تمرینات سری دوم

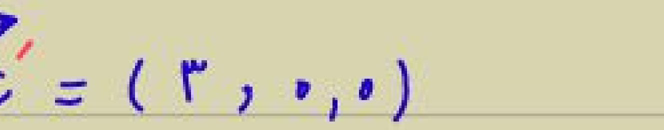
۶. نشان دهید که سه نقطهٔ A(۲،۳،۱) ، B(۱،۳،۱) و C(۴،۰،۱) بر یک خط قرار دارند.
کدام نقطه بین دوتای دیگر قرار دارد.

این سه نقطه بر یک خط واقع نیستند در واقع اگر نقطه C به صورت $C' = (4,3,1)$ بود آنگاه نقاط A ، B و C' بر یک خط واقع بودند زیرا با توجه به بردارهایی که با این سه نقطه می‌سازیم داریم:

$\overrightarrow{AB} = (-1,0,0)$ ، $\overrightarrow{AC'} = (2,0,0)$

$\overrightarrow{BC'} = (3,0,0)$

یعنی $\overrightarrow{AC'}$ دو برابر $\overrightarrow{AB}$ و خلاف جهت آن و $\overrightarrow{BC'}$، ۳ برابر $\overrightarrow{AB}$ و خلاف جهت آن، یعنی هر یک از بردارها را می‌توان به صورت ضریبی از بردار دیگر نوشت و این یعنی این بردارها در یک خط قرار دارند و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که نقاط A ، B و C' بر یک خط واقع هستند.



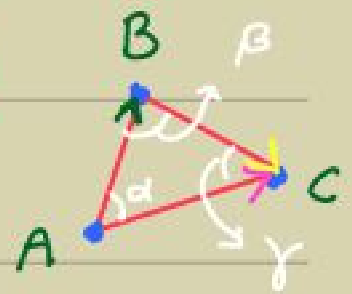
و از اینجا به وضوح معلوم هست که A بین نقاط دیگر واقع است.

- معادله خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد:

معادلات پارامتری $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ نقطه $C = (4,0,1)$ بر این خط واقع نیست.

۷. زاویه های مثلث با رأسهای A(۲،۲،۲) ، B(۳،-۲،۱) و C(-۲،-۳،۲) را پیدا کنید.

$$\vec{AB} = (1, -4, -1) \quad , \quad \vec{AC} = (-4, -5, 0)$$



$$\vec{BC} = (-5, -1, 1)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|AB||AC|}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|AB||BC|}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|AC||BC|}\right)$$

با جایگذاری به دست می آید.

۸. مختصات نقطه های تلاقی خط

$$l: \frac{x-۱}{۳/۵} = \frac{y-۴}{-۳/۵} = \frac{z+۴}{\frac{\sqrt{۷}}{۵}}$$

را با صفحه های مختصات پیدا کنید.

معادلات پارامتری خط را در صفحه قرار داده و t را به دست می آوریم.

صفحه مختصات $z=۰$ یعنی صفحه xy :

معادله پارامتری خط :
$$\begin{cases} x = ۳,۵t + ۱ \\ y = -۳,۵t + ۴ \\ z = \frac{\sqrt{۷}}{۵}t - ۴ \end{cases} \xrightarrow{z=۰} \frac{\sqrt{۷}}{۵}t - ۴ = ۰ \rightarrow \boxed{t = \frac{۲۰}{\sqrt{۷}}}$$

نقطه تلاقی : $(۱۰\sqrt{۷} , -۱۰\sqrt{۷} , ۰)$

صفحه $y=۰$ یعنی صفحه xz : $-۳,۵t + ۴ = ۰ \rightarrow$

$$\rightarrow t = \frac{۴}{۳,۵} = \frac{\frac{۴}{۱}}{\frac{۷}{۲}} = \frac{۸}{۷} \longrightarrow \boxed{t = \frac{۸}{۷}}$$

نقطه تلاقی : $(۵ , ۰ , \frac{۸\sqrt{۷}}{۳۵} - ۴)$

صفحه $x=۰$ یعنی صفحه yz :

$$۳,۵t + ۱ = ۰ \Longrightarrow t = -\frac{۱}{۳,۵} = -\frac{۲}{۷} \longrightarrow \boxed{t = -\frac{۲}{۷}}$$

نقطه تلاقی : $(۰ , ۵ , -\frac{۲\sqrt{۷}}{۳۵} - ۴)$

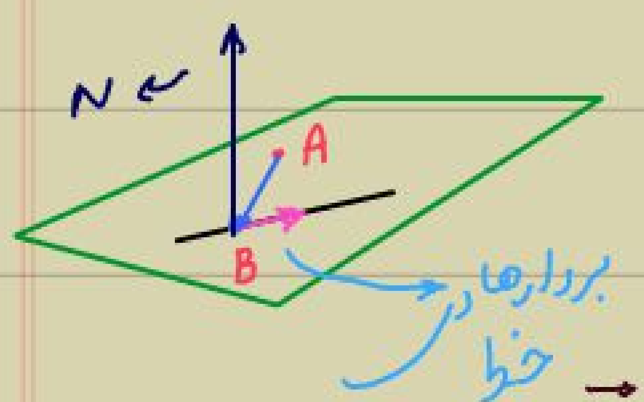
---

۹. معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که شامل نقطهٔ (۷،۰،۰) و خط زیر باشد

$$x = 1 + \frac{2}{\sqrt{62}}t ,\; y = -2 - \frac{7}{\sqrt{62}}t$$

$$z = 1 - \frac{3}{\sqrt{62}}t$$

چون نقطه $A=(7,0,0)$ در خط واقع نمی باشد پس کافی است یک نقطه دلخواه مانند B از خط را پیدا کرده و بردار $\overrightarrow{AB}$ را بنویسیم که حاصل ضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی خط، بردار نرمال یا قائم صفحه را می سازد.



$t=0 \longrightarrow B=(1,-2,1)$

$\overrightarrow{AB} = (-6,-2,1)$

بردار هادی خط : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{62}}(2,-7,-3)$

(توجه : هر مضربی از u نیز بردار هادی خط یا هر مضربی از بردار قائم یک صفحه بردار قائم همان صفحه نیز محسوب می شود)

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} k$$

$$= 13i - 16j + 46k$$

معادله صفحه گذرنده از نقطه $P_0 = (7,0,0)$ با بردار نرمال $\vec{N} = (13,-16,46)$ به صورت زیر می باشد.

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \longrightarrow \boxed{13x - 16y + 46z - 91 = 0}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \vec{N} = (x,y,z) \cdot \vec{N} - (x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{N} = 0$$

(۱۰. معادلهٔ برداری و معادله های دکارتی محل تلاقی دو صفحهٔ

$$\Pi : 10x + 12y + 15z = 60 \ , \ \Pi' : x - y + 2z = 4$$

را پیدا کنید.

دو صفحه که متقاطع باشند محل تلاقی آنها یا فصل مشترک آنها خطی است که بردار هادی آن حاصل ضرب خارجی بردار های نرمال دو صفحه می باشد

اکنون برای نوشتن معادله این خط یک نقطه دلخواه از فصل مشترک را پیدا می کنیم

$$\begin{array}{l} \Pi \\ \Pi' \end{array} \begin{cases} 10x + 12y + 15z = 60 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

(به ازای هر معادله یک مجهول وابسته است یعنی یک مجهول را می توانیم به دست بیاوریم حال چون دو معادله داریم پس دو مجهول وابسته داریم و مجهول دیگر آزاد است با انتخاب یک مقدار دلخواه برای یکی از مجهول ها تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر می شود و می توانیم مسئله را حل کنیم) . قرار می دهیم $\boxed{y = 0}$

$$\begin{cases} 10x + 15z = 60 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 12 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 12 \\ -2x - 4z = -8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{ج} -z = 4 \rightarrow \boxed{z = -4} \rightarrow \boxed{x = 12}$$

$$\vec{u} = \vec{N} \times \vec{N'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & 12 & 15 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 15 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$= 39i - 5j - 22k$$

بنابراین فصل مشترک دو صفحه π و π' خطی گذرنده از نقطه $P_0 = (12, 0, -4)$

با بردار هادی $\vec{u} = (39, -5, -22)$ می‌باشد

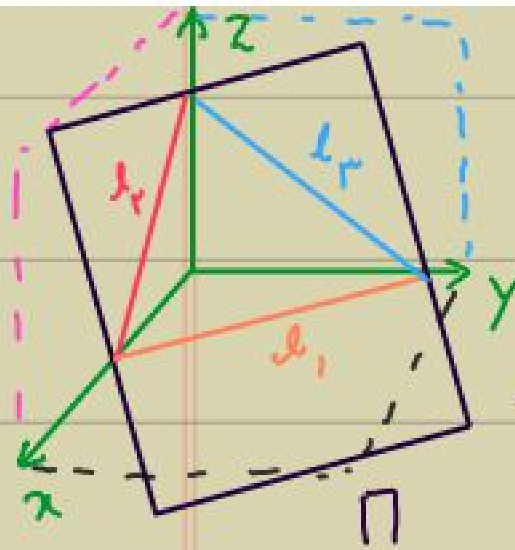
معادله برداری $l: \quad P_0 + t\vec{u} = (12, 0, -4) + t(39, -5, -22)$

معادلات پارامتری l :
$$\begin{cases} x = 39t + 12 \\ y = -5t \\ z = -22t - 4 \end{cases}$$

معادله دکارتی l :
$$\frac{x-12}{39} = \frac{y-0}{-5} = \frac{z-(-4)}{-22}$$

$$l: \quad \frac{x-12}{39} = \frac{y}{-5} = \frac{z+4}{-22}$$

۱۱) فصل مشترک صفحهٔ Π با صفحه‌های xy، xz و yz به‌ترتیب خط‌های $\underbrace{2x + 5y = 10}_{l_1}$ ، $\underbrace{3x + 5z = 15}_{l_2}$ و $\underbrace{3y + 2z = 6}_{l_3}$ است. معادلهٔ صفحه را بنویسید.



حل: هر سه خط l_1 و l_2 و l_3 در صفحه Π قرار دارند

اکنون می‌توانیم بردار نرمال یا قائم صفحه Π را از حاصلضرب خارجی بردارهای هادی دو خط منتخب به دست آورد.

و نقطه P_0 ای که واقع بر صفحه باشد را از یکی از خطوط انتخاب می‌کنیم.

$$l_1 : \frac{2x+5y}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2} = \frac{y-2}{-2}$$

$$l_1 : \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-2} , \ z=0 \rightarrow u_1 = (5,-2,0)$$

$$l_2 : \frac{x}{5} = \frac{z-3}{-3} , \ y=0 \longrightarrow u_2 = (5,0,-3)$$

$$l_3 : \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3} , \ x=0 \longrightarrow u_3 = (0,2,-3)$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= 6i + 15j + 10k$$

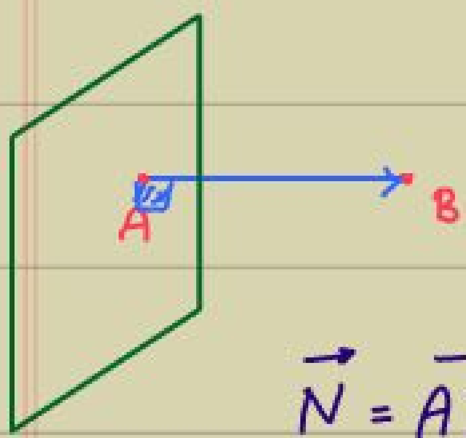
و نقطه $P_0 = (0,2,0)$ را از خط l_1 می‌توانیم انتخاب کنیم.

آنگاه هر نقطه $P=(x,y,z)$ از صفحه Π به صورت $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ می‌باشد

$$P \cdot N = P_0 \cdot N$$

$$\boxed{6x + 15y + 10z = 30}$$

۱۲. نقطه های A(۲،۰،۵) و B(۱،−۲،۴) را در نظر بگیرید. از A صفحه ای بر خط AB عمود شده است. معادلهٔ صفحه را بنویسید.



حل : بردار نرمال صفحه همان بردار $\overrightarrow{AB}$ می باشد و نقطه P_0 واقع در صفحه، نقطه A می باشد.

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N} = 0 \longrightarrow P\cdot N = P_0\cdot N$$

$$-x-2y-z = (-1)(2)+(-2)(0)+(-1)(5)$$

$$-x-2y-z = -2-5 = -7$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x+2y+z=7}$$

۱۹. معادلهٔ عمود مشترک بر خطهای

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{1}\ ,\ l'\ :\ z=4-y\ ,\ x=2z+3$$

$u=(2,-3,1)$

را پیدا کنید.

حل: $\quad l':\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z}{1} \longrightarrow u'=(2,-1,1)$

بردارهای خط عمود مشترک دو خط متنافر حاصل ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط متنافر می‌باشد.

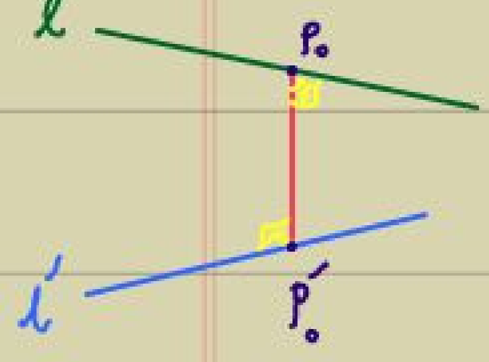
$$u_H=u\times u'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix} k$$

$$=(-3+1)i-(2-2)j+(-2+6)k$$

$$\Rightarrow\ u_H=(-2\ ,\ 0\ ,\ 4)$$

اکنون یک نقطه از خط عمود مشترک در خط l و یک نقطه دیگر از این خط در خط l' قرار دارد.

فرض کنیم $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای باشد که روی خط l قرار دارد.



بنابراین معادلات پارامتری خط عمود مشترک به صورت:

$$l_H:\begin{cases} x=-2t+x_0\\ y=y_0\\ z=4t+z_0\end{cases}$$

می‌باشد. اکنون برای پیدا کردن نقطه تلاقی خط عمود مشترک و خط l' یعنی P'_0 معادلات پارامتری خط عمود مشترک را در خط l' قرار می‌دهیم:

$$\frac{-2t+x_0-3}{2}=\frac{y_0-4}{-1}=\frac{4t+z_0}{1}=\mu \qquad (1)$$

(μ یک مقدار ثابت می‌باشد)

و چون نقطه P بر L واقع است پس در معادلات خط L صدق می‌کند:

$$\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0+2}{-3}=\frac{z_0-2}{1}=\lambda \qquad (2)$$

(λ یک مقدار ثابت)

از روابط (1) و (2) داریم:

$$\begin{cases} x_0 = 2\lambda+1 & (2) \\ x_0 = 2\mu+3+2t & (1) \end{cases} \longrightarrow \boxed{2\lambda+1 = 2\mu+3+2t}$$

$$\begin{cases} y_0 = -3\lambda-2 & (2) \\ y_0 = -\mu+4 & (1) \end{cases} \longrightarrow \boxed{-3\lambda-2 = -\mu+4}$$

$$\begin{cases} z_0 = \lambda+2 & (2) \\ z_0 = \mu-4t & (1) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\lambda+2 = \mu-4t}$$

اکنون مجهول های λ، μ و t را از معادله های داخل کادرهای بالا بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \lambda-\mu+4t=-2 \\ -3\lambda+\mu=6 \\ 2\lambda-2\mu-2t=2 \end{cases}$$

۳ برابر معادله اول را در دومی و (۲-) برابر معادله اول را به معادله سومی می‌افزاییم.

$$\begin{cases} \lambda-\mu+4t=-2 \\ -2\mu+12t=0 \\ -10t=6 \end{cases} \longrightarrow \boxed{t=-0.6}$$

بنابراین $\boxed{\mu=-3/6}$ و $\boxed{\lambda=-3/2}$ ، پس داریم:

$$x_0=2(-3/2)+1=-6/4+1=-5/4$$

$$y_0=-(-3/6)+4=7/6$$

$$z_0=(-3/2)+2=-1/2$$

پس $P_0=(-5/4,\ 7/6,\ -1/2)$ می‌باشد

معادلات پارامتری خط عمود مشترک: $\begin{cases} x=-2t-5/4 \\ y=7/6 \\ z=4t-1/2 \end{cases}$

با قرار دادن t در معادلات پارامتری خط عمود مشترک نقطه P_0' نیز به دست می‌آید.

$$P_0'=(-4/2,\ 7/6,\ -3/6)$$

در واقع طول پاره‌خط P_0P_0' ، فاصله دو خط متنافر می‌باشد

$$\text{فاصله خط } l \text{ و } d = |P_0P_0'| = \sqrt{(1/2)^2+(0)^2+(-2/4)^2} = \sqrt{7/2} =$$

$$= 2/6833$$

برای فاصله دو خط متنافر l_1 و l_2 با بردارهای نرمال $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و نقاط $A\in l_1$ ، $B\in l_2$ داریم:

$$\text{فاصله دو خط متنافر} = \frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$$

اگر $A=(1,-2,2)\in l$ ، $B=(3,4,0)$

$$\vec{AB}=(2,6,-2)$$

$$\vec{u}' = (۲, -۱, ۱) \quad , \quad \vec{u} = (۲, -۳, ۱) \quad و$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}') = \begin{vmatrix} ۲ & ۶ & -۲ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۲$$

$$u \times u' = (-۲, ۰, ۴) \quad , \quad |u \times u'| = \sqrt{۲۰}$$

$$l', l \text{ فاصله خط} = \frac{|-۱۲|}{\sqrt{۲۰}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۲۰}} = ۲/۶۸۳۳$$

۲۰. ثابت کنید خطهای زیر متنافرند و فاصلهٔ آنها را پیدا کنید.

$$l:\ \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{3}\ ,\quad \frac{x+2}{4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-3}\ :l'$$

پاسخ: خطوط l و l' متنافر هستند اگر $\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{u'})\neq 0$ باشد که در آن A نقطه‌ای در l و B نقطه‌ای در l' می‌باشد و $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ بردارهای هادی به ترتیب خطوط l و l' هستند.

$$A=(1,2,-1)\in l\ ,\qquad B=(-2,-1,3)\in l'$$

$$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,4)\ ,\quad u=(5,3,3)\ ,\quad u'=(4,4,-3)$$

$$\vec{u}\times\vec{u'}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 5 & 3 & 3\\ 4 & 4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 5 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 5 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix}k$$

$$=-21i+27j+8k$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{u'})=-3(-21)+(-3)(27)+4(8)$$

$$=63-81+32=14$$

یا

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{u'})=\begin{vmatrix} -3 & -3 & 4\\ 5 & 3 & 3\\ 4 & 4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4\\ 2 & 3 & 3\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}=14$$

پس l و l' متنافر هستند.

$$\text{فاصله } l,l' =\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{u'})|}{|\vec{u}\times\vec{u'}|}=\frac{14}{\sqrt{441+729+64}}=\frac{14}{\sqrt{1234}}$$

۲۳. حجم متوازی السطوح با رأسهای زیر را پیدا کنید.

الف) (۰،۰،۰) ، (۱،۲،۳) ، (۳،۴،۰) ، (۰،۳،۸)

ب) (۱،−۱،۰) ، (۰،۱،۲) ، (۱،۲،۱) ، (۳،۴،۵)

پاسخ:

الف: $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,3)$, $C=(3,4,0)$, $D=(0,3,8)$

$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,3,8)$

حجم متوازی السطوح $=|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$

$$AB\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&0\\0&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-9\\0&3&8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2&-9\\3&8\end{vmatrix}=(-16)-(-27)=11$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|=|11|=11$$

ب) $A=(1,-1,0)$, $B=(0,1,2)$, $C=(1,2,1)$, $D=(3,4,5)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,3,1)$, $\overrightarrow{AD}=(2,5,5)$

حجم متوازی السطوح $=|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&2&2\\0&3&1\\2&5&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&3&1\\2&9&9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1\\9&9\end{vmatrix}=-18$$

$$|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|=|-18|=18$$

موفق و پیروز باشید

مرادی