکر های دو گونی خالی. فرض کنید که هزینه ی انجام این ادغام برابر $a + b$ باشد. کم ترین هزینه ی کل انجام این کار چه قدر است؟

۶۰ (ه)

۵۱ (د)

۴۶ (ج)

۴۳ (ب)

۱۹ (الف)

(۲) ۱۰۰ کار قرار است توسط ۱۰ نفر اجرا شوند. زمان اجرای هر کار از قبل مشخص است. می خواهیم کار هایی که هر مجری باید انجام دهد را مشخص کنیم. فرض کنید افراد مجری دقیقا مثل هم عمل می کنند. مثلا اگر در زمان صفر دو کار به ترتیب با زمان های ۱۰ دقیقه و ۲۰ دقیقه را به یک مجری دهیم، او کار اول را دقیقا در زمان ۱۰ دقیقه و دومی را در زمان ۳۰ دقیقه تمام می کند. الگوریتم زیر را برای تخصیص کار ها به مجریان در نظر می گیریم. فرض می کنیم در ابتدا (زمان صفر) همه ی مجریان بی کار و آماده ی اجرای کار های تخصیص داده شده اند.

(۱) همه ی کار ها را به ترتیب زمان های اجرایشان به صورت صعودی مرتب کن و به همین ترتیب مورد بررسی قرار بده،

(۲) کار مورد بررسی را به مجری ای بده که کارهایی که قرار است انجام دهد زودتر از بقیه تمام می شود.

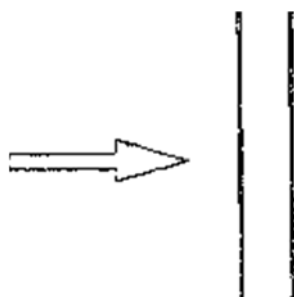
فرض کنید که مجموع زمان های اجرای همه ی کار ها ۱۰۰۰۰ دقیقه و زمان اجرای طولانی ترین

پانزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران

کار 200 دقیقه است. بیشترین زمانی که همه‌ی کارها تمام می‌شود حداکثر چند دقیقه است؟

- الف) 1180 ب) 1500 ج) 980 د) 2000 ه) 1000

۳) دو شیشه‌ی موازی با هم داده شده‌اند. از سمت چپ به این دو 100 واحد نور می‌تابانیم. می‌دانیم هر یک از این شیشه‌ها اگر 100 واحد نور دریافت کند، 20 واحد آن را در جهت عکس تابش بر می‌گرداند، 10 واحد را جذب می‌کند و 70 واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می‌دهد. چند واحد نور به سمت راست شیشه‌ها منتقل می‌شود؟



- الف) 49 ب) $49 + \frac{49}{4}$ ج) $49 + \frac{4 \times 49}{100}$ د) 70 ه) $49 + \frac{4 \times 49}{96}$

۴) به چند طریق عدد 8 را می‌توان به صورت $a + 2 \times b + 4 \times c + 8 \times d$ نوشت که در آن a, b, c و d دارای مقادیر صفر، 1 یا 2 هستند؟

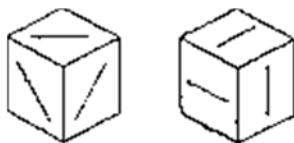
- الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4 ه) 8

۵) مهره‌ای بر روی نقطه‌ی مبدأ صفحه‌ی مختصات قرار دارد. در هر حرکت می‌توانیم مهره را از نقطه‌ی (x, y) به نقطه‌ی $(x + 1, y + 1)$ یا به نقطه‌ی $(x, y - 1)$ ببریم. به چند طریق می‌توانیم این مهره را به نقطه‌ی $(4, 0)$ برسانیم؟

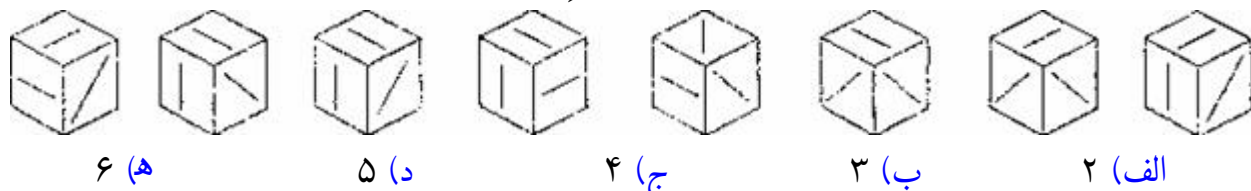
- الف) 35 ب) 16 ج) 256 د) 70 ه) به نامتناهی روش

۶) بر روی هر یک از وجه‌های یک مکعب پاره خطی رسم کرده‌ایم، به طوری که هیچ دو پاره خطی در فضا موازی نیستند. این مکعب از دو گوشه (با مقداری دوران) به شکل‌های روبرو دیده می‌شود.

شود:



چند تا از شکل های زیر ممکن است، با مقداری دوران این مکعب، از گوشه ای از آن دیده شوند؟



۷) آرش و آرمین با هم این بازی را انجام می دهند: آرش یک عدد x بین ۱ و ۱۳۸۴ انتخاب می کند و آرمین سعی می کند این عدد را حدس بزند. در هر مرحله آرمین یک عدد می گوید و آرش رابطه ی این عدد را نسبت به x (بزرگ تر، کوچک تر یا مساوی) را مشخص می کند. اگر عدد آرمین از $2x$ کوچک تر و بزرگ تر یا مساوی x باشد، آرمین برنده است. می خواهیم بدانیم کم ترین تعداد مرحله بازی که آرمین مطمئن است x هر چه که باشد، در این تعداد مرحله او بازی را خواهد برد، چند تاست؟

- (الف) ۶۹۲ (ب) ۱۰ (ج) ۹ (د) ۴ (ه) ۳

۸) دنباله ای از اعداد ۱ تا ۱۳۸۳ را از چپ به راست نوشته ایم:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12, \dots, 1382, 1383$$

از سمت چپ شروع می کنیم و به تعداد رقم یکان عدد فعلی جلو می رویم. بنابراین اعدادی که به آن ها بر می خوریم، عبارتند از $1, 2, 4, 8, \dots$ تعداد این اعداد چند تاست؟

- (الف) ۲۳۱ (ب) ۳۴۶ (ج) ۳۴۵ (د) ۲۷۷ (ه) ۲۷۸

۹) دو نفر این بازی را انجام می دهند: هر نفر در نوبت خود، یک رقم از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بر روی کاغذ می نویسد و بازی پس از نوشتن رقم n ام خاتمه می یابد. نفر دوم قصد دارد کاری کند که در انتها مجموع ارقام نوشته شده بر ۹ بخش پذیر باشد. ولی نفر اول می خواهد از این کار

جلوگیری کند. به ازای چه مقدار n نفر دوم می تواند حتما به هدف خود برسد؟

الف) ۱۳۸۲ ب) ۱۳۸۳ ج) ۱۳۸۴ د) ۱۳۸۶ ه) ۱۳۸۸

۱۰) به چند طریق می توان آجر های شکل مقابل را با ۳ رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاوری هم رنگ نباشند.



الف) 3^4 ب) 3×2^{15} ج) ۳ د) $3^4 \times 2^{12}$ ه) ۶

۱۱) N یک عدد ۱۳۸۳ رقمی با رقم سمت چپ ۶ است. اگر هر دو رقم متوالی N را به عنوان یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم، این عدد یا مضرب ۱۷ است یا مضرب ۲۳. کدام گزینه زیر می تواند رقم سمت راست N باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۲) به چند طریق می توان خانه های یک جدول 10×3 (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرد، به طوری که:

* رنگ خانه ها نسبت به ستون وسط متقارن باشد.

* از هر دو سطر متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.

* هیچ دو خانه ی سیاه مجاور هم نباشند. دو خانه مجاور اند اگر یک ضلع مشترک داشته

باشند.

الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۰۴۸ ج) ۳۰۷۳ د) ۱۵۳۶ ه) ۷۶۸

۱۳) عدد ۸۴ رقمی دودویی $x = x_82x_{81} \dots x_1x_0$ مفروض است. از x عدد ۴۲ رقمی مبنای ۴ خاص $y = y_{41}y_{40} \dots y_1y_0$ را به شرح زیر می سازیم.

$$y_0 = x_0 - 2x_1$$

$$y_i = x_{2i-1} + x_{2i} - 2x_{2i+1} + 1$$

$$y_{41} = x_{81} + x_{82}$$

به طوری که هر y_i می تواند یکی از رقم های مجموعه ی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را اختیار کند. چه

رابطه ای بین $x = \sum_{i=0}^{82} x_i 2^i$ و $y = \sum_{i=0}^{41} y_i 4^i$ برقرار است؟

الف) $y = 2x$ ب) $x = 2y$ ج) $x = y$ د) $y = 4x$ ه) $y = -x$

۱۴) دنباله ی $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ جای گشتی از اعداد ۱ تا n است به طوری که برای $1 \leq$

$i \leq n - 1$ یا $a_i = a_{i+1} + 5$ یا $a_i = a_{i+1} - 8$. بزرگ ترین مقدار n چند است؟

الف) 10 ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

۱۵) در بازی «سیب زمینی داغ»، ۵ بازی گر هستند با یک سیب زمینی داغ. زیر پای هر بازی گر

یک شماره است. هر بازی گر مجبور است سیب زمینی داغ را یک ثانیه نگه دارد و سپس آن را به

بازی گری که شماره اش زیر پای اوست بدهد. در این بازی شما با شماره ی ۱ شرکت کرده اید و در

ابتدا سیب زمینی نزد شما ست. برای چند تا از حالت های زیر ممکن است شماره ی زیر پای شما

طوری باشد که دیگر سیب زمینی به دست شما برنگردد؟

* ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۱ زیر پای ۵

* ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵

* ۳ زیر پای ۲، ۱ زیر پای ۳، ۵ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵

* ۱ زیر پای ۲، ۲ زیر پای ۳، ۲ زیر پای ۴ و ۳ زیر پای ۵

الف) 0 ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۶) ۸ خانواده به یک مهمانی دعوت شده اند. تعداد اعضای خانواده ها به ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵ و ۵ نفرند. میزبان برای شام تعدادی میز در نظر گرفته است که هر کدام دقیقا ۷ جای صندلی

دارد. میزبان می خواهد جای نشستن هر فرد را از قبل تعیین کند به طوری که هیچ دو نفر از اعضای

یک خانواده دور یک میز نشینند. حداقل تعداد میز های مورد نیاز چند تاست؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۷) عدد N داده شده است. N را می توانیم هر بار در یک عدد صحیح دل خواه ضرب کنیم و سپس کلیه ی صفر های عدد حاصل را از بین ببریم. هدف این است که با تکرار این کار در نهایت عدد حاصل تک رقمی شود. مثلاً ۲۱ را می توان با دو بار به ۶ تبدیل کرد:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \times 5 & & \times 4 & & \\ & & 21 & \rightarrow & 105 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 60 & \rightarrow & 6 \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & \\ & & 1 & & 2 & & & & & & \end{array}$$

۱۱) را با حداقل چند بار تکرار این عمل می توان به یک عدد یک رقمی تبدیل کرد؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۸) یک لامپ سالم در زیرزمین فقط به یکی از ۱۰ کلید مشابه در حال طبقه ی بالا وصل است. ۹ کلید دیگر به هیچ لامپی وصل نیستند. کلید متصل به لامپ، اگر در وضعیت رو به بالا قرار گیرد لامپ را روشن و اگر رو به پایین باشد آن را خاموش می کند. می خواهیم با حداقل تعداد پایین رفتن به زیرزمین، مشخص کنیم کدام یک از کلید ها به لامپ زیرزمین وصل است. می دانیم که لامپ با ۵ بار خاموش و روشن کردن متوالی حتما می سوزد، و لامپ سوخته از سالم قابل تشخیص است. توجه کنید که فقط همان یک لامپ را در اختیار داریم و سوختن آن هم برای ما مهم نیست. با حداقل چند بار پایین رفتن می توان جواب مسئله را پیدا کرد؟ (توجه کنید که بالا رفتن را نمی شماریم.)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۹) یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ را به چند طریق می توان با مکعب مستطیل $3 \times 1 \times 1$ به طور کامل پر کرد؟

- الف) ۱ ب) ۸ ج) ۲۴ د) ۲۷ ه) ۲۱

۲۰) جای گشت n عضوی $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ از اعداد ۱ تا n را در نظر بگیرید. برنامه ی زیر این دنباله را مرتب می کند:

دستور های زیر را برای هر یک از مقادیر i از ۱ تا n تکرار کن:

◀ تا وقتی که a_i برابر i نیست، مقدار خانه ی i را با مقدار خانه ی a_i تعویض کن.

مثلا اگر ورودی $\langle 5,2,3,1,4 \rangle$ باشد،

تعویض تعویض تعویض
 $495 \rightarrow \langle 5,3,2,1,4 \rangle$ $194 \rightarrow \langle 4,3,2,1,5 \rangle$ $293 \rightarrow \langle 1,2,3,4,5 \rangle$

حداکثر تعداد تعویض ها برای تمام جای گشت های 2005 عضوی را در نظر بگیرید. باقی مانده ی این عدد بر ۵ چند است؟

- الف) 0 ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۱) عدد N را «متوازن» می گوئیم اگر مجموع تعداد ارقام ۱ در همه ی اعداد ۱ تا N برابر N باشد. مثلا ۱ متوازن است. ۱۱ متوازن نیست چون مجموع تعداد ارقام ۱ آن (فقط در عدد های ۱، ۱۰ و ۱۱) برابر ۴ است. می دانیم که اولین عدد متوازن بزرگ تر از ۱ عدد 199981 است. تعداد عدد های متوازن بین (و شامل) 199981 تا 200000 چند تاست؟

- الف) ۱ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۹ ه) 20

۲۲) یک مربع 100×100 را به صورت شطرنجی رنگ کرده ایم. شخصی در گوشه ی بالا و سمت چپ این مربع که خانه ای سفید است ایستاده است. این شخص می خواهد با حرکت در این مربع پد هر کدام از خانه ها حداقل یک بار ایستاده باشد. هزینه ی رفت و آمد برای حرکت او به این صورت است:

* از هر خانه به هر کدام خانه های مجاور (حداکثر ۴ خانه)، ۱ تومان.

* از هر خانه ی سیاه به هر خانه ی سیاه دیگر، رایگان است.

حرکت به غیر از دو صورت گفته شده در بالا ممکن نیست. حداقل هزینه ای که این شخص باید بپردازد چه قدر است؟

الف) 9999 ب) 5000 ج) 4999 د) 5001 ه) 9998

۲۳) اعداد 0 تا ۱۲۷ را به ترتیب پشت سر هم نوشته ایم. حالا بین هر دو عدد XOR (یا \oplus) آن دو را می نویسیم. سپس اعداد اولیه را پاک می کنیم. این کار را آن قدر تکرار می کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند. آن عدد چند است؟

$C = A \oplus B$ را به این صورت تعریف می کنیم: اگر a_i, b_i, c_i به ترتیب رقم های i ام (از سمت راست) A, B, C در مبنای دو باشند، در این صورت:

$$c_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases}$$

مثلا: $5 \oplus 7 = (101)_2 \oplus (111)_2 = 2$

الف) 0 ب) ۱۲۷ ج) ۱ د) ۶۴ ه) ۶۳

۲۴) چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{1,2,3,4\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟

الف) 2^{13} ب) 2^{15} ج) 2^{11} د) 3×2^{11} ه) 4×3^{11}

۲۵) یک عدد صد رقمی دهدهی با ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. آن را از چپ به راست، به ترتیب زیر می خوانیم و عدد جدیدی می سازیم: اولین رقم سمت چپ را می خوانیم و به همان تعداد جلو می رویم، رقمی که به آن می رسیم را در عدد جدید قرار می دهیم و در عدد فعلی یک رقم جلو می رویم. این کار را تکرار می کنیم تا به انتهای عدد فعلی برسیم. سپس همین کار را با عدد جدید انجام می دهیم و عدد جدید تری می سازیم تا وقتی نتوان عدد جدید تری ساخت. مثال:

عدد ساخته شده ی اول

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۲۴۵۶۷\dots \rightarrow ۲۶۷\dots$$

عدد ساخته شده ی دوم

$$\rightarrow ۷\dots$$

اگر عدد اولیه ی صد رقمی به گونه ای باشد که آخرین عدد ساخته شده ۹ رقمی شود، تعداد عدد های ساخته شده حداقل و حداکثر چند تا است؟

- (الف) حداقل ۱ و حداکثر ۴ (ب) حداقل ۳ و حداکثر ۳ (ج) حداقل ۲ و حداکثر ۲
 (د) حداقل ۱ و حداکثر ۲ (ه) حداقل ۲ و حداکثر ۳

۲۶) یک چراغ چشمک زن با سرعت (a, b) چراغی است که به طور متناوب، a ثانیه ی متوالی خاموش است و سپس برای b ثانیه ی متوالی روشن می ماند، و مدام این چرخه را تکرار می کند. (a و b اعداد طبیعی هستند). در مورد یک چراغ چشمک زن می دانیم:

- (۱) در ثانیه ی دهم خاموش بوده است. (۲) در ثانیه ی دوازدهم روشن بوده است.
 (۳) در ثانیه ی چهاردهم خاموش بوده است. (۴) در ثانیه ی شانزدهم روشن بوده است.

با این فرض که نمی دانیم چراغ از چه ثانیه ای شروع به کار کرده است، چند حالت ممکن (a, b) برای سرعت این چراغ وجود دارد؟

- (الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

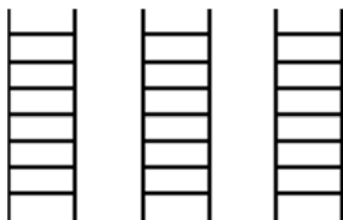
۲۷) دنباله ی $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که $a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$. S_j را مجموع j عنصر اول دنباله تعریف می کنیم. می دانیم که هیچ $1 \leq j \leq n$ وجود ندارد که S_j مضرب ۵ باشد. در هر گزینه یک زوج مرتب (n, S_n) داده شده است. کدام گزینه ی زیر امکان پذیر است؟

- (الف) (67,333) (ب) (83,334) (ج) (77,-256) (د) (93,-288) (ه) (105,519)

۲۸) یک جدول 2005×2005 در اختیار داریم که تمام خانه های آن سفید هستند. شخصی ۱۳۸۳ بار، یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه ی خانه های آن سطر و آن ستون را بر عکس می کند. توجه کنید که رنگ خانه ی مشترک در سطر و ستون تغییر نمی کند. تعداد خانه های سیاه باقی مانده در جدول انتها، کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

الف) 0 ب) 2772915 ج) 196078 د) 3044854 ه) 2124

۲۹) آقای ملکی می خواهد از سه نردبان ۷ پله ای هواپیما که مانند شکل مقابل در کنار هم قرار دارند بالا برود و در بالاترین سطح قرار بگیرد. او در هر حرکت می تواند به یک پله بالاتر در یکی از نردبان های مجاور یا نردبانی که اکنون بر روی آن قرار دارد برود، ولی نمی تواند بر روی اولین پله نردبان سمت راست باشد، به چند طریق می تواند خود را به یکی از پله های هفتم برساند؟

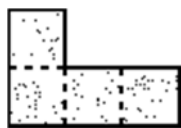


الف) 70 ب) ۱۲۸ ج) ۱۶۹ د) ۱۸۲ ه) ۲۳۹

۳۰) ۳۲ لامپ موجود است و هر کدام به یک کلید متصل است. در ابتدا بعضی از لامپ ها روشن و بعضی خاموش اند. ناگهان یک سیم متصل به یکی از لامپ ها اتصال کوتاه می کند خراب شده و باعث سوختن فیوز و در نتیجه قطع کل برق می شود. فیوز سوخته قابل استفاده ی مجدد نیست و باید بلافاصله تعویض شود. اگر کلید لامپی که اتصال دارد در وضعیت روشن قرار داشته باشد و فیوز سالمی را جای گزین کنیم فیوز جدید نیز خواهد سوخت. برای پیدا کردن کلید متصل به اتصال کوتاه چند عدد فیوز سالم جدید لازم است؟

الف) ۵ ب) ۱ ج) ۶ د) ۴ ه) ۳۱

۳۱) حداقل چند مستطیل 2×3 را باید در صفحه قرار دهیم به طوری که هم پوشانی نداشته باشند و بتوان آن ها را با موزائیک های به شکل مقابل کاملا پوشاند؟ بدیهی است که دوران و تقارن مجاز است.



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) هرگز نمی شود.

۳۲) دنباله ی ۵ عضوی $\langle 3,1,4,5,2 \rangle$ را در نظر بگیرید که عضو اول آن ۳ است. هر عمل

« وارون » یعنی انتخاب یک i و وارون کردن عضو های اول تا i ام. مثلا $\langle 5,4,1,3,2 \rangle$ دنباله را پس از یک وارون نشان می دهد. با چند تا عمل وارون می توان دنباله ی ورودی را از چپ به راست به صورت صعودی مرتب کرد؟ کم ترین گزینه ی ممکن را انتخاب کنید.

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۳۳) یک مکعب بزرگ $n \times n \times n$ را در نظر بگیرید. این مکعب را به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده ایم. دو نفر این بازی را روی مکعب بزرگ انجام می دهند: هر نفر در نوبت خود یک مکعب مستطیل $1 \times 1 \times n$ ، $1 \times n \times 1$ ، $n \times 1 \times 1$ و یا $1 \times 1 \times n$ از مکعب بزرگ، که هیچ یک از مکعب های واحد آن رنگ نشده اند، را انتخاب کرده و مکعب های واحد آن را رنگ می کند. در ابتدا هیچ یک از مکعب های واحد رنگ نشده اند. هر کس نتواند در نوبت خود مکعب مستطیلی به شرح فوق انتخاب و رنگ کند بازنده خواهد بود. برای کدام یک از حالت های $n = 10$ ، $n = 11$ ، $n = 12$ و $n = 13$ ، نفر اول می تواند طوری بازی کند که حتما برنده شود؟

الف) همه ی حالات ب) هیچ یک از حالات ج) حالات $n = 11$ و $n = 13$

د) حالت $n = 11$ ه) حالات $n = 10$ و $n = 12$

۳۴) n نفر دور میزی دایره ای شکل نشسته اند. هر نفر یا راستگوست یا دروغگو (راست گو همیشه راست و دروغ گو همیشه دروغ می گوید). هر کدام از این n نفر این جمله را می گوید: « بین من و دو نفر سمت راست و دو نفر سمت چپ من، دقیقا k نفر دروغ گو هستند. » کدام یک از گزاره های زیر در مورد r ، تعداد حالات دروغ گو و راست گو بودن این افراد، درست است؟

الف) اگر $n = 51$ و $k = 4$ ، آن گاه $r = 4$.

ب) اگر $n = 50$ و $k = 0$ ، آن گاه $r = 0$.

ج) اگر $n = 51$ و $k = 5$ ، آن گاه $r = 1$.

د) اگر $n = 50$ و $k = 1$ ، آن گاه $r = 6$.

ه) اگر $n = 52$ و $k = 1$ ، آن گاه $r = 6$.

۳۵) در 30 کیسه ۳۲ کارت با شماره های ۱ تا ۳۲ ریخته ایم، به طوری که هیچ کیسه ای خالی نیست و نیز اگر کارت i در کیسه ی k باشد، کارت $i + 1$ در کیسه ای با شماره ی کوچک تر از k نیست. در ابتدا در کیسه ها بسته است و وقتی در یکی را باز می کنیم شماره ی کارت های آن را می بینیم. دست کم در چند کیسه را باید باز کنیم تا حتما بتوانیم کارت ۱۳ را ببینیم؟

الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۱۳ (ه) ۳۲

۳۶) تعدادی کارت داریم که روی هر یک، یک عدد نوشته شده است. دستگاه کارت برگردان دستگاهی است که اگر دو کارت با عدد های a و b به آن بدهیم، آن ها را نابود کرده و یک کارت با عدد $2a + 2b$ تولید می کند. (یعنی دو کارت را به یک کارت تبدیل می کند.) ۷ تا کارت با شماره ی ۱ داریم. می خواهیم با چند بار استفاده از دستگاه کارت برگردان بیش ترین عدد ممکن را تولید کنیم. این عدد چند است؟

الف) ۲۵۶ (ب) 190 (ج) ۹۴ (د) ۸۲ (ه) ۵۲

۳۷) در پارکینگ مشتی ممدعلی سیستم عجیبی برای پارک کردن ماشین ها برقرار است. این پارکینگ هفت جای پارک دارد که به ترتیب با شماره های صفر تا شش مشخص شده اند. هر ماشینی که به پارکینگ وارد می شود ابتدا سراغ جای پارکی می رود که شماره ی آن برابر باقی مانده ی تقسیم شماره ی پلاک ماشین بر عدد هفت است. اگر این جای پارک پر بود به سراغ بعدی می رود (اگر جای پارک شماره شش پر بود به سراغ شماره ی صفر می رود) و همین طور ادامه می دهد تا به اولین جای پارک خالی برسد و آن جا پارک می کند و سپس ماشین بعدی وارد پارکینگ می شود. اگر در انتها ماشین ها در پارکینگ به ترتیب ۴۶، ۶۸، ۳۹، ۹۳، ۲۳، ۷۰، ۹۸ ایستاده باشند (پلاک شماره ی ۹۸ در جای پارک شماره ی صفر و پلاک ۴۶ در پارکینگ شماره ی ۶)، چند ترتیب ممکن اولیه برای ورود آن ها ممکن است؟

الف) 5040 (ب) 210 (ج) 305 (د) 420 (ه) 720

۳۸) آرش برای فرستادن تقاضای استخدام برای هر یک از ده شرکت مختلف مورد نظرش باید سه

توصیه نامه از سه استاد مختلف خود (مجموعاً 30 عدد) داشته باشد. چهار نفر از اساتید او به نام های دکتر قدسی، دکتر توسرکانی، دکتر جابری پور و دکتر اکبری برای او توصیه نامه خواهند نوشت. دکتر قدسی ۹ عدد، دکتر توسرکانی ۸ عدد، دکتر جابری پور ۷ عدد و دکتر اکبری ۶ عدد. آرش چند راه مختلف برای فرستادن این توصیه نامه ها دارد؟

الف) 12600 (ب) $\binom{10}{4}$ (ج) 4^{10} (د) 3^{10} (ه) 3024

۳۹) یک مکعب $1 \times 1 \times 1$ را به 630 مکعب با ابعاد $\frac{1}{7} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{10}$ تقسیم می کنیم. اگر خطی که قطر اصلی این مکعب است را رسم کنیم، از داخل چند مکعب می گذرد؟

الف) ۸۵ (ب) ۸۴ (ج) ۲۵ (د) ۲۴ (ه) 10

۴۰) دنباله ای از اعداد $1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, \dots; 1, 1, -1, -1, 1, -1$ راست به چپ x_0 تا x_{83} نام گذاری می کنیم. دقت کنید که دنباله ی بعد از '؛' تکرار می شود. معادل دودویی عدد $\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i$ چند رقم صفر دارد؟

الف) ۸۳ (ب) ۸۲ (ج) ۴۲ (د) ۴۱ (ه) 40

موفق باشید