



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۱ (نیمسال دوم ۹۶-۹۷) جمع نمرات: ۶۰

تاریخ آزمون: ۱۳۹۷/۲/۱۹ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.

۱- ریشه‌های معادله $z^3 - \frac{1-i}{1+i} = 0$ را بیابید. (۱۰ نمره)

۲- با استفاده از قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) ثابت کنید: (۱۰ نمره)

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

۳- ثابت کنید معادله $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی در بازه $(0, 1)$ دارد. (۱۰ نمره)

۴- مقدار حد مقابل را بیابید: (۶ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$$

۵- الف) نشان دهید $\tanh^{-1} x$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ نوشت. سپس، دامنه و برد

(حوزه تعریف و حوزه مقادیر) آن را بدست آورده و نمودار آن را رسم نمایید. (۷ نمره)

ب) مطلوب است حاصل عبارت زیر (۷ نمره)

$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{\cosh(\ln x) - \sinh(\ln x)}$$

۶- سری تیلور تابع $f(x) = e^{x^2+2x}$ را حول نقطه $x = -1$ بیابید. (۱۰ نمره)

$$1) z^3 - \frac{1-i}{1+i} = 0 \rightarrow z^3 = \frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \rightarrow z^3 = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$i^2 = -1$

$$z^3 = -i \rightarrow z = (-i)^{1/3}$$

یافتن فرم قطبی

$$0 - i \begin{cases} r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \\ \tan \theta = \frac{-1}{0} = -\infty \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \rightarrow -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

درست کردن

$$z = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)^{1/3} = \left(\cos \frac{2k\pi + 3\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + 3\pi}{3} \right) \quad k=0,1,2$$

$k=0 \rightarrow z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow z = i$

$k=1 \rightarrow z = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$k=2 \rightarrow z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

• ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

2) $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$ اثبات

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\rightarrow -1 \leq \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} \leq 1$$

$$\rightarrow -(x_1 - x_2) \leq \sin x_1 - \sin x_2 \leq x_1 - x_2$$

$|x| < a \rightarrow -a < x < a$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

• ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

$$3) \quad x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0 \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 \\ f(1) &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad f(0) f(1) < 0$$

چون تابع $f(x)$ در بازه $(0, 1)$ پیوسته است و $f(0) f(1) < 0$ طبق قضیه بولتزانو حداقل یک ریشه حقیقی در بازه $(0, 1)$ دارد.

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 \rightarrow \text{همواره صعودی}$$

چون تابع صعودی اکید است بنابراین فقط یک ریشه را دارد.

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

• ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x = 1 \quad \text{مطمئن}$$

math-teacher.blog.ir

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x \xrightarrow{\text{Ln}} \text{Ln } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ln} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$$

$$\rightarrow \text{Ln } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \text{Ln} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{HOP}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x^2+3x+2}{-1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{x^2+3x+2} \xrightarrow{\text{مخرج و صورت به هم تقسیم می شود}} -1$$

$$\rightarrow \text{Ln } A = -1$$

$$\rightarrow A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

5) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: اثبات

$$\boxed{y = \tanh^{-1} x} \Rightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \rightarrow x e^y + x e^{-y} = e^y - e^{-y}$$

$$\rightarrow e^y (x-1) = -e^{-y} (x+1) \rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{Ln}}$$

$$\rightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

ب)
$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{\cosh(\ln x) - \sinh(\ln x)}$$

$$= \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x} + e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x} - e^{\ln x} + e^{-\ln x}}$$

$$= \frac{2e^{\ln x}}{2e^{-\ln x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} \xrightarrow{\text{می دانیم}} \frac{e^{\ln A} = A}{\text{می دانیم}} = \boxed{x^2}$$

$$\begin{cases} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - ارری کت

• ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

• ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

• ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل

• ریاضی مهندسی، محاسبات عددی

6) $f(x) = e^{x^2+2x}$ $x = -1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

نزدک
رابطه تیلور

$$f(x) = e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f(-1) = e^{-1}$$

$$f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = 0$$

$$f''(x) = 2e^{x^2+2x} + (2x+2)^2 e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 2e^{-1}$$

$$f'''(x) = 2(2x+2)e^{x^2+2x} + 4(2x+2)e^{x^2+2x} + (2x+2)^3 e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f'''(-1) = 0$$

$$y = e^{-1} + 0 + \frac{2e^{-1} \cdot (x+1)^2}{2!} + 0 + \frac{12e^{-1} \cdot (x+1)^4}{4!} + 0 + \dots$$

$$y = \frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{e} + \frac{(x+1)^4}{2e} + \frac{(x+1)^6}{6e} + \dots$$

math-teacher.blog.ir

۹۷ ابراهیم شاه ابراهیمی - ارشد مهندسی