



دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بسمه تعالی

تاریخ امتحان: ۹۷/۰۹/۰۵

امتحان میان ترم ریاضی ۱

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: math-teacher.blog.ir
شماره دانشجویی:
رشته تحصیلی:
نام استاد درس:

شماره سوال	نمره
۱	
۲	
۳	
۴	
۵	
جمع کل:	

تذکر: ۱- پاسخ هر سوال را روی صفحه جداگانه و به ترتیب بنویسید، در غیر این صورت پاسخ نامه تصحیح نخواهد شد.

۲- به هیچ وجه برگه ها را از محل دوخت جدا نکنید.

۳- از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی پاسخ نامه جداً خودداری شود.

۱- مقادیر $z \in \mathbb{C}$ صادق در معادله $\operatorname{Re}(z^2) + i \operatorname{Im}(\bar{z}(1+2i)) = -3$ را بیابید. (۱۰ نمره)

پاسخ : math-teacher.blog.ir

فرض کنیم $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$$\rightarrow z^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$$

$$\rightarrow \bar{z}(1+2i) = (x-iy)(1+2i) = x + 2xi - yi - 2yi^2$$

$$= x + 2y + (2x-y)i \rightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}(1+2i)) = 2x - y$$

حالتی در نظر
گرفته

$$x^2 - y^2 + (2x - y)i = -3 \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = \pm 1, y = \pm 2$$

(۱، ۲) و (-۱، -۲)

$$\rightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = -1 - 2i \end{cases}$$

ابراهیم شاه
ابراهیم شاه
ابراهیم شاه
ابراهیم شاه
ابراهیم شاه

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران

math-teacher.blog.ir

مدرس تخصصی ریاضیات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- تابع $f(x) = a \sin x - x + b$ را در نظر بگیرید که در آن $0 < a < 1$ و $b > 0$. نشان دهید معادله $f(x) = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد. (۱۰ نمره)

پاسخ : math-teacher.blog.ir

$$f(+\infty) = a \sin(+\infty) - \infty + b \xrightarrow[-1 \leq \sin(\infty) \leq 1, 0 < a < 1]{b > 0 \text{ اما بالاخره یکی در میان می‌آید}} f(\infty) = -\infty$$

$$f(-\infty) = a \sin(-\infty) + \infty + b \xrightarrow[\text{مثلاً به مثابه}]{\text{مثلاً به مثابه}} f(-\infty) = +\infty$$

با توجه به اینکه $f(+\infty)f(-\infty) < 0$ و تابع پیوسته است طبق قضیه بولزانو نتیجه می‌گیریم که معادله حداقل یک ریشه در بازه $(-\infty, \infty)$ دارد.

حالا فرض کنیم بیش از یک ریشه دارد، فرضاً ۲ ریشه $\leftarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$

بنابراین طبق قضیه رول $\leftarrow \exists c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(c) = 0$

$$f'(x) = a \cos x - 1 \xrightarrow{x=c} f'(c) = a \cos c - 1$$

با توجه به اینکه $-1 \leq \cos c \leq 1$ و $0 < a < 1$ بنابراین عبارت $a \cos c - 1 < 0$ یعنی همواره کمتر از ۰ است

پس عبارت $f'(c)$ همواره منفی و قائم ریشه نخواهد بود.

بنابراین فرض وجود ۲ ریشه باطل و معادله فقط ۱ ریشه دارد.

ابراهیم شاه ابراهیمی - ۹۷ از راه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} + (\sin x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

پاسخ : math-teacher.blog.ir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} + (\sin x)^{\frac{1}{x}} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}}_A + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}}}_B \right]$$

محاسبه A: $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = (\infty)^0$ به هم $\xrightarrow{\text{قوانین لانه}}$ $\ln(A) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$

قوانین لانه $\xrightarrow{\text{قوانین لانه}}$ $\ln(A) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sin x \cdot \ln(x) = 0 \times \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

به هم $\xrightarrow{\text{قوانین لانه}}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \boxed{0}$

$$\rightarrow \ln A = 0 \rightarrow \boxed{A = 1}$$

محاسبه B: $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}} = 0^{+\infty} = 0$ به هم $\xrightarrow{\text{قوانین لانه}}$

برای مثال $x = \frac{1}{1000}$ $\left(\sin \frac{1}{1000} \right)^{1000} = \left(\frac{1}{1000} \right)^{1000} = 10^{-6}$ یعنی این عبارت به سمت صفر میل می کند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} + (\sin x)^{\frac{1}{x}} \right] = 1 \quad \text{بنابراین}$$

۴- الف) چند جمله‌ای تیلور تابع $f(x) = \sin^2 x$ حول $x = 0$ را تا درجه ششم بیابید.

ب) با استفاده از قسمت الف) حاصل حد زیر را بیابید. (15 نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6}$$

پاسخ: math-teacher.blog.ir

بسط تیلور $\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \xrightarrow{x_0=0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ جمله‌های زوج (0, 2, 4, 6) منفی می‌شوند.

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ جمله‌های فرد (1, 3, 5, 7) منفی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} \right) \\ &= \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}} \quad (\text{الف}) \end{aligned}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{45}x^6}{x^6} = \boxed{\frac{2}{45}}$$

ابرها شش‌ا بر اهری - از رتبه 9

۵- مطلوب است شیب خط مماس بر منحنی $r = \cos^2 \theta$ در نقطه $\theta = \frac{\pi}{4}$. (۱۰ نمره)

پاسخ:

math-teacher.blog.ir

$$\text{شیب خط مماس: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right) \sin\theta + r \left(\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right) (\cos\theta) + r \left(\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right)} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin\theta + r \cos\theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \sin\theta}$$

$$* \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

$$r = \cos^2 \theta \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{4}} r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -2 \cos\theta \sin\theta = -\sin 2\theta \xrightarrow{\frac{\pi}{4}} \frac{dr}{d\theta} = -1$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آذرماه ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران

math-teacher.blog.ir

مدرس تخصصی ریاضیات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی