



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۱ (نیمسال دوم ۹۸-۹۷) جمع نمرات: ۶۰
تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۲/۰۴ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

- این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.

۱- عدد مختلط $Z = (1 + i)^6 + 8i - 8$ را در نظر بگیرید. (۱۰ نمره)

الف) نمایش قطبی Z را بدست آورید.

ب) ریشه های سوم Z را بیابید.

۲- قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) را بیان و ثابت کنید. (۱۰ نمره)

۳- ثابت کنید معادله $x^2 - 2x + c = 0$ حداکثر یک ریشه حقیقی در بازه $(0, 1)$ دارد. (برای هر C دلخواه). (۱۰ نمره)

۴- با استفاده از سری مک لورن توابع $\cos(x^x)$ ، e^{x^x} و $\sin(x^x)$ مقدار حد زیر را بیابید. (۲۰ نمره)
(در حل این مسئله مجاز به استفاده از قاعده هوپیتال نمی باشید)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^x) - e^{x^x}}{\sin(x^x)}$$

۵- حد تابع زیر را محاسبه نمایید. (۱۰ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^x}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
رزی هست ۹۸

با تمامه آزمون میانه تم " ریاضی ۱ "
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

$$1) Z = (1+i)^6 + 8i - 8$$

$$z_1 = 1+i \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \tan \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{\text{پاور ۶}} z_1^6 = \sqrt{2}^6 e^{i\frac{6\pi}{4}} = 8 e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = \boxed{-8i}$$

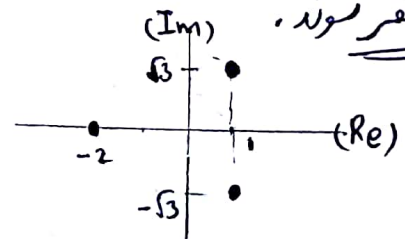
$$\xrightarrow{\text{جایگزینی}} Z = -8i + 8i - 8 \rightarrow \boxed{Z = -8}$$

$$Z = -8 \begin{cases} r = 8 \\ \tan \theta = 0 \rightarrow \theta = \pi \text{ (چون)} \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = 8 e^{i\pi}}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} Z^{1/3} = 8^{1/3} e^{i(\frac{2K\pi + \pi}{3})} = 2 (\cos(\frac{2K\pi + \pi}{3}) + i \sin(\frac{2K\pi + \pi}{3}))$$

$$\begin{cases} K=0 \rightarrow Z = 2 (\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})) = 2 (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{1 + \sqrt{3}i} \\ K=1 \rightarrow Z = 2 (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 2 (-1 + 0) = \boxed{-2} \\ K=2 \rightarrow Z = 2 (\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})) = 2 (\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{1 - \sqrt{3}i} \end{cases}$$

همه شود
که مجموع ریشه ها
باید صفر شوند.



ابراهیم شاه ابراهیمی - رزی هست ۹۸

۲) قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

بین: هرگاه f تابعی پیوسته در بازه $[a, b]$ ، مشتق‌پذیر در بازه (a, b) باشد
آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

اثبات: تابع $g(x) = f(x) - rx$ را در نظر بگیریم که در آن r عددی ثابت است.
چون تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر است، تابع g نیز مشتق‌پذیر است.
حال r را به گونه‌ای معرفی کنیم که $g(a) = g(b)$:

$$g(a) = f(a) - ra = f(b) - rb = g(b)$$

$$\rightarrow r(b - a) = f(b) - f(a) \rightarrow \boxed{r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

$$\rightarrow g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x$$

از طرفی چون $g(a) = g(b)$ پس تابع $g(x)$ در مبدأ قضیه رول صدق می‌کند.
پس حداقل یک نقطه مانند $c \in (a, b)$ داریم که:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \xrightarrow{x=c} \quad g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - اروری کتب ۹۸

$$۳) x^3 - 3x + c = 0$$

$$\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = -2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c > 0 \rightarrow f(0) > 0, f(1) < 0 \rightarrow f(0)f(1) < 0 \\ c < 0 \rightarrow f(0) < 0, f(1) < 0 \end{cases}$$

باقی به روشنی و قضیه بولتزانو
حد اکثر یک ریشه در این بازه دارد
و اگر $c > 2$ ← ریشه ندارد

$$f(0)f(1) > 0 \rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

بنابراین معادله حداکثر دارای ۱ ریشه خواهد بود
 $0 < c < 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(x) < 0$ تابع نزولی است
 $f(x) = x^3 - 3x + c$ و فقط یک بار می تواند محور x را قطع کند

نمونه سوالات میانترم و پایانترم

ریاضی ۱

ریاضی ۲

معادلات دیفرانسیل

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

با پاسخ تشریحی

وبلاگ تخصصی ریاضیات

math-teacher.blog.ir

$$*) \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^4} \sin(x^4) = x^4 - \frac{x^{12}}{3!} + \dots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \dots \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^4} e^{x^4} = 1 + x^4 + \dots \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{\sin(x^4)} = \frac{0}{0} \text{ (بهم)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2!} - 1 - x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x^4}{x^4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اری بهت ۹۸

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی، محاسبات عددی

$$\omega) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \text{ فرم}$$

math-teacher.blog.ir

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{\text{L'H}} \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\rightarrow \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x) - \ln(x)}{x^2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{2!} - x + \frac{x^3}{3!}}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right)}{2x^3} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$\rightarrow \ln A = -\frac{1}{6} \rightarrow \boxed{A = e^{-1/6}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اریک پست

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی، محاسبات عددی

@EShahebrahimi