$X =$ تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این ۳ مهره

$Y =$ تعداد مهره‌های قرمز مشاهده شده در این ۳ مهره

تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $\rho(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۵ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر است

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & x>0 \,,\; y>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کنید و $P(X<Y<2X)$ و $COV(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۶ اگر تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy & x>0 \,,\; y>0 \,,\; x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $P(X \leq Y)$ و $Var(X \mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

۳۷ اگر

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{k+a}{y} & 0<x<y \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad , \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0<y<k-a \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقادیر a و k را تعیین کنید و $E(Y \mid X=x)$ و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

۳۸ ظرف A شامل ۱ گلولهٔ سفید و ۱ گلولهٔ سیاه، ظرف B شامل ۲ گلولهٔ سفید و ۲ گلولهٔ سیاه است. به تصادف و با جایگذاری ۲ گلوله از A خارج می‌کنیم، اگر هم رنگ باشند ۱ گلوله سفید و اگر هم رنگ نباشند یک گلولهٔ سیاه به ظرف B اضافه می‌کنیم و سپس به تصادف از B یک گلوله خارج می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد گلوله‌های سفید خارج شده از A و B باشند. تابع احتمال توأم X و Y را بـه دست آورده و $P(X+Y \leq 1)$، $Var(Y \mid X=0)$ و $Var(X+Y-2)$ را محاسبه کنید.

۳۹ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \,,\; x<y<x+1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

فصل پنجم

برخی توزیعهای احتمال

۱.۵ مقدمه

در فصل سوم در مورد به دست آوردن توزیع احتمال یک متغیر تصادفی بحث کردیم. در این فصل می‌خواهیم توزیع احتمال چند متغیر تصادفی بخصوص را به دست آوریم.

بعضی از متغیرهای تصادفی دارای یک الگوی خاص هستند و می‌توان برای آنها یک نوع توزیع احتمال را در نظر گرفت. برای مثال در انجام آزمایشات پرتاب یک تاس ۷ مرتبه و پرتاب یک نیزه به طرف هدف، فرض کنید که

$X =$ تعداد مشاهده عدد ۴ در ۷ مرتبه پرتاب تاس

$Y =$ تعداد برخورد به هدف نیزه در ۵ مرتبه پرتاب نیزه

همانطور که دیده می‌شود این دو متغیر تصادفی دارای یک شکل بخصوص هستند، در حقیقت هر دو تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل را بیان می‌کنند. حال اگر توزیع احتمال برای تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل را به دست آوریم آنگاه توزیع احتمال برای تعداد زیادی متغیر تصادفی مشابه با X و Y گفته شده در بالا را به دست آورده‌ایم.

در این فصل ابتدا چند توزیع احتمال گسسته خاص و سپس چند توزیع احتمال پیوسته خاص

۲.۵ توزیع برنولی[1]

~~true - false~~

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای دو نتیجه موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $q=1-p$ باشد. چنین آزمایشی را آزمایش برنولی گویند. برای مثال پرتاب یک سکه یک آزمایش برنولی است که در آن موفقیت مشاهده شیر با $p=\frac{1}{2}$ و مشاهده خط شکست با $q=\frac{1}{2}$ می‌باشد. همچنین در پرتاب یک تاس که در آن موفقیت مشاهده عدد ۴ با $p=\frac{1}{6}$ و مشاهده عدد غیر از ۴ شکست با $q=\frac{5}{6}$ است. اگر متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X=\begin{cases}1 & \text{اگر نتیجه آزمایش موفقیت باشد}\\ 0 & \text{اگر نتیجه آزمایش شکست باشد}\end{cases}$$

در این صورت متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی برنولی گوئیم و آن را با نماد $X\sim B(1,p)$ نمایش داده و گوئیم X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است (عدد ۱ نمایانگر انجام یک بار آزمایش است). تابع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر به دست می‌آید

x	0	1
$f_X(x)=P(X=x)$	$1-p$	p

که آن را می‌توان در فرمول زیر خلاصه کرد

$$\boxed{f_X(x)=p^x(1-p)^{1-x}\quad,\quad x=0,1 \qquad \text{تابع احتمال توزیع برنولی}} \qquad (1.5)$$

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس این توزیع را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۵ اگر $X\sim B(1,p)$ آنگاه $E(X)=p$ و $Var(X)=pq$.

یک پارامتر

اثبات

$$E(X)=(0)(1-p)+(1)(p)=p$$

$$E(X^2)=(0^2)(1-p)+(1^2)(p)=p$$

بنابراین

$$Var(X)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

مثال ۱.۲.۵ یک تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$X=\begin{cases}1 & \text{اگر عدد ۴ مشاهده شود}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در این صورت $X\sim B(1,\frac{1}{6})$ و همچنین

$$f_X(x)=(\tfrac{1}{6})^x(\tfrac{5}{6})^{1-x}\quad,\quad x=0,1$$

$$E(X)=\frac{1}{6}\quad,\quad Var(X)=\frac{1}{6}(\frac{5}{6})=\frac{5}{36}$$

۳.۵ توزیع دو جمله‌ای[1]

$X\sim B(n,p)$

آزمایش تصادفی که از انجام چند آزمایش مستقل برنولی بوجود می‌آید را آزمایش دو جمله‌ای گویند. برای مثال انتخاب ۵ مهره با جایگذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است یک آزمایش دو جمله‌ای با احتمال موفقیت $\frac{6}{14}$ می‌باشد.

به طور کلی یک آزمایش دو جمله‌ای دارای خواص زیر است.

۱ـ آزمایش دو جمله‌ای از انجام n آزمایش مستقل برنولی بوجود آمده است.

۲ـ در آزمایشات برنولی احتمال موفقیت p (و شکست $q=1-p$) می‌باشد که در تمام آزمایشات برنولی مقداری ثابت است.

مثال ۱.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر موفقیت مشاهده شیر باشد، در این صورت یک آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $n=4$ و $p=\frac{2}{3}$ داریم.

مثال ۲.۳.۵ بسکتبالیستی ۶۰٪ از توپهایش گل می‌شود. اگر او ۵ پرتاب مستقل انجام دهد و موفقیت برای او گل شدن توپ باشد، در این صورت یک آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $n=5$ و $p=۰/۶$ داریم.

تعریف ۱.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

$$\boxed{X = \text{تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل برنولی}}$$

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p

باشد، آنگاه گوئیم که X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است و آن را با نماد $X\sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای ابتدا مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۳.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر

X = تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه

الف- $P(X=۳)$ را محاسبه کنید.

ب- تابع احتمال X را به دست آورید.

حل با توجه به تعریف ۱.۵ داریم که $X\sim B(۴,\frac{۲}{۳})$ بنابراین

الف- $P(X=۳)$ بدین معنی است که در ۴ مرتبه پرتاب سکه می‌خواهیم ۳ شیر مشاهده کنیم که یک حالت خاص آن HHHT با احتمال $(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})$ است و تعداد حالات مشاهده ۳ شیر در ۴ مرتبه پرتاب سکه برابر $\binom{۴}{۳}$ است. بنابراین

$$P(X=۳)=\binom{۴}{۳}(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})^{۴-۳}$$

ب- با انجام عملیات مشابه قسمت الف تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{۴}{x}(\frac{۲}{۳})^x(\frac{۱}{۳})^{۴-x}\quad,\quad x=۰,۱,۲,۳,۴$$

در حالت کلی اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $P(X=x)$ بدین معنی است که در n آزمایش مستقل برنولی ما x موفقیت و n-x شکست داشته باشیم که در یک حالت خاص احتمال آن برابر $p^x q^{n-x}$ است و تعداد حالاتی که می‌توان در n آزمایش x موفقیت مشاهده کرد برابر $\binom{n}{x}$ است و بنابراین تابع احتمال X برابر است با

(۲.۵) تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای $\boxed{f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\ ,\ x=۰,۱,۲,...,n}$

توجه کنید که توزیع برنولی یک حالت خاص توزیع دو جمله‌ای با پارامتر n=۱ است. اگر در n آزمایش برنولی مستقل، متغیر تصادفی X_i برابر نتیجه i-امین آزمایش باشد آنگاه $X=X_۱+X_۲+...+X_n$ تعداد موفقیتها در این n آزمایش برنولی مستقل می‌باشد و $X\sim B(n,p)$ است. در زیر امید ریاضی و واریانس توزیع دو جمله‌ای را به دست

قضیه ۲.۵ اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $E(X)=np$ و $Var(X)=npq$.

اثبات با توجه به مطلب بالا داریم که $X=X_۱+X_۲+...+X_n$ که $X_۱, X_۲, ..., X_n$ از یکدیگر مستقل و هر یک دارای توزیع برنولی با پارامتر p هستند. بنابراین طبق خواص امید ریاضی و واریانس داریم که

$$E(X)=E(\sum_{i=۱}^{n}X_i)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)=\sum_{i=۱}^{n}p=np$$

$$Var(X)=Var(\sum_{i=۱}^{n}X_i)=\sum_{i=۱}^{n}Var(X_i)=\sum_{i=۱}^{n}pq=npq$$

مثال ۴.۳.۵ یک تاس را ۵ بار پرتاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه عدد ۴ دقیقاً ۳ بار مشاهده شود را بیابید؟

ب- احتمال اینکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید؟

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مشاهده شیر در ۵ بار پرتاب سکه باشد آنگاه $X\sim B(۵,\frac{۱}{۶})$ است که تابع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

$$f_X(x)=\binom{۵}{x}(\frac{۱}{۶})^x(\frac{۵}{۶})^{۵-x}\quad,\quad x=۰,۱,...,۵$$

بنابراین

الف- $$P(X=۳)=f_X(۳)=\binom{۵}{۳}(\frac{۱}{۶})^۳(\frac{۵}{۶})^{۵-۳}=۰/۰۳۲$$

ب- $$P(X\le ۲)=\sum_{x=۰}^{۲}f_X(x)=\binom{۵}{۰}(\frac{۱}{۶})^۰(\frac{۵}{۶})^۵+\binom{۵}{۱}(\frac{۱}{۶})^۱(\frac{۵}{۶})^۴+\binom{۵}{۲}(\frac{۱}{۶})^۲(\frac{۵}{۶})^۳$$
$$=۰/۹۶۴۵$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع دو جمله‌ای جدول (I) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $P(X\le r)$ برای مقادیر $n=۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰$ و $p=۰/۱, ۰/۲, ۰/۲۵, ..., ۰/۹$ محاسبه گردیده است. برای مثال اگر $X\sim B(۱۰, ۰/۳)$ باشد آنگاه از جدول (I) داریم که $P(X\le ۴)=۰/۸۴۹۷$.

مثال ۵.۳.۵ یک آزمون انگلیسی شامل ۲۰ سئوال پنج گزینه‌ای است که در هر سئوال تنها یک گزینه درست می‌باشد. شخصی که اصلاً انگلیسی نمی‌داند در این آزمون شرکت می‌کند و سئوالات

الف- انتظار دارید که چند سئوال را درست پاسخ دهد؟

ب- احتمال اینکه حداقل ۱۰ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

ج- احتمال اینکه بین ۲ تا ۷ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

د- احتمال اینکه دقیقاً ۹ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد سئوالات درس پاسخ داده شده در بین ۲۰ سئوال باشد آنگاه $X\sim B(۲۰,۰/۲)$ و بنابراین

$$\mu=E(X)=np=۲۰\,(۰/۲)=۴$$

الف- پس انتظار (امید) داریم ۴ سئوال را درست پاسخ دهد.

ب- $P(X\geq ۱۰)=۱-P(X<۱۰)=۱-P(X\leq ۹)=۱-۰/۹۹۷۴=۰/۰۰۲۶$

ج- $P(۲<X<۷)=P(۲<X\leq ۶)=P(X\leq ۶)-P(X\leq ۲)=۰/۹۱۳۳-۰/۲۰۶۱=۰/۷۰۷۲$

د- $P(X=۹)=P(X\leq ۹)-P(X\leq ۸)=۰/۹۹۷۴-۰/۹۹۰۰=۰/۰۰۷۴$

۴.۵ توزیع فوق هندسی[1]

در بخش قبل اگر آزمایشات برنولی تکرار شده، از یکدیگر مستقل نباشند آنگاه آزمایش به دست آمده دیگر آزمایش دو جمله‌ای نمی‌باشد. برای مثال در انتخاب ۵ مهره بدون جایگذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است، احتمال موفقیت در هر بار آزمایش تغییر می‌کند و دیگر آزمایش دو جمله‌ای نمی‌باشد. برای اینکه در حالت مستقل نبودن آزمایشات برنولی یا انتخاب بدون جایگذاری، نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به دست آوریم به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۴.۵ از بین ۳ شیمی‌دان و ۴ فیزیک‌دان می‌خواهیم یک کمیته ۵ نفری را انتخاب کنیم. تابع احتمال برای تعداد شیمی‌دانهای انتخابی در کمیته را به دست آورید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد شیمی‌دانهای انتخابی در کمیته ۵ نفری (تعداد موفقیتها در n

1- Hyper G...

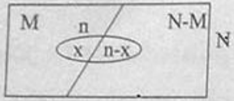
آزمایش غیرمستقل) باشد آنگاه بواسطه انتخاب بدون جایگذاری افراد، X مقادیر $S_X=\{۱,۲,۳\}$ را می‌گیرد و

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۴}}{\binom{۷}{۵}}\quad,\quad P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۵}}$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۳}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۵}}$$

و بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{۳}{x}\binom{۴}{۵-x}}{\binom{۷}{۵}}\quad,\quad x=۱,۲,۳$$



در حالت کلی جمعیت مورد نظر ما به دو قسمت، جمعیت موفقیت و جمعیت شکست تقسیم می‌شود که یکی Mتایی و دیگر N-Mتایی است که N اندازه کل جمعیت است. می‌خواهیم n عضو از این جمعیت Nتایی را بدون جایگذاری انتخاب کنیم. چنین آزمایشی را آزمایش فوق هندسی گویند.

تعریف ۲.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد موفقیتها در یک آزمایش فوق هندسی
= تعداد موفقیتها در nآزمایش غیر مستقل

آنگاه X را یک متغیر تصادفی فوق هندسی گوییم و آن را با نماد $X\sim HG(N,M,n)$ نشان می‌دهیم که در آن N برابر تعداد اعضای جمعیت، M برابر تعداد اعضای جمعیت موفقیت و n برابر تعداد اعضای نمونه انتخابی است.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع فوق هندسی توجه کنید که P(X=x) بدین معنی است که در انتخاب n عضو از جمعیت Nتایی (به $\binom{N}{n}$ طریق) می‌خواهیم x عضو از جمعیت موفقیت Mتایی (به $\binom{M}{x}$ طریق) و مابقی از جمعیت شکست (به $\binom{N-M}{n-x}$ طریق) باشند.

بنابراین

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

حال چون در ترکیب $\binom{M}{x}$ بایستی $0 \le x \le M$ و در ترکیب $\binom{N-M}{n-x}$ بایستی $0 \le n-x \le N-M$ باشد پس نتیجه می‌شود که $\max(0, n-N+M) \le x \le \min(n,M)$

بنابراین

تابع احتمال توزیع فوق هندسی

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad \max(0, n-N+M) \le x \le \min(n,M) \qquad (3.5)$$

برای مثال در مثال (۱.۴.۵) داریم که $X \sim HG(7, 3, 5)$ (N, M, n)

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{7-3}{5-x}}{\binom{7}{5}} \quad , \quad \max(0, 5-7+3) \le x \le \min(5,3) \Rightarrow 1 \le x \le 3$$

مثال ۲.۴.۵ در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آنها خراب است احتمال این را پیدا کنید که حداکثر یک قطعه انتخاب شده خراب باشد.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد قطعات خراب انتخاب شده در بین ۵ قطعه انتخابی باشد آنگاه $X \sim HG(40, 3, 5)$ و $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$. بنابراین

$$P(X \le 1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0/9635$$

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس توزیع فوق هندسی را بدون اثبات می‌آوریم.

قضیه ۳.۵ اگر $X \sim HG(N,M,n)$ آنگاه

$$E(X) = \frac{nM}{N} \quad , \quad Var(X) = \frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مهم *

۱.۴.۵ تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دوجمله‌ای

اگر در آزمایش فوق هندسی n نسبت به N عدد کوچکی باشد آنگاه انتخاب اعضاء در مراحل مختلف دارای احتمالات تقریباً یکسان هستند یعنی انتخاب اعضاء را می‌توان تقریباً با جایگذاری در نظر گرفت و در نتیجه ما یک آزمایش دو جمله‌ای خواهیم داشت. در این حالت می‌توان توزیع فوق هندسی ... در حقیقت

اگر زمانی که M و N به سمت بی نهایت میل کنند، مقدار $\frac{M}{N}=p$ ثابت باشد آنگاه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

مثال ۳.۴.۵ در یک منطقه ۴۰۰۰ از ۱۰۰۰۰ رای دهنده با مالیات فروش مخالف می‌باشند. اگر ۱۵ نفر از افرادی که می‌توانند رای دهند به طور تصادفی انتخاب شوند و از آنها در مورد عقیده‌شان سئوال شود، احتمال اینکه حداکثر ۷ نفر از آنها موافق مالیات فروش باشند را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد رای دهندگان در بین ۱۵ نفر باشد که موافق مالیات فروش هستند، آنگاه $X \sim HG(10000, 6000, 15)$ و چون $n=15$ نسبت به $N=10000$ عدد کوچکی است پس تقریباً $X \sim B(15, 0/6)$ که در آن $p=\frac{M}{N}=\frac{6000}{10000}=0/6$ بنابراین با استفاده از جدول (I) داریم که

$N=10k$ $n=15$ $\frac{n}{N}=\frac{15}{10k}$

$$P(X \le 7) \approx \sum_{x=0}^{7} \binom{15}{x} (0/6)^x (0/4)^{15-x} = 0/2131$$

۵.۵ توزیع پواسون[1]

آزمایشی که تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص را به دست دهد یک آزمایش پواسون نامیده می‌شود. این فاصله زمانی می‌تواند هر فاصله زمانی مانند ثانیه، دقیقه و... باشد و ناحیه مشخص نیز می‌تواند یک فاصله خطی یا مساحت یا حجم یا... باشد.

تعریف ۳.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص

آنگاه X را یک متغیر تصادفی پواسون گویند.

برای مثال اگر X تعداد تلفن هایی باشد که در یک ساعت به رییس یک شرکت زده می‌شود و یا X تعداد غلطهای تایپی در هر صفحه یک کتاب باشد و یا X تعداد تاکسی‌هایی باشد که در یک ساعت معین از یک چهار راه عبور می‌کنند، آنگاه X یک متغیر تصادفی پواسون است.

یک آزمایش پواسون بایستی دارای خواص زیر باشد

1- Poisson Distribution

۱ـ تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص اتفاق می‌افتد از تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی دیگر یا ناحیه دیگر اتفاق می‌افتد مستقل باشد.

۲ـ احتمال اینکه یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه کوچک روی دهد متناسب با طول فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد و بستگی به تعداد موفقیتها در خارج از فاصله زمانی یا ناحیه نداشته باشد.

۳ـ احتمال روی دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه مشخص کوچک، قابل صرفنظر باشد.

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پواسون به پارامتر μ یعنی میانگین تعداد موفقیتها در فاصله زمانی یا ناحیه مورد نظر بستگی دارد. اگر X دارای توزیع پواسون با میانگین μ باشد آن را با نماد $X\sim P(\mu)$ نمایش می‌دهیم. در تعریف و قضیه زیر تابع احتمال و امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی پواسون را بدون اثبات می‌آوریم.

تعریف ۴.۵ اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد آنگاه $X\sim P(\mu)$ و

تابع احتمال توزیع پواسون

$$f_X(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad , \quad x=۰,۱,۲,... \qquad (۴.۵)$$

قضیه ۴.۵ اگر $X\sim P(\mu)$ آنگاه $E(X)=\mu$ و $Var(X)=\mu$. μ

مثال ۱.۵.۵ یک دستگاه چاپگر کامپیوتری به طور متوسط در هر ماه ۲ بار سرویس می‌شود.

الف- احتمال اینکه در یک ماه کمتر از ۲ بار سرویس شود را بیابید.

ب- احتمال اینکه در سه ماه این چاپگر حداقل ۲ بار سرویس شود را بیابید.

حل الف- اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در یک ماه سرویس می‌شود آنگاه $X\sim P(۲)$ و بنابراین

$$P(X<۲)=f_X(۰)+f_X(۱)=\frac{e^{-۲}۲^۰}{۰!}+\frac{e^{-۲}۲^۱}{۱!}=۰/۴۰۶$$

ب- اگر متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در سه ماه سرویس می‌شود آنگاه طبق خاصیت دوم آزمایش پواسون $Y\sim P(۶)$ و بنابراین

$$P(Y\geq ۲)=۱-P(Y<۲)=۱-\{f_Y(۰)+f_Y(۱)\}=۱-\left\{\frac{e^{-۶}۶^۰}{۰!}+\frac{e^{-۶}۶^۱}{۱!}\right\}=۰/۹۸۲۶$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع پواسون جدول (II) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $P(X\leq r)$ برای مقادیر $\mu=۰/۱, ۰/۲, ..., ۱, ۱/۵, ۲, ..., ۱۸$ محاسبه شده است. برای مثال اگر $X\sim P(۵)$ آنگاه از این جدول به دست می‌آوریم که $P(X\leq ۳)=۰/۲۶۵۰$

مثال ۲.۵.۵ به طور متوسط در هر ده دقیقه ۶ مشتری به پای صندوق پرداخت یک فروشگاه می‌رسند.

الف- احتمال اینکه در ده دقیقه حداکثر ۴ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

ب- احتمال اینکه در پنج دقیقه حداقل ۲ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

حل الف- اگر X = تعداد مشتریانی که در ده دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $X\sim P(۶)$ و $P(X\leq ۴)=۰/۲۸۵۱$

ب- اگر Y = تعداد مشتریانی که در پنج دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $Y\sim P(۳)$ و $P(Y\geq ۲)=۱-P(Y<۲)=۱-P(Y\leq ۱)=۱-۰/۱۹۹۱=۰/۸۰۰۹$

۱.۵.۵ تقریب توزیع دو جمله‌ای بوسیله توزیع پواسون

اگر در آزمایش دو جمله‌ای n عدد بزرگی باشد و p به صفر نزدیک باشد آنگاه می‌توان توزیع دو جمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\mu=np$ تقریب زد. در حقیقت زمانی که $n\to\infty$ و $p\to ۰$، مقدار $\mu=np$ مقداری ثابت باشد آنگاه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(۱-p)^{n-x}=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

همچنین اگر p به یک نزدیک باشد می‌توان در آزمایش دو جمله‌ای مفاهیم موفقیت و شکست را با یکدیگر عوض کنیم و در نتیجه تقریب بالا را در این مورد هم بکار ببریم.

مثال ۳.۵.۵ اطلاعات یک شرکت بیمه نشان می‌دهد که ۰/۰۰۱ جمعیت در هر سال از نوع معینی تصادف می‌میرند. احتمال اینکه این شرکت مجبور باشد برای بیشتر از ۱۵ نفر از ۱۰,۰۰۰ بیمه‌گزار شرکتش در مقابل خطرات چنین تصادفهایی در سال مفروض غرامت بپردازد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد بیمه گزارانی در بین ۱۰۰۰۰ نفر باشد که در سال از تصادفی معین می‌میرند آنگاه $X\sim B(۱۰۰۰۰, ۰/۰۰۱)$ است که چون n عددی بزرگ و p به صفر نزدیک

است پس تقریباً $X\sim P(۱۰)$ که در آن $\mu = np = ۱۰۰۰۰(۰/۰۰۱) = ۱۰$. بنابراین

$$P(X>۱۵) = ۱ - P(X\le ۱۵) \approx ۱ - ۰/۹۵۱۳ = ۰/۰۴۸۷$$

۶.۵ توزیع دو جمله‌ای منفی[1]

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای خواص آزمایش دو جمله‌ای باشد با این تفاوت که آزمایشات مستقل برنولی را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به یک تعداد معینی از موفقیتها دست یابیم. چنین آزمایشی را آزمایش دوجمله‌ای منفی گویند. برای اینکه در این حالت نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به دست آوریم به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۶.۵ یک تیرانداز ۷۰٪ از تیرهای خود را به هدف می‌زند. احتمال اینکه در ششمین پرتاب چهارمین تیر او به هدف بخورد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد تیرهای پرتاب شده تا رسیدن به چهارمین برخورد به هدف تیرها باشد آنگاه احتمال مورد نظر برابر $P(X=۶)$ است. احتمال $P(X=۶)$ بدین معنی است که در پرتاب ششم تیر به هدف برخورد کند (یعنی موفقیت یا S داشته باشیم) و در ۵ پرتاب اولیه ۳ تیر به هدف برخورد کرده و ۲ تیر به هدف برخورد نکند (یعنی شکست یا F داشته باشیم). یک حالت خاص برای وقوع چنین پیشامدی SFSSFS می‌باشد که احتمال آن برابر است با

$$(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷)(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷) = (۰/۷)^۴(۰/۳)^۲$$

و تعداد حالاتی که می‌توان در ۵ پرتاب اولیه ۳ برخورد به هدف داشته باشیم برابر $\binom{۵}{۳}$ است و

بنابراین $$P(X=۶) = \binom{۵}{۳}(۰/۷)^۴(۰/۳)^۲ = \binom{۶-۱}{۴-۱}(۰/۷)^۴(۰/۳)^{۶-۴}$$

تعریف ۵.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

$$\boxed{X = \text{تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به } r \text{ موفقیت}}$$

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد آنگاه گوئیم X دارای توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامترهای r و p است و آن را نماد

1- Negative Bin

$X\sim NB(r,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای منفی توجه کنید که $P(X=x)$ بدین معنی است که در xامین آزمایش ما یک موفقیت داشته باشیم و در $(x-1)$ آزمایش اولیه ما $(r-1)$ موفقیت و $(x-r)$ شکست داشته باشیم که احتمال آن برابر است با $\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}q^{x-r}p$. بنابراین

تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای منفی

$$\boxed{f_X(x) = \binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}, \quad x=r, r+1, r+2, \dots} \qquad (۵.۵)$$

قضیه ۵.۵ اگر $X\sim NB(r,p)$ آنگاه $E(X)=\frac{r}{p}$ و $Var(X)=\frac{rq}{p^۲}$. $Var(x) = \frac{r}{p}\times\frac{q}{p}$

مثال ۲.۶.۵ فرض کنید که ۴۰٪ از ماهیهای یک دریاچه از نوع بخصوصی باشند. اگر هر بار یک ماهی گرفته و نوع آن را مشخص کرده و دوباره به دریاچه برگردانیم.

الف- انتظار دارید که در چندمین صید ماهی، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود؟

ب- احتمال اینکه در دهمین بار، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد صید ماهی تا رسیدن به چهارمین ماهی نوع بخصوص باشد آنگاه $X\sim NB(۴, ۰/۴)$ و در نتیجه

الف- $$E(X)=\frac{r}{p}=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰$$

پس انتظار داریم در دهمین صید، چهارمین ماهی از نوع فوق صید شود.

ب- $$P(X=۱۰)=f_X(۱۰)=\binom{۱۰-۱}{۴-۱}(۰/۴)^۴(۰/۶)^{۱۰-۴}=۰/۱۰۰۳$$

۷.۵ توزیع هندسی[1]

اگر در توزیع دو جمله‌ای منفی r=۱ باشد آنگاه یک توزیع احتمال برای تعداد آزمایشات تا رسیدن به یک موفقیت را به دست می‌آوریم. این نوع آزمایش را آزمایش هندسی گویند و توزیع مربوطه را توزیع هندسی گویند. برای مثال پرتاب یک سکه تا رسیدن به یک شیر یک آزمایش هندسی است.

تعریف ۶.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

1- Geometric Distribution

تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به یک موفقیت = X

آنگاه X را یک متغیر تصادفی هندسی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد آنگاه گوئیم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و آن را با نماد $X\sim G(p)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از

(۶.۵) تابع احتمال توزیع هندسی
$$f_X(x)=pq^{x-1} \quad , \quad x=1,2,3,\ldots$$

مثال ۱.۷.۵ فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰/۷ باشد. احتمال اینکه این شخص در امتحان رانندگی (الف) در مرتبه سوم، (ب) حداکثر در سومین بار قبول شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد امتحانهای رانندگی شخص تا قبول شدن باشد آنگاه $X\sim G(0.7)$. بنابراین

الف-
$$P(X=3)=f_X(3)=(0.7)(0.3)^{3-1}=0.063$$

ب-
$$P(X\le 3)=1-P(X>3)=1-\sum_{x=4}^{+\infty}(0.7)(0.3)^{x-1}=1-\frac{(0.7)(0.3)^3}{1-0.3}$$
$$=1-(0.3)^3=0.973$$

قضیه ۶.۵ اگر $X\sim G(p)$ آنگاه

$$E(X)=\frac{1}{p} \quad , \quad Var(X)=\frac{q}{p^2} \quad , \quad P(X\le r)=1-q^r$$

۸.۵ توزیع یکنواخت گسسته[1]

ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته توزیعی است که در آن متغیر تصادفی گسسته X تمام مقادیرش را با احتمالات یکسان اختیار کند. چنین توزیع احتمالی را توزیع یکنواخت گسسته گویند.

تعریف ۷.۵ اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_K$ را با احتمالات یکسان $\frac{1}{K}$ اختیار کند، آنگاه گوئیم X دارای توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر K است و آن را با نماد $X\sim DU(K)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از

(۷.۵) تابع احتمال توزیع یکنواخت گسسته
$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{1}{K} \quad , \quad x=x_1,x_2,\ldots,x_K$$

قضیه ۷.۵ اگر $X\sim DU(K)$ آنگاه

$$\mu=E(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}x_i$$
$$Var(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(x_i-\mu)^2$$

اثبات چون X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_K$ را با احتمالات یکسان $\frac{1}{K}$ اختیار می‌کند بنابراین از تعریف امید ریاضی و واریانس نتیجه به راحتی به دست می‌آید.

مثال ۱.۸.۵ یک صفحه هدف زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ متمایز گردیده است. اگر X برابر عددی باشد که تیر در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند، توزیع احتمال X را به دست آورده و میانگین و واریانس X را محاسبه کنید. احتمال اینکه تیر در قطاع با شماره کمتر از ۱۰ برخورد کند را بیابید.

حل
$$X\sim DU(15) \quad , \quad f_X(x)=\frac{1}{15} \quad x=1,2,\ldots,15$$

$$\mu=E(X)=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}x=\frac{15(15+1)}{2\times 15}=8 \quad , \quad \sigma^2=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}(x-8)^2=\frac{56}{3}$$

$$P(X<10)=\sum_{x=1}^{9}f_X(x)=\frac{9}{15}$$

۹.۵ توزیع یکنواخت پیوسته[1]

در بخشهای قبل توزیع احتمال چند متغیر تصادفی گسسته خاص را مورد بررسی قرار دادیم. از این بخش به بعد چند توزیع احتمال پیوسته خاص را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

ساده‌ترین توزیع احتمال پیوسته توزیع یکنواخت (پیوسته) است که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۵ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (a,b) است و آن را با نماد

$X \sim U(a,b)$ نمایش می دهیم. هر گاه دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad \text{تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت} \qquad (8.5)$$

تابع توزیع متغیر تصادفی یکنواخت بصورت زیر به دست می آید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

قضیه ۸.۵ اگر $X \sim U(a,b)$ آنگاه $E(X) = \frac{a+b}{2}$ و $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

اثبات

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

مثال ۱.۹.۵ فرض کنید B عددی تصادفی از فاصله $[-3,3]$ باشد. احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^2+Bx+1=0$ حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد را بیابید؟

حل $B \sim U(-3,3)$ و تابع احتمال آن عبارت است از $f_B(b) = \frac{1}{6},\ -3 < b < 3$

برای اینکه معادله فوق حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد بایستی $\Delta = B^2 - 4 \ge 0$. بنابراین

$$P(B^2-4\ge 0) = P(B^2 \ge 4) = P(|B| \ge 2) = 1 - P(-2<B<2) = 1 - \int_{-2}^{2}\frac{1}{6}dx = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

راه دیگر $1 - \frac{2-(-2)}{3-(-3)}$

۱۰.۵ توزیع نمایی(۱)

طول عمر نشان در

توزیع نمایی یکی از توزیعهای مهم آماری است که در زیر آن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۵ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است و آن را با نماد $X \sim E(\theta)$ نمایش می‌دهیم، هر گاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x > 0,\ \theta > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad (9.5)$$

معمولاً اگر متغیر تصادفی X نمایانگر طول عمر یک قطعه باشد آنگاه می‌توان X را متغیر تصادفی نمایی در نظر گرفت، توزیع نمایی در آمار کاربرد فراوان دارد. از جمله کاربردهای آن در نظریه اعتماد، نظریه صف و زمان انتظار می‌باشد. در قضیه زیر امید و واریانس این توزیع را به دست می آوریم.

قضیه ۹.۵ اگر $X \sim E(\theta)$ آنگاه $E(X) = \theta$ و $Var(X) = \theta^2$.

اثبات

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{u}(\underbrace{\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta})dx}_{dv} = \left[(-x-\theta)e^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty} = \theta$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2(\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta})dx = \left[(-x^2-2x\theta-2\theta^2)e^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty} = 2\theta^2$$

$$Var(X) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

مثال ۱.۱۰.۵ فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک برحسب ساعت باشد که دارای توزیع نمایی با میانگین ۵۰۰ ساعت است. اگر بدانیم که طول عمر یک لاستیک از این نوع از ۷۰۰ ساعت کمتر بوده است، احتمال اینکه طول عمر آن از ۳۰۰ ساعت بیشتر باشد را بیابید.

حل می‌دانیم که $X \sim E(500)$ بنابراین

$$P(X>300 \mid X<700) = \frac{P(X>300, X<700)}{P(X<700)} = \frac{P(300<X<700)}{P(X<700)}$$

$$= \frac{\int_{300}^{700}\frac{1}{500}e^{-\frac{x}{500}}dx}{\int_0^{700}\frac{1}{500}e^{-\frac{x}{500}}dx} = \frac{0/3022}{0/7534} = 0/4011$$

مثال ۲.۱۰.۵ طول عمر هر دستگاه کامپیوتر دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۷۰۰ ساعت ... احتمال اینکه حداقل دو دستگاه از آنها

قبل از ۱۷۰۰ ساعت خراب شوند را بیابید.

حل قرار می‌دهیم

X = طول عمر یک دستگاه کامپیوتر برحسب ساعت

Y = تعداد دستگاههای کامپیوتر در بین ۲۰ دستگاه که دارای طول عمر کمتر از ۱۷۰۰ ساعت هستند

در این صورت $X \sim E(1700)$ و $Y \sim B(20, p)$ که در آن

$$p = P(X < 1700) = \int_0^{1700} \frac{1}{1700} e^{-\frac{x}{1700}} dx = 1 - e^{-1} = 0/6321$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \{f_Y(0) + f_Y(1)\}$$

$$= 1 - \left\{ \binom{20}{0} (0/6321)^0 (0/3679)^{20} + \binom{20}{1} (0/6321)^1 (0/3679)^{19} \right\} = 0/9999$$

۱.۱۰.۵ رابطه توزیع نمایی و توزیع پواسون

در بخش ۵ دیدیم که یک آزمایش پواسون یک مدل مناسب برای توزیع تعداد اتفاقات (موفقیتها) در یک زمان معین می‌باشد. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که در یک آزمایش پواسون توزیع زمان طی شده تا وقوع اولین اتفاق و یا توزیع زمان طی شده بین دو اتفاق متوالی از یک توزیع نمایی پیروی می‌کند.

در یک آزمایش پواسون با پارامتر μ، که μ میانگین تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی است، قرار می‌دهیم:

X = تعداد اتفاقات درفاصله زمانی $[0,t]$

Y = زمان تا رسیدن به اولین اتفاق

در این صورت طبق خاصیت دوم آزمایش پواسون $X \sim P(\mu t)$ و همچنین

$$P(Y > t) = P(X = 0) = e^{-\mu t}$$

بنابراین

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

و در نتیجه

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \mu e^{-\mu t} \quad t > 0$$

پس $Y \sim E(\frac{1}{\mu})$. یعنی در یک آزمایش پواسون با میانگین μ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{\mu}$ است. این مطلب را می‌توان برای زمان بین دو اتفاق متوالی به طور مشابه اثبات کرد.

$\theta = \frac{1}{\mu}$

مثال ۳.۱۰.۵ به طور متوسط تعداد ۵ تلفن ... زده می‌شود.

الف- احتمال اینکه در یک ساعت حداقل ۲ تلفن زده شود را بیابید.

ب- احتمال اینکه تلفن بعدی لااقل بعد از ۱۵ دقیقه زده شود را بیابید.

ج- احتمال اینکه تلفن بعدی قبل از ۱۰ دقیقه زده شود را بیابید.

حل الف- اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد تلفنهایی باشد که در یک ساعت به شرکت زده می‌شود، آنگاه $X \sim P(5)$ و بنابراین

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0/0404 = 0/9596$$

ب- اگر متغیر تصادفی Y برابر زمان بین دو تلفن متوالی برحسب ساعت باشد آنگاه $Y \sim E(\frac{1}{5})$ و بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$P(y > 15)$ دقیقه تبدیل ساعت

$$P(Y > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} 5e^{-5y} dy = e^{-\frac{5}{4}} = 0/2865$$

ج-

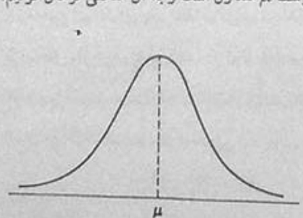
$$P(Y < \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{1}{6}} 5e^{-5y} dy = 1 - e^{-\frac{5}{6}} = 0/5654$$

مهم

۱۱.۵ توزیع نرمال[1]

مهمترین توزیع پیوسته در آمار و احتمال توزیع نرمال است. نمودار این توزیع در شکل (۱.۵) رسم شده است و کاملاً نسبت به یک حد متوسط μ متقارن است و به آن منحنی نرمال گوئیم.

اغلب متغیرهای تصادفی پیوسته در طبیعت و صنعت دارای نمودار توزیع به‌فرم فوق می‌باشند. نمودار منحنی نرمال بستگی به دو پارامتر μ و σ^2 دارد و در زیر خواهیم دید که μ میانگین توزیع و σ^2 واریانس توزیع می‌باشد.



شکل ۱.۵ منحنی نرمال

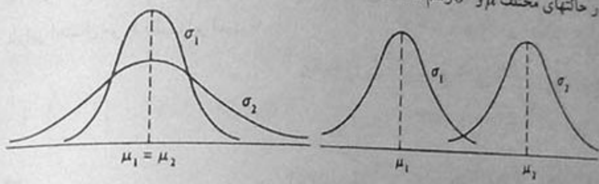
تعریف ۱۰.۵ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش می‌دهیم، هر گاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

1- Normal Distribution

تابع چگالی احتمال توزیع نرمال

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\qquad -\infty<x<+\infty,\ \mu\in R,\ \sigma>0 \qquad (10.5)$$

منحنی نرمال کاملاً بوسیله مقادیر μ و σ^2 مشخص می‌شود. با افزایش σ^2 پراکندگی توزیع افزایش می‌یابد و با افزایش μ منحنی به سمت راست انتقال پیدا می‌کند. در شکل ۲.۵ منحنی نرمال در حالتهای مختلف μ و σ^2 رسم شده است.



شکل ۲.۵ -الف منحنی‌های نرمال با $\mu_1<\mu_2,\ \sigma_1=\sigma_2$

شکل ۲.۵ -ب منحنی‌های نرمال با $\mu_1=\mu_2,\ \sigma_1<\sigma_2$

خواص منحنی نرمال با استفاده از فرم تابع چگالی نرمال و همچنین نمودار آن خواص زیر را در مورد منحنی نرمال می‌توان بیان و اثبات کرد (اثبات به عنوان تمرین)

۱ـ منحنی تنها دارای یک نقطه ماکزیمم در نقطه $x=\mu$ است.

۲ـ منحنی دارای دو نقطه عطف در نقاط $x=\mu\pm\sigma$ است.

۳ـ منحنی نسبت به خط $x=\mu$ متقارن است، یعنی $f_X(\mu-a)=f_X(\mu+a)$

۴ـ در دو طرف حد متوسط μ منحنی به مجانب خود یعنی محور xها نزدیک می‌شود، یعنی

$$\lim_{x\to\pm\infty}f_X(x)=0$$

۵ـ سطح محصور بین منحنی و محور طولها برابر یک واحد است، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=1$

۱.۱۱.۵ توزیع نرمال استاندارد

توزیع نرمالی که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد را توزیع نرمال استاندارد می‌نامند و آن را با نماد $Z\sim N(0,1)$ نمایش می‌دهند. تابع چگالی احتمال توزیع نرمال استاندارد را با $\phi(z)$ و تابع توزیع آن را با $\Phi(z)$ نمایش می‌دهند بنابراین

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\quad -\infty<z<+\infty\ ,\quad \Phi(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\phi(t)dt$$

در زیر خواص این توزیع و رابطه آن با توزیعهای نرمال غیراستاندارد را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۵ اگر $Z\sim N(0,1)$ آنگاه $E(Z)=0$ و $Var(Z)=1$.

اثبات
$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0-0=0$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم که

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$
$$=0+1=1$$

بنابراین $Var(Z)=1-(0)^2=1$.

قضیه ۱۱.۵ اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

اثبات
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z\right)=P(X\le\mu+\sigma z)=F_X(\mu+\sigma z)$$

بنابراین
$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{d}{dz}F_X(\mu+\sigma z)=\sigma F_X(\mu+\sigma z)$$

یعنی
$$f_Z(z)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu+\sigma z-\mu)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}=\phi(z)$$

* برای انجام هر گونه محاسبه ای روی توزیع نرمال باید آنرا تبدیل به متغیر نرمال استاندارد کنیم، حال روش تبدیل نرمال به نرمال استاندارد:

میانگین

و در نتیجه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ متغیر نرمال

انحراف معیار

توزیع نرمال استاندارد

قضیه ۱۲.۵ اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $E(X)=\mu$ و $Var(X)=\sigma^2$.

اثبات طبق قضیه ۱۱.۵ داریم که $X=\mu+\sigma Z$ که $Z\sim N(0,1)$، بنابراین طبق خواص امید ریاضی و واریانس داریم که

$$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu+\sigma E(Z)=\mu$$
$$Var(X)=Var(\mu+\sigma Z)=\sigma^2Var(Z)=\sigma^2$$

۲.۱۱.۵ سطح زیر منحنی نرمال

همانگونه که در فصل سوم مشاهده کردیم در توزیعهای پیوسته احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی پیوسته X در یک فاصله (a,b) برابر سطح زیر منحنی تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ از a تا

است که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$$

در توزیع نرمال به واسطه پیچیده بودن فرم تابع چگالی احتمال، نمی‌توان به روشهای معمول این انتگرال را محاسبه کرد. به این منظور در توزیع نرمال استاندارد این نوع انتگرالها بوسیله روشهای محاسبات عددی محاسبه و در جدولی ارایه می‌گردد و سپس با استفاده از قضیه ۱۱.۵ این مساحتها در هر توزیع نرمالی محاسبه می‌گردد.

برای محاسبه احتمالات در توزیع نرمال استاندارد جدول (III) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $\Phi(z)=P(Z\le z)$ برای مقادیر $-۳/۵\le z\le ۳/۵$ محاسبه شده است. برای مثال از جدول (III) احتمالات زیر را به دست می‌آوریم.

$$P(Z\le ۲/۳۵)=\Phi(۲/۳۵)=۰/۹۹۰۶$$

$$P(Z>-۱/۴)=۱-P(Z\le -۱/۴)=۱-\Phi(-۱/۴)=۱-۰/۰۸۰۸=۰/۹۱۹۲$$

$$P(-۰/۵۵<Z\le ۱/۷)=P(Z\le ۱/۷)-P(Z\le ۰/۵۵)$$

$$=\Phi(۱/۷)-\Phi(-۰/۵۵)=۰/۹۵۵۴-۰/۲۹۱۲=۰/۶۶۴۲$$

حال اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد آنگاه طبق قضیه ۱۱.۵، $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(۰,۱)$ و بنابراین از این رابطه می‌توان برای محاسبه احتمالات در هر توزیع نرمالی استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱۱.۵ اگر $X\sim N(۱۰,۱۶)$ باشد $P(۸<X\le ۱۵)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $\mu=۱۰$ و $\sigma^2=۱۶$ است. باکم کردن مقدار μ از سه طرف نامساوی درون پرانتز و تقسیم سه طرف بر عدد مثبت σ داریم که

$$P(۸<X\le ۱۵)=P(\frac{۸-۱۰}{۴}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{۱۵-۱۰}{۴})=P(-۰/۵<Z\le ۱/۲۵)$$

$$=P(Z\le ۱/۲۵)-P(Z\le -۰/۵)=\Phi(۱/۲۵)-\Phi(-۰/۵)$$

$$=۰/۸۹۴۴-۰/۳۰۸۵=۰/۵۸۵۹$$

مثال ۲.۱۱.۵ قطر داخلی پیستونهایی که توسط یک کارخانه ساخته می‌شود، دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۰ میلیمتر و انحراف معیار ۰/۰۲ میلیمتر است. احتمال اینکه قطر داخلی یک پیستون بیش از ۲۹/۹۸ میلیمتر باشد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X اندازه قطر داخلی پیستون برحسب میلیمتر باشد آنگاه $X\sim N(۳۰,۰/۰۲^2)$ و بنابراین

$$P(X>۲۹/۹۸)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۲۹/۹۸-۳۰}{۰/۰۲})=P(Z>-۱)$$

$$=۱-P(Z\le -۱)=۱-۰/۱۵۸۷=۰/۸۴۱۳$$

مثال ۳.۱۱.۵ یک کارگاه تولید لوله، لوله هایی را تولید می‌کند که طول این لوله‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰/۵ متر می‌باشد. مطلوب است

الف- چند درصد لوله‌ها دارای طولی بین ۷/۵ تا ۹ متر هستند؟

ب- اگر در یک روز این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند، چه تعداد از این لوله‌ها طولی بیش از ۹/۲ متر دارند؟

ج- ۹۷/۵٪ از لوله‌های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقداری کمتر است؟

د- اگر در یک روز بدانیم که طول لوله‌های تولید شده در این کارگاه حداقل ۷/۸ متر بوده است، چند درصد لوله‌های تولید شده در این روز طولی کمتر از ۸/۴ متر دارند.

ه- اگر ۵ لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کرده و اندازه‌گیری کنیم احتمال اینکه حداکثر یک عدد از آنها دارای طولی بیش از ۹ متر باشد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X را برابر طول لوله تولید شده برحسب متر در نظر بگیریم آنگاه $X\sim N(۸,۰/۵^2)$ و بنابراین

الف- برای محاسبه درصد بایستی احتمال مورد نظر را در ۱۰۰٪ ضرب کنیم، بنابراین

$$P(۷/۵<X<۹)=(\frac{۷/۵-۸}{۰/۵}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۹-۸}{۰/۵})=P(-۱<Z<۲)$$

$$=\Phi(۲)-\Phi(-۱)=۰/۹۷۷۲-۰/۱۵۸۷=۰/۸۱۸۵$$

بنابراین درصد مورد نظر برابر است با $۰/۸۱۸۵\,(۱۰۰\%)=۸۱/۸۵\%$

ب- برای محاسبه تعداد بایستی احتمال موردنظر را در تعداد ۲۰۰ لوله ضرب کنیم، بنابراین

$$P(X>۹/۲)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۹/۲-۸}{۰/۵})=P(Z>۲/۴)=۱-P(Z\le ۲/۴)$$

$$=۱-۰/۹۹۱۸=۰/۰۰۸۲$$

تعداد موردنظر $= ۰/۰۰۸۲ \times ۲۰۰ = ۱/۶۴ \approx ۲$

بنابراین

پس تقریباً ۲ لوله دارای طولی بیش از ۹/۲ متر هستند.

ج- فرض کنید مقدار موردنظر a باشد بنابراین بایستی $P(X<a) = ۰/۹۷۵$ و در نتیجه

$$۰/۹۷۵ = P(X<a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-۸}{۰/۵}) = P(Z < \frac{a-۸}{۰/۵}) = \Phi(\frac{a-۸}{۰/۵})$$

بنابراین با استفاده از جدول (III) داریم که

$$\frac{a-۸}{۰/۵} = ۱/۹۶ \Rightarrow a = ۸ + ۰/۵(۱/۹۶) = ۸/۹۸$$

د- $$P(X < ۸/۴ \mid X \ge ۷/۸) = \frac{P(۷/۸ \le X < ۸/۴)}{P(X \ge ۷/۸)} = \frac{P(-۰/۴ \le Z < ۰/۸)}{P(Z \ge -۰/۴)}$$

$$= \frac{\Phi(۰/۸) - \Phi(-۰/۴)}{۱ - \Phi(-۰/۴)} = \frac{۰/۷۸۸۱ - ۰/۳۴۴۶}{۱ - ۰/۳۴۴۶} = ۰/۶۷۶۷$$

بنابراین درصد موردنظر برابر است با ٪۶۷/۶۷ = (٪۱۰۰) ۰/۶۷۶۷

هـ- اگر متغیر تصادفی Y برابر تعداد لوله‌هایی در بین ۵ لوله باشد که دارای طولی بیش از ۹ متر باشند آنگاه $Y \sim B(۵,p)$ که در آن

$$p = P(X > ۹)$$
$$= P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{۹-۸}{۰/۵}) = P(Z > ۲) = ۱ - P(Z \le ۲) = ۱ - ۰/۹۷۷۲ = ۰/۰۲۲۸$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(Y \le ۱) = f_Y(۰) + f_Y(۱)$$
$$= \binom{۵}{۰}(۰/۰۲۲۸)^۰(۰/۹۷۷۲)^۵ + \binom{۵}{۱}(۰/۰۲۲۸)^۱(۰/۹۷۷۲)^۴ = ۰/۹۹۵$$

۳.۱۱.۵ تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله توزیع نرمال

احتمالات مربوط به توزیع دوجمله‌ای را به راحتی می‌توان از تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای و یا به وسیله جدول (I) محاسبه کرد. اما اگر n عدد بزرگی باشد، دیگر نمی‌توان از این جدول استفاده کرد. برای nهای بزرگ می‌توان توزیع دوجمله‌ای را بوسیله توزیع نرمال توسط قضیه زیر تقریب زد.

قضیه ۱۳.۵ اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با میانگین $\mu = np$ و واریانس $\sigma^2 = npq$ باشد آنگاه توزیع حدی $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ موقعی که $n \to +\infty$ یک توزیع نرمال استاندارد است.

معمولاً اگر $n \ge ۳۰$ باشد و یا مقدار p به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک باشد، تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله توزیع نرمال یک تقریب مناسب می‌باشد. همچنین چون توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته و توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است، در موقع تقریب زدن بایستی در محاسبه احتمالات از عمل تصحیح پیوستگی به صورت زیر استفاده کنیم.

$$P(X=K) = P(K - \frac{۱}{۲} < X < K + \frac{۱}{۲}) \quad , \quad P(X \le K) = P(X < K + \frac{۱}{۲})$$

مثال ۴.۱۱.۵ اگر $X \sim B(۲۰, ۰/۶)$ باشد، احتمال $P(۱۰ \le X \le ۱۴)$ را به صورت دقیق و تقریبی محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول (I) مقدار دقیق برابر است با

$$P(۱۰ \le X \le ۱۴) = P(X \le ۱۴) - P(X \le ۹) = ۰/۸۷۴۴ - ۰/۱۲۷۵ = ۰/۷۴۶۹$$

همچنین چون $\mu = np = ۲۰(۰/۶) = ۱۲$ و $\sigma^2 = npq = ۲۰(۰/۶)(۰/۴) = ۴/۸$ پس مقدار تقریبی با استفاده از عمل تصحیح پیوستگی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P(۱۰ \le X \le ۱۴) = P(۹/۵ < X < ۱۴/۵) = P(\frac{۹/۵ - ۱۲}{\sqrt{۴/۸}} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{۱۴/۵ - ۱۲}{\sqrt{۴/۸}})$$
$$\approx P(-۱/۱۴ < Z < ۱/۱۴) = \Phi(۱/۱۴) - \Phi(-۱/۱۴)$$
$$= ۰/۸۷۲۹ - ۰/۱۲۷۱ = ۰/۷۴۵۸$$

که اختلاف این دو مقدار ۰/۰۰۱۱ می‌باشد.

مثال ۵.۱۱.۵ احتمال اینکه یک قطعه الکترونیکی در کمتر از ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار بیفتد، برابر ۰/۲۵ است. احتمال اینکه در بین ۲۰۰ عدد از این قطعات کمتر از ۴۵ قطعه در کمتر ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار بیفتند را بیابید.

حل اگر X تعداد قطعات الکترونیکی در بین ۲۰۰ قطعه باشد که در کمتر از ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار می‌افتند، آنگاه $X \sim B(۲۰۰, ۰/۲۵)$ و بنابراین

$$P(X < ۴۵) = P(X < ۴۴/۵) = P(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{۴۴/۵ - ۵۰}{\sqrt{۳۷/۵}}) \approx P(Z < -۰/۹) = ۰/۱۸۴۱$$

۴.۱۱.۵ توزیع مجموع متغیرهای تصادفی نرمال

در بعضی مسایل نیاز به محاسبه توزیع مجموعی از چند متغیر تصادفی نرمال مستقل داریم که این توزیع در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۱۴.۵ اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad , \quad i=1,2,...,n$$

و قرار دهیم $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ در این صورت

$$\boxed{Y=\sum_{i=1}^{n} a_iX_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \, , \, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)} \qquad (11.5)$$

مثال ۶.۱۱.۵ نمره یک درس در امتحان میان ترم دارای میانگین ۵ و انحراف معیار ۳ و در امتحان پایان ترم دارای میانگین ۶ و انحراف معیار ۴ می‌باشد. فرض کنید نمرات دو امتحان از یکدیگر مستقل بوده و هر یک دارای توزیع نرمال باشند. شخصی در این درس قبول می‌شود که ۲ برابر نمره میان ترم او بعلاوه ۲ برابر نمره پایان ترم او از ۱۸ کمتر نباشد. اگر در این درس ۵۰ نفر ثبت نام کرده باشند، چند نفر آنها رد می‌شوند؟

حل اگر متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به ترتیب نمرات امتحان شخص در میان ترم و پایان ترم باشد و Y نمره کل او باشد آنگاه

$$X_1 \sim N(5,3^2) \quad , \quad X_2 \sim N(6,4^2)$$

$$Y = 2X_1 + 2X_2 \sim N(2(5)+2(6), 2^2(3^2)+2^2(4^2))$$

بنابراین $Y \sim N(22,100)$ و در نتیجه

$$P(Y<18) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{18-22}{10}\right) = P(Z<-0/4) = 0/3446$$

بنابراین تعدادی که در این درس رد می‌شوند برابر است با

$$0/3446 \times 50 = 17/23 \approx 17$$

۱۲.۵ مسائل حل شده

مثال ۱.۱۲.۵ یک تولیدکننده قطعات کوچک، اجناس خود را در بسته‌های ۲۰ تایی برای مصرف

کنندگانش می‌فرستد. فرض کنید هر قطعه یا معیوب است و یا سالم و احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰/۰۵ می‌باشد.

الف- به طور متوسط در هر بسته چند قطعه معیوب وجود دارد؟

ب- احتمال اینکه بسته دلخواهی شامل هیچ قطعه معیوبی نباشد را بیابید.

حل اگر X برابر تعداد قطعات معیوب در بین ۲۰ قطعه یک بسته باشد آنگاه $X \sim B(20, 0/05)$ و بنابراین

الف- $\mu = E(X) = np = 20(0/05) = 1$

ب- $P(X=0) = f_X(0) = \binom{20}{0}(0/05)^0(0/95)^{20} = 0/358$

مثال ۲.۱۲.۵ احتمال آنکه شدت نسبی احساس صوت یک تقویت کننده بیشتر از ۲ دسیبل (dB) باشد برابر ۰/۰۵ است. احتمال اینکه در بین ۱۰ عدد از این تقویت کننده‌ها که به طور مستقل انتخاب شوند

الف- یک تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد؟

ب- حداکثر ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

ج- حداقل ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

حل اگر X برابر تعداد تقویت کننده‌هایی در بین ۱۰ تقویت کننده باشند که دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد آنگاه $X \sim B(10, 0/05)$ و بنابراین

الف- $P(X=1) = f_X(1) = \binom{10}{1}(0/05)^1(0/95)^9 = 0/315$

ب- $P(X\le 2) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \sum_{x=0}^{2}\binom{10}{x}(0/05)^x(0/95)^{10-x} = 0/9885$

ج- $P(X\ge 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} f_X(x)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1}\binom{10}{x}(0/05)^x(0/95)^{10-x} = 0/0861$$

مثال ۳.۱۲.۵ فرض کنید ۸۰٪ لامپهای ساخته شده توسط یک کارخانه معیوب باشد. اگر ۱۵ عدد از لامپها را به تصادف انتخاب کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه