

سوال ۱- با استفاده از روش سری‌ها فقط یک جواب از معادله‌ی زیر را حول  $x_0 = 0$  بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$xy'' - 2y = 0$$

سوال ۲- دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار ویژه حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X$$

سوال ۳- دستگاه معادلات غیر همگن زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار ویژه حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^t \\ -3e^t \end{bmatrix}$$

سوال ۴- معادله‌ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 2y' + 2y = u_1(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

سوال ۵- تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$f(x) = u_{\frac{\pi}{2}}(x)e^{2x} \sin x$$

سوال ۶- تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$f(x) = \int_0^x \sin^3 x dx$$

سوال ۷- فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع  $f(x)$  برابر  $F(s)$  باشد. در این صورت تبدیل لاپلاس تابع  $g(x) = (\cosh x)f(x)$  را بر حسب  $F(s)$  بدست آورید. (۱۰ نمره)

سوال ۱-الف) تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بیابید. (۱۰ نمره)

$$F(s) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

(ب) به کمک الف تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بیابید. (۱۰ نمره)

$$G(s) = \frac{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)}{2^s}$$

سوال ۲- معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۳۰ نمره)

$$y'' + y' = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ -1 & \frac{\pi}{4} \leq x < \pi \end{cases} \quad f(x + \pi) = f(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) = -2$$

سوال ۳- معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$e^{-x} = y(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$$

سوال ۴- دستگاه معادلات زیر را حل کنید (۲۰ نمره).

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

سوال ۵- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

الف) جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را بیابید. (۱۵ نمره)

ب) با روش تغییر پارامتریک جواب خاص دستگاه معادله‌ی غیر

همگن را یافته و سپس جواب عمومی دستگاه را بنویسید. (۱۵ نمره)

سوال ۱- دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار

ویژه حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

سوال ۲- دستگاه معادلات غیر همگن زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه- بردار ویژه و تغییر پارامتر حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

سوال ۳- معادله‌ی با شرط اولیه‌ی زیر را به روش سری‌های توانی حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 2xy' + y = 3x - 4 \quad y(1) = y'(1) = 0$$

سوال ۴- معادله‌ی انتگرالی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$e^x y(x) = xe^{-x} + \int_0^x y(u) e^u \cos(x-u) du$$

سوال ۵- معادله‌ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$xy'' + (x-1)y' - y = 0 \quad y(0) = 5$$

سوال ۱- جواب خصوصی دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه- بردار ویژه بدست آورید. (۳۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوال ۲- ماتریس  $e^{At}$  را بدست آورید هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . (۱۰ نمره)

سوال ۳- یک جواب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به روش سری‌های توانی حول  $x_0 = 1$  حل کنید. (۲۰ نمره)

$$(x-1)^2 y'' - (2x^2 - 5x + 3)y' + (x^2 - 3x + 1)y = 0$$

سوال ۴- نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع  $f(x) = \frac{e^{-ax} \cos(bx) - e^{-px} \cos(qx)}{x}$  برابر با  $F(s) = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{(s+p)^2 + q^2}{(s+a)^2 + b^2}\right)$  می باشد. (۲۰ نمره)

سوال ۵- معادله‌ی انتگرالی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y' - \int_0^x \sin(x-t)y'(t)dt = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2\pi \\ \cos x & x \geq 2\pi \end{cases} \quad y(0) = 0$$

سوال ۵- الف) مقدار انتگرال ناسره‌ی زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{4}\right)^x dx$$

سوال ۱- دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار ویژه حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

سوال ۲- دستگاه معادلات غیر همگن زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار ویژه و تغییر پارامتر حل کنید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

سوال ۳- معادله‌ی با شرط اولیه‌ی زیر را به روش سری‌های توانی حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 2xy' + y = 3x - 4 \quad y(1) = y'(1) = 0$$

سوال ۴- معادله‌ی انتگرالی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$e^x y(x) = x e^{-x} + \int_0^x y(u) e^u \cos(x-u) du$$

سوال ۵- معادله‌ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$xy'' + (x - 1)y' - y = 0 \quad y(0) = 5$$


---

سوال ۱- جواب عمومی دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش مقدار ویژه-بردار ویژه بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X$$

سوال ۲- جواب عمومی دستگاه معادلات غیر همگن زیر ب کمک روش تغییر پارامتر بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (20 \text{ نمره})$$

سوال ۴- معادله‌ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + y' = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

سوال ۵- معادله‌ی انتگرالی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y' - \frac{1}{\pi} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = f(x) = -x - \delta(x - \pi), \quad y(0) = 1$$

$$y' - \frac{1}{\pi} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2\pi \\ \cos x & x \geq 2\pi \end{cases} \quad y(0) = 0$$


---

سوال ۵- جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به روش سری‌های توانی حول  $x_0 = 1$  بدست آورید (توجه محاسبه ضرایب حداقل ۵ جمله اول جواب ضروری است). (۲۰ نمره)

$$y'' + x^2 y' - y = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$$

به روش سری ها جواب خصوصی معادله مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$x^2 y'' - (x+x^3) y' + (1+2x^2) y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

سوال ۱ - معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$e^{2x} y'(x) = e^x - 2 \int_0^x e^{2u} y(u) du \quad y(0) = 0$$

سوال ۲ - معادله تفاضلی زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + y = g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -2$$

سوال ۳ - تبدیل لاپلاس تابع  $f(x)$  را بیابید.

$$\frac{f(x)}{x} = \int_x^{2x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

سوال ۴ - دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سوال ۵ - بزرگ سری جواب معادله مقدار اولیه زیر را بیابید (حاصل پنج جمله اول جواب - مشخص کردید).

$$(x^2 - 2x - 3) y'' + (1+x) y' + 4xy = x^3 + 1$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 2$$

فرض کنید  $y''$  موجود و معادله زیر در اختیارتان است. جواب عمومی آن را بیابید.

$$y'(x) + 2y(x) + 2 \int_0^x y(t) dt = (2x+1)e^x$$

سوال ۱- جواب عمومی معادله  $y'' - y = x^2 + 1$  را به صورت سری توانی حول نقطه  $x=0$  بیابید. محاسبه ضرایب سری ها لازم است.

سوال ۲- (الف) لاپلاس وارون  $F(s) = e^{-s} \ln \frac{s^2+1}{s(s+1)}$  را بدست آورید.

(ب)  $f(x)$  یک تابع متناوبی با دوره تناوب  $\sqrt{3}$  است و برای  $0 \leq x \leq \sqrt{3}$

داریم  $f(x) = [x^2]$ . معادله  $y'' + y = f(x)$  را حل کنید.

سوال ۳- با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + y = U_{\frac{\pi}{2}}(x) \delta(x - \frac{\pi}{2}) + \int_0^x U_{\frac{\pi}{2}}(x-t) \cos t dt$$

سوال ۴- دستگاه زیر را با شرط اولیه  $x(0) = y(0) = 0$  حل کنید.

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + \sin t \\ y' = x - 2y + \tan t \end{cases}$$

سوال ۵- دستگاه  $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$  را حل کنید.

(الف) فرض کنید  $L[f(x)] = F(s)$  و مشتق  $F(s)$  موجود باشد. مطلوب است تبدیل لاپلاس

$$g(x) = x e^{ax} f(x) \quad \cdot \quad F(s)$$

(ب) تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.  $G(s) = \frac{3s^3 + 5s^2 - 1}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$

(الف) تبدیل معکوس لاپلاس  $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s(s+1)}$  را بدست آورید.

(ب) فرض کنید توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در  $[0, +\infty)$  همگانه و از رتبه نایب بوده و  $f'(x)$ ،  $f(x)$  و  $g'(x)$

در  $[0, +\infty)$  همگانه قطعه ای باشند. همچنین فرض کنید تبدیل لاپلاس  $f(x)$  و  $g(x)$  به ترتیب  $F(s)$  و  $G(s)$  بوده و  $f'(0) = 1$ ،  $g(0) = 3$ ،  $g'(0) = 8$ . مطلوب است محاسبه

تبدیل لاپلاس تابع زیر بر حسب  $F(s)$  و  $G(s)$ .  $h(x) = x e^{9x} (f'(x) + g''(x))$