

آزمون میان ترم

سوال ۱

(۱۰ نمره) یک مثلث متساوی الاضلاع با رئوس z_1, z_2, z_3 در صفحه مختلط که مرکز ثقل آن در مبدا مختصات واقع است، در نظر بگیرید. عبارات زیر را محاسبه کنید

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

سوال ۲

(۱۰ نمره) برای هر $a > 0$ مطلوبست محاسبه حد $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$.

سوال ۳

(۱۰ نمره) در میان استوانه‌های قائم با سطح مقطع دایره و با حجم ثابت V ، آن را که کمترین سطح کل (شامل سطح جانبی و دو دایره بالا و پائین) را دارد، شناسائی کنید.

سوال ۴

(۱۵ نمره) تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ را در نظر بگیرید.

آ) نشان دهید دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ صعودی، دنباله‌ی $\{f^{2n+1}(1)\}$ نزولی و $f^{2n}(1) \leq f^{2n+1}(1)$ است.

ب) حد دنباله‌های $\{f^{2n}(1)\}$ و $\{f^{2n+1}(1)\}$ چیست؟

ج) N را طوری بگیرید که اگر به جای حد دنباله از $f^n(1)$ استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} کمتر باشد (الزاماً بهترین N مدنظر نیست).

توجه: منظور از f^n ترکیب n بار تابع f با خودش است.

آزمون میان‌ترم

سوال ۵

(۱۵ نمره)

آ) نشان دهید $1 - x \leq \ln x \leq \frac{x-1}{x}$ برای x های مثبت، و با کمک آن نتیجه بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1.$$

ب) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ به ازای چه مقادیری از α ، همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است؟

ج) به ازای $\frac{1}{p}$ ، N را طوری بدست آورید که اگر به جای حد سری از مجموع جزئی آن S_n استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} نایبتر شود (الزاماً بهترین N مدنظر نیست).

سوال ۶

(۱۰ نمره) فرض کنید برای تابع دوبار مشتق‌پذیر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ داریم $|f''(x)| < 1$ به ازای هر $x \in [0, 1]$. نشان دهید اگر $f(0) = f(1)$ ، آنگاه $|f'(x)| < 1$ برای هر $x \in [0, 1]$.

پاسخ آزمون میان‌ترم

پاسخ سوال ۱

رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه مختلط که مرکز ثقل آن در مبدا مختصات واقع است را می‌توان به صورت

$$z_1 = re^{i\theta}, \quad z_2 = re^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})}, \quad z_3 = re^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})},$$

در نظر گرفت، که شعاع دایره محیطی این مثلث است (۳ نمره).

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= r^2 e^{2i\theta} (1 + e^{(4\pi/3)i} + e^{(-4\pi/3)i}) \\ &= r^2 e^{2i\theta} ((1 + \cos(4\pi/3) + \cos(-4\pi/3)) + i(\sin(4\pi/3) + \sin(-4\pi/3))) \\ &= r^2 e^{2i\theta} \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i(\sin(4\pi/3) - \sin(4\pi/3)) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

(۳ نمره). از طرفی

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} &= z_1^{-2} + z_2^{-2} + z_3^{-2} \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta} (1 + e^{(-4\pi/3)i} + e^{(4\pi/3)i}) \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta} ((1 + \cos(-4\pi/3) + \cos(4\pi/3)) + i(\sin(-4\pi/3) + \sin(4\pi/3))) \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta} \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i(-\sin(4\pi/3) + \sin(4\pi/3)) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

(۴ نمره).

اشتباه رایج: برای حل مساله با این فرض اضافی که یکی از رئوس مثلث روی یکی از محورهای حقیقی یا مختلط قرار داشته باشد (مثلا حالتی که $\theta = 0$)، بین یک تا دو نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۲

برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $(a_n = n(a^{1/n} - 1))$ ، تابع $f(x) = x(a^{1/x} - 1)$ با دامنه‌ی $x > 0$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به پیوستگی تابع $f(x) = x(a^{1/x} - 1)$ روی $x > 0$ ، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1),$$

(۲ نمره). لذا، کافی است حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \infty$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t - 1}{t} = \left(\frac{d}{dt} a^t \right)_{t=0} = ((\ln a) a^t)_{t=0} = \ln a,$$

(۸ نمره). توجه داریم که جمله دوم خط بالا، تعریف مشتق راست تابع a^t در نقطه‌ی $t = 0$ است. لذا، تساوی دوم از مشتق‌پذیری تابع a^t بدست آمده است.

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$ یا به طور معادل حاصل حد $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t - 1}{t}$ را می‌توان با استفاده از قواعد هم‌ارزی یا هوییتال محاسبه کرد، که متناسب به درستی و کامل بودن راه‌حل، نمره داده شده است. اشتباه رایج: عدم توجه به این‌که قواعد هم‌ارزی و هوییتال برای توابع با دامنه گسسته برقرار نیستند. برای این اشتباه ۲ نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۳

با در نظر گرفتن r به‌عنوان شعاع سطح مقطع و h به‌عنوان ارتفاع استوانه، داریم:

$$\left. \begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ V &= \pi r^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},$$

که در آن $r \in (0, \infty)$ (۳ نمره). توجه داریم $S(r)$ تابعی مشتق‌پذیر (و در نتیجه پیوسته) روی بازه‌ی $(0, \infty)$ است (۱ نمره). لذا، برای بدست آوردن استوانه با سطح کل کمینه، نقطه ایستای $S(r)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d}{dr} S(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

(۴ نمره). چون $\lim_{r \rightarrow 0^+} S(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = \infty$ ، و با توجه به این‌که $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ تنها نقطه ایستای تابع پیوسته‌ی $S(r)$ روی بازه‌ی $(0, \infty)$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ کمینه‌کننده‌ی سراسری تابع $S(r)$ است (۲ نمره). این مطلب را می‌توان از این‌که $S'(r) > 0$ برای $r > \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ و $S'(r) < 0$ برای $r < \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ ، نیز نتیجه گرفت. بنابراین، در میان استوانه‌های قائم با سطح مقطع دایره و حجم ثابت V ، استوانه با شعاع قاعده‌ی $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ و ارتفاع

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},$$

پاسخ آزمون میان‌ترم

کم‌ترین سطح کل را دارد.

اشتباه رایج: عدم ارائه دلیل درست و کافی برای این‌که نقطه‌ی ایستای $r = \sqrt{V/(2\pi)}$ ، کمینه‌کننده‌ی سراسری تابع $S(r)$ روی بازه‌ی $(0, \infty)$ است. برای این اشتباه تا ۲ نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۴

(آ) برای $x > -1$ ، f تابعی نزولی است. در نتیجه برای $x > -1$ و هر عدد طبیعی n ، f^{2n} تابعی صعودی و f^{2n-1} تابعی نزولی هستند (۱ نمره). لذا، با تاثیر تابع صعودی f^{2n} روی نامساوی $f(1) = \frac{3}{2} \geq 1$ ، داریم $f^{2n+1}(1) \geq f^{2n}(1)$ (۱ نمره). از طرفی،

$$f(1) = \frac{3}{2} = 1.5 \Rightarrow f^2(1) = \frac{7}{5} = 1.4 \Rightarrow f^3(1) = \frac{17}{12} = 1.4166\dots$$

(۱ نمره). در نتیجه، برای عدد طبیعی دلخواه n ، با تاثیر تابع صعودی f^{2n-2} بر طرفین نامساوی $f(1) \leq f^3(1) \leq f^{2n+1}(1)$ داریم $f^{2n+1}(1) \leq f^{2n-1}(1)$ ، یعنی دنباله‌ی $\{f^{2n+1}(1)\}$ نزولی است (۱ نمره). حال با تاثیر تابع نزولی f بر طرفین نامساوی $f^{2n+1}(1) \leq f^{2n-1}(1)$ خواهیم داشت $f^{2n+2}(1) \geq f^{2n}(1)$ ، یعنی دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ صعودی است (۱ نمره).

(ب) مطابق قسمت (آ)، $\{f^{2n}(1)\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار به $f(1)$ است، چون‌که

$$f^{2n}(1) \leq f^{2n+1}(1) \leq f(1).$$

در نتیجه، دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ همگراست (۱ نمره). با توجه به پیوستگی تابع f^2 و با فرض این‌که $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(1) = L$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^2(f^{2n-2}(1)) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(1) = f^2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n-2}(1)\right) \\ &\Rightarrow L = f^2(L) \Rightarrow L = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+L}} \\ &\Rightarrow 3L + 2L^2 = 4 + 3L \Rightarrow L^2 = 2 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(1) = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

که تساوی آخر از این‌که $f^{2n}(1) \geq 1$ و در نتیجه $L \geq 1$ بدست آمده است (۲ نمره). به طور مشابه، از قسمت (آ) می‌توان نتیجه گرفت که $\{f^{2n+1}(1)\}$ دنباله‌ای نزولی و از پائین کراندار به $f^2(1)$ است و در نتیجه همگراست. حال با استفاده از پیوستگی تابع f ، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(1) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(1)\right) = f(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

(۲ نمره).

پاسخ آزمون میان‌ترم

ج) با توجه به قسمت (ب)، می‌دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1) = \sqrt{2} = 1,4142\dots$ از طرفی

$$f(1) = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow f^2(1) = \frac{7}{5} = 1,4 \Rightarrow f^3(1) = \frac{17}{12} = 1,4166\dots$$

$$\Rightarrow f^4(1) = \frac{41}{29} = 1,4137\dots \Rightarrow f^5(1) = \frac{99}{70} = 1,41428\dots$$

و در نتیجه

$$|f(1) - \sqrt{2}| = 0,0857 \not\leq 10^{-3},$$

$$|f^2(1) - \sqrt{2}| = 0,0142\dots \not\leq 10^{-3},$$

$$|f^3(1) - \sqrt{2}| = 0,0023\dots \not\leq 10^{-3},$$

$$|f^4(1) - \sqrt{2}| = 0,0005\dots < 10^{-3},$$

$$|f^5(1) - \sqrt{2}| = 0,00006\dots < 10^{-3}.$$

یعنی برای $n = 4$ و $n = 5$ داریم $|f^n(1) - \sqrt{2}| < 10^{-3}$ (۲ نمره). از صعودی بودن دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ ، برای هر $i \geq 2$ ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\sqrt{2} \geq f^{2i}(1) \geq f^4(1) \Rightarrow |f^{2i}(1) - \sqrt{2}| \leq |f^4(1) - \sqrt{2}| \leq 10^{-3},$$

(۱ نمره). از طرف دیگر، از نزولی بودن دنباله‌ی $\{f^{2n+1}(1)\}$ ، برای هر $i \geq 2$ ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\sqrt{2} \leq f^{2i+1}(1) \leq f^5(1) \Rightarrow |f^{2i+1}(1) - \sqrt{2}| \leq |f^5(1) - \sqrt{2}| \leq 10^{-3},$$

(۱ نمره). در نتیجه، برای هر $n \geq 4$ داریم $|f^n(1) - \sqrt{2}| \leq 10^{-3}$ (۱ نمره).

پاسخ سوال ۵

آ) با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x) = \ln x$ ، برای هر $x > 1$ ، عدد $\xi_x \in (1, x)$ چنان یافت می‌شود که

$$f'(\xi_x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \Rightarrow \frac{\ln x}{x - 1} = \frac{1}{\xi_x} \leq 1 \Rightarrow \ln x \leq x - 1.$$

به طور مشابه، برای هر $0 < x < 1$ ، عدد $\xi_x \in (x, 1)$ چنان یافت می‌شود که

$$f'(\xi_x) = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} \Rightarrow \frac{-\ln x}{1 - x} = \frac{1}{\xi_x} \geq 1 \Rightarrow -\ln x \geq 1 - x \Rightarrow \ln x \leq x - 1.$$

پاسخ آزمون میان‌ترم

این بار با در نظر گرفتن تابع $g(x) = x \ln x$ برای هر $x > 1$ ، عدد $\xi_x \in (1, x)$ چنان یافت می‌شود که

$$g'(\xi_x) = \frac{x \ln x - \ln 1}{x - 1} \Rightarrow \frac{x \ln x}{x - 1} = 1 + \ln \xi_x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq \frac{x - 1}{x}.$$

به طور مشابه، برای هر $0 < x < 1$ ، عدد $\xi_x \in (x, 1)$ چنان یافت می‌شود که

$$g'(\xi_x) = \frac{\ln 1 - x \ln x}{1 - x} \Rightarrow \frac{-x \ln x}{1 - x} = 1 + \ln \xi_x \leq 1 \Rightarrow \ln x \geq \frac{x - 1}{x}.$$

توجه داریم که برای $x = 1$ نامساوی‌های مطلوب به صورت تساوی برقرار می‌شوند. (۳ نمره) برای اثبات صحیح نامساوی.

با جایگذاری $x = \sqrt[n]{n}$ در نامساوی بدست آمده و با توجه به این که $\sqrt[n]{n} > 1$ ، برای $n \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} \leq \ln \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n} - 1 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{\ln \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} - 1} \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) \leq \sqrt[n]{n}. \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی بالا، $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و به کارگیری قضیه فشردگی می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1$. (۲ نمره).

(ب) ابتدا ثابت می‌کنیم که دنباله $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ برای $n \geq 3$ نزولی است. برای $n \geq 3$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \leq n &\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n \Rightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \\ &\Rightarrow (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \leq n^{\frac{1}{n}} \Rightarrow {}^{n+1}\sqrt{n+1} \leq \sqrt[n]{n}. \end{aligned}$$

در نتیجه دنباله $\{(\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha\}$ برای $\alpha > 0$ نزولی است. بعلاوه، $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha = 0$ برای هر $\alpha > 0$. در نتیجه، با استفاده از آزمون لایپ نیتز برای سری‌های متناوب می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ برای هر $\alpha > 0$ همگراست (۳ نمره). با استفاده از نامساوی قسمت (آ) برای $x = \sqrt[n]{n}$ داریم:

$$\ln \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha \leq (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha, \quad \forall \alpha > 0.$$

با توجه به نامساوی بالا و واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ((\ln n)/n)^\alpha$ برای $\alpha \in (0, 1]$ ، واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ برای $\alpha \in (0, 1]$ نتیجه می‌شود. در نتیجه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ برای $\alpha \in (0, 1]$ همگرای مشروط است (۱ نمره). مجدداً با استفاده از نامساوی قسمت (آ) برای $x = \sqrt[n]{n}$ داریم:

$$\ln \sqrt[n]{n} \geq \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\ln n}{n^{(1-1/n)}} \Rightarrow (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha \leq \frac{(\ln n)^\alpha}{n^{\alpha - (\alpha/n)}}.$$

پاسخ آزمون میان‌ترم

لذا، از همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^{\alpha - (\alpha/n)}}$ برای $\alpha > 1$ ، همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ برای $\alpha > 1$ نتیجه می‌شود. در نتیجه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ برای $\alpha \in (1, \infty)$ همگرایی مطلق است (۱ نمره).

(ج) با در نظر گرفتن مجموع جزئی سری متناوب و همگرایی مشروط

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i, \quad a_i = (\sqrt[i]{i} - 1)^{\frac{1}{2}},$$

به صورت

$$S_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i,$$

داریم $|a_{n+1}| < 10^{-3}$ (۳ نمره). بنابراین، باید n را به گونه‌ای بیابیم که $|a_{n+1}| < 10^{-3}$ (۱ نمره). برای این منظور، توجه داریم که

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| < 10^{-3} &\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} < 10^{-6} + 1 \Leftrightarrow n < (1 + 10^{-6})^n \\ &\Leftrightarrow n < 1 + 10^{-6}n + 10^{-12} \frac{n(n-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow n < \left(1 + 10^{-6}n - \frac{10^{-12}}{2}n\right) + 10^{-12} \frac{n^2}{2} \\ &\Leftrightarrow n < 10^{-12} \frac{n^2}{2} \\ &\Leftrightarrow n > 2 \times 10^{12}. \end{aligned}$$

در نتیجه، با انتخاب $n \geq N = 2 \times 10^{12}$ ، خطا از 10^{-3} نایبتر خواهد بود (۱ نمره).

پاسخ سوال ۶

مطابق با پیوستگی تابع f روی بازه $[0, 1]$ ، مشتق‌پذیری آن روی بازه $(0, 1)$ و این که $f(0) = f(1)$ ، و با استفاده از قضیه رُل می‌توان نتیجه گرفت نقطه‌ی $c \in (0, 1)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$ (۴ نمره). از طرفی، مطابق با قضیه مقدار میانگین برای تابع f' ، برای هر $x \in [0, 1]$ ، نقطه‌ی ξ_x بین دو نقطه‌ی x و c چنان یافت می‌شود که

$$\begin{aligned} f''(\xi_x) = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} &\Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{x - c} \right| = |f''(\xi_x)| < 1 \Rightarrow |f'(x)| < |x - c| < 1 \\ &\Rightarrow |f'(x)| < 1, \end{aligned}$$

(۶ نمره).

اشتباهات رایج:

پاسخ آزمون میان‌ترم

- برای حل مساله برای یک تابع خاص مانند $f(x) = ax^2 + bx + c$ نمره‌ای داده نشده است.
- از این‌که برای نقطه‌ای در بازه مانند c ، داشته باشیم $f'(c) = 0$ ، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $|f'(x)| < 1$ برای هر $x \in [0, 1]$.