بسمه تعالی

سؤالات امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده ریاضی

نیم سال اول ۹۷-۱۳۹۶	تاریخ امتحان : ۱۳۹۶/۰۸/۲۹	مدت زمان امتحان: ۹۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	تعداد صفحات: ۱

تذکر مهم:

- هر سؤال را در یک صفحهٔ مجزای دفترچه امتحانی پاسخ دهید.
- حتماً نام و نام خانوادگی، شماره دانشجویی، رشته تحصیلی و نام استاد درس، در دفترچه امتحانی درج شود.

math-teacher.blog.ir

سؤال اول. فرض کنید $z=-1+i\sqrt{3}$. مقدار $z^n+\bar{z}^n$ را محاسبه کنید. (۱۲ نمره)

سؤال دوم. قضیهٔ رُل را بیان و آن را ثابت کنید. (۱۲ نمره)

سؤال سوم. اگر $x>0$ و $0<p\le 1$، نامساوی زیر را ثابت کنید: (۱۲ نمره)

$$(1+x)^p \le 1+px.$$

سؤال چهارم. فرض کنید $a<b<c$. نشان دهید معادلهٔ

$$f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}+\frac{3}{x-c}=0$$

دارای حداقل دو ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $[a,c]$ است. (۱۲ نمره)

سؤال پنجم. فقط به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید. (۱۲ نمره)

۱) بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x+\frac{4}{3}x^3}{x\cos(x)-x+\frac{x^3}{2}}$$

۲) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin(2x))^{\tan(2x)}$$

math-teacher.blog.ir

با آرزوی موفقیت

math-teacher.blog.ir

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad \bar{z} = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^n + \bar{z}^n = 2^n e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 2^n e^{-i\frac{2\pi}{3}n} = 2^n\left(e^{i\frac{2\pi}{3}n} + e^{-i\frac{2\pi}{3}n}\right)$$

$$= 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3}n + i\sin\frac{2\pi}{3}n + \cos\frac{-2\pi}{3}n + i\sin\frac{-2\pi}{3}n\right)$$

$$\rightarrow 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3}n + i\sin\frac{2\pi}{3}n + \cos\frac{2\pi}{3}n - i\sin\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$= 2^n\left(2\cos\frac{2\pi}{3}n\right) = 2^{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$$

نمونه سوالات میانترم و پایان ترم

- ریاضی۱
- ریاضی۲
- معادلات دیفرانسیل

• math-teacher.blog.ir

math-teacher.blog.ir

۲- قضیه رل: اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(b)=f(a)$ آنگاه: $\exists c ; f'(c)=0$

اثبات: اگر $f(x)=k$ آنگاه تابع ثابت است و مشتق آن در تمامی نقاط صفر است.

اگر $f(x)\neq k$ آنگاه به ازای برخی مقادیر x، $f(x)>f(a)$ و تابع دارای Max مطلق در این بازه است و چون $f(x)>f(a)=f(b)$ پس نقطه Max درون بازه است و بنا به قضیه اکسترمم‌های مشتق نقطه اکسترمم در توابع پیوسته صفر است. پس نقطه c همان اکسترمم است. استدلالی مشابه برای حالت $f(x)<f(a)$ داریم. پس

$\exists c ; f'(c)=0$

math-teacher.blog.ir

۳- $f(x)=(1+x)^p-1-px \qquad [0,x]$

$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-p=p\left((1+x)^{p-1}-1\right)\leq 0$

$\Rightarrow f'(x)\leq 0$

بنابه قضیه مقدار میانی: $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \rightarrow f'(c)=\dfrac{(1+x)^p-1-px}{x}$

$f'(c)\leq 0 \rightarrow \dfrac{(1+x)^p-1-px}{x}\leq 0 \xrightarrow{x>0} (1+x)^p-1-px\leq 0$

$\Rightarrow (1+x)^p\leq 1+px$

math-teacher.blog.ir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x + \frac{4}{3}x^3}{x\cos x - x + \frac{x^3}{2}} = \frac{0}{0}$$ ۱_ ۵

بسط تیلور $\rightarrow$ $\sin x \underset{x_0=0}{\simeq} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

طبق بسط تیلور $\rightarrow$ $\cos x \underset{x_0=0}{\simeq} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x + \frac{4}{3}x^3}{x\cos x - x + \frac{x^3}{3}} =$$

$$\simeq \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} - 2x + \frac{4}{3}x^3}{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - x + \frac{x^3}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{32x^5}{120}}{\frac{x^5}{24}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{24\times 32}{120} = 6.4$$

سپاس ویژه از فرزام کریمی

math-teacher.blog.ir

۲-ب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan 2x} = 1^{\infty}$$ مبهم :

$$\to \lim_{x\to\pi/4} (\sin 2x)^{\tan 2x} = A \to \ln \lim_{x\to\pi/4} (\sin 2x)^{\tan 2x} = \ln A$$

$$\to \lim_{x\to\pi/4} \tan 2x \ \ln \sin 2x = \ln A \to \lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln \sin 2x}{\cot 2x} = \ln A$$

$$\xrightarrow{H.P} \lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{-2(1+\cot^2 2x)} = 0 \to \ln A = 0 \to A = 1$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی