تستهای تکمیلی فصل ۳ ـ مبحث مشتق (سؤالات سطح ۱)

مبحث قضایا و فرمولهای مشتق

۱. مشتق چپ تابع $f(x) = x^{۲}[x]$ در $x = ۲$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۴ درست است. چون $[x]$ در $x = ۲$ از چپ ناپیوسته و $x^{۲}$ در این نقطه ناصفر است پس بنا به نکته ۲۷ در صفحه ۸۵ تابع f در این نقطه از چپ ناپیوسته و لذا فاقد مشتق چپ است.

۲. مشتق تابع $f(x) = x|x|$ در $x = ۰$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) موجود نیست.

حل: گزینه ۱ درست است. از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to ۰} |x| = ۰$$

۳. اگر $f(x) = \dfrac{|x|}{۱ + |x|}$ آنگاه $f'(۰)$ برابر است با: (۸۱ MBA)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۴ درست است. از تعریف مشتق در $x = ۰$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \frac{|x|}{x(۱ + |x|)} \implies \begin{cases} f'_+(۰) = ۱ \\ f'_-(۰) = -۱ \end{cases} \implies$$ f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۴. اگر $f(x) = (۳ - x)[x^{۲}]$ کدام گزینه درست است؟

۱) $f'_+(۳) = -۸$ ۲) $f'_-(۳) = -۸$

۳) f در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است. ۴) f در $x = ۳$ ناپیوسته است.

حل: گزینه ۲ درست است. از تعریف مشتق در $x = ۳$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \frac{(۳ - x)[x^{۲}]}{x - ۳} = -[x^{۲}] \implies \begin{cases} \text{حد راست} = -[۹^+] = -۹ = f'_+(۳) \\ \text{حد چپ} = -[۹^-] = -۸ = f'_-(۳) \end{cases}$$

ضمناً چون $[x^{۲}]$ در $x = ۱$ ناپیوسته و $x - ۳$ در $x = ۱$ صفر نمی‌شود پس بنا به نکته ۲۷ در صفحه ۸۵، f در این نقطه ناپیوسته و لذا فاقد مشتق است.

۵. اگر $f(a) = ۰$ و $f'(a) = ۸$، مقدار $\lim_{h\to ۰} \dfrac{f(a+h)}{۲h}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(a) = ۰$ پس:

$$\text{حد} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{۲h} = \frac{۱}{۲} \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{۱}{۲} f'(a) = ۴$$

۶. مشتق تابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) $\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^{۲}}$ ۲) $\dfrac{-\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^{۲}}$ ۳) $\dfrac{-\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x^{۲}}$ ۴) $\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x^{۲}}$

حل: گزینه ۱ درست است. از فرمول مشتق حاصل تقسیم استفاده می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^{2}}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^{2}}$$

۷. $\frac{dy}{dx}$ را برای $y=x\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)$ به‌دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-2\sin(\ln x)$ ۲) $2\cos(\ln x)$

۳) $\frac{\cos(\ln x)}{x}-\frac{\sin(\ln x)}{x}$ ۴) $-2x\sin(\ln x)$

حل: گزینه ۲ درست است. از فرمول مشتق حاصلضرب استفاده می‌کنیم.

$$y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\left(\frac{\cos(\ln x)}{x}-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)=2\cos(\ln x)$$

۸. فرض کنید $f(1-x^{3})=4x^{2}$، آنگاه $f'(9)$ برابر است با: (۸۱ MBA)

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

حل: گزینه ۲ درست است. از رابطه داده شده مشتق می‌گیریم.

$$-3x^{2}f'(1-x^{3})=8x \text{ و } 1-x^{3}=9 \Longrightarrow x=-2 \Longrightarrow -12f'(9)=-16 \Longrightarrow f'(9)=\frac{4}{3}$$

۹. فرض کنید $f(x)=\ln x$ و $f\circ g(x)=x\ln x$ در اینصورت $g'(2)$ برابر است با: (آمار ۸۰)

۱) $4\ln 2$ ۲) $2+\ln 2$ ۳) $2\ln 2$ ۴) $4(1+\ln 2)$

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\ln(g(x))=f(g(x))=x\ln x=\ln x^{x} \Longrightarrow g(x)=x^{x} \Longrightarrow g'(x)=x^{x}(1+\ln x)$$

$$\Longrightarrow g'(2)=4(1+\ln 2)$$

۱۰. مشتق عبارت $\sinh^{2}x+\cosh^{2}x$ در $x=\frac{1}{2}$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $e-\frac{1}{e}$ ۲) $e^{2}+1$ ۳) $\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) $\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به فرمولهای ۱۸ و ۱۹ در صفحه ۱۲۷:

$$f'(x)=2\sinh x\cosh x+2\cosh x\sinh x=2\sinh(2x) \Longrightarrow f'(\frac{1}{2})=2\sinh 1=e^{1}-e^{-1}=e-\frac{1}{e}$$

۱۱. مشتق تابع $y=\sin^{2}(\pi\sqrt{x})$ به‌ازای $x=\frac{1}{16}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمول ۳ و ۴ در صفحه ۱۲۶:

$$y'=\frac{\pi}{2\sqrt{x}}(2\sin\pi\sqrt{x})(\cos\pi\sqrt{x})=\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\sin(2\pi\sqrt{x}) \xrightarrow{x=\frac{1}{16}} y'=\frac{\pi}{2\times\frac{1}{4}}\sin(\frac{\pi}{2})=2\pi$$

۱۲. اگر $f(x)=(\sin\frac{\pi x}{2})^{n}(\cos\pi x)^{m}$ و $m,n>1$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\pi(\frac{\pi}{2}-m)$ ۴) $\pi(n+m)$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به فرمول مشتق حاصلضرب:

$$f'(x)=\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{n-1}\cos^{m}\pi x-m\pi\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{n}\sin(\pi x)(\cos\pi x)^{m-1} \Longrightarrow f'(1)=0-0=0$$

۱۳. مشتق $y=\operatorname{Arcsin}(\ln x)$ در نقطه $x=\sqrt{e}$ برابر است با: (ریاضی ۸۰)

۱) 0 ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $\sqrt{2e}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3e}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$y'=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \xRightarrow{x=\sqrt{e}} y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{3e}}$$

۱۴. اگر $f'(1)=f(1)=-2$ و $g'(-2)=3$، حاصل $(g\circ f)'(1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) -6 ۲) 1 ۳) 5 ۴) -5

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای:

$$(g\circ f)'(1)=g'\big(f(1)\big)f'(1)=g'(-2)f'(1)=3(-2)=-6$$

۱۵. اگر $f'(x)=\sin x^2$ و $y=f(\frac{2x-1}{x+1})$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(x+1)^2}\cos\frac{2x-1}{x+1}$ ۲) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{(x+1)^2}\sin(\frac{2x-1}{x+1})^2$

۳) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+1)^2}\sin(\frac{2x-1}{x+1})^2$ ۴) $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(x+1)^2}\cos\frac{2x-1}{x+1}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرمول مشتق زنجیره‌ای:

$$y'=\frac{3}{(x+1)^2}f'(\frac{2x-1}{x+1})=\frac{3}{(x+1)^2}\sin(\frac{2x-1}{x+1})^2$$

۱۶. اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و g در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، $(g\circ f)'(0)$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $f'(2)$ ۲) 2 ۳) $g'(2)$ ۴) 0

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \implies f'(0)=0 \implies (g\circ f)'(0)=g'\big(f(0)\big)f'(0)=g'(2)f'(0)=0$$

۱۷. اگر $y=\sin^2\pi x$ و $x=\sqrt{t}$ مقدار $\frac{dy}{dt}$ به‌ازای $t=\frac{1}{16}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

حل: گزینه ۳ درست است. به ازای $t=\frac{1}{16}$ داریم $x=\frac{1}{4}$ پس:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=(2\pi\sin\pi x\cos\pi x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\sin 2\pi x=2\pi(1)=2\pi$$

۱۸. اگر $y=\frac{z+1}{z-1}$ و $z=x^2-2x$ و $x=\sqrt{t+3}$ مقدار $\frac{dy}{dt}$ به‌ازای $t=1$ کدام است؟

(کشاورزی ۷۱، هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

حل: گزینه ۳ درست است. به‌ازای $t=1$ داریم $x=2$ و $z=0$ پس:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{-2}{(z-1)^2}(2x-2)\frac{1}{2\sqrt{t+3}}=-2\times2\times\frac{1}{4}=-1$$

۱۹. اگر $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ و $x = \tan^2 2t$ مقدار $\frac{dy}{dt}$ به‌ازای $t = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است. تشکیل تابع y برحسب t از مشتق‌گیری زنجیره‌ای ساده‌تر است.

$$y = \frac{\sqrt{\tan^2 2t}}{1+\tan^2 2t} = \frac{\tan 2t}{1+\tan^2 2t} = \tan 2t \cos^2 2t = \sin 2t \cos 2t = \frac{1}{2}\sin 4t$$

$$\Longrightarrow y' = 2\cos 4t \Longrightarrow t = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow y' = 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = -1$$

۲۰. اگر $\frac{1}{2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ و $g(x) = f(\sqrt{x})$، آنگاه $g'(1)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه ۲ درست است. حد داده شده، مشتق f در $x = 1$ است پس $f'(1) = \frac{1}{2}$.

$$\text{قاعده مشتق زنجیره‌ای} \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}) \Longrightarrow g'(1) = \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{4}$$

۲۱. اگر $f(x) = x(x+1)\cdots(x+n)$ حاصل $f'(0)$ کدام است؟

۱) $n!$ ۲) $-n!$ ۳) $(n+1)!$ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $f(0) = 0$، با توجه به نکته ۸ در صفحه ۱۲۸، باید مشتق عامل صفر کننده یعنی x را در عبارت باقیمانده یعنی $(x+1)\cdots(x+n)$ در $x = 0$، ضرب کنیم پس حاصل $1 \times \cdots \times n = n!$ است.

۲۲. تابع $f(x) = (x-1)|x-1| + |x-2|$ ...... (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) فقط در نقاط $x = 1, 2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ۲) فقط در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۳) در تمام نقاط مشتق‌پذیر است. ۴) فقط در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است.

حل: گزینه ۲ درست است. $|x-2|$ در $x = 2$ فاقد مشتق و $(x-1)|x-1|$ دارای مشتق است پس f در این نقطه مشتق ندارد. تابع $|x-1|$ در $x = 1$ فاقد مشتق است اما $(x-1)|x-1|$ با توجه به تذکر ۸ در صفحه ۱۲۸ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است. پس f در $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

۲۳. اگر $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>1 \\ -1 & x=1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ و $f(x) = (x-1)g(x)$ آنگاه:

۱) $f'(1) = 2$ ۲) $f'(1) = -1$

۳) f در $x = 1$ ناپیوسته است. ۴) f در $x = 1$ فاقد مشتق است.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $f(1) = 0$ پس با توجه به نکته ۸ در صفحه ۱۲۸:

$$f'(x) = 1 \times \lim_{x\to 1} g(x) = 2$$

۲۴. اگر $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $f'(x)$ برابر است با: (هوافضا ۷۴)

۱) $(\cos x)^{\cos x}$ ۲) $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

۳) $\big(\cos x \ln(\sin x) + \cos x\big)(\sin x)^{\sin x}$ ۴) $\big(\cos x \ln(\sin x) + \tan x\big)(\sin x)^{\sin x}$

حل: گزینه ۳ درست است. از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$\ln y=\sin x\ln(\sin x)\Longrightarrow \frac{y'}{y}=\cos x\ln(\sin x)+\sin x\frac{\cos x}{\sin x}\Longrightarrow y'=(\sin x)^{\sin x}\big(\cos x\ln(\sin x)+\cos x\big)$$

۲۵. اگر داشته باشیم $y=(x^۲+۱)^{e^x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $x=۱$ کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $۲(۲)^{۲e-۱}$ ۲) $۲^e\cdot ۲^{e-۱}$ ۳) $۲^e e(\ln ۲+۱)$ ۴) $(۲e)^e(\ln ۲-۱)$

حل: گزینه ۳ درست است. از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$\ln y=e^x\ln(x^۲+۱)\Longrightarrow \frac{y'}{y}=e^x\big(\ln(x^۲+۱)+\frac{۲x}{x^۲+۱}\big)\xRightarrow{x=۱} y'=۲^e\cdot e(\ln ۲+۱)$$

۲۶. اندازه مشتق عبارت $(۲x-۵)^{x^۲}$ به‌ازای $x=۳$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

حل: گزینه ۴ درست است. از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$y=(۲x-۵)^{x^۲}\Longrightarrow \ln y=x^۲\ln(۲x-۵)$$

مشتق سمت چپ تساوی بالا $\frac{y'}{y}$ و تابع $\ln(۲x-۵)$ در $x=۳$ صفر می‌شود، پس با استفاده از نکته ۸ در صفحه ۱۲۸ مشتق آن یعنی $\frac{۲}{۲x-۵}=۲$ در حد عبارت باقیمانده یعنی $x^۲=۹$ ضرب می‌شود.

$$x=۳\Longrightarrow y=۱\Longrightarrow \frac{y'}{۱}=۹\times ۲=۱۸\Longrightarrow y'=۱۸$$

۲۷. مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x(x-۱)(x-۲)^۲}$ در $x=۳$ برابر است با: (MBA ۸۱)

۱) -۱۷ ۲) $-\frac{۱۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۳۶}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون f به‌صورت ضرب و تقسیم است بهتر است از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده کنیم.

$$\ln y=-\big(\ln x+\ln(x-۱)+۲\ln(x-۲)\big)\Longrightarrow \frac{y'}{y}=-\big(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱}+\frac{۲}{x-۲}\big)$$
$$x=۳\Longrightarrow y=\frac{۱}{۶}\quad,\quad y'=-\frac{۱}{۶}\big(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+۲\big)=-\frac{۱۷}{۳۶}$$

مبحث مشتق تابع ضمنی، معکوس و پارامتری

۲۸. اگر $f(x)=۲x+\sin^۳x$ آنگاه $(f^{-۱})'(۰)$ برابر است با: (تکنولوژی نساجی ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $f(۰)=۰$ پس $(f^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{f'(۰)}$.

$$f'(x)=۲+۳\sin^۲x\cos x\Longrightarrow f'(۰)=۲\Longrightarrow (f^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{۲}$$

۲۹. اگر $y=\frac{e^{۳x}+x}{x+۱}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=۰$ برابر است با: (مدیریت نساجی ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(۳e^{۳x}+۱)(x+۱)-(e^{۳x}+x)}{(x+۱)^۲}\xlongequal{x=۰}\frac{۴\times ۱-۱}{۱}=۳\Longrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{۱}{۳}$$

۳۰. در رابطه $x\cos y + y\cos x = ۱$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(x = ۱ \text{ و } y = ۰)$ کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۱}{\sin ۱}$ ۲) $-\frac{۱}{\cos ۱}$ ۳) $-\frac{۱}{\sin ۱}$ ۴) $\frac{۱}{\cos ۱}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos y - y\sin x}{-x\sin y + \cos x} = -\frac{۱ - ۰}{۰ + \cos ۱} = -\frac{۱}{\cos ۱}$$

۳۱. اگر $\frac{۱}{y^{۲}} + \frac{۱}{x^{۲}} = ۲$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(۱, ۱)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه ۲ درست است.

$$y' = -\frac{-\frac{۲}{x^{۳}}}{-\frac{۲}{y^{۳}}} = -\frac{y^{۳}}{x^{۳}} \quad \text{و} \quad x = y = ۱ \implies y' = -۱$$

۳۲. اگر $\begin{cases} x = (t+۲)e^{t} \\ y = t^{۲}e^{t} \end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t = ۳$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. از مشتق پارامتری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{t}(۲t + t^{۲})}{e^{t}(t + ۲ + ۱)} = \frac{t^{۲} + ۲t}{t + ۳} \quad \text{و} \quad t = ۳ \implies \frac{dy}{dx} = \frac{۱۵}{۶} = ۲/۵$$

۳۳. اگر $y = \sqrt{x^{۲} + ۱۶}$ و $u = \frac{x+۲}{x-۱}$ مقدار $\frac{dy}{du}$ در نقطه $x = ۳$ چقدر است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

حل: گزینه ۱ درست است. از مشتق پارامتری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^{۲} + ۱۶}} = \frac{۳}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{du}{dx} = \frac{-۳}{(x-۱)^{۲}} = -\frac{۳}{۴} \implies \frac{dy}{du} = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۳}{۴}} = -\frac{۴}{۵}$$

۳۴. مشتق تابع $y = \sin^{۲} x$ نسبت به $u = \cos x$ در نقاط $x \neq k\pi$ کدام است؟

۱) $-۲\cos x$ ۲) $۲\sin x$ ۳) $-۲\sin x$ ۴) $۲\cos x$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به فرمول مشتق f بر حسب g:

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{۲\sin x\cos x}{-\sin x} = -۲\cos x$$

مبحث تعبیرهای مشتق

۳۵. شیب خط مماس بر نمودار $f(x) = \sqrt{۲x + ۳}$ در نقطه $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ برابر است با: (معدن—آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۱

حل: گزینه ۱ درست است. شیب مماس برابر $f'(\frac{۱}{۲})$ است.

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۲x+۳}} \implies f'(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

۳۶. α چقدر باشد تا $f(x)=x^{۳}-۳x+\alpha$ بر محور x ها مماس شود؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) ± ۱ ۴) ± ۳

حل: گزینه ۱ درست است. اگر f بر محور x ها در نقطه $x_{\circ}$ مماس باشد باید $f(x_{\circ})=f'(x_{\circ})=\circ$ پس:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳=\circ \implies x=\pm ۱$$

پس α را باید طوری تعیین کرد که $f(\pm ۱)=\circ$ پس $\mp ۲+\alpha=\circ$ و لذا $\alpha=\pm ۲$.

۳۷. معادله خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۲xe^{x^{۲}}+۱$ در نقطه $x=\circ$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $y=۲x-۱$ ۲) $y=۴x-۱$ ۳) $y=۲x+۱$ ۴) $y=۴x+۱$

حل: گزینه ۳ درست است. شیب مماس برابر $f'(\circ)$ است و مماس باید از نقطه $(\circ, ۱)$ عبور کند.

$$f'(x)=e^{x^{۲}}(۲+۴x^{۲}) \implies f'(\circ)=۲ \implies y-۱=۲(x-\circ) \implies y=۲x+۱$$

۳۸. معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=(x+۱)e^{۲x}+\ln|\sin x+\cos x|$ در نقطه $x=\circ$ واقع بر منحنی کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $y=x+۱$ ۲) $y=۲x+۱$ ۳) $y=۴x+۱$ ۴) $y=۳x+۱$

حل: گزینه ۳ درست است. در اطراف $x=\circ$ عبارت داخل قدرمطلق مثبت است و لذا قدرمطلق را حذف می‌کنیم.

$$f'(x)=e^{۲x}(۱+۲x+۲)+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} \implies f'(\circ)=۳+۱=۴ \implies y=۴x+۱$$

۳۹. اگر $g(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x>\circ \\ ۱ & x=\circ \\ -\cos x & x<\circ \end{cases}$ و $f(x)=xg(x)$ در این صورت: (MBA ۸۱)

۱) f در $x=\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(\circ)=۱$

۲) f در $x=\circ$ ناپیوسته است.

۳) تابع f در $x=\circ$ دارای مماسی به معادله $x+y=\circ$ است.

۴) f در $x=\circ$ مشتق ناپیوسته دارد.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f(\circ)=\circ$ پس از نکته ۸ در صفحه ۱۲۸:

$$f'(\circ)=۱\times\lim_{x\to\circ}g(x)=-۱ \implies y=-x \text{ معادله مماس}$$

۴۰. معادله مماس بر منحنی $x^{۳}+y^{۳}=۹$ در $(۱,۲)$ کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $x+۲y=۹$ ۲) $x-۲y=۹$ ۳) $x+۴y=۹$ ۴) $x-۴y=۹$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۳x^{۲}}{۳y^{۲}}=-\frac{۱}{۴}=m \implies y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۹}{۴} \implies x+۴y=۹$$

۴۱. معادله خط مماس بر منحنی $x\sin y+y\sin x=\pi$ در نقطه $(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ واقع بر منحنی کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $x+y=\circ$ ۲) $y=x$ ۳) $x+y=\pi$ ۴) $x+y=\frac{\pi}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. از فرمول مشتق ضمنی، شیب مماس را محاسبه می‌کنیم.

$$y' = -\frac{\sin y + y\cos x}{x\cos y + \sin x} = -\frac{۱+۰}{۰+۱} = -۱ \implies y = -x + \pi$$

۴۲. در چه نقطه‌ای از نمودار $x^۲ - xy + y^۲ = ۱۲$ مماس بر منحنی خط افقی است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(۲,-۲)$ ۳) $(۴,۲)$ ۴) $(۲,۴)$

حل: گزینه ۴ درست است. مماس در نقطه‌ای افقی است که $y' = ۰$.

$$y' = -\frac{۲x - y}{۲y - x} = ۰ \implies y = ۲x \xrightarrow{\text{در معادله منحنی}} x^۲ - ۲x^۲ + ۴x^۲ = ۱۲ \implies x^۲ = ۴$$

$$\implies x = \pm ۲ \implies y = \pm ۴ \implies (۲,۴) \text{ و } (-۲,-۴)$$

۴۳. در تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۳۶x + ۲۵$ در چند نقطه خط مماس بر منحنی موازی محور x (افقی) می‌باشد؟ (علوم دریایی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. باید نقاطی را بیابید که شیب مماس یعنی $f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۳۶$ در آن صفر می‌شود. معادله $f'(x) = ۰$ درجه دوم است و چون $\Delta = ۳۶ - ۴(۶)(-۳۶) > ۰$ پس دقیقاً دو جواب دارد و لذا در دو نقطه خط مماس افقی است.

۴۴. نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱۶}$ بر بازه $[۴,۶]$ رسم شده است. در نقطه‌ای بر این منحنی خط مماس بر آن موازی خطی است که دو سر منحنی را به هم وصل می‌کند، طول آن نقطه کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۵

حل: گزینه ۱ درست است. خط واصل دو سر منحنی دارای شیب $\sqrt{۵} = \frac{\sqrt{۲۰}}{۲} = \frac{f(۶) - f(۴)}{۶ - ۴}$ است. اگر نقطه مورد نظر $x_۰$ باشد:

$$f'(x_۰) = \sqrt{۵} \implies \frac{x_۰}{\sqrt{x_۰^۲ - ۱۶}} = \sqrt{۵} \implies x_۰^۲ = ۵(x_۰^۲ - ۱۶) \implies x_۰ = ۲\sqrt{۵}$$

۴۵. بر نمودار $y = x^۳ + \frac{۳}{۲}\alpha x^۲ + ۱$ دو مماس موازی نیمساز ربع دوم و چهارم رسم کرده‌ایم. α کدام است؟

۱) $\alpha \geq ۲\sqrt{۳}$ ۲) $\alpha \geq \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\alpha > ۲\sqrt{۳}$ ۴) $\alpha > \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

حل: گزینه ۴ درست است. α باید طوری تعیین شود که معادله $f'(x) = -۱$ دارای دو جواب باشد.

$$y' = ۳x^۲ + ۳\alpha x = -۱ \implies ۳x^۲ + ۳\alpha x + ۱ = ۰ \implies \Delta = ۹\alpha^۲ - ۱۲ > ۰ \implies |\alpha| > \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۴۶. ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^۲ - ۱ \\ y = \sqrt{t^۲ + ۱} \end{cases}$ در $t = ۲$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

حل: گزینه ۲ درست است. باید $\frac{dy}{dx}$ را در $t = ۲$ به دست آوریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^۲+۱}}}{۲t} = \frac{۱}{۲\sqrt{t^۲+۱}} \quad \text{و} \quad t = ۲ \implies y' = \frac{۱}{۲\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$$

۴۷. مختصات نقطه P بر $y=\sqrt{۲x-۴}$ را چنان بیابید که خط مماس بر آن در نقطه P از مبدأ مختصات بگذرد. (صنایع ۷۲)

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۲۰,۶)$ ۳) $(۱۰,۴)$ ۴) $(۴,۲)$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله خط مماس را در نقطه $P(x_\circ, y_\circ)$ می‌نویسیم.

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{۲x-۴}} \implies m=\frac{۱}{\sqrt{۲x_\circ-۴}} \implies y-y_\circ=\frac{۱}{\sqrt{۲x_\circ-۴}}(x-x_\circ)$$

این خط از مبدأ می‌گذرد پس مبدأ در این معادله صدق می‌کند.

$$-\sqrt{۲x_\circ-۴}=\frac{-x_\circ}{\sqrt{۲x_\circ-۴}} \implies ۲x_\circ-۴=x_\circ \implies x_\circ=۴ \text{ و } y_\circ=۲$$

۴۸. معادله خط قائم بر منحنی تابع $y=\ln x$ در نقطه به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $x-y=۱$ ۲) $x+y=۱$ ۳) $x+۲y=۱$ ۴) $x+y=e$

حل: گزینه ۲ درست است. شیب خط قائم $-\frac{۱}{y'(۱)}$ است و از نقطه $(۱,۰)$ عبور می‌کند.

$$y'=\frac{۱}{x} \implies y'=۱ \implies m'=-۱ \text{ قائم} \implies y=-x+۱$$

۴۹. معادله خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $y=x+e^{-x}$ در نقطه تلاقی آن با محور y ها کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $x=۰$ ۲) $y=۱$ ۳) $y=x+۱$ ۴) $y=-x+۲$

حل: گزینه ۱ درست است. در نقطه تلاقی با محور y ها داریم $x=۰$:

$$y'=۱-e^{-x} \implies m=۱-۱=۰ \implies m'=\infty$$

پس قائم موازی محور y هاست و چون از نقطه به طول صفر می‌گذرد، معادله آن $x=۰$ است.

۵۰. معادله خط قائم بر منحنی به معادله $y=-۱+e^{۲x-y}$ در مبدأ مختصات کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $۲y=-x$ ۴) $۲y=x$

حل: گزینه ۲ درست است. باید از مشتق ضمنی برای $e^{۲x-y}-y-۱=۰$ استفاده کنیم.

$$y'=-\frac{۲e^{۲x-y}}{-e^{۲x-y}-۱} \xrightarrow{x=y=۰} m=۱ \implies m'=-۱ \implies y=-x$$

۵۱. ضریب زاویه قائم بر نمودار منحنی $\begin{cases} x=۱-۲\sin t \\ y=-۲+\cos t \end{cases}$ در $t=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

حل: گزینه ۴ درست است. از مشتق پارامتری استفاده می‌کنیم.

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin t}{-۲\cos t}=\frac{۱}{۲}\tan t \implies m=\frac{۱}{۲} \implies m'=-\frac{۱}{m}=-۲$$

۵۲. زاویه بین منحنی‌های $y=x^۲+۱$ و $y=\cos x$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به $\cos x \le ۱ \le x^۲+۱$ در نقطه برخورد دو منحنی $x=۰$ است و باید زاویه

مماس‌های آنها را بیابیم.

$$y' = 2x \implies m_1 = 0 \quad \text{و} \quad y' = -\sin x \implies m_2 = 0$$

پس دو منحنی بر هم مماس هستند یعنی زاویه بین آنها صفر است.

۵۳. قانون حرکت جسمی بر روی خط راست $s = t^3 - 4t^2 - 3t$ است. شتاب این متحرک وقتی که سرعت آن به صفر برسد، کدام است؟ (سیستم ۸۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

حل: گزینه ۴ درست است. سرعت برابر است با $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t - 3$ و در $t = 3$ صفر می‌شود (جواب دیگر این معادله منفی است که آنرا در نظر نمی‌گیریم.) و شتاب، مشتق سرعت است.

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8 \quad \text{و} \quad t = 3 \implies a = 10$$

۵۴. هزینه متوسط برای تولید x عدد ساعت مچی در یک واحد تولیدی از رابطه $\frac{x}{100} + \frac{2000}{x} + 10$ به دست می‌آید. هزینه اولیه تولید و هزینه تقریبی تولید پنجاه‌ویکمین ساعت به‌ترتیب عبارت‌اند از:

۱) ۱۰ و ۹/۲۱ ۲) ۱۰ و ۱۱ ۳) ۲۰۰۰ و ۱۱ ۴) ۲۰۰۰ و ۹/۲۱

حل: گزینه ۳ درست است. اگر هزینه تولید x عدد ساعت $C(x)$ باشد:

$$\text{هزینه متوسط} = \frac{C(x)}{x} \implies C(x) = 2000 + 10x + \frac{x^2}{100}$$

هزینه اولیه یعنی هزینه راه‌اندازی واحد صنعتی یعنی زمانی که $x = 0$ پس $C(0) = 2000$ و هزینه تولید ساعت ۵۱ ام برابر $C'(50) \simeq C(51) - C(50)$ است.

$$C'(x) = 10 + \frac{x}{50} \implies C'(50) = 11$$

۵۵. اگر $f(x) = \sqrt{\mathrm{Arctan} x^2}$ آنگاه:

۱) f در مبدأ ناپیوسته است.
۲) f در مبدأ مشتق‌پذیر است.
۳) مبدأ نقطه زاویه‌دار است.
۴) f در مبدأ مماس افقی دارد.

حل: گزینه ۳ درست است. تابع f در مبدأ پیوسته است. با توجه به نکته ۷ در صفحه ۱۲۸:

$f(x) \sim \sqrt{x^2} = |x| \implies$ $x = 0$ نقطه زاویه‌دار است.

۵۶. زاویه بین دو نیم مماس در مبدأ برای تابع $f(x) = \sqrt{x^3 + \sin x^2}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: گزینه ۲ درست است. در $x = 0$ داریم:

$$f(x) \sim \sqrt{x^3 + x^2} \sim \sqrt{x^2} = |x|$$

و زاویه دو نیم مماس برای $y = |x|$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

مبحث مشتقات مراتب بالا

۵۷. ضریب $h''(x)$ در مشتق دوم عبارت $f\big(g\big(h(x)\big)\big)$ کدام است؟ **(هسته‌ای ۷۸)**

۱) $f'\big(g'\big(h(x)\big)\big)g\big(h(x)\big)$ ۲) $f'\big(g\big(h(x)\big)\big)g'\big(h(x)\big)$

۳) $f\big(g'\big(h(x)\big)\big)g'\big(h(x)\big)$ ۴) $f\big(g'\big(h(x)\big)\big)g\big(h'(x)\big)$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر از عبارت داده شده مشتق بگیریم $f'\big(g\big(h(x)\big)\big)g'\big(h(x)\big)h'(x)$ به دست می‌آید. برای آنکه در مشتق از این عبارت $h''(x)$ ایجاد شود باید از $h'(x)$ مشتق بگیریم و در ضریب آن یعنی $f'\big(g\big(h(x)\big)\big)g'\big(h(x)\big)$ ضرب کنیم.

۵۸. اگر f در $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = f\big(xf(x)\big)$، آنگاه $g''(\circ)$ کدام است؟ **(ریاضی ۷۴)**

۱) $\text{۲}f''^{\text{۲}}(\circ)f(\circ) + f'(\circ)$ ۲) $\text{۲}f'(\circ)f(\circ) + f''^{\text{۲}}(\circ)$

۳) $f''(\circ)f'^{\text{۲}}(\circ) + \text{۲}f(\circ)$ ۴) $f''(\circ)f^{\text{۲}}(\circ) + \text{۲}f'^{\text{۲}}(\circ)$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای:

$$g'(x) = \Big(f(x) + xf'(x)\Big)f'\big(xf(x)\big)$$
$$g''(x) = \Big(\text{۲}f'(x) + xf''(x)\Big)f'\big(xf(x)\big) + \Big(f(x) + xf'(x)\Big)^{\text{۲}}f''\big(xf(x)\big)$$
$$g''(\circ) = \text{۲}f'^{\text{۲}}(\circ) + f^{\text{۲}}(\circ)f''(\circ)$$

۵۹. اگر $u = (x-\text{۱})^{\text{۳}}$ و $y = \sqrt{u^{\text{۲}} + u + \text{۲}}$ مقدار $\dfrac{d^{\text{۲}}y}{dx^{\text{۲}}}$ در $x = \text{۱}$ برابر است با:

۱) $\circ$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = u'\frac{dy}{du} \qquad \text{و} \qquad \frac{d^{\text{۲}}y}{dx^{\text{۲}}} = u''\frac{dy}{du} + u'\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{du}\Big)$$

با توجه به اینکه $u'(\text{۱}) = u''(\text{۱}) = \circ$ پس حاصل صفر است.

۶۰. اگر $x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} = \text{۱}$ ، $\dfrac{d^{\text{۲}}y}{dx^{\text{۲}}}$ کدام است؟ **(ریاضی ۷۴)**

۱) $x^{-\text{۳}}$ ۲) $y^{-\text{۳}}$ ۳) $-x^{-\text{۳}}$ ۴) $-y^{-\text{۳}}$

حل: گزینه ۴ درست است. بهتر است با فرض اینکه y تابعی از x است از رابطه، مستقیماً مشتق بگیریم.

$$\text{۲}x - \text{۲}yy' = \circ \implies \text{۲} - \text{۲}y'^{\text{۲}} - \text{۲}yy'' = \circ \implies y'' = \frac{\text{۲} - \text{۲}y'^{\text{۲}}}{\text{۲}y} = \frac{\text{۱} - y'^{\text{۲}}}{y}$$

اما از رابطه اول $y' = \dfrac{x}{y}$ پس:

$$y'' = \frac{\text{۱} - (\frac{x}{y})^{\text{۲}}}{y} = \frac{y^{\text{۲}} - x^{\text{۲}}}{y^{\text{۳}}} = -y^{-\text{۳}}$$

۶۱. هرگاه $x^{\text{۲}} + \text{۲}xy + \text{۳}y^{\text{۲}} = \text{۲}$، آنگاه مقدار y''_{xx} در $y = \text{۱}$ کدام است؟ **(سیستم ۷۹)**

۱) $-\dfrac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ۲) $\circ$ ۳) $\dfrac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۱ درست است. به ازای $y = \text{۱}$ داریم $x^{\text{۲}} + \text{۲}x + \text{۱} = \circ$ پس $x = -\text{۱}$. با مشتق گرفتن از رابطه داریم:

$$\text{۲}x + \text{۲}y + (\text{۲}x + \text{۶}y)y' = \circ \qquad \text{و} \qquad x = -\text{۱}\ ,\ y = \text{۱} \implies y' = \circ$$

اگر از این رابطه مشتق بگیریم:

$$۲+۲y'+(۲+۶y')y'+(۲x+۶y)y''=۰ \implies ۲+۴y''=۰ \implies y''=-\frac{۱}{۲}$$

۶۲. اگر $\begin{cases} x=t^{۲}-۱ \\ y=\frac{۱}{t} \end{cases}$ باشد، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ در $t=۱$ کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{۱}{t^{۲}}}{۲t}=-\frac{۱}{۲t^{۳}} \implies y''=\frac{\frac{۳}{۲}t^{-۴}}{۲t}\ ,\ t=۱ \implies y''=\frac{۳}{۴}$$

۶۳. در تابع پارامتری $\begin{cases} x=\tan t \\ y=\sin t \end{cases}$ مقدار $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ به ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (مکانیک ۸۱)

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

حل: گزینه ۲ درست است. مانند تست قبل می‌توان از مشتق پارامتری استفاده کرد، اما حذف t بین x و y ساده‌تر است.

$$t=\frac{\pi}{۴} \implies x=۱\ ,\ y=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=\tan t \\ y=\sin t \end{cases} \implies ۱+\frac{۱}{x^{۲}}=\frac{۱}{y^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\frac{۲}{x^{۳}}=-\frac{۲y'}{y^{۳}} \implies y^{۳}=x^{۳}y' \quad \text{و} \quad x=۱\ ,\ y=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \implies y'=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$۳y^{۲}y'=۳x^{۲}y'+x^{۳}y'' \implies ۳\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}+y'' \implies y''=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

۶۴. مشتق مرتبه پانزدهم تابع $f(x)=\sin ۲x$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ برابر است با:

۱) $۲^{۱۴}\sqrt{۳}$ ۲) $-۲^{۱۴}$ ۳) $-۲^{۱۴}\sqrt{۳}$ ۴) $۲^{۱۴}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به مثال ۱۱ در صفحه ۱۴۴:

$$f^{(۱۵)}(x)=۲^{۱۵}\sin\left(۲x+\frac{۱۵\pi}{۲}\right)=-۲^{۱۵}\cos ۲x \implies f^{(۱۵)}\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-۲^{۱۵}\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)=۲^{۱۴}$$

۶۵. اندازه مشتق مرتبه پنجم $\sin x\cos x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ چقدر است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۸

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x \implies f^{(۵)}(x)=\frac{۱}{۲}\times ۲^{۵}\sin(۲x+\frac{۵\pi}{۲})=۱۶\cos ۲x \xlongequal{x=\frac{\pi}{۶}} ۸$$

۶۶. اگر $f(x)=(x-۲)^{۵}g(x)$ و $g(x)$ تابعی پیوسته باشد که $g(۲)=۴۲$، اندازه مشتق مرتبه پنجم $f(x)$ در نقطه $x=۲$ چقدر است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $۶!+۳!$ ۲) $۷!+۳!$ ۳) $۶!$ ۴) $۷!$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $f(x)\sim ۴۲(x-۲)^{۵}=h(x)$، بنا بر نکته ۲۱ در صفحه ۱۴۲:

$$f^{(۵)}(۲)=h^{(۵)}(۲)=۴۲\times ۵!=۷\times ۶\times ۵!=۷!$$

۶۷. اگر $f(t)=\frac{1-\cos t}{t^2}$ برای $t\neq 0$ و $f(0)=\frac{1}{2}$ آنگاه: (معدن ۷۳)

۱) $f'(0)$ موجود نیست. ۲) $f'(0)=-1$ ۳) $f''(0)=-\frac{1}{12}$ ۴) $f''(0)=-2$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۲۱ در صفحه ۱۴۲ باید بسط مک‌لورن تابع پیوسته f را تا t^2 بنویسیم.

$$f(t)\sim\frac{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4!}t^4}{t^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}t^2=g(t)\implies f''(0)=g''(0)=-\frac{1}{12}$$

مبحث کاربردهای مشتق

۶۸. اگر $f(x)=a^{-x}$ و $g(x)=b^x$ و $a>1$ و $0<b<1$ آنگاه f و g چگونه‌اند؟

(سیستم، ژئوفیزیک، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) هر دو صعودی ۲) f صعودی و g نزولی ۳) هر دو نزولی ۴) f نزولی و g صعودی

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f'(x)=-a^{-x}\ln a$ و $a>1$ پس $\ln a>0$ و لذا $f'(x)<0$ پس f نزولی است. با توجه به اینکه $b<1$ پس $\ln b<0$ ولذا $g'(x)=b^x\ln b<0$، پس g نیز نزولی است.

۶۹. با کدامیک از شروط زیر حاصل‌ضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای جمیع مقادیر x صعودی است؟

(سیستم ۷۸)

۱) $f(x)>0$ و $g(x)>0$

۲) $f'(x)>0$ و $g'(x)>0$

۳) $f(x)>0$ و $g(x)>0$ و $f'(x)>0$ و $g'(x)>0$

۴) $f(x)>0$ و $g(x)>0$ و $f''(x)>0$ و $g''(x)>0$

حل: گزینه ۳ درست است. باید مشتق $y=f(x)g(x)$ یعنی $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ مثبت شود که با شرایط گزینه (۳) این وضعیت رخ می‌دهد.

۷۰. تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ بر کدام بازه صعودی است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $\left(-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ ۲) $\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ ۳) $(0,\pi)$ ۴) $(-\pi,0)$

حل: گزینه ۲ درست است. علامت f' را مشخص می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

باید بازه‌ای انتخاب شود که $f'(x)>0$. معادله $f'(x)=0$ دارای جواب‌های $x=\pm\frac{2\pi}{3}$ است بنا به نکته ۳۳ در صفحه ۸۷ اگر علامت آن به ازای نقطه‌ای دلخواه از $\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ مشخص شود، در کل بازه علامت ثابت می‌ماند. چون $f'(0)=\frac{3}{9}>0$ پس f بر این بازه صعودی است. توجه کنید که چون f' در نقاط $\pm\frac{2\pi}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، بر بازه‌های مطرح شده در سه گزینه دیگر علامت ثابتی ندارد.

۷۱. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{2-x}{1+x}$، آنگاه تابع $(g\circ f)(x)$ بر روی دامنه خود چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) زوج ۴) فرد

حل: گزینه ۲ درست است. دامنه و برد f بازه $[0,+\infty)$ است. می‌توان $g\circ f$ را تشکیل داد و علامت مشتق آن

را بررسی کرد. اما چون f صعودی اکید است، کافی است بررسی کنیم $g(x)$ برای $x \geq ۰$ چه وضعی دارد. چون $g'(x) = \frac{-۳}{(۱+x)^۲} < ۰$ پس g نزولی و لذا $g \circ f$ نیز نزولی اکید است.

۷۲. کدامیک از تابع‌های زیر صعودی اکید نیست؟

۱) $y = x^۲|x|$ ۲) $y = x|x|$ ۳) $y = \ln x$ ۴) $y = x + \sin x$

حل: گزینه ۱ درست است. تابع $f(x) = x^۲|x|$، زوج است یعنی نسبت به محور y ها متقارن است پس اگر در بازه‌ای صعودی باشد در قرینه آن بازه نسبت به محور y ها، نزولی است و لذا صعودی نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۲) و (۳) داریم $y' = ۲|x| \geq ۰$ و $y' = \frac{۱}{x} > ۰$ ولذا تابع صعودی اکید است. در گزینه (۴) چون $y' = ۱ + \cos x \geq ۰$ و در شمارا نقطه صفر می‌شود پس صعودی اکید است.

۷۳. در مورد تابع $f(x) = e^x + x - \cos x$ چه می‌توان گفت؟ (ریاضی ۸۰)

۱) دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد. ۲) نزولی است.
۳) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد. ۴) صعودی اکید است.

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به گزینه‌ها، مشتق را تشکیل می‌دهیم.

$$f'(x) = \underbrace{e^x}_{\text{مثبت}} + \underbrace{۱ + \sin x}_{\text{نامنفی}} > ۰ \implies$$ f صعودی اکید است.

۷۴. تعداد ریشه‌های معادله $\sin x + ۱ - x = ۰$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $f(x) = \sin x + ۱ - x$ چون $f(۰)f(\pi) < ۰$ پس در فاصله $(۰, \pi)$ حداقل یک ریشه دارد و چون $f'(x) = \cos x - ۱ \leq ۰$ پس f نزولی اکید و لذا دقیقاً یک ریشه دارد.

۷۵. برای تابع با ضابطه $f(x) = \cos^۲ x + ۲x + ۵$ کدامیک از عبارت‌های زیر در مورد $f(x) = ۰$ صحیح است؟
(آمار ۷۹)

۱) دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. ۲) حداقل یک ریشه حقیقی دارد.
۳) می‌تواند سه ریشه حقیقی داشته باشد. ۴) اصلاً ریشه حقیقی ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. f تابعی پیوسته است.

$$f(۰) = ٦ > ۰ \quad \text{و} \quad f(-\pi) = ٦ - ۲\pi < ۰ \implies$$ f در فاصله $(-\pi, ۰)$ ریشه دارد.

اما $f'(x) = -۲\sin x \cos x + ۲ = ۲ - \sin ۲x > ۰$ پس f صعودی اکید است و دقیقاً یک ریشه دارد.

۷۶. نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sin x \cos x$ عبارت است از: (مدیریت نساجی ۸۱)

۱) $x = ۰$ ۲) $x = \frac{\pi}{۴}$ ۳) $x = k\frac{\pi}{۲}$ ۴) $x = \frac{\pi}{۴} + \frac{k\pi}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \implies f'(x) = \cos ۲x \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \implies ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \implies x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

۷۷. تابع $f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} + ۴x^{\frac{۱}{۳}}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

حل: گزینه ۲ درست است. دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f'(x)=\frac{۴}{۳}(x^{\frac{۱}{۳}}+x^{-\frac{۲}{۳}})=\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x+۱) \quad \text{و} \quad f'(x)=۰ \implies x=-۱$$

ضمناً f در $x=۰$ فاقد مشتق است لذا ۱− و ۰ نقاط بحرانی f هستند.

۷۸. به‌ازای کدام مقادیر n، مبدأ مختصات یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $y=x^{۳n-۲}$ است؟

(ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $n\neq ۱$ و $n>\frac{۲}{۳}$ ۲) $n<۱$

۳) $n<\frac{۳}{۲}$ و $n\neq ۱$ ۴) $n>۲$

حل: گزینه ۱ درست است. در نقطه بحرانی، مشتق صفر است یا وجود ندارد. به ازای $n\leq\frac{۲}{۳}$، صفر در دامنه f قرار ندارد و لذا مبدأ بحرانی نیست. چون $f'(x)=(۳n-۲)x^{۳n-۳}$ پس برای $n>۱$ داریم $f'(۰)=۰$ و برای $\frac{۲}{۳}<n<۱$، مشتق در $x=۰$ وجود ندارد پس شرط موردنظر $n>\frac{۲}{۳}$ است به ازای $n=۱$ داریم $f'(x)=۱$ که فاقد نقطه بحرانی است.

۷۹. فرض کنید f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)\geq ۰$، اگر $f(a)=۰$ باشد، آنگاه:

(معدن ۸۲)

۱) $f'(a)=۰$ ۲) $f'(a)>۰$ ۳) $f'(a)=\infty$ ۴) $f'(a)<۰$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $f(x)\geq ۰=f(a)$ پس $x=a$ نقطه می‌نیمم نسبی است و چون f مشتق‌پذیر است پس بنا به قضیه ۷ در صفحه ۱۴۷، $f'(a)=۰$.

۸۰. مختصات نقطه مینیمم نسبی تابع با ضابطه $y=\frac{۴\ln^۲ x}{x}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(e,\frac{۴}{e})$ ۳) $(\frac{۱}{e},-\frac{۴}{e})$ ۴) $(-\frac{۱}{e},-۴e)$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $f(x)=\frac{۴\ln^۲ x}{x}$ برای $x>۰$، مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی از حل $f'(x)=۰$ به دست می‌آید.

$$f'(x)=\frac{(\frac{۸}{x}\ln x)x-۴\ln^۲ x}{x^۲}=\frac{۴\ln x(۲-\ln x)}{x^۲} \quad \text{و} \quad f'(x)=۰ \implies x=۱ \text{ و } e^۲$$

با توجه به گزینه‌ها $(۱,۰)$ جواب است. (برای اطمینان، بهتر است بررسی کنید که مشتق در $x=۱$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد و این نقطه می‌نیمم است و در $e^۲$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد و لذا ماکزیمم است.)

۸۱. مقدار مینیمم تابع با ضابطه $y=x-۲\ln x$ کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}+\ln ۴$ ۴) $۲-\ln ۴$

حل: گزینه ۴ درست است. دامنه تابع $x>۰$ است.

$$y'=۱-\frac{۲}{x}=\frac{x-۲}{x} \quad \text{و} \quad y'=۰ \implies x=۲$$

چون y' حول این نقطه از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، نقطه مینیمم است.

$$x=۲ \implies y=۲-۲\ln ۲=۲-\ln ۴$$

۸۲. هرگاه $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$، کدام یک از نتایج زیر درست است؟ (شیمی نساجی ۷۹)

۱) دارای دو اکسترمم است اگر و فقط اگر $a^2 < 3b$ ۲) دارای سه اکسترمم است اگر و فقط اگر $a^2 < 3b$

۳) دارای اکسترمم نیست اگر $a^2 < 3b$ ۴) دارای اکسترمم نیست اگر و فقط اگر $a^2 > 3b$

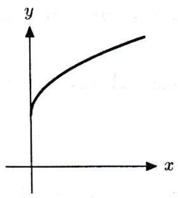
حل: گزینه ۳ درست است. $p'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ درجه دوم است و $\Delta' = a^2 - 3b$ اگر $a^2 < 3b$ آنگاه $\Delta' < 0$ و لذا تابع $p(x)$ فاقد نقطه بحرانی است پس اکسترمم ندارد. توجه کنید که $a^2 > 3b$ شرط لازم و کافی برای وجود دو اکسترمم است. ضمناً در حالت $a^2 = 3b$ معادله دارای ریشه مضاعف است و تابع $p(x)$ دارای یک نقطه بحرانی است. اما چون حول این نقطه $p'(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس این نقطه اکسترمم نمی‌باشد.(در واقع این نقطه عطف است.)

۸۳. نقطه $x = \pi$ برای تابع $f(x) = [\sin x]$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) بازگشت ۲) زاویه‌دار ۳) مینیمم نسبی ۴) ماکزیمم نسبی

حل: گزینه ۴ درست است. تابع f در بازه $I = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ به صورت
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ -1 & \pi < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
نوشته می‌شود. پس f در π ناپیوسته است ولذا نباید از آزمون مشتق اول استفاده کنیم. در بازه I داریم $f(\pi) \geq f(x)$ و لذا این نقطه ماکزیمم نسبی است.

۸۴. در مورد تابع با شکل داده شده کدامیک از احکام زیر درست است؟ (فلسفه ۸۰)



۱) مشتق اول و دوم هر دو مثبت هستند.

۲) مشتق اول مثبت و مشتق دوم منفی است.

۳) مشتق اول منفی و مشتق دوم مثبت است.

۴) مشتق‌های اول و دوم هر دو منفی هستند.

حل: گزینه ۲ درست است. چون f صعودی است پس $f'(x) > 0$ و چون تقعر آن رو به پایین است پس $f''(x) < 0$.

۸۵. تقعر نمودار f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ بر کدام بازه به سمت بالاست؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(2, 3)$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(0, 1)$

حل: گزینه ۲ درست است. باید $f''(x)$ را تشکیل دهیم.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{و} \quad f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

باید بازه‌ای انتخاب شود که f'' بر آن مثبت باشد. ریشه‌های $f''(x) = 0$ برابر $x = 0, \pm\sqrt{3}$ هستند که هر کدام یکبار ظاهر می‌شوند و لذا f'' حول آنها تغییر علامت می‌دهد. با توجه به جدول مقابل تقعر f، بر بازه‌های $(-\sqrt{3}, 0)$ و $(\sqrt{3}, +\infty)$ رو به بالا است. لذا گزینه (۲) را می‌توانیم انتخاب کنیم.

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

۸۶. طول نقطه عطف منحنی تابع $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^2}$ عبارت است از:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) -2

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا $f''(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) \implies f'(x) = \frac{x}{1 + x^2} \implies f''(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

چون در نقاط $x = \pm 1$ تابع f'' تغییر علامت می‌دهد و خط مماس وجود دارد پس این نقاط برای f، عطف هستند.

۸۷. نقاط $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ برای تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ چه نوع نقاطی هستند؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) مینیمم نسبی ۲) عطف ۳) ساده ۴) ماکزیمم نسبی

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به گزینه‌ها f' و f'' را تشکیل می‌دهیم.

$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x$ و $f'\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \implies$ $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ بحرانی است.

$f''(x) = \sin x$ و $f''\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \implies$ ماکزیمم نسبی هستند.

۸۸. اگر نقطه $(1, 2)$ عطف نمودار تابع $y = ax^2 + b\ln x$ باشد، b کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

حل: گزینه ۴ درست است. باید $y(1) = 2$ و $y''(1) = 0$ پس:

$$2 = y(1) = a \quad و \quad y' = 2ax + \frac{b}{x} \quad و \quad y'' = 2a - \frac{b}{x^2} \implies y''(1) = 2a - b = 0 \implies b = 2a = 4$$

۸۹. می‌نیمم تابع $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$ و نقطه عطف آن در کجا اتفاق می‌افتد؟ (هواشناسی ـ آزاد ۸۲)

۱) $x = 3, \frac{1}{2}$ ۲) $x = 2, -2$ ۳) $x = 3, -2$ ۴) $x = 2, \frac{1}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$y' = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \implies x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2, 3$$

$$y'' = 12x - 6 = 0 \implies x = \frac{1}{2} \quad \text{نقطه عطف}$$

و چون $y''(3) > 0$ پس این نقطه می‌نیمم است.

۹۰. تابع $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ مفروض است. کدامیک از گزاره‌های ذیل در مورد این تابع صادق است؟

(سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است. یک نقطه می‌نیمم و یک نقطه عطف دارد.

۲) یک نقطه می‌نیمم و یک نقطه ماکزیمم دارد.

۳) در نقطه $x = 0$ مشتق ندارد و یک نقطه ماکزیمم دارد.

۴) در نقطه $x = 0$ یک مجانب عمودی دارد و فقط یک نقطه عطف دارد و نقاط می‌نیمم و ماکزیمم ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. $x = 0$ مجانب قائم و لذا f در این نقطه ناپیوسته و فاقد مشتق است.

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2} = 0 \implies x = -1$$

و چون f' از $-$ به $+$ تغییر علامت می‌دهد این نقطه می‌نیمم است. پس فقط گزینه (۱) می‌تواند درست باشد. برای

اطمینان $f''(x)$ را تشکیل دهید تا نقطه $x = \sqrt[۳]{۲}$ را به عنوان نقطه عطف به دست آورید.

۹۱. نقطه $(۰, ۰)$ برای تابع $f(x) = e^{x^۳} - ۱$ چه نوع نقطه‌ای است؟ (MBA ۸۱)

۱) ماکزیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) عطف ۴) زاویه‌دار

حل: گزینه ۳ درست است. چون حول $x = ۰$ داریم $f(x) \sim x^۳$ پس بنا به نتیجه ۱۲ در صفحه ۱۵۷ نقطه $x = ۰$ نقطه عطف f است.

۹۲. تابع $f(x) = x^{۲n} - x^{۳n}$ و $n \geq ۳$ عدد صحیح ثابت، داده شده است. کدامیک از احکام زیر درست است؟

(فلسفه ۸۱)

۱) f در $x = ۰$ یک نقطه می‌نیمم موضعی دارد.

۲) f در $x = ۰$ یک نقطه ماکزیمم موضعی دارد.

۳) f در $x = ۰$ یک نقطه عطف دارد.

۴) هیچ یک از سه حکم بالا کلی نیست و ماهیت نقطه $x = ۰$ به عدد n بستگی دارد.

حل: گزینه ۱ درست است. در $x = ۰$ تابع f هم‌ارز $x^{۲n}$ است. چون $x = ۰$ برای این تابع می‌نیمم نسبی است، برای f نیز همین ویژگی را دارد.

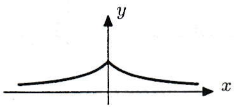
۹۳. تابع $f(x) = (x^۲ + x - ۶)\sinh(x - ۲)$ در نقطه $x = ۲$ چه مشخصه‌ای دارد؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) عطف ۴) زاویه‌دار

حل: گزینه ۲ درست است. هم ارز f در $x = ۲$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = (x - ۲)(x + ۳)\sinh(x - ۲) \sim ۵(x - ۲)^۲ \implies \text{نقطه مینیمم نسبی است } x = ۲$$

۹۴. ضابطه نمودار مقابل کدام است؟ **(صنایع غذایی ۷۷)**



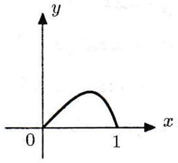
۱) $y = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$ ۲) $y = \frac{۱}{|x| + ۱}$

۳) $y = \frac{|x|}{x^۲}$ ۴) $y = \frac{۱}{|x| - ۱}$

حل: گزینه ۲ درست است. نمودار، مجانب قائم ندارد پس مخرج تابع فاقد ریشه است و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند. نمودار نشان می‌دهد تابع در $x = ۰$ فاقد مشتق است و تابع $\frac{۱}{x^۲ + ۱}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است پس گزینه (۲) درست است.

تذکر۱. برای اطمینان نمودار $y = \frac{۱}{x + ۱}$ را برای $x \geq ۰$ رسم کرده و آن را نسبت به محور y ها قرینه کنید تا نمودار مطرح شده در تست به دست آید.

۹۵. ضابطه نمودار مقابل کدام است؟ **(کشاورزی ۷۹)**



۱) $y = x(۱ - x)^۳$ ۲) $y = x(۱ - x^۳)$

۳) $y = x^۳(۱ - x)$ ۴) $y = x(۱ + x)^۳$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر نمودار مربوط به $y = f(x)$ باشد، $f(۰) = f(۱) = ۰$ پس گزینه (۴) نادرست است. در گزینه (۱) در $x = ۱$ داریم $y \sim (۱ - x)^۳$ و چون $y'(۱) = ۰$، پس نمودار باید در $x = ۱$ عطف افقی

داشته باشد، پس این گزینه نادرست است. با استدلالی مشابه نمودار گزینه (۳) در $x = ۰$ بر محور x ها مماس است که با توجه به شکل نادرست است لذا (۲) درست است.

۹۶. اگر α نقطه مربوط به قضیه رُل برای $f(x) = (x - ۱)\sin x$ روی $[۰, ۱]$ باشد، $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱ - \alpha}$ ۲) $\frac{۱}{۱ + \alpha}$ ۳) $۱ - \alpha$ ۴) $۱ + \alpha$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f(۰) = f(۱) = ۰$ پس $\alpha \in (۰, ۱)$ موجود است که:

$$f'(\alpha) = ۰ \implies \sin\alpha + (\alpha - ۱)\cos\alpha = ۰ \implies \tan\alpha = ۱ - \alpha$$

۹۷. برای کدام یک از توابع زیر در بازه مناسب نمی‌توان نقطه‌ای یافت که در شرایط قضیه رُل صدق کند؟

۱) $f(x) = \sqrt{x(۴ - x)}$ ۲) $f(x) = x^۳ + ۲$ ۳) $f(x) = x^۲ + ۲x$ ۴) $f(x) = x^۳ - x$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(x) = x^۳ + ۲$ صعودی اکید است نقاط b و a موجود نیستند که $f(a) = f(b)$.
بازه مناسب در گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) به ترتیب عبارتند از $[۰, ۴]$ و $[-۲, ۰]$ و $[۰, ۱]$.

۹۸. گیریم چند جمله‌ای $p(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x$ دارای یک ریشه مثبت نظیر $r \in \mathbb{R}$ است در این صورت چند جمله‌ای $q(x) = nx^{n-۱} + (n - ۱)a_{n-۱}x^{n-۲} + \cdots + ۲a_۲x + a_۱$: (شیمی نساجی ۸۱)

۱) حتماً دارای یک ریشه حقیقی کوچکتر از r است. ۲) حتماً دارای یک ریشه حقیقی بزرگتر از r است.
۳) دارای یک ریشه حقیقی مثبت نیست. ۴) ریشه حقیقی ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $p(۰) = p(r) = ۰$ و p در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند، $p'(x) = q(x)$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(۰, r)$ است.

۹۹. اگر تابع مشتق‌پذیر f در بازه $[a, b]$ دارای ۲۰ ریشه باشد، کدام جمله در مورد $f'(x)$ روی $[a, b]$ صحیح‌تر است؟ (شیمی نساجی ۷۹)

۱) حداقل ۲۱ ریشه دارد. ۲) حداقل ۱۹ ریشه دارد. ۳) حداکثر ۱۹ ریشه دارد. ۴) دارای ۲۱ ریشه است.

حل: گزینه ۲ درست است. چون f دارای ۲۰ ریشه است، طبق نکته ۳۴ در صفحه ۱۶۶، $f'(x)$ حداقل $۲۰ - ۱ = ۱۹$ ریشه دارد.

۱۰۰. تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{۱}{x} & ۰ < x \leq ۱ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ در فاصله $[۰, ۱]$ چند بار در قضیه رُل صدق می‌کند؟

(مدیریت نساجی ۸۲)

۱) یک بار ۲) دو بار
۳) بی‌نهایت بار ۴) در شرایط قضیه رُل صدق نمی‌کند.

حل: گزینه ۳ درست است. تابع f بر بازه $[۰, ۱]$ پیوسته است و در $(۰, ۱)$ مشتق پذیر است و چون برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(\frac{۱}{n\pi}) = ۰$، پس در هر بازه به صورت $\left[\frac{۱}{(n + ۱)\pi}, \frac{۱}{n\pi}\right]$ تابع f در شرایط قضیه رل صدق می‌کند.

۱۰۱. اگر $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۸۱}$، نقطه مناسب در قضیه مقدار میانگین در بازه $[۰, ۱۲]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. بنا به قضیه مقدار میانگین $۰ < c < ۱۲$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(۱۲) - f(۰)}{۱۲ - ۰} = \frac{۱۵ - ۹}{۱۲} \implies \frac{c}{\sqrt{c^۲ + ۸۱}} = \frac{۱}{۲} \implies ۲c = \sqrt{c^۲ + ۸۱} \implies c^۲ = ۲۷$$

پس $c = \pm ۳\sqrt{۳}$ و چون باید $۰ < c < ۱۲$ پس $c = ۳\sqrt{۳}$.

۱۰۲. اگر $-۱ \le f'(x) \le ۱$ کدام نامساوی درست است؟ (سیستم ۸۰)

۱) $f(x) - f(a) \ge x - a$ ۲) $|f(x) - f(a)| \ge x - a$

۳) $f(x) - f(a) \le x - a$ ۴) $|f(x) - f(a)| \le |x - a|$

حل: گزینه ۴ درست است. طبق قضیه مقدار میانگین c بین a و x موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies |f(x) - f(a)| = |f'(c)||x - a| \quad \text{و} \quad |f'(c)| \le ۱$$

پس $|f(x) - f(a)| \le |x - a|$ توجه کنید که اگر شرط $x > a$ ذکر شود گزینه (۳) و اگر $x < a$ ذکر شود، گزینه (۱) نیز درست است.

۱۰۳. اگر $f(۱) = ۱۰$ و برای $۱ \le x \le ۴$ داشته باشیم $f'(x) \ge ۲$، در این صورت مقدار ممکن برای $f(۴)$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱٦

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به قضیه مقدار میانگین $۱ < c < ۴$ موجود است که:

$$\frac{f(۴) - f(۱)}{۴ - ۱} = f'(c) \ge ۲ \implies f(۴) - ۱۰ \ge ۲(۴ - ۱) = ٦ \implies f(۴) \ge ۱٦$$

۱۰۴. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^۳ & ۰ \le x \le ۱ \\ x^۲ & ۱ < x \le ۲ \end{cases}$ **و تابع g با ضابطه** $g(x) = \begin{cases} \sin x & ۰ \le x \le \frac{\pi}{۲} \\ \cos x & \frac{\pi}{۲} < x \le ۲ \end{cases}$ **بر بازه $[۰, ۲]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین به کدام صورت می‌باشد؟** (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) f صدق می‌کند ولی g صدق نمی‌کند. ۲) هیچکدام صدق نمی‌کنند.

۳) g صدق می‌کند ولی f صدق نمی‌کند. ۴) هر دو صدق می‌کنند.

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f'_-(۱) = ۳$ و $f'_+(۱) = ۲$ پس f بر $(۰, ۲)$ مشتق‌پذیر نیست و لذا در شرایط قضیه صدق نمی‌کند. چون $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} g(x) = ۱$ و $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} g(x) = ۰$ پس g در $[۰, ۲]$ ناپیوسته است و در شرایط قضیه صدق نمی‌کند.

تذکر۲. با وجود اینکه شرایط قضیه مقدار میانگین برای f برقرار نیست اما نقطه مناسب در قضیه مقدار میانگین برای این تابع موجود است. چون $\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = ۲$ و برای $۰ < x < ۱$ داریم $f'(x) = ۳x^۲$ پس $c = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$ نقطه مناسب در این قضیه می‌باشد.

۱۰۵. $I = \lim_{x \to -۱} \frac{\cos ۲ - \cos ۲x}{x^۲ - |x|}$ **برابر است با:** (مدیریت صنایع ۷۲)

۱) $۲\cos ۲$ ۲) $۲\sin ۲$ ۳) $\cos ۲$ ۴) $-۲\sin ۲$

حل: گزینه ۲ درست است. برای $x < ۰$ داریم $|x| = -x$:

$$I = \lim_{x \to -۱} \frac{\cos ۲ - \cos ۲x}{x^۲ + x} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x \to -۱} \frac{۲\sin ۲x}{۲x + ۱} = \frac{۲\sin(-۲)}{-۱} = ۲\sin ۲$$

۱۰٦. اگر $f'(۲)$ وجود داشته باشد، آنگاه $I = \lim_{x \to ۲} \frac{xf(۲) - ۲f(x)}{x - ۲}$ **برابر است با:** (آمار ۸۰)

۱) $f(۲) - f'(۲)$ ۲) $f'(۲) - ۲f(۲)$ ۳) $f(۲) - ۲f'(۲)$ ۴) $f'(۲) - f(۲)$

حل: گزینه ۳ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است.

$$I \xlongequal{\text{Hop}} \lim_{x\to ۲} \frac{f(۲)-۲f'(x)}{۱} = f(۲)-۲f'(۲)$$

۱۰۷. حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{\ln(۲x-۳)}{x^۲-x-۲}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است و از قاعده هوپیتال:

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۲}{۲x-۳}}{۲x-۱} = \frac{۲}{۳}$$

۱۰۸. حاصل $\lim_{x\to ۱^-} \frac{\text{Arccos}x}{\sqrt{۱-x}}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم.

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}}} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x}\sqrt{۱+x}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

۱۰۹. مقدار حد $\lim_{x\to 0} \frac{۲^{۳^x}-۲}{۲^x-۱}$ کدام است؟ (فیزیک پزشکی ۸۲)

۱) $۲\ln ۳$ ۲) 0 ۳) $۲\log_۲ ۳$ ۴) $\ln ۲$

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است. با توجه به قاعده هوپیتال:

$$\text{حد} = \lim_{x\to 0} \frac{۳^x \ln ۳(۲^{۳^x}\ln ۲)}{۲^x \ln ۲} = \frac{۲\ln ۳ \ln ۲}{\ln ۲} = ۲\ln ۳$$

۱۱۰. مقدار $\lim_{x\to ۱} \frac{x^x-۱}{x-۱}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) 0 ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۲ درست است. با استفاده از قاعده هوپیتال و مشتق لگاریتمی در صورت:

$$\text{حد} \xlongequal{\text{Hop}} \lim_{x\to ۱} \frac{x^x(۱+\ln x)}{۱} = ۱$$

سعی کنید مشابه مثال ۲۹ در صفحه ۱۶۹ با کمک هم ارزی نیز همین مقدار را به دست آورید.

۱۱۱. مقدار $\lim_{x\to ۱} (۲-x)^{\tan\frac{\pi x}{۲}}$ برابر است با: (معدن ۷۳)

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) ۱ ۳) موجود نیست ۴) $e^{\frac{۲}{\pi}}$

حل: گزینه ۴ درست است. حالت ۱^∞ است. پس $e^{\tan\frac{\pi x}{۲}(۱-x)} \sim$ عبارت

$$\lim_{x\to ۱} \tan\frac{\pi x}{۲}(۱-x) = \lim_{x\to ۱} \frac{۱-x}{\cot\frac{\pi x}{۲}} \xlongequal{\text{Hop}} \lim_{x\to ۱} \frac{-۱}{-\frac{\pi}{۲}(۱+\cot^۲\frac{\pi x}{۲})} = \frac{۲}{\pi} \implies \text{حد} = e^{\frac{۲}{\pi}}$$

۱۱۲. ماکزیمم تابع با ضابطه $y=|x^۲-۱|$ بر بازه $[-۲,\frac{۳}{۲}]$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۳ درست است. تابع f پیوسته است و در ±۱ فاقد مشتق است.

$$y' = ۲x\frac{x^{۲}-۱}{|x^{۲}-۱|} \quad \text{و} \quad y' = ۰ \implies x = ۰$$

$$f(۰) = ۱ \quad \text{و} \quad f(\pm ۱) = ۰ \quad \text{و} \quad f(-۲) = ۳ \quad \text{و} \quad f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۵}{۴} \implies \max(f) = ۳$$

۱۱۳. بزرگترین مقدار تابع $f(x) = ۳ - |x - ۲|$ بر فاصله $[۱, ۴]$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) -۱

حل: گزینه ۱ درست است. تابع f در $x = ۲$ فاقد مشتق است و لذا این نقطه بحرانی است. پس مقادیر f در نقاط $x = ۱, ۲, ۴$ را باید مقایسه کنیم.

$$f(۱) = ۲ \ , \ f(۲) = ۳ \ , \ f(۴) = ۱ \implies \max(f) = ۳$$

۱۱۴. اگر $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ و $g(x) = e^{x} + e^{-x}$، ماکزیمم مقدار $\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) فاقد ماکزیمم

حل: گزینه ۴ درست است. تابع مورد نظر $y = \tanh x$ و با توجه به نمودار آن در صفحه ۳۳، فاقد ماکزیمم است.

۱۱۵. مقدار می‌نیمم مطلق $y = x + e^{-x}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) -۱ ۲) $۱ - e$ ۳) $e - ۱$ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. دامنه $f(x) = x + e^{-x}$ برابر $\mathbb{R}$ است و $f(\pm\infty) = +\infty$ و

$$f'(x) = ۱ - e^{-x} \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \implies x = ۰ \quad \text{و} \quad f(۰) = ۱ \implies \min(f) = ۱$$

۱۱۶. تابع $f(x) = xe^{-x}$ و $x \geq ۰$ را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر بهترین کران‌های بالا و پایین را برای f می‌دهد؟ (MBA ۸۲)

۱) $۰ \leq f(x) \leq e^{-۱}$ ۲) $۱ \leq f(x) \leq e$ ۳) $۰ \leq f(x) \leq e$ ۴) $۰ \leq f(x) \leq e^{-\frac{۱}{۲}}$

حل: گزینه ۱ درست است. باید اکسترمم مطلق f را بیابیم.

$$f'(x) = e^{-x}(۱ - x) \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \implies x = ۱ \quad \text{و} \quad f(۱) = e^{-۱} \quad \text{و} \quad f(۰) = f(+\infty) = ۰$$

پس $\max(f) = e^{-۱}$ و $\min(f) = ۰$ و لذا $۰ \leq f(x) \leq e^{-۱}$.

۱۱۷. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) f در $(۰, ۱)$ دارای مماس غیر افقی است. ۲) f در $x = ۰$ مشتق ناپذیر است.

۳) f بر $\mathbb{R}$ دارای ماکزیمم مطلق است. ۴) f در $(۰, ۱)$ می‌نیمم مطلق دارد.

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به قضیه مقدار میانگین برای تابع $y = \sin x$ برای هر $x \neq ۰$ نقطه مناسب c بین ۰ و x موجود است که $\frac{\sin x - \sin ۰}{x - ۰} = \cos c$ و چون $|\cos c| \leq ۱$ پس $|\frac{\sin x}{x}| \leq ۱$ یا $|\sin x| \leq |x|$. پس $|f(x)| \leq ۱ = f(۰)$ پس f در نقطه $(۰, ۱)$ به ماکزیمم مطلق خود می‌رسد. ضمناً چون در $x = ۰$ داریم $f(x) \sim ۱ - \frac{x^{۲}}{۶}$ پس $f'(۰) = ۰$ و لذا در $x = ۰$، مماس افقی دارد.

۱۱۸. کدام تابع در فاصله $(۰, ۱)$ ماکزیمم مطلق دارد؟ (ریاضی ۷۵)

۱) ۲^{-x} ۲) $\sin\frac{۱}{x}$ ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) $\ln(x+۱)$

حل: گزینه ۲ درست است. ۲^{-x} تابع نزولی اکید و $\ln(x+۱)$ صعودی اکید است. اکسترمم توابع یکنوای اکید در مرزهای بازه رخ می‌دهد که در اینجا بازه باز است و لذا اکسترمم ندارد. چون $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$ و در بازه $(۰, ۱)$، معادله $\sin x = x$ فاقد جواب است (تست قبل را نگاه کنید.) پس $\frac{\sin x}{x}$ به یک نزدیک شده ولی نمی‌تواند برابر یک شود و لذا ماکزیمم مطلق ندارد ولی $\sin\frac{۱}{x}$ در نقطه $x = \frac{۲}{\pi}$ مقدار ماکزیمم خود را اتخاذ می‌کند.

۱۱۹. کدام تابع زیر بر بازه $(۰, ۱)$ کراندار است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $f(x) = e^{\frac{۱}{x}}$ ۲) $f(x) = \frac{۱}{\sin x}$ ۳) $f(x) = \frac{\sin x}{۲x-۱}$ ۴) $f(x) = \sin\frac{۱}{x}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $-۱ \le \sin\frac{۱}{x} \le ۱$ پس این تابع کراندار است.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۱) و(۲) حد راست تابع در $x = ۰$ و در گزینه (۳) حد راست تابع در $x = \frac{۱}{۲}$ برابر $+\infty$ است و لذا کراندار نیستند.

۱۲۰. فاصله نزدیکترین نقطه منحنی $y = \sqrt{x}$ به نقطه $(\frac{۵}{۲}, ۰)$ چقدر است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع فاصله از نقطه مورد نظر عبارت است از:

$$f(x) = \sqrt{(\frac{۵}{۲}-x)^۲ + (۰-y)^۲} = \sqrt{(\frac{۵}{۲}-x)^۲ + x} = \sqrt{x^۲ - ۴x + \frac{۲۵}{۴}} = \sqrt{(x-۲)^۲ + \frac{۹}{۴}} \ge \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲}$$

۱۲۱. نقطه‌ای بر $y = x^۲ + ۱$ بیابید که به نقطه $(۳, ۱)$ نزدیکترین باشد.

۱) $(۲, ۵)$ ۲) $(۱/۴, ۱/۹۶)$ ۳) $(۱, ۲)$ ۴) هیچکدام

حل: گزینه ۳ درست است. هدف یافتن نقطه‌ای است که تابع فاصله نقطه (x, y) از $(۳, ۱)$ یعنی $d(x,y) = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۱)^۲}$ می‌نیمم شود. بهتر است با تابع مربع فاصله کار کنیم.

$$f(x) = d^۲ = (x-۳)^۲ + x^۴ \implies f'(x) = ۲(x-۳) + ۴x^۳ = ۴x^۳ + ۲x - ۶$$

$f'(x) = ۰$ نقطه $x = ۱$ را می‌دهد. (تابع f' صعودی و معادله ریشه دیگری ندارد.) و چون $f(\pm\infty) = +\infty$ پس در نقطه $(۱, ۲)$ می‌نیمم فاصله رخ می‌دهد.

۱۲۲. در صورتی که x و y و z مثبت و $x + y + z = ۱$ ماکزیمم $xy^۲z^۳$ کدام عدد است؟ (معدن ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶۴۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴۳۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. طبق نکته ۳۸ در صفحه ۱۷۳، اکسترمم وقتی رخ می‌دهد که:

$$\frac{x}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳} \implies y = ۲x \ , \ z = ۳x \implies ۱ = x + y + z = ۶x \implies x = \frac{۱}{۶}$$

$$\implies xy^۲z^۳ = (\frac{۱}{۶})(\frac{۱}{۳})^۲(\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۴۳۲}$$

۱۲۳. مجموع دو عدد یک است و مجموع مکعبات این دو عدد می‌نیمم است، حاصلضرب این دو عدد چقدر است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $x + y = ۱$ ثابت است، با توجه به نکته ۴۲ در صفحه ۱۷۴، $x^۳ + y^۳$ وقتی حداقل می‌شود که $x = y = \frac{۱}{۲}$ پس حاصل ضرب $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۲۴. می‌خواهیم کنار یک رودخانه، زمینی به مساحت ۲۸۸ مترمربع به شکل مستطیل انتخاب کنیم. کمترین طول حصاربندی چند متر می‌تواند باشد؟ (طرف رودخانه حصار لازم نیست.) (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

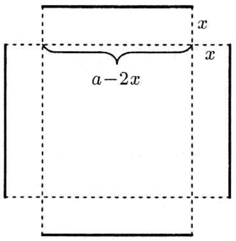
حل: گزینه ۳ درست است. اگر طول و عرض x و y باشند $S = xy = ۲۸۸$ و هدف اکسترمم کردن $p = ۲x + y$ است. چون $(۲x)y = ۲S = ۵۷۶$ ثابت است پس p وقتی می‌نیمم می‌شود که:

$$۲x = y \implies ۲x^۲ = ۲۸۸ \implies x = ۱۲ \quad \text{و} \quad y = ۲۴ \implies p = ۴۸$$

۱۲۵. از یک قطعه مقوا به شکل مربع به ضلع واحد (و با بریدن مربعهایی از چهار گوشه آن با اضلاع مساوی) جعبه دربازی به شکل مکعب مستطیل می‌سازیم. بیشترین حجم ممکن چقدر است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $\frac{۲}{۲۷}$ ۲) $\frac{۴}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$



حل: گزینه ۱ درست است. در حالت کلی برای مربع به ضلع a مسأله را حل می‌کنیم. باید از چهار گوشه مربع، مربع‌هایی به ضلع x جدا کنیم و با آنچه باقی می‌ماند مکعب مستطیل را بسازیم. با توجه به شکل حجم مکعب مستطیل $V(x) = x(a - ۲x)^۲$ است و $۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲}a$ باید $V(x)$ را ماکزیمم کنیم.

$$V'(x) = (a - ۲x)^۲ - ۴x(a - ۲x) = (a - ۲x)(a - ۶x) \quad \text{و} \quad V'(x) = ۰ \implies x = \frac{۱}{۶}a, \frac{۱}{۲}a$$

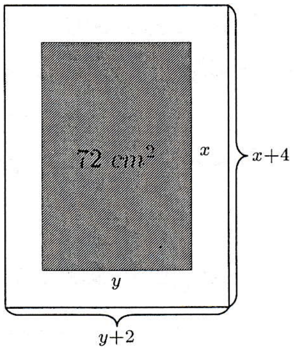
چون $V(۰) = V(\frac{a}{۲}) = ۰$ پس در $x = \frac{a}{۶}$ ماکزیمم حجم حاصل می‌شود و $V(\frac{a}{۶}) = \frac{۲a^۳}{۲۷}$ و به ازای $a = ۱$ ماکزیمم حجم برابر $\frac{۲}{۲۷}$ خواهد بود.

۱۲۶. یک صفحه مستطیل شکل کاغذ باید ۷۲ سانتی‌متر مربع مطلب چاپی را با حاشیه‌های بالا و پایینی هر کدام ۲ سانتی‌متر و حاشیه کناری هر کدام ۱ سانتی‌متر در بر بگیرد. با انتخاب چه ابعادی برای این صفحه، کمترین مقدار کاغذ مصرف خواهد شد؟ (MBA ۸۲)

۱) عرض ۵، طول ۲۸ سانتی‌متر ۲) عرض ۶، طول ۲۲ سانتی‌متر
۳) عرض ۸، طول ۱۲ سانتی‌متر ۴) عرض ۸، طول ۱۶ سانتی‌متر

حل: گزینه ۴ درست است. طول و عرض مطلب چاپی را x و y می‌گیریم. با توجه به شکل هدف یافتن

می‌نیمم $S = (x+۴)(y+۲)$ است و با توجه به اینکه $xy = ۷۲$، داریم:



$$S = xy + ۴y + ۲x + ۸ = ۸۰ + ۲(x + ۲y)$$

پس کافی است $x + ۲y$ را می‌نیمم کنیم و چون $x(۲y) = ۱۴۴$ مقداری ثابت است، با توجه به نکته ۳۹ در صفحه ۱۷۳ می‌نیمم وقتی رخ می‌دهد که:

$$x = ۲y \implies xy = \frac{۱}{۲}x^۲ = ۷۲ \implies x = ۱۲ \quad \text{و} \quad y = ۶$$
$$\implies y + ۲ = ۸ \quad \text{و} \quad x + ۴ = ۱۶$$

۱۲۷. یک تولید کننده رنگ در روز می‌تواند بین ۱۰ تا ۳۰ مترمکعب رنگ تولید کند. این تولید کننده اگر x مترمکعب رنگ تولید کند مطابق معادله $p = \dfrac{(x-۱۵)^۳}{۱۰۰۰} - \dfrac{۳(x-۱۵)}{۱۰} + ۳۰۰$ واحد پول، سود می‌برد. تولید چند مترمکعب در روز سود او را ماکزیمم می‌کند؟ (سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $x = ۲۵$ ۲) $x = ۳۰$ ۳) $x = ۱۰$ ۴) $x = ۲۷/۵$

حل: گزینه ۳ درست است. باید تابع $p(x)$ در فاصله $[۱۰, ۳۰]$ ماکزیمم مطلق شود.

$$p'(x) = \frac{۳}{۱۰۰۰}(x-۱۵)^۲ - \frac{۳}{۱۰} = ۰ \implies (x-۱۵)^۲ = ۱۰۰ \implies x = ۲۵ \text{ و } ۵$$

$$p(۲۵) = ۲۹۸ \text{ و } p(۱۰) = ۳۰۱/۳۷۵ \text{ و } p(۳۰) = ۲۹۸/۸۷۵ \implies \max(p) = p(۱۰) = ۳۰۱/۳۷۵$$

۱۲۸. تولید کننده‌ای قدرت تولید ۷۵۰ واحد محصول را دارد. چنانچه x معرف تعداد واحد محصول تولید شده باشد، قیمت هر واحد محصول بر حسب تومان از رابطه $P(x) = ۲۰۰۰۰۰ - ۱۵۰x$ به دست می‌آید. هزینه کل تولید برای x محصول از رابطه $C(x) = \begin{cases} ۴۰۰۰۰۰ + ۶۰۰۰x - x^۲ & ۰ \le x \le ۵۰۰ \\ ۶۰۰۰۰۰ + ۶۰۰۰x - ۳x^۲ & ۵۰۰ < x \le ۷۵۰ \end{cases}$ قابل حصول است. تولید چه تعداد واحد محصول دارای سود ماکزیمم است؟ (سیستم ۷۸)

۱) ۴۸۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۷۵۰

حل: گزینه ۲ درست است. درآمد حاصل از فروش x کالا $R(x) = xP(x)$ است پس سود $f(x) = R(x) - C(x)$ است. سود در نقطه‌ای اکسترمم می‌شود که $f'(x) = ۰$ یعنی $R'(x) = C'(x)$ پس:

$$۰ \le x < ۵۰۰ \;:\; ۲۰۰۰۰۰ - ۳۰۰x = ۶۰۰۰ - ۲x \implies x \simeq ۶۵۱ \notin [۰, ۵۰۰]$$

$$۵۰۰ < x \le ۷۵۰ \;:\; ۲۰۰۰۰۰ - ۳۰۰x = ۶۰۰۰ - ۶x \implies x \simeq ۶۵۹/۸$$

ضمناً $x = ۵۰۰$ هم نقطه بحرانی است. با مقایسه، سود در $۶۶۰ \simeq ۶۵۹/۸$ به ماکزیمم خود می‌رسد.

۱۲۹. یک نقطه در امتداد منحنی تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ به نوعی حرکت می‌کند که مؤلفه x آن در هر دقیقه ۳ واحد افزایش می‌یابد. وقتی $x = ۱$ مؤلفه y آن با چه نسبتی در دقیقه تغییر می‌کند؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۳}$ واحد ۲) $\frac{۲}{۳}$ واحد ۳) $\frac{۳}{۲}$ واحد ۴) ۳ واحد

حل: گزینه ۳ درست است. چون x افزایش می‌یابد، $\dfrac{dx}{dt} = ۳$.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}=\frac{۱}{۲}\times ۳=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۰. ذره‌ای بر روی مسیر $۷ = x^۳ - ۲y^۲$ در حرکت است. اگر مؤلفه x آن با سرعت ۰/۰۴ متر در ثانیه افزایش یابد، در نقطه (۱,۲) مؤلفه y با کدام سرعت تغییر می‌کند؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۶ ۳) ۰/۰۱۲ ۴) ۰/۰۱۵

حل: گزینه ۴ درست است. اگر نسبت به t از رابطه داده شده مشتق بگیریم:

$$۴y\frac{dy}{dt}-۳x^۲\frac{dx}{dt}=۰ \implies ۸\frac{dy}{dt}-۳(۰/۰۴)=۰ \implies \frac{dy}{dt}=\frac{۰/۱۲}{۸}=۰/۰۱۵$$

۱۳۱. آهنگ افزایش شعاع یک دایره ۲ سانتی‌متر بر ثانیه است. آهنگ افزایش مساحت آن چه موقع π سانتی‌متر بر ثانیه است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) هنگامی که شعاع آن ۰/۲۵ سانتی‌متر است. ۲) هنگامی که شعاع آن ۰/۵ سانتی‌متر است.
۳) هنگامی که شعاع آن ۱ سانتی‌متر است. ۴) هنگامی که شعاع آن π سانتی‌متر است.

حل: گزینه ۱ درست است. اگر شعاع را با r و مساحت را با S نمایش دهیم.

$$\frac{dr}{dt}=۲ \text{ و } \frac{dS}{dt}=\pi \implies S=\pi r^۲ \implies \frac{dS}{dt}=۲\pi r\frac{dr}{dt} \implies \pi=۲\pi r(۲) \implies r=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵cm$$

۱۳۲. گاز به درون یک بالن کره‌ای شکل به نسبت ۵ مترمکعب در دقیقه دمیده می‌شود. وقتی شعاع کره ۳ متر است، شعاع آن با چه نسبتی در دقیقه زیاد می‌شود؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $\frac{۵}{۳۶\pi}$ ۲) $\frac{۵}{۳۰\pi}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۰}$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر r شعاع و V حجم باشد، $\frac{dV}{dt}=۵$.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \implies \frac{dV}{dt}=۴\pi r^۲\frac{dr}{dt} \implies ۵=۴\pi(۳)^۲\frac{dr}{dt} \implies \frac{dr}{dt}=\frac{۵}{۳۶\pi}$$

۱۳۳. فرض کنید قطر یک مکعب با سرعت ۳ اینچ در دقیقه در حال افزایش باشد. سرعت افزایش طول هر ضلع مکعب در دقیقه برابر است با: (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\sqrt{۲}$ اینچ در دقیقه ۲) $\sqrt{۳}$ اینچ در دقیقه ۳) ۲ اینچ در دقیقه ۴) ۳ اینچ در دقیقه

حل: گزینه ۲ درست است. اگر طول ضلع مکعب x باشد، طول قطر آن $y=\sqrt{۳}x$ است پس:

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{۳}\frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{dt}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۱۳۴. اگر طول یک مستطیل $۱۵m$ و در حال افزایش با نرخ $۳\frac{m}{s}$ و عرض آن $۶m$ و در حال کاهش با نرخ $۲\frac{m}{s}$ باشد، در این صورت نرخ تغییرات مساحت این مستطیل $\frac{m^۲}{s}$ ... و در حال ... است. (مکانیک ۸۰)

۱) ۱۲، کاهش ۲) ۴۸، کاهش ۳) ۱۲، افزایش ۴) ۴۸، افزایش

حل: گزینه ۱ درست است. اگر x طول و y عرض مستطیل باشد، $\frac{dy}{dt}=-۲$ و $\frac{dx}{dt}=۳$

$$S=xy \implies \frac{dS}{dt}=y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}=۶(۳)+۱۵(-۲)=-۱۲$$

علامت منفی نشان می‌دهد که مساحت در حال کاهش است.

۱۳۵. حجم یک مکعب به نسبت ۷ سانتی‌متر در دقیقه اضافه می‌شود. سطح کل مکعب وقتی طول ضلع آن ۱۲ سانتی‌متر است با چه نسبتی زیاد می‌شود؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. حجم را با V و سطح را با S نمایش می‌دهیم.

$$V = x^۳ \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = ۳x^۲\frac{dx}{dt} \quad \text{و} \quad S = ۶x^۲ \Longrightarrow \frac{dS}{dt} = ۱۲x\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dV}{dt}} = \frac{۱۲x}{۳x^۲} = \frac{۴}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{۴}{x}\frac{dV}{dt} = \frac{۴}{۱۲} \times ۷ = \frac{۷}{۳}$$

۱۳۶. نقطه‌ای بر خم (منحنی) $y^۲ = x^۳$ چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش $r(t)$ از مبدأ مختصات در صفحه با آهنگ ثابت دو واحد در ثانیه زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که نقطه متحرک دارای طول $x = ۲$ می‌باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ برابراست با: (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. باید رابطه‌ای بین r و x به دست آوریم.

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ = x^۲ + x^۳ \quad \text{و} \quad x = ۲ \Longrightarrow r = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} ۲r\frac{dr}{dt} = (۲x + ۳x^۲)\frac{dx}{dt} \Longrightarrow ۴\sqrt{۳}(۲) = (۴ + ۱۲)\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳۷. یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به صورت نمایی وزن کم می‌کند. به عنوان مثال جسم ۲۰۰ گرمی پس از یک ساعت به ۵۰ گرم می‌رسد. بعد از سه ساعت چه مقدار از این جسم باقی می‌ماند؟ (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲۵ گرم ۲) ۵۰ گرم ۳) ۳/۱۲۵ گرم ۴) ۵۰/۹ گرم

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. اگر مقدار ماده اولیه $x_۰ = ۲۰۰$ باشد، مقدار ماده پس از t ساعت به صورت $x(t) = x_۰e^{kt}$ است.

$$\frac{۵۰}{۲۰۰} = \frac{x(۱)}{x(۰)} = e^k \Longrightarrow e^k = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow x(۳) = ۲۰۰e^{۳k} = ۲۰۰(e^k)^۳ = \frac{۲۰۰}{۶۴} = ۳/۱۲۵$$

روش دوم. چون پس از گذشت یک ساعت، این ماده $\frac{۱}{۴}$ برابر شده است، پس از سه ساعت $\frac{۱}{۶۴} = (\frac{۱}{۴})^۳$ برابر می‌شود و لذا مقدار آن $\frac{۲۰۰}{۶۴} = ۳/۱۲۵$ خواهد شد.

۱۳۸. آهنگ افزایش جمعیت، متناسب با جمعیت است. اگر جمعیت یک شهر در سال ۱۳۴۰، ۴۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۷۰، ۶۰۰۰۰ نفر باشد، در سال ۱۴۰۰ جمعیت این شهر چند نفر است؟ (ژئوفیزیک ۸۰ و ۸۱، سیستم ۸۱)

۱) ۸۰۰۰۰ ۲) ۸۵۰۰۰ ۳) ۹۰۰۰۰ ۴) ۹۵۰۰۰

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به اینکه آهنگ افزایش جمعیت، متناسب با جمعیت است، فرایند رشد نمایی است و در مدت ۳۰ سال جمعیت ۱/۵ برابر می‌شود و لذا از سال ۱۳۷۰ به ۱۴۰۰ جمعیت ۱/۵ برابر شده و به $۹۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰ \times ۱/۵$ نفر می‌رسد.

۱۳۹. جمعیت موریانه‌ها در یک لانه از آنها به نسبت تعداد آنها زیاد می‌شود. اگر در ۱۲ روز تعداد آنها ۲ برابر شود ضریب رشد کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{٦}$ ۳) $\frac{\ln ۲}{۱۲}$ ۴) $\frac{\ln ۲}{٦}$

حل: گزینه ۳ درست است. تعداد موریانه‌ها در رابطه $x(t) = x_\circ e^{kt}$ صدق می‌کند.

$$\frac{x_۲}{x_۱} = e^{k\Delta t} \implies ۲ = e^{۱۲k} \implies k = \frac{\ln ۲}{۱۲}$$

۱۴۰. کدام یک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt{۵}$ است؟ (سیستم ۷۸)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و ۴ $= x_\circ$ و ۱ $= \Delta x$ آنگاه $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$$\sqrt{۵} \simeq \sqrt{۴} + \frac{۱}{۴} = ۲/۲۵$$

۱۴۱. در تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در نقطه ۴ $= x$ نموی به اندازه ۰/۴۱ $= \Delta x$ به متغیر می‌دهیم. مقدار $dy - \Delta y$ کدام است؟

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۰۲۵ ۳) ۰/۱۰۲۵ ۴) ۰/۱۲۵

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) = \sqrt{۴/۴۱} - \sqrt{۴} = ۲/۱ - ۲ = ۰/۱$$

$$dy = f'(x_\circ)\Delta x = \frac{۱}{۲\sqrt{x_\circ}}\Delta x = \frac{۱}{۴} \times ۰/۴۱ = ۰/۱۰۲۵ \implies dy - \Delta y = ۰/۰۰۲۵$$

۱۴۲. در تابع $y = \text{Arctan}\sqrt{x}$ مقدار تقریبی تغییر y وقتی x از ۴ به ۴/۱ افزایش یابد، چقدر است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) ۰/۰۰۵ ۲) ۰/۰۰۴ ۳) ۰/۰۴ ۴) ۰/۰۵

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\Delta y \simeq dy = y'dx = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱ + x}dx \quad \text{و} \quad x = ۴, dx = \Delta x = ۰/۱ \implies \Delta y \simeq \frac{۱}{۲۰}(۰/۱) = ۰/۰۰۵$$

۱۴۳. نسبت تغییرات عبارت $x - \sqrt{x}$ به تغییر عبارت $x^۲ - ۱$ به ازای ۱ $= x$ چقدر است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۰

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ آنگاه:

$$\text{نسبت تغییرات} \simeq \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲x} \quad \text{و} \quad x = ۱ \implies \text{نسبت تغییرات} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴۴. اگر $y = x - x^۲$ باشد، نسبت تغییرات $y^۲$ به تغییرات $x^۲$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $۲x^۲ + ۱$ ۲) $۲x^۲ - ۳x$ ۳) $۲x^۲ - ۳x + ۱$ ۴) $۲x^۲ - x + ۱$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\frac{\text{تغییرات } y^۲}{\text{تغییرات } x^۲} = \frac{۲yy'}{۲x} = \frac{۲(x - x^۲)(۱ - ۲x)}{۲x} = (۱ - x)(۱ - ۲x) = ۲x^۲ - ۳x + ۱$$

تستهای تکمیلی فصل ۳ ـ مبحث مشتق (سؤالات سطح ۲)

۱. اگر تابع f برای هر x در رابطه $|f(x)| \leq |x|^n$ که n عدد حقیقی بزرگتر از ۱ است صدق کند، کدام گزینه درست است؟

۱) f در $x = ۰$ ناپیوسته است.

۲) f در $x = ۰$ ممکن است فاقد مشتق باشد.

۳) $f'(۰) = ۰$

۴) بدون داشتن ضابطه f درمورد وجود $f'(۰)$ نمی‌توان قضاوت کرد.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $x = ۰$ را در این رابطه قرار دهیم $|f(۰)| \leq ۰$ پس $f(۰) = ۰$ حال کسر مشتق را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \frac{f(x)}{x} \implies \left|\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^n}{|x|} = |x|^{n-۱} \implies \left|\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}\right| \leq |x|^{n-۱}$$

و اگر $x \to ۰$ از قضیه فشردگی $f'(۰) = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = ۰$.

۲. مشتق مرتبه پنجم تابع $f(x) = (x^۲ + ۳x + ۱)e^x$ در $x = ۰$ برابر است با:

۱) ۳۵   ۲) ۲۰   ۳) ۳۶   ۴) ۲۶

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. اگر $u = x^۲ + ۳x + ۱$ برای $k \geq ۳$ داریم $u^{(k)} = ۰$ پس:

$$f^{(۵)}(x) = \sum_{k=۰}^{۲} \binom{۵}{k} u^{(k)} v^{(۵-k)} = \binom{۵}{۰}(x^۲ + ۳x + ۱)e^x + \binom{۵}{۱}(۲x + ۳)e^x + \binom{۵}{۲}(۲)e^x$$

$$\implies f^{(۵)}(۰) = ۱ + ۱۵ + ۲۰ = ۳۶$$

روش دوم. چون مشتق پنجم در $x = ۰$ مد نظر است، با توجه به نکته ۲۱ در صفحه ۱۴۲ کافی است بسط مک لورن f را تا $x^۵$ بنویسیم.

$$f(x) = (x^۲ + ۳x + ۱)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۴}{۲۴} + \frac{x^۵}{۱۲۰} + \cdots\right)$$

$$= \underbrace{a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + a_۳ x^۳ + a_۴ x^۴ + \left(\frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۲۴} + \frac{۱}{۱۲۰}\right)x^۵}_{g(x)} + \cdots$$

$$\implies f^{(۵)}(۰) = g^{(۵)}(۰) = \left(\frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۲۴} + \frac{۱}{۱۲۰}\right) \times ۵! = ۲۰ + ۱۵ + ۱ = ۳۶$$

۳. اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x + \sin x & x \geq ۰ \\ x^۲ + \sinh x & x < ۰ \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h \to ۰^+} \dfrac{f(-۲h) - f(۰)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۲   ۳) -۲ ۴) -۶

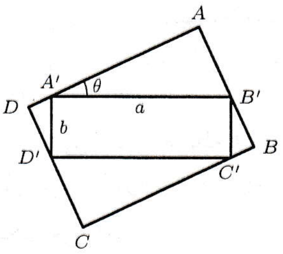
حل: گزینه ۳ درست است. حد مورد نظر را به صورت تعریف مشتق تبدیل می‌کنیم. اگر $t = -۲h$ آنگاه $t \to ۰^-$ و حد برابر $-۲f'_-(۰) = \lim\limits_{t \to ۰^-} \dfrac{f(t) - f(۰)}{-\frac{t}{۲}}$ است و چون f در $x = ۰$ پیوسته از چپ است و با توجه به قضیه ۴ در صفحه ۱۲۷ داریم $\lim\limits_{x \to ۰^-} f'(x) = f'_-(۰)$. چون برای $x < ۰$ داریم $f'(x) = ۲x + \cosh x$ پس $f'_-(۰) = ۱$ و

پاسخ سؤال $-2f'_-(0) = -2$ می‌باشد.

۴ در میان تمام مستطیلهای محیط بر مستطیلی به اضلاع a و b ماکزیمم مقدار مساحت کدام است؟

۱) $(a+b)^2$ ۲) a^2+b^2 ۳) $\frac{1}{2}(a+b)^2$ ۴) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

حل: گزینه ۳ درست است. مستطیل $ABCD$ را بر $A'B'C'D'$ محیط می‌کنیم. باید اضلاع مستطیل محیطی را برحسب a و b بیابیم. اگر زاویه $AA'B'$ را مطابق شکل θ بنامیم، در مثلث $AA'B'$ داریم $AB' = a\sin\theta$ و $AA' = a\cos\theta$. واضح است که زاویه $DA'D'$ برابر $\frac{\pi}{2}-\theta$ ولذا زاویه $DD'A'$ برابر θ است و لذا در مثلث $A'DD'$ داریم $A'D = b\sin\theta$ پس $AD = AA' + A'D = a\cos\theta + b\sin\theta$. با استدلالی مشابه $BB' = b\cos\theta$ و لذا $AB = AB' + B'B = a\sin\theta + b\cos\theta$ پس مساحت مستطیل $ABCD$ برابر است با:



$$S = AB\times AD = (a\sin\theta + b\cos\theta)(a\cos\theta + b\sin\theta)$$

$$= ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta + a^2\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 2\theta + ab$$

باید تابع بالا بر حسب متغیر $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ حداکثر شود، اما واضح است که حداکثر برای $\theta = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید و برابر $S = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + ab = \frac{1}{2}(a+b)^2$ است.

۵. مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ کدام است؟ (عمران ۸۱)

۱) $-\frac{e}{2}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $-\frac{1}{e}$ ۴) $e^{-\frac{1}{2}}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $e = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ عبارت به صورت $\frac{0}{0}$ است. با مشتق‌گیری لگاریتمی در صورت کسر:

$$\text{حد} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x(x+1)}\right)}{1} = e\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)\ln(x+1)+x}{x^2(x+1)}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(x+1) - 1 + 1}{3x^2+2x} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} e\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x} = -\frac{e}{2}$$

۶. اگر برای محاسبه $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1/1$ از تابع $h(x) = 1 + \frac{x-1}{2}$ استفاده کنیم و $\Delta = h(x) - f(x)$ کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (MBA ۸۱)

۱) $0 < \Delta < 1/25\times 10^{-4}$ ۲) $-1/25\times 10^{-4} < \Delta < 0$

۳) $0 < \Delta < 1/25\times 10^{-3}$ ۴) $-1/25\times 10^{-3} < \Delta < 0$

حل: گزینه ۳ درست است. $h(x)$ تقریب خطی f در $x = 1$ است زیرا اگر $x = 1 + \Delta x$:

$$f(x) \simeq f(1) + f'(1)\Delta x = 1 + \frac{x-1}{2} = h(x)$$

و Δ قرینه خطای خطی سازی است پس:

$$\Delta = -\frac{f''(\alpha)}{۲!}(\Delta x)^{۲} \quad \text{و} \quad ۱ < \alpha < ۱/۱ \quad \text{و} \quad f''(x) = -\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\Longrightarrow \Delta = \frac{۱}{۸}\alpha^{-\frac{۳}{۲}} \times ۱۰^{-۲} = \frac{۱۰^{-۲}}{۸}\alpha^{-\frac{۳}{۲}} < \frac{۱۰^{-۲}}{۸}(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$$

۷. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $a > ۰$ و $b > ۰$ و برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم، $a \leq f'(t) \leq b$ همچنین فرض کنید $f(۰) = ۰$ در این صورت: (ریاضی ۸۰، MBA ۸۲)

۱) $f(t) = t$ ۲) $f(t) = ate^{bt}$ ۳) $f(t) = (a+b)t$ ۴) $a|t| \leq |f(t)| \leq b|t|$

حل: گزینه ۴ درست است. چون کران‌های f' داده شده است از قضیه مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. بنا به این قضیه c بین ۰ و t موجود است که:

$$\frac{f(t)-f(۰)}{t-۰} = f'(c) \Longrightarrow \frac{f(t)}{t} = f'(c) \Longrightarrow f(t) = f'(c)t \Longrightarrow |f(t)| = |f'(c)||t|$$

چون $a \leq |f'(t)| \leq b$ پس $a|t| \leq |f(t)| \leq b|t|$.

۸ اگر $f : (۰,۱) \to [۱,۲]$ تابعی مشتق‌پذیر و برو (پوشا) باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) f' حداقل دو ریشه در $(۰,۱)$ دارد.
۲) f' دقیقاً یک ریشه در $(۰,۱)$ دارد.
۳) f' در $(۰,۱)$ ریشه ندارد.
۴) f' در $(۰,۱)$ ممکن است ریشه داشته باشد یا ریشه نداشته باشد.

حل: گزینه ۱ درست است. چون f پوشاست پس همه مقادیر بازه $[۱,۲]$ اتخاذ می‌شود یعنی $x_۱, x_۲ \in (۰,۱)$ موجودند که $f(x_۱) = ۱$ و $f(x_۲) = ۲$ بنابراین $x_۱$ و $x_۲$ نقاط اکسترمم مطلق f در $(۰,۱)$ هستند. چون f مشتق‌پذیر و این نقاط در بازه $(۰,۱)$ هستند پس $f'(x_۱) = f'(x_۲) = ۰$ و لذا f' حداقل دو ریشه در $(۰,۱)$ دارد.

۹. نمودارهای $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ و $y = c$ (c ثابت) را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست هستند؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) اگر $c \leq ۰$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند.
۲) اگر $۰ < c < \frac{۱}{e}$ آنگاه دو نقطه تقاطع دارند.
۳) اگر $c > \frac{۱}{e}$ آنگاه هیچ نقطه تقاطعی ندارند.
۴) اگر $۰ < c < \frac{۱}{e}$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند.

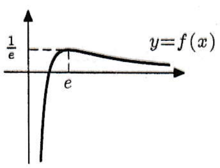
حل: گزینه ۴ درست است. دامنه f بازه $(۰,+\infty)$ است.

x	۰		e		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۱}{e}$	$\searrow$	۰

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = ۰$$

$$f'(x) = \frac{۱-\ln x}{x} \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \Longrightarrow x = e$$

با استفاده از اطلاعات بالا نمودار در $x = ۰$ دارای یک مجانب قائم بوده و به صورت روبرو رسم می‌شود. با توجه به نمودار حکم گزینه (۴) نادرست است. ضمناً ماکزیمم مطلق f برابر $\frac{۱}{e}$ و تابع می‌نیمم مطلق ندارد.



۱۰. فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا باشد و $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x\sin\frac{1}{x} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. f در صفر: (ریاضی ۷۴)

۱) حد چپ و راست غیرمساوی دارد. ۲) حد چپ و راست ندارد.

۳) پیوسته نیست. ۴) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

حل: گزینه ۴ درست است. چون $|x\sin\frac{1}{x}| \le |x|$ پس $|f(x)| \le |x|$ و لذا $-|x| \le f(x) \le |x|$. حال اگر $x \to 0$ با توجه به قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ و $f(0) = 0$ پس f در $x = 0$ پیوسته است. برای بررسی مشتق‌پذیری، کسر مشتق را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \sin\frac{1}{x} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

اگر $x \to 0$ و x گنگ باشد آنگاه باید $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ را محاسبه کنیم که وجود ندارد پس f در $x = 0$ فاقد مشتق است.

۱۱ تابع مشتق‌پذیر f در روابط $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(b) > 0$ و $f'(a) > 0$ صدق می‌کند که $b > a$. تعداد ریشه‌های $f'(x) = 0$ کدام است؟

۱) دقیقاً دو ۲) حداقل ۲ ۳) حداقل ۳ ۴) دقیقاً ۳

حل: گزینه ۲ درست است. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است پس f بر این بازه دارای اکسترمم مطلق است. چون $f'(a) > 0$ پس $x_1 \in (a,b)$ موجود است که $f(x_1) > f(a) = 0$ و با استدلال مشابه $x_2 \in (a,b)$ موجود است که $f(x_2) < f(b) = 0$. این موضوع نشان می‌دهد که اکسترممهای مطلق b نمی‌تواند در a و b رخ دهد و لذا اکسترمم مطلق باید در داخل بازه (a,b) و مثلاً در نقاط c_1 و c_2 رخ دهد. چون f مشتق پذیراست پس $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$.

۱۲. فرض کنید r ثابت باشد، برای R مثبت و بزرگ کدامیک از کمیتهای زیر تقریب بهتری برای $\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{R^2}$ است؟ (فلسفه ۸۰)

۱) $\frac{1}{2rR}$ ۲) $\frac{r}{2R}$ ۳) $\frac{2r}{R^2}$ ۴) $\frac{2r}{R^3}$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $f(x) = \frac{1}{x^2}$ آنگاه $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ و با توجه به فرمول تقریب خطی به ازای $x_0 = R$ و $\Delta x = r$:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x \implies \frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{R^2} \simeq -\frac{2}{R^3}(r) \implies \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+r)^2} \simeq \frac{2r}{R^3}$$

۱۳. تعداد نقاط عطف تابع $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ بر بازه $(0,+\infty)$ عبارت است از:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا $f''(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3) \implies f''(x) = e^{-x^2}(2 - 10x^2 + 4x^4)$$

$$f''(x) = 0 \implies 2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

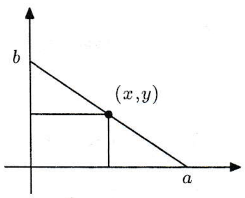
اگر $t = x^{۲}$ باید تعداد ریشه‌های مثبت معادله $۲t^{۲} - ۵t + ۱ = ۰$ را مشخص کنیم. چون $\Delta = ۲۵ - ۸ > ۰$ پس این معادله دارای دو ریشه متمایز حقیقی است. جمع و ضرب ریشه‌های این معادله مثبت است و لذا معادله دارای دو ریشه مثبت است، پس معادله $f''(x) = ۰$ دارای دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی است. که چون ریشه ساده هستند، $f''(x)$ حول آنها تغییر علامت می‌دهد و لذا همه آنها نقطه عطف می‌باشند. بنابراین در بازه $(۰, +\infty)$ تابع دارای دو نقطه عطف است.

۱۴. مثلث قائم‌الزاویه با رئوس $(a, ۰)$ و $(۰, b)$ مفروض است. $(a, b > ۰)$ یک مستطیل در داخل این مثلث محاط شده است به قسمی که یک رأس آن منطبق بر $(۰, ۰)$ و دو ضلع آن منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم مستطیل روی وتر مثلث است. مساحت بزرگترین مستطیل ممکن: (معدن ۷۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث است. ۲) $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث است.

۳) $\frac{۱}{۲}$ مساحت مثلث است. ۴) $\frac{۵}{۸}$ مساحت مثلث است.

حل: گزینه ۳ درست است. معادله وتر مثلث $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$ است. اگر رأسی از مستطیل که بر وتر قرار دارد را (x, y) بگیریم، هدف ماکزیمم کردن $S = xy$ به شرط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$ است. حال چون مجموع $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{b}$ ثابت است ضرب آنها که برابر $\frac{S}{ab}$ است وقتی ماکزیمم می‌شود که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ پس در این حالت:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱ \implies x = \frac{a}{۲} \quad \text{و} \quad y = \frac{b}{۲} \implies \max(S) = \frac{ab}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \text{مساحت مثلث}$$

۱۵. اگر $x^n - y^n = a^n$ آنگاه $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{(n-۱)a^n x^{n-۲}}{y^{۲n-۱}}$ ۲) $\frac{n!x^n}{y^{۲n}}$ ۳) $\frac{(n-۱)a^n x^{n-۲}}{y^{۲n-۱}}$ ۴) $-\frac{n!x^n}{y^{۲n}}$

حل: گزینه ۱ درست است. از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$nx^{n-۱} - ny^{n-۱}y' = ۰ \implies x^{n-۱} - y^{n-۱}y' = ۰$$

$$\implies (n-۱)x^{n-۲} - (n-۱)y^{n-۲}y'^{۲} - y^{n-۱}y'' = ۰ \quad \text{و} \quad y' = \frac{x^{n-۱}}{y^{n-۱}}$$

$$(n-۱)(x^{n-۲} - \frac{x^{۲n-۲}}{y^n}) - y^{n-۱}y'' = ۰ \xrightarrow{\times y^n} (n-۱)x^{n-۲}(y^n - x^n) - y^{۲n-۱}y'' = ۰$$

$$\implies y'' = -\frac{(n-۱)a^n x^{n-۲}}{y^{۲n-۱}}$$

۱۶ f تابعی نزولی اکید بر $\mathbb{R}$ و g تابعی دلخواه است کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $f \circ g$ اکیداً نزولی است. ۲) طول نقاط ماکزیمم g و $f \circ g$ یکسان است.

۳) طول نقاط اکسترمم g و $f \circ g$ یکسان است. ۴) $f \circ g$ اکیداً صعودی است.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $x_{۰}$ ماکزیمم برای g باشد، بازه I حول $x_{۰}$ موجود است که برای هر $x \in I$:

$$g(x_{۰}) \geq g(x) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} f \circ g(x_{۰}) \leq f \circ g(x)$$

یعنی $x_۰$ برای $f\circ g$، مینیمم است. حال اگر $x_۰$ نقطه مینیمم $f\circ g$ باشد $f\circ g(x_۰)\leq f\circ g(x)$ و $f^{-۱}$ نزولی اکید است پس $f^{-۱}\circ f\circ g(x_۰)\geq f^{-۱}\circ f\circ g(x)$ و لذا $g(x_۰)\geq g(x)$ پس $x_۰$ نقطه ماکزیمم g است و به‌طور مشابه نقطه مینیمم g برای $f\circ g$ ماکزیمم است پس طول اکسترمم g و $f\circ g$ یکسان است.

نکته ۱. اگر f صعودی اکید باشد، طول نقاط ماکزیمم g و $f\circ g$ و طول نقاط می‌نیمم g و $f\circ g$ یکسان است و اگر f نزولی اکید باشد، طول نقاط ماکزیمم g و می‌نیمم $f\circ g$ و طول نقاط می‌نیمم g و ماکزیمم $f\circ g$ یکسان است.

۱۷. تعداد ریشه‌های تابع $y=x^۳-۳x-۱$ در بازه $[-۱,۲]$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

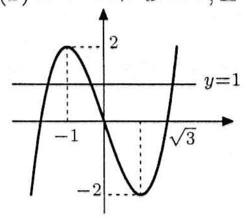
۱) ۰ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. با فرض $g(x)=x^۳-۳x-۱$ معادله $g'(x)=۳x^۲-۳=۰$ دارای دو ریشه $x=\pm۱$ است. تابع g بر بازه $[-۱,۱]$ نزولی و $g(۱)g(-۱)<۰$ پس در این فاصله دقیقاً یک ریشه دارد. این تابع بر بازه $[۱,۲]$ صعودی و $g(۱)g(۲)<۰$ پس در این فاصله نیز یک ریشه دارد و لذا بر کل بازه دارای دو ریشه است.

روش دوم. نمودار $f(x)=x^۳-۳x$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=۰\implies x=۰,\pm\sqrt{۳}\quad,\quad f'(x)=۰\implies x=\pm۱$$



و چون $f(-۱)=۲$ و $f(۱)=-۲$ پس نمودار مطابق شکل است و با توجه به نمودار و اینکه $f(۲)=۲>۱$ خط $y=۱$ نمودار f را در ۲ نقطه در بازه $[-۱,۲]$ قطع می‌کند و لذا $f(x)=۱$ یعنی معادله مورد نظر دارای ۲ ریشه است.

۱۸. هرچه باشد $a>۰$، بیشترین مقدار تابع $f(x)=ax-(۱+a^۴)x^۲$ چند است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

حل: گزینه ۳ درست است. نمودار f بر حسب x یک سهمی است و با توجه به نکته ۱ در صفحه ۱۵، دارای ماکزیمم مطلق در رأس سهمی است.

$$x_۰=\frac{a}{۲(۱+a^۴)}\implies \max(f)=f(x_۰)=\frac{a^۲}{۴(۱+a^۴)}=\frac{۱}{۴}\frac{۱}{a^۲+\frac{۱}{a^۲}}$$

از (۳) در صفحه ۱۴، چون $a^۲+\frac{۱}{a^۲}\geq ۲$ پس $\max(f)\leq\frac{۱}{۸}$ و به ازای $a=۱$ این ماکزیمم رخ می‌دهد.

۱۹. تابع $f(x)=\begin{cases}\ln(۱+e^{-\frac{۱}{x^۲}}) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ **در نقطه** $x_۰=۰$: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر ‏ ‏ ۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) پیوسته نیست ولی مشتق‌پذیر است. ‏ ‏ ۴) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر

حل: گزینه ۱ درست است. با استفاده از تعریف مشتق:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+e^{-\frac{۱}{x^۲}})-۰}{x}\overset{y=\frac{۱}{x}}{=\!=\!=}\lim_{y\to\pm\infty}y\ln(۱+e^{-y^۲})$$

چون $e^{-y^{\text{۲}}} \to \circ$ بنا به نکته ۱۳ در صفحه ۶۸ داریم $\ln(\text{۱} + e^{-y^{\text{۲}}}) \sim e^{-y^{\text{۲}}}$ و با استفاده از قوانین رشد:

$$f'(\circ) = \lim_{y\to\pm\infty} ye^{-y^{\text{۲}}} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y}{e^{y^{\text{۲}}}} = \circ$$

بنابراین f در مبدأ مشتق‌پذیر و لذا پیوسته است.

۲۰. تابع $f(x) = |x^{\text{۴}} - x^{\text{۲}}|$ در چند نقطه فاقد مشتق است؟

۱) $\circ$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $g(x) = x^{\text{۴}} - x^{\text{۲}}$ با توجه به نکته ۵ در صفحه ۱۲۸، تابع f در ریشه‌های g می‌تواند فاقد مشتق باشد. ریشه‌های $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$g(x) = \circ \implies x = \circ, \pm\text{۱} \quad , \quad g'(x) = \text{۴}x^{\text{۳}} - \text{۲}x$$

چون $g'(\circ) = \circ$ پس f در $x = \circ$ مشتق دارد ولی $g'(\pm\text{۱}) \neq \circ$ پس f در این نقاط فاقد مشتق است.

۲۱. اگر $x^y = y^x$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (سیستم ۷۳)

۱) $\frac{y\ln x - x}{x\ln y - y}$ ۲) $\frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}$ ۳) $\frac{(x\ln y - y)y}{(y\ln x - x)x}$ ۴) $\frac{(y\ln x - x)y}{(x\ln y - y)x}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به اینکه با توابع نمایی روبرو هستیم بهتر است ابتدا از رابطه لگاریتم بگیریم.

$$y\ln x = x\ln y \implies y\ln x - x\ln y = \circ \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{(x\ln y - y)y}{(y\ln x - x)x}$$

۲۲. اگر $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ x(\text{۱} - x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$، آنگاه (ریاضی ۷۵)

۱) f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست. ۲) f در تمام نقاط پیوسته است.

۳) f در صفر پیوسته است ولی در صفر مشتق ندارد. ۴) f در صفر پیوسته است و در این نقطه مشتق دارد.

حل: گزینه ۴ درست است. در $x = \circ$ دو ضابطه برابرند و لذا f پیوسته است.

روش اول. از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{Q} - \{\circ\} \\ \text{۱} - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

و چون حد هر دو ضابطه در $x = \circ$ برابر یک است پس $f'(\circ) = \text{۱}$.

روش دوم. با توجه به نکته ۱۰ در صفحه ۱۳۱، مشتق هر ضابطه را در $x = \circ$ محاسبه می‌کنیم که هر دو با هم برابر هستند و لذا در $x = \circ$ مشتق‌پذیر است.

۲۳. مشتق n ام تابع $y = x^{\text{۲}}\sin x$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $y^{(n)} = x^{\text{۲}}\sin(x + \frac{n\pi}{\text{۲}}) - \text{۲}nx\sin(x + \frac{n-\text{۱}}{\text{۲}}\pi) + n(n-\text{۱})\sin(x + \frac{n-\text{۲}}{\text{۲}}\pi)$

۲) $y^{(n)} = x^{\text{۲}}\sin(x + \frac{n\pi}{\text{۲}}) + \text{۲}nx\sin(x + \frac{n-\text{۱}}{\text{۲}}\pi) + n(n-\text{۱})\sin(x + \frac{n-\text{۲}}{\text{۲}}\pi)$

۳) $y^{(n)} = x^{\text{۲}}\cos(x + \text{۲}n\pi) - \text{۲}nx\cos(x + n\pi) + \text{۲}n(n-\text{۱})\cos(x + \frac{n\pi}{\text{۲}})$

۴) $y^{(n)} = x^{\text{۲}}\cos(x + n\pi) + \text{۲}nx\sin(x + \text{۲}n\pi) + \text{۲}n(n-\text{۱})\cos(x + \text{۳}n\pi)$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $u = x^{\text{۲}}$ و $v = \sin x$ با توجه به اینکه برای $k \geq \text{۳}$ داریم $u^{(k)} = \circ$ و $v^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{\text{۲}})$:

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}=\binom{n}{0}x^2\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\binom{n}{1}(2x)\sin(x+\frac{n-1}{2}\pi)+\binom{n}{2}\times 2\sin(x+\frac{n-2}{2}\pi)$$

و چون $\binom{n}{1}=n$ و $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ گزینه (۲) درست است.

۲۴ **فرض کنید $k\in\mathbb{R}$ و تابع $g(x)=e^{-kx}f(x)$. اگر تابع f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$** آنگاه:

(ریاضی ۷۶)

۱) $c\in(a,b)$ هست که $g(c)=0$ ۲) $c\in(a,b)$ هست که $g'(c)=kg(c)$

۳) $c\in(a,b)$ هست که $g'(c)=g(c)$ ۴) $c\in(a,b)$ هست که $f'(c)=kf(c)$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $g(a)=e^{-ka}f(a)=0\ ,\ g(b)=e^{-kb}f(b)=0$ پس بنا به قضیه رُل نقطه $c\in(a,b)$ موجود است که $g'(c)=0$. اما:

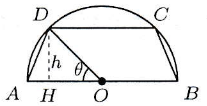
$$g'(x)=e^{-kx}\big(-kf(x)+f'(x)\big)\implies e^{-kc}\big(-kf(c)+f'(c)\big)=0\implies f'(c)=kf(c)$$

تذکر۱. توجه کنید که حکم به دست آمده در تست بالا نشان می‌دهد با فرض آنکه f بر یک بازه بسته $[a,b]$ مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)=0$ آنگاه برد تابع $h(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۲۵. ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر $2r$ محاط است به طوری که قاعده ذوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است. ارتفاع ذوزنقه چقدر است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ ۳) $\frac{3}{2}r$ ۴) $\frac{3}{4}r$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر زاویه OD و قطر دایره را θ بنامیم آنگاه:



$h=r\sin\theta$ و $CD=2OH=2r\cos\theta$

$$S(\theta)=\frac{r\sin\theta}{2}(2r+2r\cos\theta)=r^2\sin\theta(1+\cos\theta)\quad \text{و}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$S'(\theta)=r^2\Big(\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta\Big)\ \text{و}\ f'(\theta)=0\implies\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta=0$$

$$\implies 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0\implies\cos\theta=-1\ \text{و}\ \frac{1}{2}$$

θ در ربع اول است $\implies\cos\theta=\frac{1}{2}\implies\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\implies h=\frac{\sqrt{3}}{2}r$

۲۶. برای کدام مقدار a در نقطه تماس دو منحنی $x^2+y^2=ay$ و $y=x^2$ (روی محور x ها) مقدار y'' برای هر دو یکسان است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه ۳ درست است. اگر دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم به معادله $y+y^2=ay$ می‌رسیم و نقاط برخورد به صورت $(\pm\sqrt{a-1},a-1)$ و $(0,0)$ به دست می‌آید و چون نقطه تلاقی روی محور x مد نظر است محاسبه را برای $(0,0)$ انجام می‌دهیم. چون برای $y=x^2$ مقدار y'' برابر ۲ به‌دست می‌آید پس a را طوری

می‌یابیم که y'' در $(۰,۰)$ برای معادله $x^{۲}+y^{۲}-ay=۰$ برابر ۲ شود.

$$۲x+(۲y-a)y'=۰ \quad \text{و} \quad x=y=۰ \implies y'=۰$$

$$۲+۲y'^{۲}+(۲y-a)y''=۰ \implies ۲-۲a=۰ \implies a=۱$$

۲۷. تعداد جواب‌های معادله $\frac{۱}{x-۲}+\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}=۰$ **برابر است با:**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. سمت چپ معادله را $f(x)$ می‌نامیم. چون

$$f'(x)=-\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}-\frac{۱}{(x-۱)^{۲}}-\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}<۰$$

پس f بر فواصل پیوستگی نزولی اکید است. برای $x<-۱$ داریم $f(x)<۰$ و برای $x>۲$ داریم $f(x)>۰$ پس ریشه‌های f باید در فاصله $(-۱,۲)$ قرار گیرند. حال با توجه به یکنوا بودن f بر بازه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,۲)$:

f در $(-۱,۱)$ دقیقاً یک ریشه دارد. $\Longleftarrow$ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to -۱^+} f(x)=+\infty$

f در $(۱,۲)$ دقیقاً یک ریشه دارد. $\Longleftarrow$ $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$

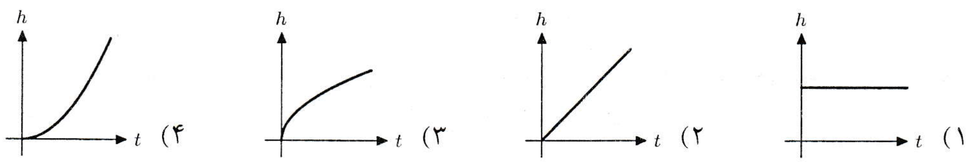
پس f دارای دو ریشه است.

۲۸ **فرض کنید f تابعی نامنفی و f'' بر $(۰,۱)$ موجود باشد. اگر $f(x)$ حداقل به ازای دو مقدار x در $(۰,۱)$ برابر صفر شود، آنگاه معادله $f''(x)=۰$ در $(۰,۱)$ چند ریشه دارد؟** (ریاضی ۸۰، MBA ۸۲)

۱) حداکثر یک ریشه ۲) حداقل دو ریشه ۳) دقیقاً دو ریشه ۴) ریشه ندارد

حل: گزینه ۲ درست است. اگر f در $x_۲$ و $x_۱$ صفر شود آنگاه $x_۱<y<x_۲$ موجود است که $f'(y)=۰$. چون f در $(۰,۱)$ نامنفی است و $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$ پس f در $x_۲$ و $x_۱$ می‌نیمم نسبی است. f مشتق‌پذیر است و لذا $f'(x_۱)=f'(x_۲)=۰$ پس f' دارای حداقل سه ریشه و بنابر قضیه رُل، f'' دارای حداقل دو ریشه است.

۲۹. در یک ظرف گلدان شکل به نرخ ثابتی آب می‌ریزیم. ارتفاع سطح آب را به h و زمان را به t نمایش می‌دهیم. کدامیک از اشکال زیر مناسب‌ترین نمودار h بر حسب t است؟ **(فلسفه ۸۲)**



حل: گزینه ۳ درست است. واضح است که نمودار از $(۰,۰)$ عبور می‌کند و چون h با گذشت زمان زیاد می‌شود، نمودار صعودی است اما چون نرخ ورود آب ثابت است، بین دو زمان متوالی (و کوتاه) مقدار ثابتی به حجم آب اضافه می‌شود و چون هر چه ارتفاع بیشتر می‌شود سطح مقطع ظرف بزرگتر می‌شود پس آهنگ افزایش ارتفاع کمتر می‌شود یعنی تقعر نمودار h رو به پایین است.

۳۰. فرض کنید f و g دو تابع بر $\mathbb{R}$ باشند به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |g(x)| \leq |x| \\ f(x) = x^{۲} \sin \dfrac{۱}{x} + xg(x)\ ,\ x \neq ۰ \\ f(۰) = ۰ \end{cases}$$

در این صورت کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد $f'(۰)$ درست است؟ (ریاضی ۸۱)

۱) وجود ندارد. ۲) برابر صفر است. ۳) برابر $\frac{۱}{۲}$ است. ۴) برابر ۱ است.

حل: گزینه ۲ درست است. از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to ۰}\left(x\sin\frac{۱}{x} + g(x)\right)$$

چون $x\sin\frac{۱}{x}$ در $x = ۰$ به صورت صفر در کراندار است، حد آن صفر می‌شود و چون $-|x| \leq g(x) \leq |x|$ پس با حد گرفتن از نابرابری وقتی $x \to ۰$ و با توجه به قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۰$ پس $f'(۰) = ۰$.

۳۱. هرگاه خط $y = ۴x$ مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x^{۳}}{۳} + c$ در ربع اول باشد، آنگاه مقدار c برابر است با:

(معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۴) $\frac{۸۱}{۱۷}$

حل: گزینه ۱ درست است. شیب مماس برابر ۴ است پس باید $y' = ۴$.

$$y' = x^{۲} = ۴ \implies x = \pm ۲ \xrightarrow{\text{ربع اول}} x = ۲$$

چون نقطه تماس روی $y = ۴x$ و $y = \frac{x^{۳}}{۳} + c$ است پس عرض دو نمودار با هم برابر است.

$$\frac{۸}{۳} + c = ۸ \implies c = \frac{۱۶}{۳}$$

۳۲. مشتق n ام تابع $y = \frac{x^{۲}}{۱+x}$ برای $n \geq ۲$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) $y^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n x^{۲} n!}{(۱+x)^{n-۱}} + \dfrac{(-۱)^{n-۱}۲x(n-۱)!}{(۱+x)^{n-۲}} + \dfrac{(-۱)^{n-۲}(n-۲)!}{(۱+x)^{n-۳}}$

۲) $y^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n x^{۲} n!}{(۱+x)^{n+۱}} + \dfrac{(-۱)^{n-۱}۲xn!}{(۱+x)^{n}} + \dfrac{(-۱)^{n-۲}n!}{(۱+x)^{n-۱}}$

۳) $y^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n ۳x^{۲} n!}{(۱+x)^{n+۱}} + \dfrac{(-۱)^{n-۱}۳x^{۲}n!}{(۱+x)^{n}} + \dfrac{(-۱)^{n-۲}۳xn!}{(۱+x)^{n-۱}}$

۴) $y^{(n)} = \dfrac{(-۱)^n x^{۲} n!}{(۱+x)^{n}} + \dfrac{(-۱)^{n-۱}۲x(n-۱)!}{(۱+x)^{n-۱}} + \dfrac{(-۱)^{n-۲}۲(n-۲)!}{(۱+x)^{n-۲}}$

حل: گزینه ۲ درست است. از فرمول لایپ‌نیتز به ازای $u = x^{۲}$ و $v = \frac{۱}{x+۱}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $u^{(۰)} = u = x^{۲}$ و $u^{(۱)} = u' = ۲x$ و $u^{(۲)} = u'' = ۲$ و برای $n \geq ۳$ داریم $u^{(n)} = ۰$ پس:

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)} = \sum_{k=۰}^{۲}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)} = \binom{n}{۰}u^{(۰)}v^{(n)} + \binom{n}{۱}u^{(۱)}v^{(n-۱)} + \binom{n}{۲}u^{(۲)}v^{(n-۲)}$$

با توجه به مثال ۱۰ در صفحه ۱۴۴ داریم:

$$v^{(n)} = \frac{(-۱)^n n!}{(۱+x)^{n+۱}} \quad \text{و} \quad v^{(n-۱)} = \frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۱+x)^{n}} \quad \text{و} \quad v^{(n-۲)} = \frac{(-۱)^{n-۲}(n-۲)!}{(۱+x)^{n-۱}}$$

$$y^{(n)} = u^{(0)}v^{(n)} + nu^{(1)}v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}u^{(2)}v^{(n-2)} = \frac{(-1)^n x^2 n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1}2xn!}{(1+x)^n} + \frac{(-1)^{n-2}n!}{(1+x)^{n-1}}$$

۳۳. فرض کنید تابع صعودی اکید f دارای عرض از مبدأ ۲ بوده و به ازای هر x در ربطه $f'(x) \leq \dfrac{1}{\cosh x + f^2(x)}$ صدق می‌کند. کدامیک از گزینه‌های زیر تخمین بهتری را برای $f(0.01)$ ارائه می‌کند؟

۱) $2 \leq f(0.01) \leq 2.002$

۲) $2 \leq f(0.01) \leq 2.005$

۳) $2 \leq f(0.01) \leq 2.01$

۴) $2 \leq f(0.01) \leq 2.001$

حل: گزینه ۱ درست است. چون تابع f صعودی اکید است پس $f(0.01) > f(0) = 2$ بنا به قضیه مقدار میانگین در بازه $[0, 0.01]$:

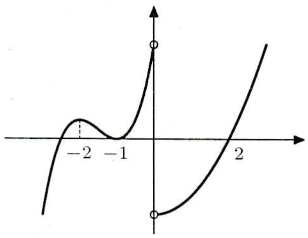
$$\frac{f(0.01) - f(0)}{0.01 - 0} = f'(c) \implies f(0.01) = f(0) + \frac{f'(c)}{100} = 2 + \frac{f'(c)}{100} \quad , \quad 0 < c < 0.01$$

توجه کنید که چون f صعودی اکید است پس برای $x \geq 0$ می‌نیمم f به ازای $x = 0$ رخ می‌دهد و همچنین می‌نیمم $\cosh x$ نیز در $x = 0$ رخ می‌دهد و برابر یک است پس برای $x \geq 0$ داریم:

$$\cosh x + f^2(x) \geq \cosh 0 + f^2(0) = 5 \implies f'(x) \leq \frac{1}{\cosh x + f^2(x)} \leq \frac{1}{5}$$

$$\implies f(0.01) = 2 + \frac{1}{100}f'(c) \leq 2 + \frac{1}{500} = 2.002$$

۳۴. نمودار مشتق تابع f مطابق شکل است. اگر f پیوسته باشد و از مبدأ بگذرد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (۸۱ MBA)



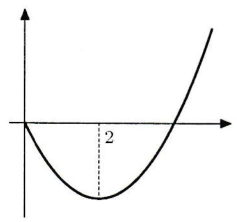
۱) تابع f دارای دو می‌نیمم نسبی است ولی ماکزیمم نسبی ندارد.

۲) تابع f در فاصله $(0, +\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.

۳) مبدأ نقطه می‌نیمم نسبی است.

۴) تابع f بر بازه $(-3, -2)$ صعودی اکید است.

حل: گزینه ۲ درست است. چون f' در دو نقطه از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، دارای دو می‌نیمم نسبی است اما چون در $x = 0$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد این نقطه برای f ماکزیمم نسبی است.



با توجه به اینکه f' در فاصله $(0, 2)$ زیر محور و صعودی است پس f نزولی اکید با تقعر رو به بالاست و چون $f(0) = 0$ پس $f(2) < 0$ پس f در بازه $(2, +\infty)$ صعودی اکید با تقعر رو به بالاست و لذا نمودار f محور x ها را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند (استدلال آن را در تست ۵۶ در صفحه ۱۶۱ ملاحظه کنید.) و لذا f دقیقاً یک ریشه دارد.(نمودار f در فاصله $[0, +\infty)$ مطابق شکل است.)

۳۵. تابع f به ازای هر مقدار حقیقی x و y در رابطه $f(x+y) = f(x)f(y) + 3x^2y$ صدق می‌کند و $f'(0) = 2$ و $f(0) \neq 0$ در این صورت $f'(x)$ برای هر x برابر است با:

۱) $2f(x)$ ۲) $2f(x) + 3x$

۳) $2f(x) + 3x^2$ ۴) برای برخی مقادیر مقادیر x وجود ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به تعریف مشتق:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) + 3x^2h - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(f(x)\frac{f(h)-1}{h} + \frac{3x^2h}{h}\right)$$

با قرار دادن $y = 0$ و $x = 0$ در رابطه f داریم $f(0) = f^2(0) + 0$ و چون $f(0) \neq 0$ پس $f(0) = 1$ و لذا $2 = f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$ و لذا $f'(x) = 2f(x) + 3x^2$.

۳۶. اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ و $h = \min(f, g)$، کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) h در $\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر است. ۲) h در $\frac{\pi}{4}$ ناپیوسته است.

۳) $h'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $h'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. h در $\frac{\pi}{4}$ پیوسته است زیرا $h(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ولذا حد چپ و راست و مقدار در این نقطه با هم برابر هستند.

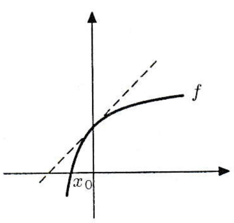
$$h'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ -\sin x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \implies h'_+(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad h'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته ۲. اگر توابع f و g در x_0 پیوسته باشند، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ در x_0 پیوسته‌اند. اما در حالت کلی مشتق‌پذیری f و g در x_0، مشتق‌پذیری ماکزیمم و می‌نیمم آنها در x_0 را نتیجه نمی‌دهد.

$\boxed{۳۷}$ اگر f تابعی با مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد که $f''(x) < 0$ و $f'(x) > 0$ و از نقطه $(0, 1)$ عبور کند تعداد جواب‌های متمایز معادله $f(-2x^2 + x + 4) = 0$ برابر است با:

۱) دقیقاً یک ۲) دقیقاً ۲ ۳) حداکثر یک ۴) دقیقاً سه

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه خط مماس در نقطه $(0, 1)$ محور x ها را در نیمه چپ آن قطع می‌کند و تقعر f رو به پایین است با استدلالی مشابه تست ۵۶ در صفحه ۱۶۱، f دقیقاً در یک نقطه x_0 برابر صفر است که $x_0 < 0$ پس:



$$f(-2x^2 + x + 4) = 0 \implies -2x^2 + x + 4 = x_0$$

$$\implies -2x^2 + x + (4 - x_0) = 0$$

حال چون $4 - x_0 > 0$ پس ضریب x^2 و جمله ثابت علامت مخالت دارند پس $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه متمایز دارد.

۳۸. مکان هندسی مرکز تمام دایره‌های مماس بر منحنی $y = x^{۲} + ۱$ در نقطه $(۱, ۲)$ کدام است؟
(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $y - ۲x = ۰$ ۲) $۲y - x = ۳$ ۳) $y + ۲x = ۴$ ۴) $۲y + x = ۵$

حل: گزینه ۴ درست است. در نقطه تماس شیب خط مماس بر دایره و سهمی یکسان است پس خط قائم بر سهمی بر دایره هم عمود است. از طرفی خط عمود بر یک دایره همواره از مرکز دایره عبور می‌کند و لذا مکان مورد نظر همان خط قائم بر نمودار در $(۱, ۲)$ به جز همین نقطه است.

$$y' = ۲x \text{ و } x = ۱ \implies m = ۲ \implies m' = -\frac{۱}{۲} \implies y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \implies ۲y + x = ۵$$

۳۹ **فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) دو بار مشتق‌پذیر باشد و خط واصل نقاط $A\big(a, f(a)\big)$ و $B\big(b, f(b)\big)$ نمودار f را دقیقاً در یک نقطه به طول $a < c < b$ قطع کند، معادله $f''(x) = ۰$ چند جواب دارد؟**

۱) دقیقاً دو ۲) حداقل یک
۳) دقیقاً یک ۴) به مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ وابسته است.

حل: گزینه ۲ درست است. فرض می‌کنیم نقطه برخورد $C(c, f(c))$ باشد. بر هر یک از فاصله‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ از قضیه مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. نقاط $a < x_۱ < c$ و $c < x_۲ < b$ موجودند که:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(x_۱) \ : \ \text{شیب وتر } AC \qquad \text{و} \qquad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(x_۲) \ : \ \text{شیب وتر } BC$$

چون نقطه C روی خط AB قرار دارد، شیب وترهای AC و BC برابر شیب وتر AB است و لذا $f'(x_۱) = f'(x_۲)$ حال بنا به قضیه رُل نقطه $x_۱ < t < x_۲$ موجود است که $f''(t) = ۰$.

۴۰. تابع $f(x) = x^{۲} + ۲\cos x$ برای $x > ۰$ چه وضعی دارد؟

۱) نزولی اکید ۲) صعودی اکید
۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

حل: گزینه ۲ درست است. باید f' را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x) = ۲x - ۲\sin x \implies f''(x) = ۲ - ۲\cos x$$

چون $f''(x) \geq ۰$ پس $f'(x)$ صعودی اکید است و لذا برای $x > ۰$ داریم $f'(x) > f'(۰) = ۰$ پس f صعودی اکید است.

۴۱. f را با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \notin \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ در نظر بگیرید و فرض کنید $g(x) = [x]$. در این صورت:
(ریاضی ۷۷)

۱) مشتق $f \circ g$ در نقاط غیرصحیح موجود و برابر صفر است.
۲) مشتق $f \circ g$ در همه جا موجود و برابر صفر است.
۳) مشتق $f \circ g$ فقط در نقاط معین وجود دارد.
۴) مشتق $f \circ g$ در جایی وجود دارد که مشتق f وجود دارد.

حل: گزینه ۱ درست است. ضابطه $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم. توجه کنید که برای هر x داریم $[x] \in \mathbb{Z}$ و لذا $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = \cos[x]$ حال برای x های غیرصحیح $[x]$ یک عدد ثابت و لذا مشتق $f \circ g$ موجود و صفر

است اما در نقاط صحیح $f \circ g$ ناپیوسته و لذا فاقد مشتق می‌باشد.

۴۲. اگر g در نقطه $x = x_\circ$ پیوسته باشد، تابع $f(x) = |x - x_\circ| g(x)$ در $x = x_\circ$ چه وضعی دارد؟

۱) زاویه‌دار ۲) مشتق‌پذیر ۳) ناپیوسته ۴) مشتق‌پذیر از راست

حل: گزینه ۴ درست است. f در $x_\circ$ پیوسته است، کسر مشتق را تشکیل می‌دهیم.

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{|x - x_\circ|}{x - x_\circ} g(x) = \pm g(x_\circ)$$

پس $f'_+(x_\circ) = g(x_\circ)$ و $f'_-(x_\circ) = -g(x_\circ)$ پس مشتق راست و چپ همواره موجودند و لذا گزینه ۴ درست است. توجه کنید که اگر $g(x_\circ) = \circ$ آنگاه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر و اگر $g(x_\circ) \neq \circ$ نقطه $x_\circ$ زاویه‌دار است و بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ در حالت خاص برقرار بوده و نمی‌توان آنها را انتخاب نمود.

۴۳ **هرگاه به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم $f(x) - f(\circ) \leq x$ و مشتق f در $x = \circ$ موجود باشد، کدام گزینه صحیح است؟** (آمار ۷۸)

۱) تابع در $x = \circ$ دارای ماکزیمم نسبی است. ۲) تابع در $x = \circ$ دارای می‌نیمم نسبی است.
۳) تابع در $x = \circ$ دارای نقطه عطف است. ۴) هیچکدام

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا $f'(\circ)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $x > \circ$ آنگاه $\frac{f(x) - f(\circ)}{x} \leq ۱$ پس $f'_+(\circ) = \lim_{x \to \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x} \leq ۱$ و به طور مشابه برای $x < \circ$ داریم $\frac{f(x) - f(\circ)}{x} \geq ۱$ پس $f'_-(\circ) = \lim_{x \to \circ^-} \frac{f(x) - f(\circ)}{x} \geq ۱$ و چون f در $x = \circ$ مشتق‌پذیر است پس $f'(\circ) \leq ۱$ و $f'(\circ) \geq ۱$ یعنی $f'(\circ) = ۱$ و لذا $x = \circ$ نقطه غیر بحرانی و نمی‌تواند اکسترمم باشد. چون $f'(\circ) = ۱$ پس $y = x + f(\circ)$ معادله خط مماس بر نمودار f در $x = \circ$ است و چون $f(x) \leq x + f(\circ)$ نمودار f همواره زیر خط $y = x + f(\circ)$ است و بنا به نکته ۲۷ در صفحه ۱۵۵ تقعر f رو به پایین است پس $x = \circ$ نقطه عطف هم نیست.

۴۴. اگر $f(x) = (۵ + x^۲)e^{\sin x}$ حاصل $(f^{-۱})'(۵)$ برابر است با: (سیستم ۸۲)

۱) $\circ$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

حل: گزینه ۴ درست است. نقطه به طول ۵ روی $f^{-۱}$، نقطه به عرض ۵ روی نمودار f است و چون $f(\circ) = ۵$، پس باید $f'(\circ)$ را محاسبه کنیم.

$$f'(x) = \big(۲x + (۵ + x^۲)\cos x\big)e^{\sin x} \implies f'(\circ) = ۵ \implies (f^{-۱})'(۵) = \frac{۱}{f'(\circ)} = \frac{۱}{۵}$$

۴۵ **فرض کنید f روی $(\circ, +\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = L$. در مورد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ چه می‌توان گفت؟** (ریاضی ۷۶)

۱) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ موجود ولی $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ موجود نیست.
۲) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \circ$
۳) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = L$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \circ$
۴) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = \frac{L}{۲}$

حل: گزینه ۲ درست است. عبارت $f(x) + f'(x)$ را در e^x ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)+f'(x)=\frac{e^x(f(x)+f'(x))}{e^x}=\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\frac{\left(e^xf(x)\right)'}{(e^x)'}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^xf(x)\right)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=L$$

با توجه به قاعده هوپیتال از رابطه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^xf(x)\right)'}{(e^x)'}=L$ داریم $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=L$ پس $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ و لذا $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

۴۶. فرض کنید m و n اعداد طبیعی باشند، مقدار حد $\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) $\frac{m-n}{mn}$ ۲) $\frac{m-n}{2}$ ۳) $\frac{n-m}{2}$ ۴) حد ندارد

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به محاسبات تست ۹ در صفحه ۱۱۱ عبارت هم ارز $\frac{m-mx^n-n+nx^m}{mn(1-x)^2}$ است. حال از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\text{حد}=\lim_{x\to1}\frac{m-mx^n-n+nx^m}{mn(1-x)^2}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to1}\frac{-mnx^{n-1}+nmx^{m-1}}{-2mn(1-x)}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to1}\frac{-mn\left((n-1)x^{n-2}-(m-1)x^{m-2}\right)}{2mn}=\frac{-mn\left((n-1)-(m-1)\right)}{2mn}=\frac{m-n}{2}$$

۴۷. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **در این صورت:** (ریاضی ۸۲)

۱) $\forall x\in\mathbb{R}\quad,\quad f'(x)=0$

۲) $x\in\mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $f'(x)$ موجود نیست.

۳) به‌ازای یک $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)$ موجود است ولی $f''(x)$ موجود نیست.

۴) $f'(0)=0$

حل: گزینه ۴ درست است. تابع f به‌ازای $x\neq0$ تا هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و f' همه‌جا صفر نیست.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t\sin t}{e^{t^2}}\overset{\text{قوانین رشد}}{=\!=\!=}0$$

تذکر ۲. با محاسبه‌ای مشابه می‌توان دید که $f''(0)=0$ یعنی گزینه (۳) نادرست است.

۴۸ اگر تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و روی (a,b) اکسترمم نسبی نداشته باشد، آنگاه کدام یک از عبارات زیر در هر حال صحیح است؟ (شیمی نساجی ۸۲)

۱) f تابعی نزولی است. ۲) f تابعی صعودی است.

۳) f تابعی یک‌به‌یک است. ۴) نمی‌توان نتیجه‌ای از آن گرفت.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر f تابعی یک‌به‌یک نباشد، غیر یکنواست مثلاً در ابتدا صعودی و سپس نزولی است و چون وضع یکنوایی عوض می‌شود، دارای اکسترمم خواهد بود که امکان ندارد پس یک‌به‌یک است.(در واقع یکنوای اکید است.)

۴۹. در تابع با ضابطه $f(x)=\tan^{-1}x$ و $0<x\le 1$ بنابر قضیه مقدار میانگین مقدار $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ در کدام فاصله واقع است؟
(عمران ۷۵، هواشناسی کشاورزی ۷۶، هسته‌ای ۷۹)

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

حل: گزینه ۳ درست است. از قضیه مقدار میانگین برای فاصله $(0,x)$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\ ,\quad 0<c<x \implies \frac{\tan^{-1}x}{x}=\frac{1}{1+c^2}\quad \text{و}\quad 0<c<x\le 1$$

و چون $2>1+c^2>1$ پس $1>\frac{1}{1+c^2}>\frac{1}{2}$ و لذا $\frac{\tan^{-1}x}{x}\in(\frac{1}{2},1)$.

۵۰. مشتق ششم تابع $f(x)=x^2\sin x$ در $x=\pi$ برابر است با:

۱) 6π ۲) -6π ۳) -12π ۴) 12π

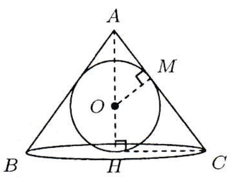
حل: گزینه ۳ درست است. می‌توان مانند تست ۳۶ در صفحه ۱۴۷ این سؤال را حل نمود. اما توجه کنید که با تغییر متغیر $x=\pi+t$ کافی است مشتق ششم $g(t)=f(t+\pi)=(t+\pi)^2\sin(t+\pi)=-(t^2+2\pi t+\pi^2)\sin t$ در $t=0$ محاسبه گردد. پس باید ضریب t^6 را در بسط مک‌لورن $g(t)$ محاسبه نماییم.

$$g(t)=-(t^2+2\pi t+\pi^2)(t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{120}t^5+\cdots)\implies t^6\ \text{ضریب}=-\frac{\pi}{60}$$

$$\implies g^{(6)}(0)=(-\frac{\pi}{60})\times 6!=-12\pi$$

۵۱ بر کره به شعاع R مخروط قائم دواری محیط می‌کنیم. ارتفاع مخروط چقدر باشد تا حجم آن می‌نیمم گردد؟

۱) $5R$ ۲) $2R$ ۳) $4R$ ۴) $3R$



حل: گزینه ۳ درست است. شعاع قاعده و ارتفاع مخروط را r و h می‌گیریم. اگر از مرکز کره یعنی نقطه O بر AC عمود کنیم دو مثلث OAM و AHC متشابه هستند (زیرا هر دو قائم‌الزاویه بوده و در یک زاویه یعنی HAC مشترک می‌باشند) حال نسبت تشابه را در این دو مثلث می‌نویسیم.

$$\frac{OM}{HC}=\frac{AM}{AH}\implies \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{(h-R)^2-R^2}}{h}=\frac{\sqrt{h^2-2Rh}}{h}\implies r^2=\frac{R^2h^2}{h^2-2Rh}=\frac{R^2h}{h-2R}$$

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi R^2}{3}\,\frac{h^2}{h-2R}\implies V'=\frac{\pi R^2}{3}\,\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}=\frac{\pi R^2}{3}\,\frac{h^2-4Rh}{(h-2R)^2}=0\implies h=4R$$

ضمناً مقدار می‌نیمم حجم مخروط $V(4R)=\frac{8\pi}{3}R^3$ و شعاع قاعده آن $r=\sqrt{2}R$ می‌باشد.

خودآزمایی ۳ ــ سطح ۱

۱. مقدار مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) وجود ندارد.

۲. اگر برای $x\geq 0$ داشته باشیم $2x\leq f(x)\leq x^2+1$ مقدار $f'(1)$ برابر است با: (آمار ۸۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳. فرض کنید f بر $(-1,1)$ به صورت $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\,,\ x\neq 0\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\,,\ x=0\end{cases}$ تعریف شود. در این صورت تابع $g(x)=x^2f(x)$ بر بازه $(-1,1)$: (ریاضی ۷۶)

۱) در همه جا مشتق دارد. ۲) فقط در اعداد اصم (گنگ) مشتق دارد.

۳) فقط در اعداد گویا مشتق دارد. ۴) فقط در صفر مشتق دارد.

۴. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع و $f'(a)$ موجود باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) صفر ۲) $f'(a)$ ۳) $2f'(a)$ ۴) $3f'(a)$

۵. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}ax+b & x<-1\\ x^2+a & x\geq -1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، b کدام است؟ (صنایع غذایی، آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۲ ۴) ۳

۶. مشتق عبارت $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}$ کدام است؟ (مکانیک و مهندسی پزشکی ۷۶)

۱) $\operatorname{Arccos}\frac{x}{2}$ ۲) $\tan^{-1}\frac{x}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\tan\frac{x}{2}}}$ ۴) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

۷. مقدار مشتق عبارت $\sinh^2 2x$ در $x=1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $2e^2-e^{-2}$ ۲) $2e^4-e^{-4}$ ۳) e^2-e^{-2} ۴) e^4-e^{-4}

۸. اگر $f(x)=\cot^{-1}(\ln x)$، مقدار $f'(e^2)$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۷)

۱) $-\frac{1}{5}e^{-2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}e^2$ ۴) $\frac{1}{2}e^{-2}$

۹. اگر $y=\cosh^{-1}\left(\frac{3}{x^2}\right)$ مقدار $y'(1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

۱) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۱۰. اگر $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ و $x=\tan 2t$ مقدار $\dfrac{dy}{dt}$ به ازای $t=\frac{\pi}{6}$ چقدر است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱. مشتق تابع $y=\ln(\tanh\frac{x^۲}{۴})$ برابر است با: (ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\cosh x^۲}{x}$ ۲) $\frac{\sinh x^۳}{x^۲}$ ۳) $\frac{\sinh x^۲}{x}$ ۴) $\frac{x}{\sinh\frac{x^۲}{۲}}$

۱۲. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\sqrt{۳}$ آنگاه مشتق تابع $f(۱+۲\sin x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۱۳. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sqrt{e^{-x}}$ مقدار مشتق $f(\ln x)$ به ازای $x=۴$ چقدر است؟ (مخازن ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۴. تابع دو شاخه $f(x)=\begin{cases}-x & x\leq ۰\\ \sin x & x>۰\end{cases}$ (شیمی نساجی ۸۱)

۱) در تمام نقاط مشتق‌پذیر است. ۲) در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

۳) در فاصله $[۰,۲\pi]$ مشتق‌پذیر است. ۴) جز در یک نقطه همه جا مشتق‌پذیر است.

۱۵. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد که $g(x)=f\big(\sin ۲x f(x)\big)$ حاصل $g'(۰)$ برابر است با:

۱) $f'(۰)$ ۲) $۲f'(۰)f(۰)$ ۳) $f'(۰)f(۰)$ ۴) $۲f'^۲(۰)$

۱۶. در کدام نقطه از خط $y=x-۱$ تابع $f(x,y)=\sqrt{|y||x-۱|}$ مشتق‌پذیر نیست؟ (ریاضی ۷۸)

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۰,-۱)$ ۴) $(۳,۲)$

۱۷. مشتق تابع $y=x^{\sin x}$ برابر است با: (معدن ۷۳)

۱) $y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$ ۲) $y'=y\left(\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

۳) $y'=y\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)$ ۴) $y'=y\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\ln x\right)$

۱۸. مشتق تابع $y=x^{\ln x}$ در نقطه $x=e$ کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری۷۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) e ۴) $e^۲$

۱۹. مشتق تابع $f(x)=(\tan x)^{\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۰. اگر $f(x)=\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}$ مقدار $f'(۱)$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۲۱. اگر $y=\frac{e^{۲x}+x}{x+۲}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟ (معدن ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۲. اگر $x^۳+y^۳=xy+۱$ و در همسایگی $(۱,۱)$، y تابعی از x باشد، مقدار $y'(۱)$ برابر است با: (ریاضی ۷۴)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۳. اگر $x^۵+۴xy^۳-y^۵=۲$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (معماری کشتی ۸۲)

۱) $\frac{۵x^۵+۳y^۲}{۵y^۲-۱۲xy}$ ۲) $\frac{۵x^۴+۴y^۳}{۵y^۴-۱۲xy^۲}$ ۳) $\frac{۵x^۴+۴y^۳}{۵y^۳-۱۲xy}$ ۴) $\frac{۵x^۴-۱۲xy^۲}{۵y^۴-۴y^۳}$

۲۴. مقدار $\frac{dy}{dx}$ از رابطه $\sqrt{y} = ۲x + \sqrt{xy}$ کدام است؟ (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{y - ۴\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$ ۲) $\frac{y + ۴\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$ ۳) $\frac{y - ۴\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$ ۴) $\frac{y + ۴\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$

۲۵. اگر $y = (۲x^۳ + ۳)^۲$ و $z = \ln x$، آنگاه $\frac{dy}{dz}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $۱۲x^۳(۲x^۳ + ۳)$ ۲) $۱۲x^۳(۲\ln x + ۳)$

۳) $۱۲(\ln x)^۳(۲x^۳ + ۳)$ ۴) $۱۲(\ln x)^۲(٦(\ln x)^۲ + ۱)$

۲۶. اگر $y = x^۲ - ۱$، $u = (x^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۳}}$ مقدار $\frac{du}{dy}$ در نقطه $x = ۳$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{٦}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷. اگر f تابعی زوج باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'_+(۰) = ۱$ آنگاه:

۱) f ممکن است در مبدأ مشتق‌پذیر باشد. ۲) f در مبدأ ممکن است ناپیوسته باشد.

۳) $f'_-(۰) = -۱$ ۴) تابع f در مبدأ دارای مماس باشد.

۲۸. شیب مماس بر $x^۳y + xy^۳ = ۱۰$ در نقطه $(۱, ۲)$ کدام است؟ (سیستم ۸۰)

۱) -٦ ۲) -۱۳

۳) $-\frac{۱۴}{۱۳}$ ۴) در این نقطه خط مماس وجود ندارد.

۲۹. معادله قائم بر نمودار $y = x - ۲\ln x$ در نقطه $x = ۱$ واقع بر آن کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $y = -x$ ۲) $y = ۱ - x$ ۳) $y = x$ ۴) $y = x + ۱$

۳۰. شیب خط قائم بر معکوس $f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۲٦}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر نمودار $f^{-۱}$ عبارت است از:

۱) -۹ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۱. معادله خط عمود بر منحنی $x^۲ - ۲x + y^۲ + ۱ = ۰$ که از نقطه $(۲, ۳)$ عبور می‌کند، کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۱$ ۲) $y = x + ۱$ ۳) $y = ۳x - ۳$ ۴) $y = -x + ۵$

۳۲. خط قائم بر نمودار $f(x) = \frac{۲}{x^۲ + ۱}$ در نقطه به عرض β، از مبدأ مختصات عبور می‌کند. کدام مقدار برای β به دست می‌آید؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۳۳. زاویه بین دو نیم مماس تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & |x| \leq ۱ \\ |x - ۱| & |x| > ۱ \end{cases}$ در نقطه $(۱, ۰)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۴. فرض کنید تابع f دو بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت f'' زوج است به شرط اینکه .... (ریاضی ۸۲)

۱) f زوج باشد. ۲) f فرد باشد. ۳) f و f' زوج باشد. ۴) f و f' فرد باشد.

۳۵. اگر تابع g دوبار مشتق‌پذیر باشد و $f(x) = g(\cos x)$ و $g'(۱) = ۲$. مقدار $f''(۰)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۳٦. اگر $x = t - t^۲$ و $y = t - t^۳$ آنگاه $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ به ازای $t = ۱$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ۷٦)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷. از رابطه $x^2 + y^2 - y = 0$ مقدار y'' در مبدأ مختصات کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۳۸. اگر $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases}$، مقدار $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ در $t = \dfrac{\pi}{4}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۳۹. اگر $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 1$ حاصل $f''(0)$ برابر است با:

۱) $-\dfrac{1}{12}$ ۲) $-\dfrac{1}{3}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{1}{3}$

۴۰. مشتق n ام چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ می‌شود: (معماری کشتی ۷۸)

۱) n ۲) $a_n n!$ ۳) $a_0 \cdots a_n n$ ۴) $n!$

۴۱. چنانچه $y = \cos x$ باشد آنگاه $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$ ۲) $\cos(x + n\pi)$ ۳) $\sin(x + n\pi)$ ۴) $\cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$

۴۲. تابع $f(x) = x - \sin x$ تابعی ... است.

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) نامنفی ۴) نه‌صعودی و نه نزولی

۴۳. تابعی با کدام ضابطه، نزولی و یک‌به‌یک است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $y = -x^2$ روی $\mathbb{R}$ ۲) $y = e^{-x}$ روی $\mathbb{R}$

۳) $y = -e^{\sin x}$ روی $\mathbb{R}$ ۴) $y = \ln|x|$ روی $x > 1$

۴۴. تابع $f(x) = xe^x - 1$ مفروض است: (مدیریت صنایع ۷۲)

۱) $f(x)$ در $[0, 1]$ دارای ریشه نیست. ۲) $f(x)$ در $[0, 1]$ حداقل دارای دو ریشه است.

۳) $f(x)$ در $[0, 1]$ فقط دارای یک ریشه است. ۴) هیچکدام

۴۵. معادله $x^5 + x^3 - 1 = 0$ در کدام فاصله زیر دارای یک ریشه حقیقی است؟ (مکانیک ۷۰)

۱) $[-1, 0]$ ۲) $[-1, 1]$ ۳) $[1, 3]$ ۴) $[3, 5]$

۴۶. معادله $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$ در کدام فاصله فاقد ریشه است؟ (آمار ۸۲)

۱) $(1, +\infty)$ ۲) $(2, +\infty)$ ۳) $(3, +\infty)$ ۴) $(4, +\infty)$

۴۷. تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = x - \tan x = 0$ بر بازه $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ چند تاست؟ (ریاضی ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۸. مختصات مینیمم $y = (x + 1)e^x$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $x = 0$ و $y = 2e$ ۲) $x = -1$ و $y = 0$ ۳) $x = -2$ و $y = -\dfrac{1}{e^2}$ ۴) $x = 2$ و $y = 3e^2$

۴۹. طول نقطه مینیمم تابع $y = \dfrac{x^2}{4} - \ln(x - 1)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. در نقطه بحرانی، تابع $y = 2xe^{4x}$ کدام وضع را دارد؟

۱) بازگشت ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) ماکزیمم

۵۱. مقدار تابع $y = xe^{-x}$ در نقطه بحرانی چگونه است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\dfrac{1}{e}$ و ماکزیمم ۲) $\dfrac{1}{e}$ و مینیمم ۳) e و ماکزیمم ۴) e و مینیمم

۵۲. نقطه $x=0$ برای تابع $f(x)=x^2-x^2\cos x$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) عطف ۲) زاویه‌دار ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

۵۳. تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ در بازه $(0,1)$ چگونه است؟

۱) همواره رو به بالا ۲) ابتدا به بالا، بعد به پایین

۳) همواره رو به پایین ۴) ابتدا رو به پایین، بعد رو به بالا

۵۴. طول نقطه عطف منحنی تابع $y=xe^{-2x}$ کدام است؟ (مکانیک ماشینهای کشاورزی ۷۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۵۵. تعداد نقاط عطف منحنی تابع $y=x^2e^{-x}$ در فاصله $(0,+\infty)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۵۶. به ازای کدام مقدار a نمودار تابع با ضابطه $y=xe^{ax}$ در نقطه $x=2$ تغییر انحنا می‌دهد؟ (هوافضا ۸۱)

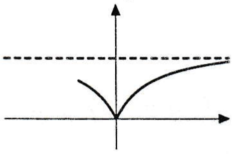
۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۵۷. اگر $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در این‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) مبدأ نقطه عطف است. ۲) مبدأ نقطه ماکزیمم نسبی است.

۳) در مبدأ جهت تقعر f عوض می‌شود. ۴) حد f در مبدأ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

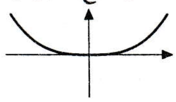
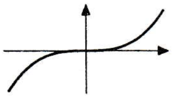
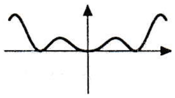
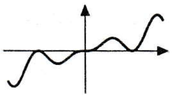
۵۸. ضابطه نمودار مقابل کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)



۱) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ ۲) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

۳) $y=\dfrac{|x|}{|x|+1}$ ۴) $y=\dfrac{|x|}{|x|-1}$

۵۹. مشتق تابع f برابر $x^3\cos^6 x$ و $f(0)=0$. کدامیک از اشکال زیر به نمودار f نزدیکتر است؟ (فلسفه ۸۲)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۶۰. اگر g' به ازای هر مقدار حقیقی موجود باشد و $g(a)=g(b)=g(c)=0$ که $a<b<c$، معادله $g'(x)=0$ حداقل چند جواب حقیقی دارد؟ (ریاضی ۷۴)

۱) هیچ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۶۱. تابع f با ضابطه $f(x)=|x|-1$ بر کدام بازه در شرایط قضیه میانگین صدق نمی‌کند؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $[-2,-1]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-100,-1]$

۶۲. مقدار c در قضیه میانگین در تابع با ضابطه $f(x)=x^3-2x^2+1$ در بازه $[-1,2]$ چیست؟ (عمران ــ آزاد ۸۰)

۱) $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ ۲) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ ۳) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{4}$

۶۳. تعداد نقاط c در قضیه مقدار میانگین برای $f(x)=x^3$ روی بازه $[-2,1]$ برابر است با:

۱) 0 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 3

۶۴. فرض کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، $f(۲) = -۳$ و به ازای هر $x \in (۲,۵)$، $۱ < f'(x) < ۲$. در این صورت $f(۵)$ به کدام بازه تعلق دارد؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $(۰,۳)$ ۲) $[۱,۳)$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $(۰,۱]$

۶۵. اگر تابعی مشتق‌پذیر در a باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ کدام است؟ (ریاضی و آمار ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $af(a)$ ۴) $f(a)-af'(a)$

۶۶. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲^{-x}-۴^{-x}}{x}$ کدام است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) $-\ln ۲$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\ln ۲$

۶۷. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{۱-\cos ۲x}{x^۲-\pi^۲}$ کدام است؟ (هوافضا ــ آزاد ۸۱)

۱) ۰ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}$

۶۸. حد عبارت $\dfrac{\ln(۳x-۲)}{x^۲+۴x-۵}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۹. اگر n عددی طبیعی باشد $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^n+x^{n-۱}+\cdots+x-n}{\sin(x^۲-۱)}$ برابر است با:

۱) $\dfrac{n}{۴}$ ۲) $\dfrac{n+۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{n(n+۱)}{۲}$ ۴) $\dfrac{n(n+۱)}{۴}$

۷۰. مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{(\frac{\pi}{۲}-x)^۲}$ کدام است؟ (آمار ۸۲)

۱) ۰ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۷۱. اگر f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد،آنگاه f در این فاصله دارای (مدیریت نساجی ۸۲)

۱) ماکزیمم و می‌نیمم مطلق است.
۲) فقط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.
۳) فقط یا ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی است.
۴) چیزی نمی‌توان در مورد آن گفت.

۷۲. می‌نیمم مطلق تابع $\forall x\in\mathbb{R}$ ،$f(x)=\cosh x$ (معدن ۷۷، عمران ۷۹)

۱) برابر یک می‌باشد. ۲) وجود ندارد. ۳) برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. ۴) برابر ۲ می‌باشد.

۷۳. مقدار ماکزیمم تابع با ضابطه $y=xe^{-x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) $-e$ ۲) $-\dfrac{۱}{e}$ ۳) $\dfrac{۱}{e}$ ۴) e

۷۴. ماکزیمم تابع $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>۰)$ کدام است؟ (آمار ۸۱)

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{e}}$ ۲) $\dfrac{۱}{e}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e

۷۵. فاصله نزدیک‌ترین نقاط منحنی به معادله $x^۲=۲y+۳$ تا مبدأ مختصات برابر کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۶. به فرض اینکه تابع تقاضا برای یک واحد صنعتی به‌صورت $p=۸/۲۵e^{-۰/۰۲q}$ باشد که در آن q و p به ترتیب میزان و قیمت فروش می‌باشند. حساب کنید در چه سطح از فروش، درآمد صنعتی حداکثر می‌گردد؟ (سیستم ۷۸)

۱) $q=۳۷$ ۲) $q=۳۹$ ۳) $q=۵۰$ ۴) $q=۵۵$

۷۷. بزرگ‌ترین مساحت زمین مستطیلی شکلی را که بتوان با ۲۰۰ متر حصار محصور کرد، کدام است؟

(ژئوفیزیک ۷۹)

۱) ۲۸۰۰۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۲۶۰۰ ۴) ۲۷۰۰

۷۸. در کنار یک رودخانه مستقیم می‌خواهیم قطعه زمینی مستطیلی شکل را با مساحت ۳۲۰۰ متر مربع محصور کنیم. با شرط کمترین طول محصور از سه طرف، عرض مستطیل کدام است؟ (صنایع غذایی، آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) ۳۲ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۴

۷۹. طول وتر یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع x و y برابر $\sqrt{۵}$ است. بیشترین مقدار $x+y$ کدام است؟

(ژئوفیزیک ۸۰)

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۸۰. ارتفاع مخروطی که در کره به شعاع واحد با حجم ماکزیمم محاط شده است، چقدر است؟ (ریاضی ۷۴)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۸۱. اندازه حجم مخروط با حجم ماکزیمم محاط در کره با شعاع R را به دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{۲۴\pi}{۲۷}R^۳$ ۲) $\frac{۳۲\pi}{۸۱}R^۳$ ۳) $\frac{۲۴\pi}{۲۷}R^۲$ ۴) $\frac{۳۲\pi}{۸۱}R^۲$

۸۲. چنانچه $\sqrt{y}+\sqrt{x}=۵$ و $\frac{dy}{dt}=۳$ باشد، هنگامیکه $x=۱$ می‌باشد $\frac{dx}{dt}$ کدام است؟

(شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۳. نقطه‌ای بر روی دایره $x^۲+y^۲=۱۳$ متحرک است در نزدیکی نقطه $p(۲,-۳)$ تصویر سرعت بر محور y ها، $\frac{dy}{dt}=۰/۴$ است، مقدار $\frac{dx}{dt}$ در این نقطه کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۸۴. نردبانی که طول آن ۱۳ متر است کنار دیوار قرار دارد. در لحظه‌ای که سر نردبان از زمین ۱۲ متر فاصله دارد و پای نردبان از دیوار ۵ متر فاصله دارد، پای نردبان با سرعت ۳ متر در ثانیه از دیوار دور می‌شود. سر نردبان با چه سرعتی حرکت می‌کند؟ (MBA ۸۱)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۸۵. مثلث متساوی الساقین به ارتفاع $۳cm$ و قاعده $۵cm$ در نظر بگیرید. اگر در لحظه‌ای ارتفاع این مثلث با سرعت $۲\frac{cm}{s}$ بزرگ و قاعده آن با سرعت $۱\frac{cm}{s}$ کوچک شود، مساحت مثلث با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

(هوافضا — آزاد ۸۱)

۱) $۲\frac{cm^۲}{s}$ ۲) $۳/۵\frac{cm^۲}{s}$ ۳) $۵/۴\frac{cm^۲}{s}$ ۴) $-۱/۵\frac{cm^۲}{s}$

۸۶. آب با سرعت ثابت ۲ متر مکعب در ثانیه، وارد مخزن مخروطی شکل می‌شود. رأس مخروط به طرف پایین و قطر قاعده برابر ارتفاع آن است. وقتی عمق آب به ۶ متر برسد سطح آب با چه سرعتی بالا می‌رود؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۳\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۶\pi}$ ۴) $\frac{۲}{۹\pi}$

۸۷. S مساحت یک حلقه دایره‌ای با شعاع داخلی $\frac{r}{۳}$ و شعاع خارجی r است در زمانی که شعاع حلقه $r = ۳$ است، شعاع $\frac{۱}{۴\pi}$ تغییر می‌کند، تغییرات مساحت چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۸۸. پولی را در نظر بگیرید که در هر ۸ سال ۵ برابر شود. فرض کنید که صاحب پول به این پول واگذاری تا ۲۴ سال دست نزند. اگر در پایان ۲۴ سال ۱۰۰۰۰ واحد پول به صاحب پول بدهند، اصل پول شخص چقدر بوده است؟

(سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) ۸۰ واحد پول ۲) ٦٦٦/٦٧ واحد پول ۳) ۲۰۰۰ واحد پول ۴) ۴۰۰ واحد پول

۸۹. در نقطه $x = -۱$ نسبت تغییرات عبارت $x^۲ - \sqrt[۳]{x}$ به تغییرات عبارت $۷x + ۴$ چقدر است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۰. میزان تغییرات $\sqrt{x^۲ + ۱٦}$ نسبت به تغییر $\frac{x}{x - ۱}$ در نقطه $x = ۳$ چقدر است؟ (آبیاری و زه‌کشی، ۸۲)

۱) $-\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

خودآزمایی ۳ ـ سطح ۲

۱. تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^{5} - 5x + 1 = 0$ برابر است با: (ریاضی ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲. ماکسیمم تابع $f(x) = \frac{1}{1+|x-2|} + \frac{1}{1+|x|}$ و $x \in \mathbb{R}$ کدام است؟ (آمار ۸۲)

۱) $\frac{8}{7}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۳. اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، α در کدام نامساوی صدق می‌کند؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $\alpha > 1$ ۲) $\alpha < 0$ ۳) $|\alpha| > 1$ ۴) $|\alpha| < 1$

۴. تعداد نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^{2}}$ عبارت است از:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵. تابع $f(x) = \begin{cases} (1+2x^{2})^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ x+1 & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. $f'(0)$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد

۶. اگر $f(x) = \tan^{-1} \frac{x+1}{x-1} + \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1}$ حاصل $f'(x) + f(x)$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر است با:

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\pi$

۷. بر مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۳ متر یک دایره محیط شده است. اضلاع این مثلث با سرعت یک متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. با فرض آنکه دایره نیز طوری بزرگ شود که همواره محیط بر مثلث باقی بماند، سرعت افزایش مساحت دایره چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) 6π ۳) 2π ۴) π

۸. فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \begin{cases} x^{2} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ تعریف شود. در این صورت کدام گزینه درست است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) $f'(0) = 0$ و f' در صفر پیوسته است.
۲) $f'(0) = 0$ ولی f' در صفر پیوسته نیست.
۳) $f'(0)$ وجود دارد و مخالف صفر است.
۴) $f'(0)$ وجود ندارد.

۹. x و y دو متغیر مثبت هستند به طوریکه $x^{3}y^{4} = e^{4}$، حداکثر مقدار حاصلضرب $\ln x$ و $\ln y$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{e}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰. آب با آهنگ $\frac{\pi}{4}$ واحد مکعب در هر ثانیه وارد مخزن مخروطی وارونه شکل به ارتفاع ۱۲ واحد و شعاع قاعده ۴ واحد می‌شود. سرعت افزایش ارتفاع آب در مخزن وقتی ارتفاع آب ۶ واحد باشد، کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۱. تابع $f(x) = |x\cos x|$ در کدام‌یک از نقاط زیر دارای مشتق است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) ۰ ۴) در هر سه نقطه فاقد مشتق است.

۱۲. از کدامیک از نقاط زیر دو مماس عمود بر هم بر سهمی $۴y = x^۲ + ۴$ می‌توان رسم کرد؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۰,۰)$ ۴) $(۰,-۲)$

۱۳. حاصل $\lim_{x\to ۱^-} \frac{\text{Arccos}\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x^۲}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۴. حداقل مقدار تابع $f(x) = ۳^{\sin^۲ x} + ۳^{\cos^۲ x}$ برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۵. اگر $-\frac{\pi}{۳} \le x\ ,\ y \le \frac{\pi}{۶}$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر تخمین بهتری برای $|\tan x - \tan y|$ است؟

۱) $|\tan x - \tan y| \le ۲|x-y|$ ۲) $|\tan x - \tan y| \le \frac{۴}{۳}|x-y|$

۳) $|\tan x - \tan y| \le ۴|x-y|$ ۴) $\frac{۴}{۳}|x-y| \le |\tan x - \tan y|$

۱۶. زاویه بین نمودارهای $y = \cos ۲x$ و $y = ۲\sin^۲ x$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) به طول نقطه برخورد وابسته است.

۱۷. از رابطه $y = \sin(x + \sin(x + \sin(\cdots)))$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(\pi, ۰)$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۸. ماکزیمم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه‌ای که طول وتر آن یک سانتی‌متر می‌باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹. معادله $\frac{e^x}{x^۳} = ۱$ چند ریشه منفی دارد؟ (ریاضی ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰. نقطه $x = ۰$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \ne ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) زاویه‌دار ۲) ماکزیمم نسبی ۳) مینیمم نسبی ۴) بازگشت

۲۱. نقطه $x = ۰$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} \cos ۲x & x \ge ۰ \\ x^۲ + ۱ & x < ۰ \end{cases}$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) عطف ۲) ماکزیمم نسبی ۳) می‌نیمم نسبی ۴) غیر بحرانی

۲۲. استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h را درنظر می‌گیریم. حجم این استوانه ۱ متر مکعب می‌باشد. ارتفاع این استوانه را چنان تعیین کنید که سطح کل استوانه مینیمم باشد. (عمران ۷۶)

۱) $۲/۷m$ ۲) $۲/۱۶m$ ۳) $۱/۰۸m$ ۴) $۰/۵۴m$

۲۳. اگر $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ و $g(x) = (x^{۲} - ۱)f(x)$ و $h = \max(f,g) + \min(f,g)$، کدام گزینه درست است؟

۱) h در صفر مشتق ناپذیر است.
۲) $h'_{+}(۰) = ۱$
۳) $h''_{-}(۰) = -۲$
۴) h در صفر ناپیوسته است.

۲۴. می‌دانیم $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x \in (۰,۱)$ داریم $f''(x) \neq ۰$، اگر $f(۰) = f(۱) = ۰$ آنگاه: (ریاضی ۷۴)

۱) f در $(۰,۱)$ حداقل یک ریشه دارد.
۲) f در $(۰,۱)$ ریشه ندارد.
۳) f' در $(۰,۱)$ دارای دو ریشه متمایز است.
۴) f' در $(۰,۱)$ مخالف صفر است.

۲۵. تابع f روی $\mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر الزاماً f'' دارای حداقل دو ریشه است؟

۱) f در سه نقطه متمایز صفر شود.
۲) f در دو نقطه متمایز بر $y = ۳$ مماس شود.
۳) f در دو نقطه متمایز اکسترمم شود.
۴) f و f' هر یک دارای دو ریشه باشند.

۲۶. هرمی با قاعده مربعی به طول ضلع ۴ متر و ارتفاع ۱۰ متر مفروض است. طول ضلع مربع را با آهنگ ۰/۰۴ متر بر ثانیه افزایش داده و همزمان ارتفاع را با آهنگ ۰/۰۱ متر بر ثانیه کاهش می‌دهیم. در لحظه‌ای که حجم هرم اکسترمم می‌شود، نسبت طول ضلع مربع به ارتفاع برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۴
۴) ۸

۲۷. کره‌ای به شعاع b مفروض است. استوانه‌ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h قرار است در این کره محاط کنیم مقادیر R و h ای که بزرگترین حجم را برای استوانه حاصل خواهند ساخت، برابرند با: (سیستم ـ آزاد ۸۱ و ۸۲)

۱) $R = b\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ و $h = \frac{۲b}{\sqrt{۳}}$
۲) $R = b\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ و $h = \frac{۳b}{\sqrt{۲}}$
۳) $R = b\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ و $h = \frac{۳b}{\sqrt{۲}}$
۴) $R = b\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ و $h = \frac{۲b}{\sqrt{۳}}$

۲۸. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است که برای هر x داریم $f'(x) \leq ۱$. چنانچه $f(۴) = ۴$ و $f(-۳) = -۳$، مقدار $f(۰)$ برابر خواهد بود با:

۱) ۲
۲) صفر
۳) -۲
۴) اطلاعات کافی نیست.

۲۹. قسمتی از نمودار $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+۱}$ که در ربع اول قرار دارد را در نظر می‌گیریم. از نقطه دلخواه $M(x,y)$ روی نمودار، خطوطی عمود بر محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا محورهای x و y را به ترتیب در A و B قطع کند. کدام گزینه در مورد اکسترمم مساحت مستطیل $OAMB$ درست است؟

۱) ماکزیمم مساحت به ازای $x = \frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}$ حاصل می‌شود.
۲) می‌نیمم مساحت به ازای $x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به دست می‌آید.
۳) ماکزیمم مساحت به ازای $x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ حاصل می‌شود.
۴) می‌نیمم مساحت به ازای $x = \frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}$ به دست می‌آید.

۳۰. زاویه خط مماس بر نمودار $f(x)=\ln(x+e^{۲x})$ و خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در مبدأ مختصات با یکدیگر کدام است؟

۱) $\tan^{-۱} ۳$ ۲) $\tan^{-۱} \frac{۴}{۳}$ ۳) $\tan^{-۱} \frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۱. چنانچه $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{a\cos x+be^{-x}+ce^{۲x}}{\ln(۱+۲x^{۲})}=۳$ مقدار b برابر است با:

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) صفر ۴) مقداری به دست نمی‌آید.

۳۲. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}} (\sin ۳x)^{\tan ۳x}$ کدام است؟

۱) $e^{-۱}$ ۲) e ۳) ۱ ۴) -۱

۳۳. در یک لوزی به طول ضلع یک و زاویه رأس θ $(۰<\theta<\frac{\pi}{۲})$ مستطیلی با حداکثر مساحت محاط کردیم. مساحت مستطیل برابر است با:

۱) $\cos\theta$ ۲) $\frac{۱}{۳}\sin\theta$ ۳) $\sin\theta$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sin\theta$

۳۴. با فرض $x\geq ۰$ در تابع $y=۲^{x^{۴}-۴x^{۲}+۱۲}$، y با کدام x کمترین مقدار خود را دارد؟ (فیزیک پزشکی ۸۱)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) صفر ۴) ۲

۳۵. کدامیک از مقادیر زیر تقریب بهتری برای $\frac{۱}{(۱۰/۱)^{۱۰}}-\frac{۱}{۱۰^{۱۰}}$ است؟ (فلسفه ۸۲)

۱) $۱۰^{-۲۰}$ ۲) $۱۰^{-۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۱۲}$ ۴) $۱۰^{-۱۱}$

۳۶. اگر $f(x)=\tan^{-۱}\frac{\cos x}{۱+\sin x}$ برای $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ آنگاه $f'(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۷. معادله $x^{۶}+x^{۴}+x^{۲}-۱=۰$ دارای چند ریشه حقیقی است؟ (حفاری ۷۹)

۱) ۶ ریشه ۲) ۴ ریشه ۳) ۲ ریشه ۴) ریشه حقیقی ندارد.

۳۸. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \frac{\ln(x-۱)}{\cot \pi x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۳۹. f تابعی نزولی اکید است. تعداد نقاط ماکزیمم $y=f(|x^{۲}-x|)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) باید ضابطه f مشخص باشد.

۴۰. بر دایره به شعاع R یک لوزی با محیط می‌نیمم محیط می‌کنیم. محیط این لوزی برابر است با:

۱) $۴R$ ۲) $۶R$ ۳) $۸R$ ۴) $۱۲R$