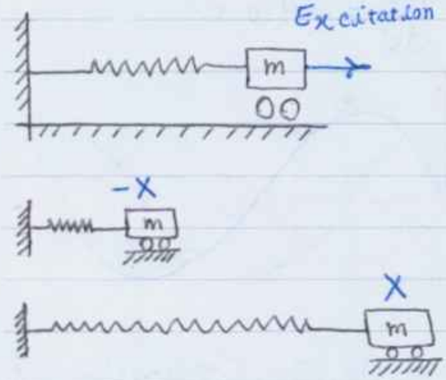
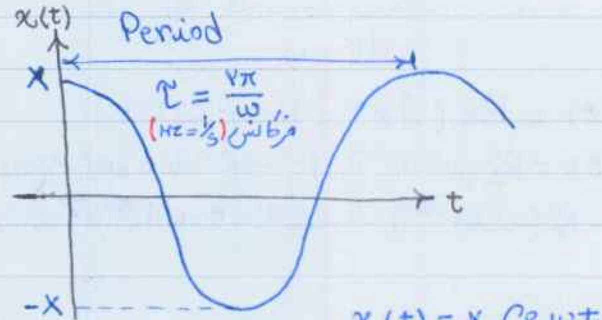
EbrahimiNejad@gmail.com

ارتعاش : هر حرکت تکرار شونده را ارتعاش گویند. مانند : تارهای موسیقی ، ارتعاشات سیستم‌های تعلیق و ...
ارتعاشات مفید : تارهای موسیقی، صوت ، ارتعاشات قلب ، دستگاه سنگ‌شکن کلیه ، MRI و ...





$$x(t) = X\cos\omega t$$

تحریکات اولیه : جابجایی اولیه (X) ، سرعت اولیه (V)

پاسخ سیستم : ۱) پاسخ خطی ۲) پاسخ غیرخطی : وقتی هر کدام از m ، K ، C رفتار غیرخطی داشته باشند پاسخ غیرخطی خواهد شد.

اگر تحریکات خطی باشد آنگاه پاسخها را می‌توان باهم جمع کرد :

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \rightarrow C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

در حرکت پریودیک : $x(t) = x(t+\tau)$

در حرکت هارمونیک : $x(t) = A\sin\omega t$

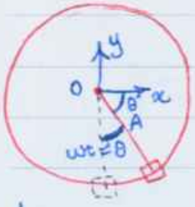
$\hookrightarrow A = \max|x(t)|$

$$\frac{dx}{dt} = v = A\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A\omega^2\sin\omega t$$

حرکتی هارمونیک است که رابطه $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ در آن برقرار باشد.

حرکت یک جسم در مسیر دایره‌ای شکل یک حرکت هارمونیک ساده است :



$$x = A\cos\omega t$$
$$y = A\sin\omega t$$

$$\vec{X} = \underset{Re}{a} + i\underset{Im}{b} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}$$

(مدول) $A = \sqrt{a^2+b^2}$ (آرگومان) $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$$\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$(1/s = Hz)$ $\omega \rightarrow$ Rad/s فرکانس طبیعی

Subject: 2
Year: Month: Date:

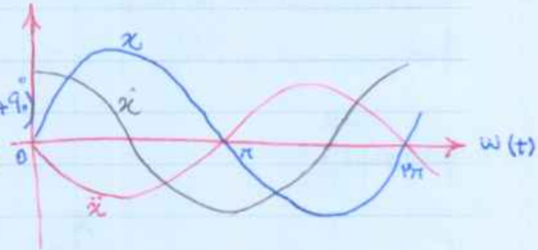
$$f=\frac{\omega}{2\pi} \qquad x(t)=Ae^{i\omega t} \qquad \frac{dx}{dt}=iAe^{i\omega t}\,\omega$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$x(t)=Re\left(Ae^{i\omega t}\right)=A\cos\omega t$$

$$\dot{x}(t)=Re\left(i\omega Ae^{i\omega t}\right)=-\omega A\sin\omega t=\omega A\cos(\omega t+90^\circ)$$

$$\ddot{x}(t)=Re\left(-\omega^2Ae^{i\omega t}\right)=-\omega^2A\cos\omega t=\omega^2A\cos(\omega t+180^\circ)$$



اگر در ابتدای حرکت یک مقدار فاز ϕ داشته باشیم:

$$y=A\sin(\omega t+\phi)$$

اگر دو تابع دارای فرکانس ω یکسان باشند به آنها حرکت سنکرون گویند.

اگر دو سیستم که فرکانس آنها باهم به مقدار کم δ اختلاف داشته باشند باهم جمع و یا کم شوند پدیده ضربان رخ می دهد. در این پدیده، دامنه ها باهم یکسان است.

$$x_1=x\sin\omega t$$

$$x_2=x\sin(\omega-\delta)t \qquad x(t)=x_1(t)-x_2(t)=x\left[\sin\omega t-\sin(\omega-\delta)t\right]$$

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$x(t)=2x\sin\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega-\frac{\delta}{2}\right)t \qquad \omega-\frac{\delta}{2}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

$$\tau_b=\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$$

دوره تناوب پدیده ضربان

تبدیل تابع پریودیک به چند تابع هارمونیک را تحلیل هارمونیک گویند.

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)$$

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}x(t)\,dt=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}x(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}x(t)\cos n\omega t\,dt=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}x(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}x(t)\sin n\omega t\,dt=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}x(t)\sin n\omega t\,dt$$

FARAZ

$$x(t) = d_0 + d_1 \cos(\omega t \mp \phi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \phi_2) + \cdots$$

$$d_0 = \frac{a_0}{2} \qquad d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \qquad \phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

رابطه سیستم یک درجه آزادی :

$m\ddot{x} \rightarrow$ نیروی اینرسی

$Kx \rightarrow$ نیروی مقاوم الاستیک

$c\dot{x} \rightarrow$ نیروی میرایی

$m\ddot{x} + Kx = f(t)$ ارتعاشات اجباری

$m\ddot{x} + Kx = 0$ ارتعاشات آزاد

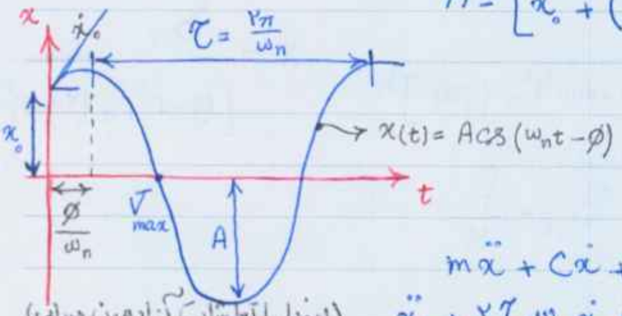
$$x(t) = \underbrace{x_0}_{\text{جابجایی اولیه}} \cos \omega_n t + \underbrace{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}_{\text{سرعت اولیه}} \sin \omega_n t \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}$$

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi_0)$$

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \phi_0 = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}$$



(نمودار ارتعاشات آزاد بدون میرایی)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$$

با تقسیم بر m داریم :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = F(t)$$

نسبت میرایی $\zeta = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{c}{c_{cr}}$ $\qquad c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{Km}$

$\zeta < 1$ زیرمیرایی $\qquad \zeta = 1$ میرایی بحرانی $\qquad \zeta > 1$ فوق میرایی

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\zeta < 1 \rightarrow x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t\right)$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n$$

$$\zeta = 1 \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t\right) e^{-\omega_n t}$$

ارتعاشات اجباری تحت نیروی تحریک هارمونیک:

$$m\ddot{x} + Kx = f_0 \cos \omega t$$

حل خصوصی

حل همگن

$$x_p(t) = X \cos \omega t \,,\quad X = \frac{f_0}{K - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \,,\quad \delta_{st} = \frac{f_0}{K}$$

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

X: دامنه دینامیک

δ_{st}: دامنه استاتیک

نسبت دامنه (ضریب بزرگنمایی)

$$x(t) = \left(x - \frac{f_0}{K - m\omega^2}\right)\cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{f_0}{K - m\omega^2} \cos \omega t$$

اگر $\omega = \omega_n$ باشد حالت تشدید رخ می دهد.

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f_0 \cos \omega t$$

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi) \qquad X = \frac{f_0}{\left[(K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad X = \frac{\delta_{st}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{C\omega}{K - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

(خیز استاتیکی) $\delta_{st} = \frac{f_0}{K}$

نسبت فرکانسی $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ $\qquad \zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{Km}} = \frac{C}{2m\omega_n}$

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \qquad \leftarrow \zeta < 1$$

روشهای مبتنی بر تعادل دینامیکی:

۱) روش نیوتن

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = ma$$

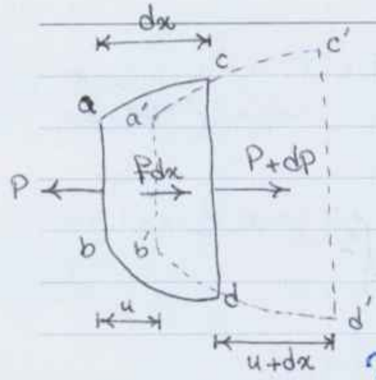
$$\sum_i M_i = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

۲) روش دالامبر

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = \vec{0}$$

معادلات حرکت ارتعاشات طولی میله:

$$P = \sigma A = E\varepsilon A = EA\frac{\partial u}{\partial x}$$



$$(P+dP)+f dx - P = dp + f dx = \text{mass} \times \text{acc}$$

$$\rho A dx \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$dp = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \cancel{dx} + f(x,t)\, \cancel{dx} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cancel{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

اگر سطح مقطع یکنواخت باشد :

$$EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

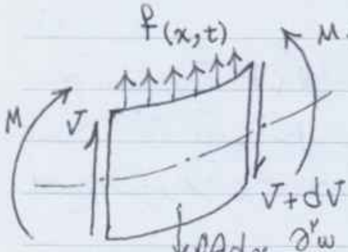
I.C. $u(x,t=0) = u_0(x) \quad 0<x<l$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = \dot{u}_0(x) \quad 0<x<l$

B.C. @ $x=0$: fixed Bar $\Rightarrow u(0,t)=0 \quad t>0$

@ $x=l$: free Bar $\Rightarrow EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad t>0$

معادلات حرکت ارتعاشات عرضی تیر :



$$-(\cancel{V}+dV) + f(x,t)dx + \cancel{V} = \rho A(x)\, dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$: نیروی اینرسی

$$(\cancel{M}+dM) - (V+dV)dx + f(x,t)\,dx\,\frac{dx}{2} - \cancel{M} = 0$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x}dx$$

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (I)$$

از عبارت توان دوم dx نیز صرفنظر می‌کنیم .

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) = 0 \Rightarrow V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (II)$$

$$(II) \rightarrow (I) \quad -\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

در تیرهای Euler - Bernoulli :

فرض اصلی این تیرها :

$$M(x,t) = EI(x)\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

با جایگذاری در رابطه قبل داریم :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right] + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t)$$

I.C.
$$w(x,t=0) = w_0(x) \qquad 0<x<l$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t=0) = \dot{w}_0(x) \qquad 0<x<l$$

تیر یک سر گیردار و یک سر آزاد است .

B.C.
$$w(x=0,t) = 0 \qquad t>0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}(x=0,t) = 0 \qquad t>0$$
$$w(x=l,t) = 0 \qquad t>0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x=l,t) = 0 \qquad t>0$$

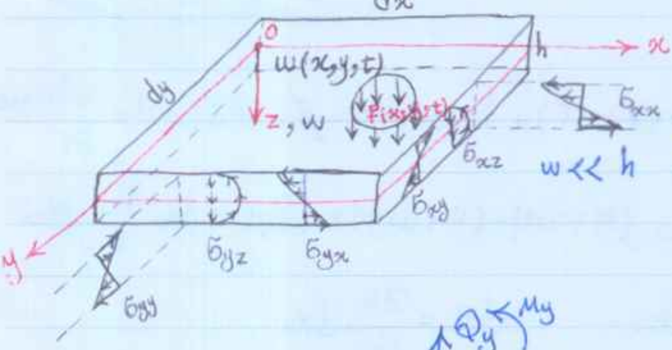
معادلات حرکت ارتعاشات صفحه :

فرضیات :

ضخامت ورق (h) کم است .

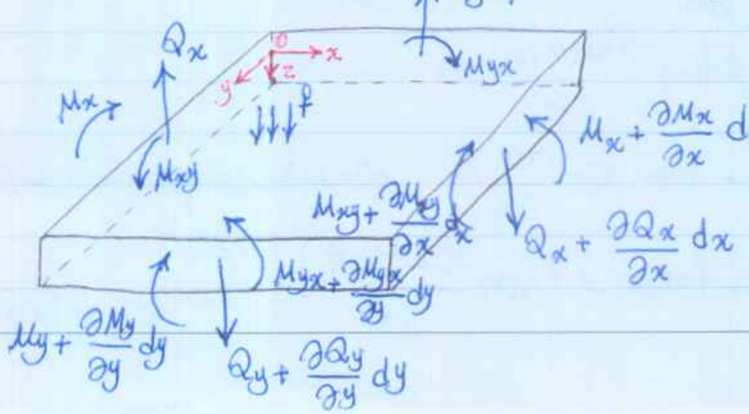
صفحه خنثی تغییر شکل در عرض ندارد .

تغییر شکل عرضی صفحه کم است $w \ll h$



$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\,dz = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\,dz = 0$$



$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\,z\,dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\, z\, dz \qquad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}\, z\, dz = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yx}\, z\, dz$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}\, dz \qquad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz}\, dz$$

$$(\cancel{Q_x} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx)dy + (\cancel{Q_y} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy)dx + f\,dx\,dy - \cancel{Q_x}\,dy - \cancel{Q_y}\,dx = \rho h\, dx\, dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$* \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f(x,y,t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

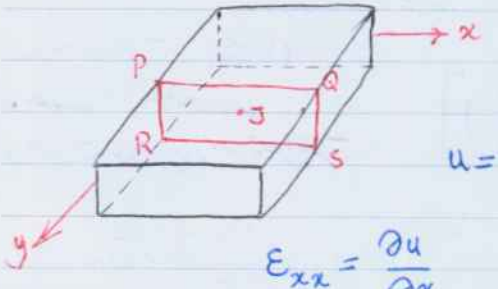
گشتاورها حول محور x :

$$(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy)\, dx\, dy = (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy)dx + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx)dy - M_y\, dx$$
$$- M_{xy}\, dy - f\, dx\, dy \frac{dy}{2}$$

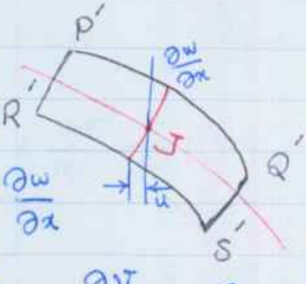
با ساده سازی و صرف نظر کردن از توان‌های دوم dx و dy داریم :

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$ گشتاور حول محور x :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$ گشتاور حول محور y :



$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$



$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

با جایگذاری روابط کرنشها در روابط تنشها و قرار دادن این روابط در انتگرالهای قبلی به نتایج زیر برای گشتاورها خواهیم رسید :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{xy} = G\,\varepsilon_{xy}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad M_{xy} = M_{yx} = -(1-\nu)D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D سختی خمشی در صفحه است.

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

با جایگذاری در معادله * داریم :

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,y,t)$$

$$D\nabla^4 w + \rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \qquad \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 \qquad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

I.C. $\quad w(x,y,0) = w_0(x,y)$

$\qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = \dot{w}_0(x,y)$

B.C. $\quad$ fixed edge : $\quad w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$

$\qquad$ تکیه‌گاه ساده : $\quad w = 0 \quad , \quad M = 0$

در مختصات (n,s) :

n جهت عمود بر صفحه و s جهت مماس بر صفحه است.

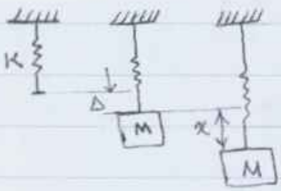
$$M_n = -D\left[\nabla^2 w - (1-\nu)\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\right]$$

شعاع انحنا

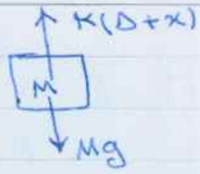
برای ورق مستطیلی ، در شرایط تکیه‌گاه ساده ، @ $y = b = cte$

$w(x,b) = 0 \qquad 0 < x < a$

$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$



$Mg = K\Delta$



$$Mg - K(\Delta + x) = M\ddot{x}$$

$$\cancel{Mg} - \cancel{K\Delta} - Kx = M\ddot{x}$$

$$x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \leftarrow M\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$E_{Kin} = (E_{Kin})_{Mass} + \underbrace{(\cancel{E_{Kin}})_{spring}}_{\text{صفر}} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

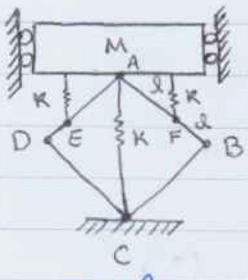
$$E_{PoT} = (E_{PoT})_{Mass} + (E_{PoT})_{spring} = (-Mg)(x+\Delta) + \frac{1}{2}\left[K(\Delta+x)\right](\Delta+x)$$

ToTal Energy = Cte

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - Mg(x+\Delta) + \frac{1}{2}K(x+\Delta)^2 = Cte$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(2)M\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x} + \frac{1}{2}(2K)(x+\Delta)\dot{x} = \left[M\ddot{x} - \cancel{Mg} + \cancel{K\Delta} + Kx\right]\dot{x} = 0$$

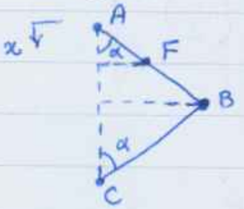
$M\ddot{x} + Kx = 0$ $\qquad$ $\dot{x}$ هیچ وقت صفر نیست.

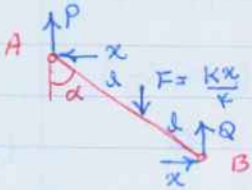


نیروی فنر وسط $= Kx$

نیروی فنرهای کناری $= K\left(x - \frac{3x}{4}\right) = K\frac{x}{4}$

P و X نیروی لینک است.
نیروی وزن جسم M در نیروی P و x دیده شده است.



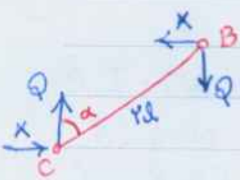


$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow P + Q = \frac{Kx}{4}$ (2)

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow P(2l\sin\alpha) - x(2l\cos\alpha) - \frac{Kx}{4} l\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow P = x\cot\alpha + \frac{Kx}{8}$$

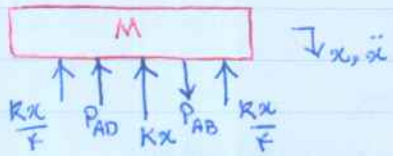


$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow Q(2l\sin\alpha) = X(2l\cos\alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{X}{Q}$$

$\Rightarrow P = Q + \frac{Kx}{8}$ (1)

$\Rightarrow \boxed{P = \frac{3}{16}Kx}$ (1,2)



$$M\ddot{x} = 2P + \left(-Kx - 2K\frac{x}{4}\right)$$

$$M\ddot{x} = \frac{3}{8}Kx - Kx - \frac{Kx}{2}$$

$$\boxed{M\ddot{x} + \left(K + \frac{k}{8}\right)x = 0}$$

$$KE = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$PE = \frac{1}{2}Kx^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)k\left(\frac{x}{4}\right)^2$$

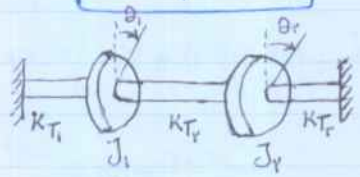
$$\frac{d}{dt}\left(E_{Pot} + E_{kin}\right) = 0$$

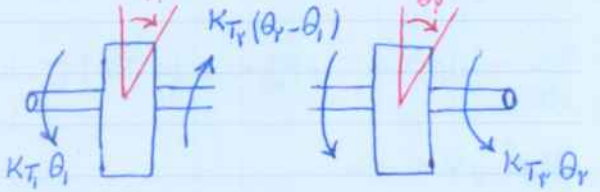
$$\Rightarrow M\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x + k\frac{2\dot{x}}{4}\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(M\ddot{x} + Kx + \frac{kx}{8}\right)\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + \left(K + \frac{k}{8}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K + k/8}{M}}}$$

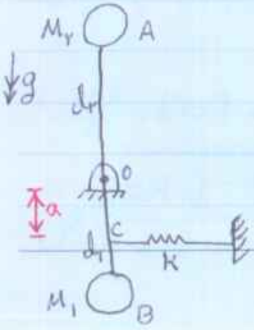


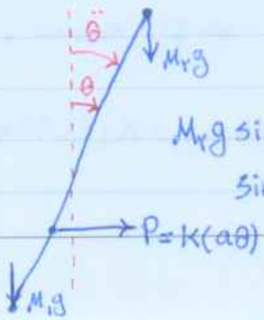


$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -K_{T_1}\theta_1 + K_{T_2}(\theta_2 - \theta_1) \\ J_2\ddot{\theta}_2 = -K_{T_2}(\theta_2 - \theta_1) - K_{T_3}\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + (K_{T_1} + K_{T_2})\theta_1 - K_{T_2}\theta_2 = 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 + (K_{T_3} + K_{T_2})\theta_2 - K_{T_2}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جرم}}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K(T_1) + K_{T_2} & -K_{T_2} \\ -K_{T_2} & (K_{T_3} + K_{T_2}) \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





$$\Sigma M = I_o\ddot{\theta}$$

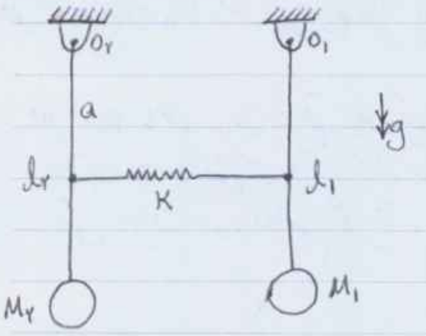
$$I_o = M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2$$

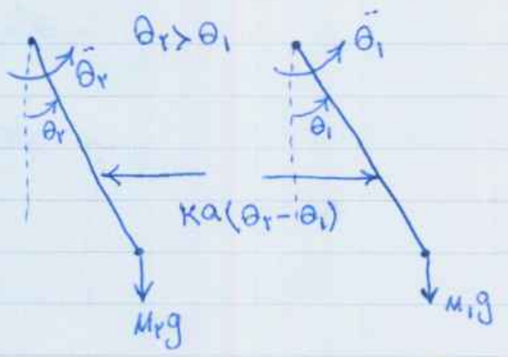
$$M_2 g\sin\theta\, l_2 - M_1 g\, l_1\sin\theta - Pa\cos\theta = I_o\ddot{\theta}$$

$\sin\theta \simeq \theta$ (rad) $\quad \cos\theta \simeq 1 \quad \tan\theta \simeq \theta$

$$I_o \ddot{\theta} + (Ka^2 + M_1 g l_1 - M_2 g l_2)\theta = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{Ka^2 + M_1 g l_1 - M_2 g l_2}{M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2}} > 0$$

اگر $\omega_n > 0$ باشد سیستم نوسان خواهد کرد و شرط نوسان : $Ka^2 + M_1 g l_1 > M_2 g l_2$





$\Sigma M_{O_1} = I_{O_1} \ddot{\theta}_1$

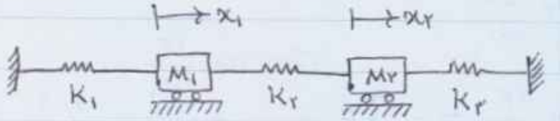
$I_{O_1} = m_1 l_1^2$

$I_{O_2} = m_2 l_2^2$

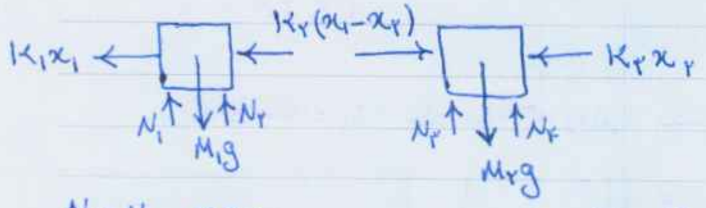
$$\begin{cases} -M_2 g l_2 \sin\theta_2 - Ka(\theta_2 - \theta_1)a = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ -M_1 g l_1 \sin\theta_1 + Ka(\theta_2 - \theta_1)a = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (M_1 g l_1 + Ka^2)\theta_1 - Ka^2 \theta_2 = 0 \\ M_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (M_2 g l_2 + Ka^2)\theta_2 - Ka^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g l_1 + Ka^2 & -Ka^2 \\ -Ka^2 & M_2 g l_2 + Ka^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$x_1 > x_2$ (I)



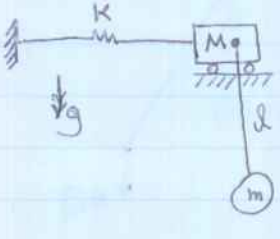
$N_1 + N_2 - M_1 g = 0 \qquad N_3 + N_4 - M_2 g = 0$

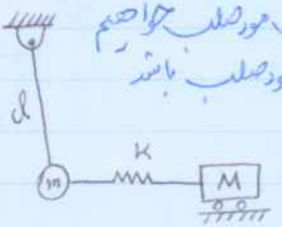
$-K_1 x_1 - K_2(x_1 - x_2) = M_1 \ddot{x}_1 \qquad K_2(x_1 - x_2) - K_3 x_2 = M_2 \ddot{x}_2$

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + (K_1+K_2)x_1 - K_2 x_2 = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + (K_3+K_2)x_2 - K_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

اگر $K_2 = 0$ باشد سیستم به دو سیستم یک درجه آزادی تبدیل می‌شود.

اگر $K_1 = K_3 = 0$ باشد سیستم دارای یک مود صلب خواهد شد.





اگر $K=0$ باشد در دو سیستم روبرو یک مود صلب خواهیم داشت و سیستمی که دارای یک مود صلب باشد به آن سیستم نیمه معین گویند.

پاسخ معادله بصورت روبرو است:

$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi)$

با فرض $\phi = 0$ داریم و جایگذاری در معادلات حرکت بالا

$$\begin{cases} \left[-M_1A_1\omega_1^2 + (K_1+K_2)A_1\right]\cos\omega_1 t - K_2A_2\cos\omega_2 t = 0 \\ -K_2A_1\cos\omega_1 t + \left[-M_2A_2\omega_2^2 + (K_3+K_2)A_2\right]\cos\omega_2 t = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\cos\omega_1 t}{\cos\omega_2 t} = \frac{K_2 A_2}{(K_1+K_2)A_1 - M_1A_1\omega_1^2} = Q \begin{cases} >1 \\ =1 \\ <1 \end{cases}$$

مقدار t اختیاری فرض شده است.

$$Q>1 \rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow Q = \frac{\cos\omega_1 \frac{2\pi}{\omega_2}}{\cos\cancel{\omega_2}\frac{2\pi}{\cancel{\omega_2}}} > 1$$ غ‌ق‌ق

$$Q<1 \rightarrow \frac{\cos\omega_2 t}{\cos\omega_1 t} = \frac{1}{Q} > 1 \rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow Q = \frac{\cos\omega_2\frac{2\pi}{\omega_1}}{\cos 2\pi} > 1$$ غ‌ق‌ق

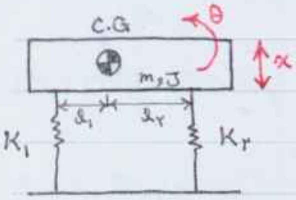
$Q = 1 \rightarrow \cos\omega_1 t = \cos\omega_2 t \rightarrow$ برای همه زمانها $\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$

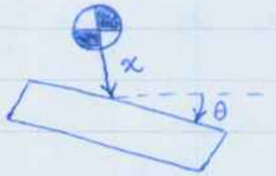
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

اگر ماتریس جرم غیرقطری باشد سیستم دارای کوپلینگ دینامیکی است و اگر ماتریس سختی غیرقطری باشد سیستم دارای کوپلینگ استاتیکی است.

ماتریس جرم وقتی قطری است که $m_{12} = m_{21} = 0$ باشد.
ماتریس سختی وقتی قطری است که $K_{12} = K_{21} = 0$ باشد.

مختصاتی که سیستم را قطری یا دیکوپله می‌کند را مختصات اصلی گویند.





$$\begin{cases} m\ddot{x} = -K_1(x - l_1\theta) - K_2(x + l_2\theta) \\ J\ddot{\theta} = K_1(x - l_1\theta)l_1 - K_2(x + l_2\theta)l_2 \end{cases}$$

این سیستم از لحاظ دینامیکی کوپل نیست ولی از لحاظ استاتیکی دارای کوپلینگ است.

$$\text{(I)}\begin{cases} m\ddot{x} + (K_1 + K_2)x + (K_2 l_2 - K_1 l_1)\theta = 0 \\ J\ddot{\theta} + (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2)\theta + (K_2 l_2 - K_1 l_1)x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & K_2 l_2 - K_1 l_1 \\ K_2 l_2 - K_1 l_1 & K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$M = 3500\ lb \quad K_1 = 2000\ \frac{lb}{ft} \quad K_2 = 2400\ \frac{lb}{ft} \quad l_1 = 4.4\ ft \quad l_2 = 5.6\ ft$

$r_{C.G} = 4\ ft$

$$\text{(I)} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + ax + b\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + dx + c\theta = 0 \end{cases} \qquad a = \frac{K_1 + K_2}{m} = 40.48\ \left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$b = \frac{K_2 l_2 - K_1 l_1}{m} = 42.69\ \left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$c = \frac{1}{J}(K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2) = 65.54\ \left(\frac{rad}{s}\right)^2 \qquad J = Mr^2$$

$$d = \frac{1}{J}(K_2 l_2 - K_1 l_1) = 2.67\ \left(\frac{rad}{s}\right)^2 \qquad x = A\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

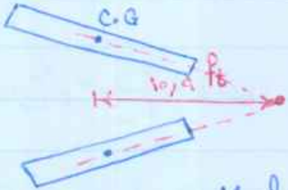
با جایگذاری در روابط بالا داریم:

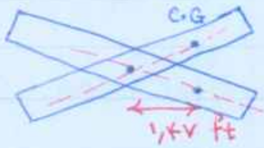
$$\frac{x}{\theta} = \frac{-b}{a - \omega^2} = \frac{c - \omega^2}{d}$$

$$(\omega^2)^2-(a+c)\omega^2+(ac-bd)=0$$
$$ac-a\omega^2-c\omega^2+(\omega^2)^2=bd \Rightarrow \begin{cases}\omega_1^2=34{,}57 \quad \left(\frac{rad}{s}\right)^2\\ \omega_2^2=49{,}52 \quad \left(\frac{rad}{s}\right)^2\end{cases}$$

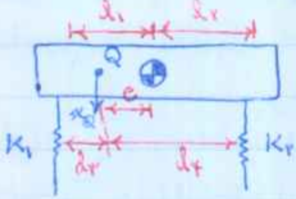
$$\left(\frac{x}{\theta}\right)_1=-10{,}9\ \frac{ft}{rad}\ ,\ \left(\frac{x}{\theta}\right)_2=1{,}47\ \frac{ft}{rad}$$

: Mode shap





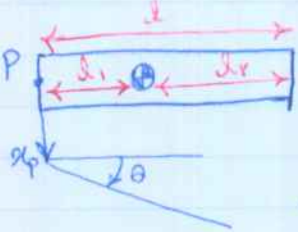
برای دی کوپله کردن سیستم : $K_2 l_2 = K_1 l_1 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1}=\frac{l_1}{l_2}$



نقطه e را به نحوی انتخاب می کنیم که $K_1 l_3 = K_2 l_4$ شود تا سیستم از لحاظ استاتیکی هم دی کوپله گردد .

$$\begin{cases}m\ddot{x}_Q=-K_1(x_Q-l_3\theta)-K_2(x_Q+l_4\theta)-me\ddot{\theta} \longrightarrow \\ J_Q\ddot{\theta}=K_1(x_Q-l_3\theta)l_3-K_2(x_Q+l_4\theta)l_4-me\ddot{x}_Q\end{cases}$$
ترم شتاب زاویه ای

$$\begin{bmatrix}m & me\\ me & J_Q\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_Q\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_1+K_2 & 0\\ 0 & K_1l_3^2+K_2l_4^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_Q\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}m & ml_1\\ ml_1 & J_P\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_P\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_1+K_2 & K_2l\\ K_2l & K_2l^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_P\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

اگر مختصات در نقطه P گرفته شود سیستم از لحاظ استاتیکی و دینامیکی دی کوپله نیست .

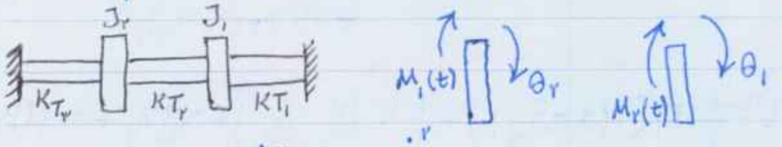
ادامه جواب سوال (I) : با فرض $K_1=K_2=K_3=K$ و $M_1=M_2=M$

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+2Kx_1-Kx_2=0\\ m\ddot{x}_2+2Kx_2-Kx_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1+ax_1+bx_2=0\\ \ddot{x}_2+cx_2+dx_1=0\end{cases}\quad c=a=\frac{2K}{m}\quad b=d=-\frac{K}{m}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\frac{-b}{a-\omega^2}=\frac{c-\omega^2}{-d}\qquad (\omega^2)^2-(a+c)\omega^2+(ac-bd)=0$$

$$(\omega^2)^2-\left(\frac{4K}{m}\right)\omega^2+\frac{3K^2}{m^2}=0 \qquad \omega_{n_1}=\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \omega_{n_2}=\sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$$r_1=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^1=+1 \qquad r_2=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2=-1$$



$$E_{Kin}=T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$$

$$E_{Pot}=U=\frac{1}{2}K_{t_1}\theta_1^2+\frac{1}{2}K_{t_3}\theta_2^2+\frac{1}{2}K_{t_2}(\theta_1-\theta_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_i}+\frac{\partial U}{\partial\theta_i}=Q_{\theta_i}$$ معادله اولر-لاگرانژ :

$$dw_{\theta_1}=M_1(t)\,d\theta_1 \rightarrow Q_{\theta_1}=M_1(t)=\frac{dw_{\theta_1}}{d\theta_1}$$
$$dw_{\theta_2}=M_2(t)\,d\theta_2 \rightarrow Q_{\theta_2}=M_2(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=\frac{1}{2}(2)J_1\dot{\theta}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)=J_1\ddot{\theta}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial\theta_1}=0$$

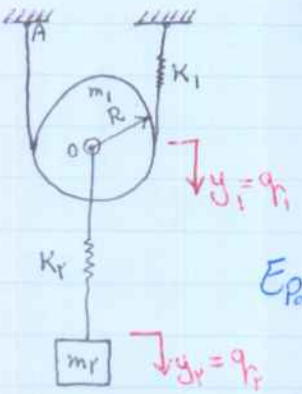
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=\frac{1}{2}(2)J_2\dot{\theta}_2 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)=J_2\ddot{\theta}_2 \qquad \frac{\partial T}{\partial\theta_2}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_1}=\frac{1}{2}(2)K_{t_1}\theta_1+\frac{1}{2}(2)K_{t_2}(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_2}=\frac{1}{2}(2)K_{t_3}\theta_2-\frac{1}{2}(2)K_{t_2}(\theta_1-\theta_2)$$

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1+K_{t_1}\theta_1+K_{t_2}\theta_1-K_{t_2}\theta_2=M_1(t)\\ J_2\ddot{\theta}_2+K_{t_3}\theta_2+K_{t_2}\theta_2-K_{t_2}\theta_1=M_2(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{t_1}+K_{t_2} & -K_{t_2}\\ -K_{t_2} & K_{t_3}+K_{t_2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_1(t)\\ M_2(t)\end{Bmatrix}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_{\theta i}$$

$$E_{Kin}=T_1=\frac{1}{2}m_1\dot y_1^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m_1\dot y_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\left(\frac{\dot y_1}{R}\right)^2+\frac{1}{2}m_2(\dot y_1+\dot y_2)^2$$

جابجایی فنر K_1 دو برابر نقطه O است.

$$E_{Pot}=U=\frac{1}{2}K_1\left(4(y_1-y_{1st})^2\right)+\frac{1}{2}K_2(y_2-y_{2st})^2+m_1gy_1+m_2g(y_1+y_2)$$

$$E_{Kin}=\frac{3}{4}m_1\dot y_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot y_1+\dot y_2)^2$$

$$E_{Pot}=2K(y_1-y_{1st})^2+\frac{1}{2}K_2(y_2-y_{2st})^2+m_1gy_1+m_2g(y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot y_1}=\frac{3}{2}m_1\dot y_1+m_2(\dot y_1+\dot y_2)\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_1}\right)=\frac{3}{2}m_1\ddot y_1+m_2(\ddot y_1+\ddot y_2)\ ,\ \frac{\partial T}{\partial y_1}=0$$

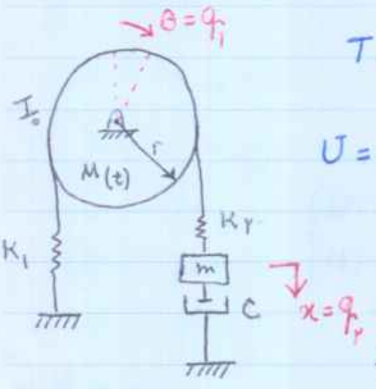
$$\frac{\partial T}{\partial \dot y_2}=m_2(\dot y_1+\dot y_2)\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_2}\right)=m_2(\ddot y_1+\ddot y_2)\ ,\ \frac{\partial T}{\partial y_2}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_1}=4K_1(y_1-\cancel{y_{1st}})+\cancel{m_1g}+\cancel{m_2g}\ ,\ \frac{\partial U}{\partial y_2}=K_2(y_2-\cancel{y_{2st}})+\cancel{m_2g}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}m_1\ddot y_1+m_2(\ddot y_1+\ddot y_2)+4K_1y_1=0\\ m_2(\ddot y_1+\ddot y_2)+K_2y_2=0\end{cases}$$

نیروهای وزن خنثی می‌شوند (ما از آن‌ها با معادل استاتیک که آن‌ها را خنثی می‌کند صرف‌نظر می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1+m_2 & m_2\\ m_2 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot y_1\\ \ddot y_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4K_1 & 0\\ 0 & K_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$



$$T=\frac{1}{2}I_0\dot\theta^2+\frac{1}{2}m\dot x^2$$

$$U=\frac{1}{2}K_1(r\theta)^2+\frac{1}{2}K_2(x-r\theta)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(2)m\dot x\right)=m\ddot x\qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0$$

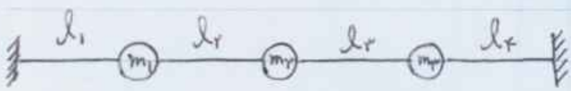
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(2)I_0\dot\theta\right)=I_0\ddot\theta\qquad \frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K_2 (x - r\theta) \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_1 r^2 \theta - K_2 (x - r\theta) r$$

$$dW_\theta = M(t)\,d\theta \rightarrow Q = \frac{dW_\theta}{d\theta} = M(t) \ ، \ dW_x = -(c\dot{x})\,dx \rightarrow Q = \frac{dW_x}{dx} = -c\dot{x}$$

$$\begin{cases} I_0 \ddot{\theta} + (K_1 + K_2) r^2 \theta - K_2 r x = M(t) \\ m\ddot{x} + K_2 x + c\dot{x} - K_2 r x = 0 \end{cases}$$

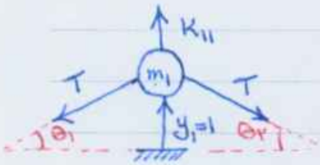
$$\begin{bmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) r^2 & -K_2 r \\ -K_2 r & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



طناب دارای کشش T می باشد و این کشش ثابت است و حرکت درون صفحه افقی است.

$m_1 = m_2 = m_3 = m \qquad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$

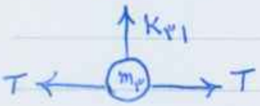
جابجائی واحد به هر عضو وارد می شود تا ماتریس سختی K محاسبه گردد.



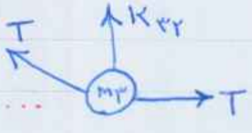
$$K_{11} = T\sin\theta_1 + T\sin\theta_2 \simeq \frac{2T}{l}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{y_1}{l_1} = \frac{1}{l} \quad \sin\theta_2 = \frac{y_1}{l_2} = \frac{1}{l}$$

$$K_{21} = -T\sin\theta_2 = -\frac{T}{l_2}$$



$$K_{31} = 0$$



$$K_{12} = -T\sin\theta_2 = -\frac{T}{l_2} \qquad K_{22} = T\sin\theta_2 + T\sin\theta_3 \qquad K_{32} = -\frac{T}{l_3}$$

$$K_{22} = \frac{T}{l_2} + \frac{T}{l_3}$$

$$K_{13} = 0 \qquad K_{23} = -\frac{T}{l_3} \qquad K_{33} = \frac{T}{l_3} + \frac{T}{l_4}$$

$$K = T\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) & -\frac{1}{l_2} & 0 \\ -\frac{1}{l_2} & \left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right) & -\frac{1}{l_3} \\ 0 & -\frac{1}{l_3} & \left(\frac{1}{l_3}+\frac{1}{l_4}\right) \end{bmatrix} \qquad M = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{T}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad [A] = [K] - \omega^2 [m]$$

$|A| = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه $\xrightarrow{\text{حل}}$ فرکانس طبیعی

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2T}{l} - m\omega^2 & -\frac{T}{l} & 0 \\ -\frac{T}{l} & \frac{2T}{l} - m\omega^2 & -\frac{T}{l} \\ 0 & -\frac{T}{l} & \frac{2T}{l} - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \left(\frac{ml}{T}\right)^3 (\omega^2)^3 - 6\left(\frac{ml}{T}\right)^2 + 10\left(\frac{ml}{T}\right)(\omega^2) - 4 = 0$$

با فاکتورگیری از رابطه $\frac{2T}{l} - m\omega^2$ از معادله مشخصه به رابطه زیر می‌رسیم: $\left(\frac{2T}{l} - m\omega^2\right) = 0$

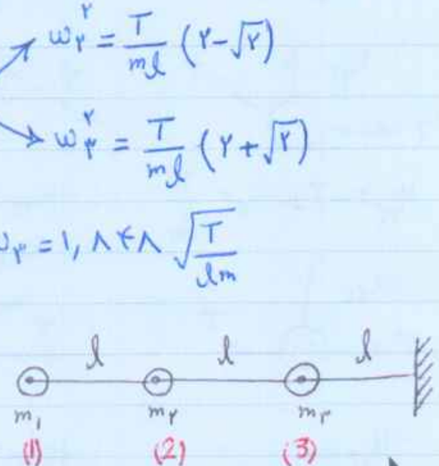
$$\left(\frac{2T}{l} - m\omega^2\right)\left[\left(\frac{2T}{l} - m\omega^2\right)^2 - \frac{2T^2}{l^2}\right] = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T}{ml}} \qquad \frac{2T}{l} - m\omega^2 = \pm\sqrt{2}\,\frac{T}{l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{T}{ml}\left(2 - \sqrt{2}\right) \qquad \omega_3^2 = \frac{T}{ml}\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

$$\omega_1 = 0.765\sqrt{\frac{T}{ml}} \qquad \omega_2 = 1.414\sqrt{\frac{T}{ml}} \qquad \omega_3 = 1.848\sqrt{\frac{T}{lm}}$$

نیروی واحد به هر نقطه وارد می‌شود تا ماتریس نرمی را بدست آوریم.

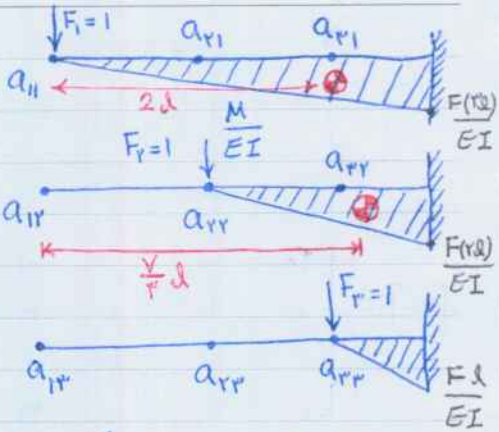


$$a_{32} = a_{23} = \frac{5}{6}\frac{l^3}{EI} \qquad a_{22} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}(2l)^2\,\frac{7}{3}l\right) = \frac{14}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EI} \qquad a_{33} = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{EI}(3l)\right)(2l) = \frac{27}{3}\frac{l^3}{EI}$$



$$[a] = \frac{l^3}{3EI}\begin{bmatrix} 27 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 2.5 \\ 4 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$

سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم و در بازوی مربوطه ضرب می‌کنیم تا نقطه مورد که گشتاور آن محاسبه شود.

ماتریس واحد

$$\left|[a][m] - \frac{1}{\omega^2}[I]\right| = 0$$

با حل دترمینان روبرو به معادله مشخصه می‌رسیم و از روی آن فرکانسهای طبیعی را محاسبه می‌کنیم.

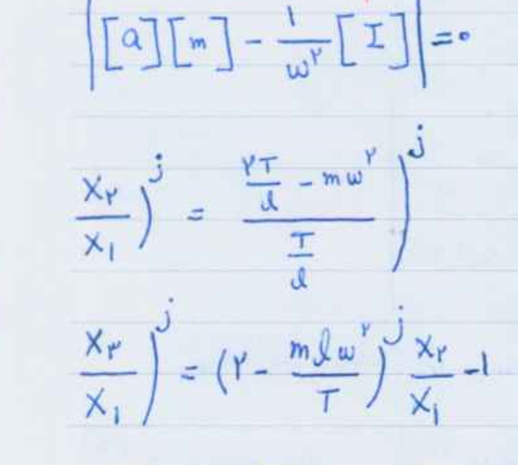
$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right)^j = \left.\frac{\frac{2T}{l} - m\omega^2}{\frac{T}{l}}\right)^j$$

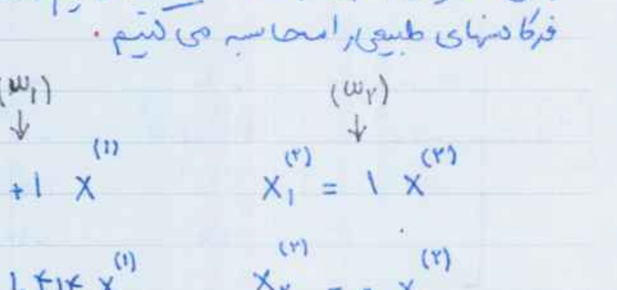
$$\left.\frac{X_3}{X_1}\right)^j = \left(2 - \frac{ml\omega^2}{T}\right)^j \frac{X_2}{X_1} - 1$$

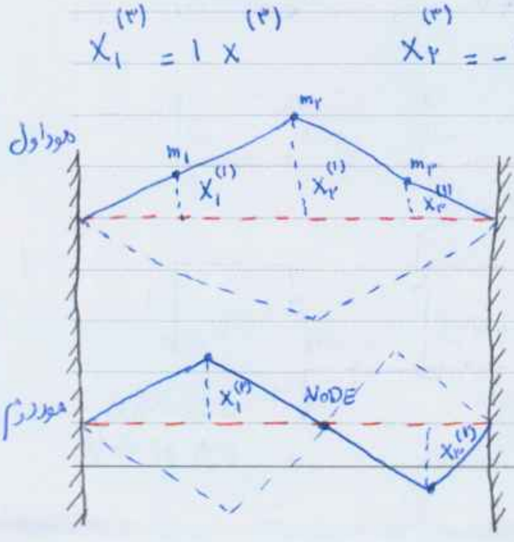
(ω_1): $X_1^{(1)} = +1\,X^{(1)}$, $X_2^{(1)} = 1.414\,X^{(1)}$, $X_3^{(1)} = +1\,X^{(1)}$

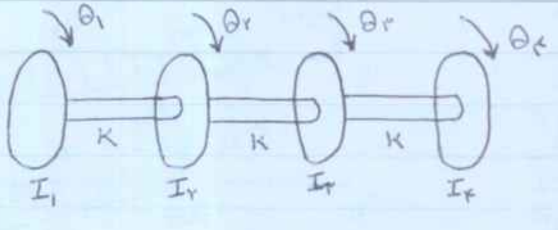
(ω_2): $X_1^{(2)} = 1\,X^{(2)}$, $X_2^{(2)} = 0\,X^{(2)}$, $X_3^{(2)} = -1\,X^{(2)}$

$X_1^{(3)} = 1\,X^{(3)}$ $\quad X_2^{(3)} = -1.414\,X^{(3)}$ $\quad X_3^{(3)} = 1\,X^{(3)}$ $\leftarrow (\omega_3)$









$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_4$

$I_1 = I_4 = 20 \ kg\,m^2$

$I_2 = I_3 = 10 \ kg\,m^2$

$K = 10^5 \ N.m/rad$

$$[M] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} kg\cdot m^2 \qquad [K] = \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & -K & 0 & 0 \\ -K & 2K & -K & 0 \\ 0 & -K & 2K & -K \\ 0 & 0 & -K & 2K \end{bmatrix}$$

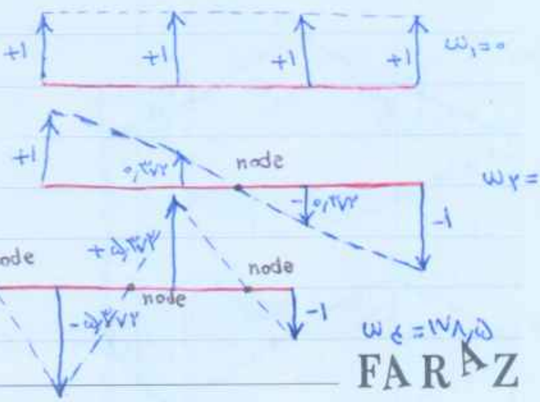
$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^5 \ N.m/rad$$

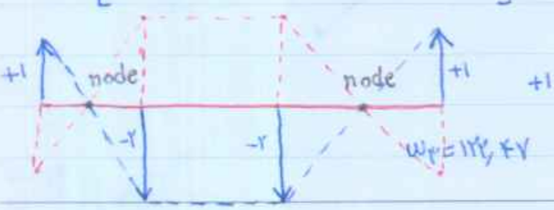
$$[A] = \begin{bmatrix} 10^5 - 20\omega^2 & -10^5 & 0 & 0 \\ -10^5 & 2\times10^5 - 10\omega^2 & -10^5 & 0 \\ 0 & -10^5 & 2\times10^5 - 10\omega^2 & -10^5 \\ 0 & 0 & -10^5 & 10^5 - 20\omega^2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه بدست می‌آید ← با حل این معادله مشخصه ← فرکانس‌های طبیعی حاصل می‌شود

$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = 54.02 \ rad/s \qquad \omega_3 = 122.47 \ rad/s \qquad \omega_4 = 178.5 \ rad/s$

$$[\nu] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +0.372 & -2 & -5.372 \\ +1 & -0.372 & -2 & +5.372 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$





$$\{x\}^{(j)^T}[K]\{x\}^{(i)} = 0 \quad i \neq j \qquad \{x\}^{(i)^T}[K]\{x\}^{(i)} = K_{ii} \quad i=j$$

$$\{x\}^{(j)^T}[M]\{x\}^{(i)} = 0 \quad i \neq j \qquad \{x\}^{(i)^T}[M]\{x\}^{(i)} = M_{ii} \quad i=j \quad i=1,2,3,\dots$$

$i=1,2,3,\dots$

$M_{11} = 60\ kg \cdot m^2 \quad M_{22} = 42.77\ kg \cdot m^2 \quad M_{33} = 120\ kg \cdot m^2 \quad M_{44} = 617.2\ kg \cdot m^2$

$$X_2^T M X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.372 & -0.372 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= (20 \times 1) - (3.72 \times 2) + (3.72 \times 2) - (20 \times 1) = 0$$

$$X_1^T M X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.72 \\ -3.72 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$m = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad X_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

پس x_1 و x_2 پاسخ‌های ماتریس m می‌باشد.

$$X_1^T M X_2 = -0.5 \times 2m + 1 \times m = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad \{x\}^{(1)} = X_1 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \qquad \{x\}^{(2)} = X_2 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\}^{(3)} = X_3 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} \qquad \{X\}^{(i)^T}[M]\{X\}^{(i)} = M_{ii}$$

$$i=1 \rightarrow m X_1^2 (1^2 + 1.8019^2 + 2.2470^2) = 1 \qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{m}\,(9.1959)} = \frac{0.328}{\sqrt{m}}$$

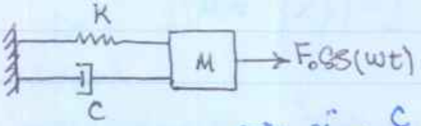
$$i=2 \rightarrow m X_2^2 (1^2 + 0.445^2 + (-0.802)^2) = 1 \qquad X_2 = \frac{0.737}{\sqrt{m}} =$$

$$i=3 \rightarrow m X_3^2 (1^2 + (-1.2468)^2 + (0.5544)^2) = 1 \qquad X_3 = \frac{0.5911}{\sqrt{m}}$$

با فرض $m=100$ مقادیر x_1 و x_2 و x_3 بدست می‌آید که در ماتریس‌های فوق ضرب شود

FARAZ

$$X^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.032850 \\ 0.05910 \\ 0.07370 \end{Bmatrix} \qquad X^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.07370 \\ 0.03279 \\ -0.05910 \end{Bmatrix} \qquad X^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.05911 \\ -0.07349 \\ 0.03277 \end{Bmatrix}$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}\,\frac{k}{k}\,F_0 \cos(\omega t)$$

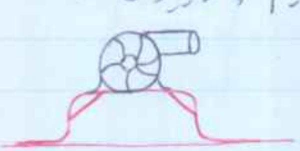
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \frac{F_0}{k} \cos(\omega t)$$

$$x(t) = X_{out}\, e^{i\omega t} \qquad F_0 \cos(\omega t) = X_{Static}\, e^{i\omega t}$$

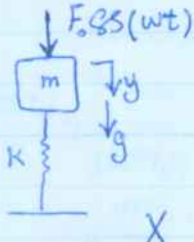
$$H(j\omega) = \frac{X_{out}}{X_{Static}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \qquad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

مثال: وزن فنی که برروی سازه‌ای نصب شده است ۵۰۰ lb است و یک جابجایی عمودی برابر $\delta = 0.026$ in به سازه می‌دهد. فرکانس سیستم $\omega = 1750$ rpm است. اگر با نصب دونده دارنده سختی سیستم دوبرابر شود $K' = 2K$ آنگاه فرکانس طبیعی سیستم چقدر تغییر می‌کند؟



$$\omega = 1750\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 183.26\ \frac{rad}{s}$$



$$\delta = 0.026\,in = 0.00066\,m$$

$$\omega_n\Big)^{before} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = 121.88\ \frac{rad}{s} \qquad \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{before} = \frac{183.26}{121.88} = 1.504$$

$$X_{Static}\cdot |H(\omega)|^{before} = \frac{F_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \underbrace{\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}_{\text{صفر}}}} = \frac{F_0}{k}\,(0.8)$$

$$\omega_n\Big)^{after} = \sqrt{2}\ \omega_n\Big)^{before} = 172.36\ \frac{rad}{s}$$

$\hookrightarrow$ سختی $K' = 2K$

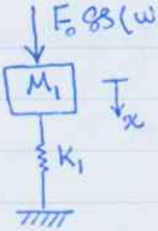
$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{after} = \left(\frac{183.24}{172.34}\right) = 1.063 \qquad X_{Static} \cdot \left|H(\omega)\right|^{after} = \frac{F_0}{K}(7.667)$$

$$\frac{\left|H(\omega)\right|^{after}}{\left|H(\omega)\right|^{befor}} = \frac{7.667}{0.8} = 9.58$$

با اضافه کردن تله دارنده که سختی سیستم دو برابر شد اما ارتعاشات آن نزدیک به ۱۰ برابر می‌شود و این کار مجاز نخواهد بود.

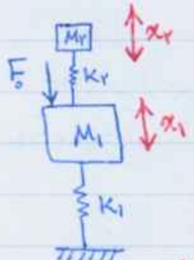
مثال: از زیر یک ساختمان قطار شهری گذر می‌کند. ساختمان را یک سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی در نظر بگیرید که دارای فرکانس طبیعی $\omega_n = 95.5\ Hz$ است. به ساختمان یک جرم و فنر اضافه می‌کنیم که سیستم را دو درجه آزادی خواهد کرد که جرم اضافه شده $m = 200\ lb$ خواهد بود. با اضافه شدن این جرم و فنر فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n = 85.4\ Hz$ خواهد شد. مقدار سختی فنر اضافه شده و همچنین دامنه ارتعاشات در حالت دوم و جرم ساختمان را محاسبه کنید؟

دامنه ساختمان در نیروی $14\ tonf$ برابر فرکانس $\omega = 550 \frac{rad}{s}$ است.



$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}} = 95.5\left(\frac{2\pi}{1}\right) = 600 \frac{rad}{s}$$

$$F_0 = 14 \quad tonf \qquad \omega = 550 \frac{rad}{s}$$



$$M_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 - K_2(x_1 + x_2) + F_0$$
$$M_2 \ddot{x} = -K_2(x_2 - x_1)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - M_1\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 - M_2\omega^2 \end{bmatrix}}^{A} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -K_2 \\ 0 & K_2 + M_2\omega^2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} K_1 + K_2 - M_1\omega^2 & F_0 \\ -K_2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$|A| = 0 \rightarrow$ معادله مشخصه حاصل می‌شود

$$(K_1 + K_2 - M_1\omega^2)(K_2 - M_2\omega^2) - K_2^2 = 0$$
$$M_1 M_2 (\omega^2)^2 - (K_1 M_2 + K_2 M_1 + K_2 M_2)\omega^2 + K_1 K_2 = 0$$

$\cos(\omega t) = 1$ فرض می‌کنیم.

$$x_1 = \frac{(K_2 + M_2\omega^2) F_0 \cos(\omega t)}{|A|} \qquad x_2 = \frac{K_2 F_0 \cos(\omega t)}{|A|}$$

1) $x_1 = 0 \rightarrow K_2 = M_2 \omega^2 = (200\,lb)(550\,\frac{rad}{s}) = 70\ \text{ton f}/_{in}$

اگر فنر اضافه شده دارای سختی معادل بالا باشد ساختمان دیگر ارتعاشی نخواهد داشت.

2) $$x_2\Big|_{\omega = 550\frac{rad}{s}} = \frac{-K_2 F_0}{(K_1+K_2-M_1\omega^2)(K_2-M_2\omega^2)-K_2^2} = -\frac{F_0}{K_2} = -\frac{14}{70} = 0.2^{in}$$

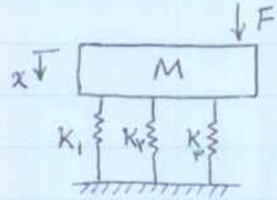
حاصلضرب ریشه‌ها در معادله مشخصه $\omega_1 \times \omega_2 = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}\frac{K_2}{M_2}}$ است و

$$\omega_n)_{2nd} = \frac{\omega_n)_{build} \times \omega)_{forcing}}{\omega_1} = \frac{600 \times 550}{85.4(2\pi)} = 615\,\frac{rad}{s} > 600\,\frac{rad}{s}$$

جمع ریشه‌ها در معادله مشخصه

$$\underset{85.4(2\pi)\frac{rad}{s}}{\omega_1^2} + \underset{615\frac{rad}{s}}{\omega_2^2} = \frac{\overbrace{K_1}^{600}}{M_1} + \frac{\overbrace{K_2}^{550}}{M_2}\left(1+\frac{\overset{200\,lb}{M_2}}{M_1}\right)$$

$\Rightarrow M_1 = 17000\,lb = 7.4$ ton

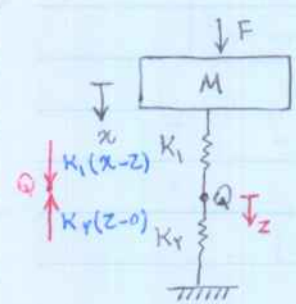


فنرهای معادل :

فنرهای موازی : جابجایی یکسان دارند اما نیروهای مختلفی را تحمل می‌کنند.

$$M\ddot{x} = F - K_1 x - K_2 x - K_3 x$$

$$M\ddot{x} = F - (K_1+K_2+K_3)x = F - K_{eq}x \qquad K_{eq} = \sum_{i=1}^{n} K_i$$



فنرهای سری : نیروهای یکسان تحمل می‌کنند اما جابجایی نسبی آنها متغیر است.

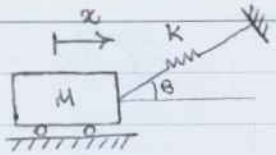
$$M\ddot{x} = F - K_1(x-z)$$

$$K_1(x-z) - K_2(z-0) = \cancel{m_Q}\ddot{z} \quad \text{صفر}$$

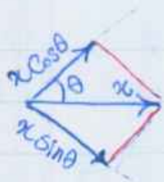
$$(K_1+K_2)z = K_1 x \quad \Rightarrow z = \frac{K_1}{K_1+K_2}x$$

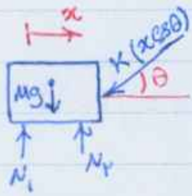
$$M\ddot{x} = F - K_1\left[x - \left(\frac{K_1}{K_1+K_2}\right)x\right] = F - \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)x = F - K_{eq}x$$

$$\leftarrow \quad 1/K_{eq} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}$$



$K_{eq} = K_i \cos^{2}\theta$





$K_{eq} = \sum_{i=1}^{n} K_i \cos^{2}\theta_i$

$M\ddot{x} = -\underbrace{\left[K x \cos\theta\right]\cos\theta}_{K_{eq}}$

$N_1 + N_2 - (Kx\cos\theta)\sin\theta - mg = 0$

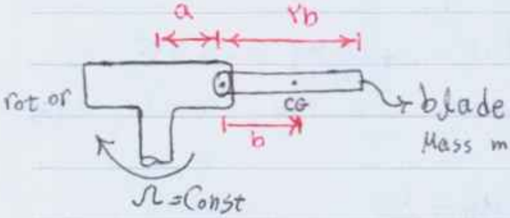
$M\ddot{x} + K_{eq}x = 0$

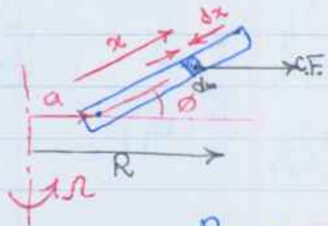
$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$: دمپرهای سری

$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$: دمپرهای موازی

$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cos^{2}\theta_i$: دمپرهای تحت زاویه

مثال:





$C.F. = (dm)R\Omega^{2} = \rho(a + x\cos\phi)\Omega^{2}dx$

$R = a + x\cos\phi$

$dm = \rho dx \rightarrow \rho = \frac{M}{2b} \rightarrow M = 2b\rho$

Moment of C.F. of element dx about O $= \left[\rho(a + x\cos\phi)\Omega^{2}dx\right] x\sin\phi$

Total Moment of blades C.F. $\Rightarrow M_o = \int_0^{2b} (\rho a \Omega^{2}\sin\phi)x\,dx + \int_0^{2b} (\rho\Omega^{2}\sin\phi\cos\phi)x^{2}dx$

$= M a b \Omega^{2}\sin\phi + \frac{4}{3} M b^{2}\Omega^{2}\sin\phi\cos\phi = I_o\ddot{\phi}$

$I_o = I_{C.G} + Mb^{2} = \frac{Mb^{2}}{3} + Mb^{2} = \frac{4}{3}Mb^{2}$

$I_{C.G} = \frac{ML^{2}}{12} = \frac{M(2b)^{2}}{12} = \frac{Mb^{2}}{3}$

$\frac{4Mb^{2}}{3}\ddot{\phi} = -\left[M a b\Omega^{2}\sin\phi + \frac{4}{3}Mb^{2}\Omega^{2}\sin\phi\cos\phi\right]$

برای ϕ های کوچک : $\sin\phi = \phi \qquad \cos\phi = 1$

$$4b^2\ddot{\phi} + [3ab + 4b^2]\Omega^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \left[1 + \frac{3a}{4b}\right]\Omega^2\phi = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{1 + \frac{3a}{4b}}\;\Omega \quad \frac{rad}{s}$$

$\omega_n > \Omega$ ، $b > a$ اگر $a = 0$ باشد $\omega_n = \Omega$ می‌شود.

فرمول دانکرلی :
برای سیستم‌های n درجه آزادی

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, m_i$$

a_{ii} ضریب نرمی سیستم است $\left(\frac{1}{K}\right)$

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$$

$$\frac{1}{\omega_4^2} \ll \frac{1}{\omega_3^2} \ll \frac{1}{\omega_2^2} \ll \frac{1}{\omega_1^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\omega_1^2} \simeq a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n}$$

فرمول تقریبی دانکرلی

$$(\omega_1)_{Dunk} < (\omega_1)_{\text{دقیق}} < (\omega_1)_{\text{ریلی}} \qquad a_{11} = \frac{1}{K_{11}}$$

روش کسر ریلی :
اگر $\{x\}$ دقیق باشد ω هم واقعی خواهد بود.

$$\omega^2 = \frac{\{x\}^T[K]\{x\}}{\{x\}^T[M]\{x\}}$$

ترکیب خطی $X = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots$

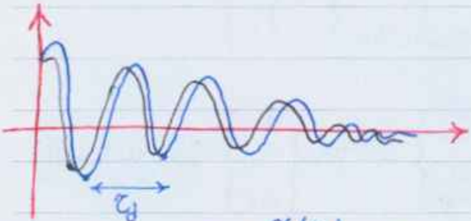
$$\{x\}^T[K]\{x\} = c_1^2\{x_1\}^T[K]\{x_1\} + c_2^2\{x_2\}^T[K]\{x_2\} + \cdots$$

$$\{x_i\}^T[K]\{x_i\} = \omega_i^2\{x_i\}^T[M]\{x_i\}$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_1^2\left[1 + c^2\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1\right)\frac{X_2^T M x_2}{X_1^T K x_1} + \cdots\right]} \qquad \omega^2 > \omega_1^2$$

$$F_0 e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{H_{x/F}} \longrightarrow X e^{i\omega t} \qquad \left|\frac{X}{F}\right| = \left|H_{x/F}(\omega)\right|$$

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi) \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$



$$\frac{x(t_1)}{x(t_1+n\tau_d)} = \frac{e^{-\xi\omega_n t_1}}{e^{-\xi\omega_n (t_1+n\tau_d)}} = e^{\xi \omega_n n \tau_d}$$

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_1+n\tau_d)}\right) = n\xi\omega_n \tau_d = n\xi \cancel{\omega_n} \frac{2\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi n \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

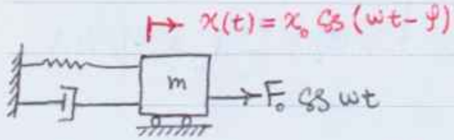
$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{2\pi n} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_1+n\tau_d)}\right)$$

از ترم $\sqrt{1-\xi^2}$ به دلیل کوچک بودن صرف‌نظر می‌کنیم.

n را به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که $x(t_1+n\tau_d) = 50\%\, x(t_1)$ که داریم:

$$\xi = \frac{1}{2\pi n_{50\%}} \ln(2) \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{0.11}{n_{50\%}}}$$

اگر به جای ω_d در ترم پاسخ ω_n را بگذاریم فقط اختلاف فاز در پاسخ بوجود می‌آید.



$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t}$$
$$x = X e^{i\omega t}$$

با قرار دادن پاسخ در معادله اصلی داریم:

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K) X \cancel{e^{i\omega t}} = F_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \qquad \xi = \frac{C}{2m\omega_n}$$

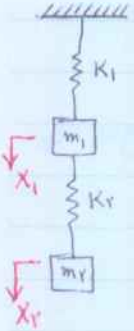
$$\frac{X}{F_0} = H_{X/F_0} = \frac{1}{-M\omega^2 + i\omega C + K}$$

$$\frac{X}{F_0} = \frac{1/K}{\left[\underbrace{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}_{a} + \underbrace{\left(2i\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)}_{b}\right]} = \frac{1}{K}\frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{1}{K}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{-i\phi}}{(a^2+b^2)} = \frac{1}{K}\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{X}{F_0} = \left| H_{X/F_0} \right| e^{-i\phi} \qquad \left| H_{X/F} \right| = \frac{1/K}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{I_m}{R_e}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

Subject: 28
Year: Month: Date:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \varphi) \qquad \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\begin{bmatrix} 2K - m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} K_1 = K_2 = K \\ m_1 = m_2 = m \end{matrix}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2\omega^4 - 3Km\omega^2 + K^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,\frac{K}{m} \;\begin{cases} \omega_1 = 0.618\sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_2 = 1.618\sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

$$(2K - m\omega^2)a_1 - Ka_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{K}{2K - m\omega^2} \;\begin{cases} \omega_1 : \left.\frac{a_1}{a_2}\right|_1 = 0.618 \\ \omega_2 : \left.\frac{a_1}{a_2}\right|_2 = -1.618 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 , \begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1 \end{Bmatrix}_2$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = A_1 \begin{Bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \Rightarrow \left(-\omega^2[M] + [K]\right)\{x\} = \{0\} \qquad [K]^{-1} = [a]$$

$$\times [K]^{-1} \Rightarrow \left(-\omega^2[a][M] + I\right)\{x\} = \{0\} \qquad \left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0$$

$$\omega^2 = \lambda \Rightarrow \left([a][M] - \frac{1}{\lambda}[I]\right)\{x\} = \{0\} \qquad \left|[a][m] - \frac{1}{\lambda}[I]\right| = 0$$

$$[u]^T[M][u] = [M_{ii}] = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & M & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \qquad [u]^T[K][u] = [K_{ii}] = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & K & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

FARAZ

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \qquad \{x\} = [\tilde{u}]\{y\} \qquad \{\ddot{x}\} = [\tilde{u}]\{\ddot{y}\}$$

$$\underbrace{[\tilde{u}]^T[M][\tilde{u}]}_{[I]}\{\ddot{y}\} + \underbrace{[\tilde{u}]^T[K][\tilde{u}]}_{\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}}\{y\} = [\tilde{u}]^T\{F\}$$

$$\{x\} = [u]\{y\}$$

$$\underbrace{[u]^T[M][u]}_{[M_{ii}]}\{\ddot{y}\} + \underbrace{[u]^T[K][u]}_{[K_{ii}]}\{y\} = [u]^T\{F\}$$

مثال: معادله حرکت سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر است :

$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + K\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad [u] = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[u]^T[M][u] = m\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[u]^T[K][u] = K\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + K\begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.5m\ddot{y}_1 + 0.75Ky_1 = F_2 \\ 3m\ddot{y}_2 + 6Ky_2 = F_2 \end{cases} \Rightarrow y_i = \overbrace{y_{i(0)}\cos\omega_i t + \frac{\dot{y}_{i(0)}}{\omega_i}\sin\omega_i t}^{\text{حل عمومی}} + \overbrace{\frac{F_2}{K}\frac{\sin\omega_i t}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}}^{\text{حل ماندگار}}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left| [a][M] - \frac{1}{\lambda}[I] \right| = 0 \qquad [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad [a][m] = \begin{bmatrix} m_1 a_{11} & m_2 a_{12} & m_3 a_{13} \\ m_1 a_{21} & m_2 a_{22} & m_3 a_{23} \\ m_1 a_{31} & m_2 a_{32} & a_{33} m_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}m_1 - \frac{1}{\lambda} & a_{12} m_2 & a_{13} m_3 \\ a_{21} m_1 & a_{22} m_2 - \frac{1}{\lambda} & a_{23} m_3 \\ a_{31} m_1 & a_{32} m_2 & a_{33} m_3 - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 + A\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + B\left(\frac{1}{\lambda}\right) + C = 0$$

$$A = -(a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + a_{33} m_3)$$

$$B = (a_{11} a_{22} m_1 m_2 + a_{22} a_{33} m_2 m_3 + a_{11} a_{33} m_1 m_3) - (a_{12} a_{21} m_1 m_2 + a_{23} a_{32} m_2 m_3 + a_{13} a_{31} m_1 m_3)$$

$$C = m_1 m_2 m_3 (a_{11} a_{23} a_{32} + a_{22} a_{13} a_{31} + a_{33} a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{32} a_{13} a_{21})$$

معادله فوق دارای سه ریشه به صورت زیر است :

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + (\dots)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (\dots) = 0$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + a_{33} m_3 = -A$$

برای یک سیستم n درجه آزادی :

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{K_{ii}}$$

$$\frac{1}{\omega_1} > \frac{1}{\omega_2} > \frac{1}{\omega_3} > \dots > \frac{1}{\omega_n} \qquad \frac{1}{\omega_1^2} \gg \frac{1}{\omega_2^2} \gg \frac{1}{\omega_3^2} \gg \dots \gg \frac{1}{\omega_n^2}$$

با تقریب خوبی می توان نوشت :

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n \approx \frac{m_1}{K_{11}} + \frac{m_2}{K_{22}} + \dots + \frac{m_n}{K_{nn}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2\pi f)^2} + \frac{1}{(2\pi f_1)^2} + \frac{1}{(2\pi f_2)^2} + \cdots$$

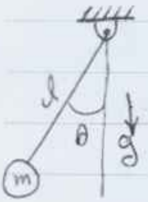
مثال: یک بالک هواپیما به جرم $m_1=1.5\,lb$ با $f_1=30\,Hz$ فرکانس می کند، با اضافه کردن جرم $1.5\,lb$، $m_2=1.5+1.5$ با فرکانس $f_2=24\,Hz$ نوسان می کند. فرکانس طبیعی جزء دوم اضافه شده چقدر است؟

system = Flap + mass $\qquad lb \div 32.2 = slug$

$$\frac{1}{(2\pi\times 30)^2} = \frac{1}{(2\pi f_{flap})^2} + m_2 a_{22} = \frac{1}{(2\pi f_{flap})^2} + \frac{1.5\,a_{22}}{32.2\times 12}$$

$$\frac{1}{(2\pi (24))^2} = \frac{1}{(2\pi f_{flap})^2} + \frac{3a_{22}}{32.2\times 12} \qquad K_{22} = \frac{1}{a_{22}} = 244\ \frac{lbf}{in}$$

$$f_{flap} = 45.3\ Hz$$



$$P.E = mgl(1-\cos\theta) \qquad (P.E)_{max} = mgl(1-\cos\alpha) = mgl\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$K.E = \frac{1}{2}m(l\dot\theta)^2$$

فرض $\theta(t) = \alpha\sin(\omega_n t) \Rightarrow \theta_{max} = \alpha \qquad (K.E)_{max} = \frac{1}{2}m(l\alpha\omega_n)^2$

$$\dot\theta(t) = \alpha\omega_n\cos(\omega_n t) \Rightarrow \dot\theta_{max} = \alpha\omega_n$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

با برابر قرار دادن $(P.E)_{max} = (K.E)_{max}$ داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$K = \frac{3EI}{l^3} \qquad P.E = \frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{l^3}\right)y^2$$

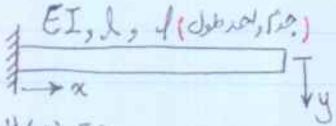
$K.E = \frac{1}{2}m\dot y^2 \qquad$ فرض $y = A\sin\omega_n t$

$$\dot y = A\omega_n\cos\omega_n t$$

$$(P.E)_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{l^3}\right)A^2 \qquad (K.E)_{max} = \frac{1}{2}m(\omega_n A)^2$$

با برابر قرار دادن $(P.E)_{max} = (K.E)_{max}$ داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$



$$-EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ معادله حاکم بر مسئله

$y(0)=0$

(شیب) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ (گشتاور) $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=l}=0$ (نیروی برشی) $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=l}=0$

$$y(x)=y_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)\sin\frac{\pi x}{2l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-y_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)^3\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$P.E=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx=\frac{EI}{2}\int_0^l\left[y_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi x}{2l}\right]^2dx=\frac{EI}{2}\left[y_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\right]^2\int_0^l\left(\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2$$

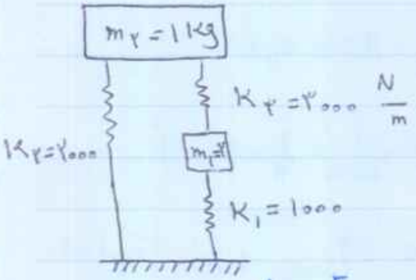
$$K.E=\frac{1}{2}\rho\omega_n^2\int_0^l y^2dx=\frac{1}{2}\rho\omega_n^2y_0^2\int_0^l\underbrace{\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2}_{1-2\cos\frac{\pi x}{2l}+\underbrace{\cos^2\frac{\pi x}{2l}}_{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{2l}\right)}}dx$$

$$P.E=\frac{\pi^4}{64}\frac{EI}{l^3}(y_0)^2$$

$$K.E=\frac{1}{4}\rho\omega_n^2(y_0)^2l\left(3-\frac{8}{\pi}\right)$$

$$P.E=K.E\Rightarrow\omega_n^2=\frac{\pi^4\frac{EI}{l^3}}{16\rho l\left(3-\frac{8}{\pi}\right)}$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^4\frac{EI}{l^3}}{16\rho l\left(3-\frac{8}{\pi}\right)}\right]^{1/2}\approx\frac{1}{2\pi}\left(\frac{3.664}{l^2}\right)\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$



$$m=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}\underset{K_1+K_2}{4000}&\underset{-K_2}{-3000}\\\underset{-K_2}{-3000}&\underset{K_2+K_3}{5000}\end{bmatrix}$$

$$\det\left[K-\omega^2M\right]=0\Rightarrow\omega_1=30.03\ rad/s$$

Subject: 33

Year: Month: Date:

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \qquad X = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega_1 = 31{,}42 \ rad/s$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = 30{,}48 \ rad/s$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = 31{,}42 \ rad/s$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = 34{,}51 \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = 54{,}77$$

ارتعاشات طولی میله :

u , v : جابجایی

u' , v' : شیب

ϕ_i و ϕ_j : مود شکل

$$P.E = \frac{1}{2}\int_0^l EA (u')^2 \, dx$$

$$K.E = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \qquad Mass = \int_0^l \rho A \, \phi_i \phi_j \, dx$$

Stiffness (سختی) $= \int_0^l EA \, \phi_i' \phi_j' \, dx$

ارتعاشات طولی تیر :

$$P.E = \frac{1}{2}\int_0^l EI (v'')^2 \, dx$$

$$K.E = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx \qquad Mass = \int_0^l \rho A \, \phi_i \phi_j \, dx$$

$$Stiffness = \int_0^l EI \, \phi_i'' \phi_j'' \, dx$$

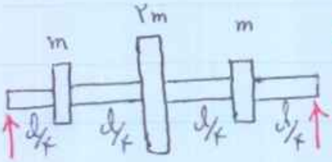
ارتعاشات طولی شفت :

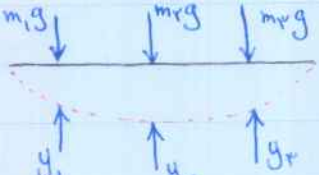
$$P.E = \frac{1}{2}\int_0^l GJ(\theta)^2 dx$$

$$K.E = \frac{1}{2}\int_0^l \rho J \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 dx \qquad Mass = \int_0^l \rho J \phi_i \phi_j \, dx$$

$$Stiffness = \int_0^l GJ \phi_i' \phi_j' \, dx$$

مثال: سه دیسک مطابق شکل بر روی تیری نصب شده است.
طول تیر l می باشد. با دو روش ریلی و دان کرلی آن را تحلیل کنید.





کسر ریلی :

$$P.E = \frac{1}{2}g(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3) = \frac{g}{2}\sum m_i y_i$$

$$K.E = \frac{1}{2}(m_1 \underbrace{v_1^2}_{\omega y_1} + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i y_i^2$$

$$P.E = K.E \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{g\sum m_i y_i}{\sum m_i y_i^2}$$

دان کرلی :

$$a_{11} = \frac{9l^3}{768EI} \qquad a_{12} = \frac{11l^3}{768EI} \qquad a_{13} = \frac{7l^3}{763EI}$$

$$a_{22} = \frac{16l^3}{768EI} \qquad a_{23} = \frac{11l^3}{768EI} \qquad a_{33} = \frac{9l^3}{768EI}$$

جابجایی های سه نقطه با روابط زیر بدست می آید :

$$y_1 = m_1 g a_{11} + m_2 g a_{12} + m_3 g a_{13}$$

$$y_2 = m_1 g a_{21} + m_2 g a_{22} + m_3 g a_{23}$$

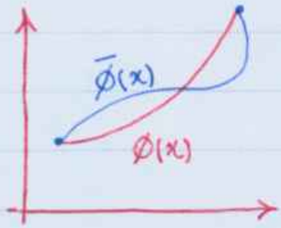
$$y_3 = m_1 g a_{31} + m_2 g a_{32} + m_3 g a_{33}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + a_{33} m_3 = \frac{m\ell^3}{768EI}\left(9+2(16)+9\right) = \frac{50\,m\ell^3}{768EI}$$

$$\omega^2 = 15{,}36\ \frac{EI}{m\ell^3}$$

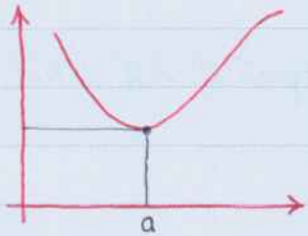
$$y_3 = y_1 = \frac{38\,m\ell^3 g}{768EI} \qquad y_2 = \frac{54\,m\ell^3 g}{768EI} \qquad \omega^2 = \frac{g^2\dfrac{m\ell^3}{768EI}\left(38m + 54(2m) + 38m\right)}{\left(\dfrac{m\ell^3 g}{768EI}\right)^2\left((38m)^2 + (54\times 2m)^2 + (38m)^2\right)}$$

$$\omega^2 = 16{,}2055\ \frac{EI}{m\ell^3}$$



$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) + \varepsilon\eta(x)$$
$$\eta(x_1) = 0 \qquad \phi(x_1) = \bar{\phi}(x_1)$$
$$\eta(x_2) = 0 \qquad \phi(x_2) = \bar{\phi}(x_2)$$

پاسخ اصلی سیستم $\phi(x)$ است و پاسخی که حدس می‌زنیم $\bar{\phi}(x)$ است که اختلافی با پاسخ اصلی سیستم دارد ولی در نقاط مرز برهم منطبق هستند.



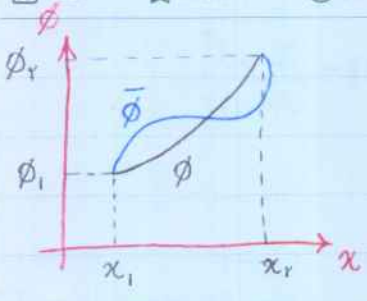
$$x = a;\ f(a) \leq f(x) \qquad \min$$
$$x = a;\ f(a) \geq f(x) \qquad \max$$

$$f(x) - f(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_a (x-a) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_a (x-a)^2 + \cdots$$

برای اینکه در نقطه a مینیمم مقدار داشته باشیم $\left.\frac{df}{dx}\right|_a = 0$ که شرط لازم و $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_a > 0$ که شرط کافی خواهد بود.

Subject: 36

Year: Month: Date:



$$\bar{\phi}(x_1) = \phi(x_1) = \phi_1 \Rightarrow \eta(x_1) = 0$$

$$\bar{\phi}(x_2) = \phi(x_2) = \phi_2 \Rightarrow \eta(x_2) = 0 \quad (2)$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi, \phi_x)\, dx$$

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (1)$$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow \phi(x)$ پیدا می‌شود $\Leftarrow$ انتگرال I مینیمم می‌شود.

$$\frac{\bar{\phi}(x)}{\bar{\phi}_x(x)} \Rightarrow I \Rightarrow \bar{I}(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{\phi}, \bar{\phi}_x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi + \varepsilon\eta(x), \phi_x + \varepsilon\eta_x)\, dx$$

$$\phi_x = \frac{d\phi(x)}{dx} \qquad \eta_x = \frac{d\eta(x)}{dx}$$

$$\bar{I}(\varepsilon) = \bar{I}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\varepsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2\bar{I}}{d\varepsilon^2}\varepsilon^2 + \cdots$$

$$\bar{I}(\varepsilon) - \bar{I}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\varepsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2\bar{I}}{d\varepsilon^2}\varepsilon^2 + \cdots$$

شرط لازم برای اکسترمم شدن $\bar{I}$: $\quad \frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \bar{I}_\varepsilon(0) = 0$

$$\bar{I}_\varepsilon = \frac{d\bar{I}}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} \underbrace{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varepsilon}}_{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_x} \underbrace{\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial \varepsilon}}_{\eta_x} \right) dx$$

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow (\bar{\phi}, \bar{\phi}_x) \to (\phi, \phi_x)$$

$$\bar{I}_\varepsilon(0) = \frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\eta + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\eta_x}_{} \right) dx$$

به طریقه جزء به جزء انتگرال می‌گیریم.

Subject: 37

Year: Month: Date:

$$\bar{I}_{\varepsilon}(0) = \cancel{\frac{df\eta}{d\phi_x}\Big|_{x_1}^{x_2}} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\right)\right]\eta \, dx = 0$$

صفر $\eta(x_1)=0$, $\eta(x_2)=0$

ترم $\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\right) = 0$ قرار داده، و آنرا حل کرده تا تابع مینیمم شده $\bar{I}$ بدست می‌آید.

شرط لازم برای اکسترمم شدن $\bar{I}$ معادله لاگرانژ خواهد شد. $\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\right) = 0$

$\phi(x)$ تابع را اکسترمم می‌کند.

$$\delta\phi(x) = \bar{\phi}(x) - \phi(x)$$

$$\delta\phi_{(x)} = \varepsilon\eta(x) \qquad \varepsilon \to 0$$

↳ Variation operator : 1) $\delta x = 0$ متغیر مستقل در Variation دخالت ندارد.

2) $\frac{d}{dx}\delta\phi = \delta\frac{d\phi}{dx}$. Variation نسبت به مشتق جابجایی پذیر است.

3) $\delta\int_{x_1}^{x_2}\phi(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta\phi(x)\,dx$ Variation نسبت به انتگرال جابجایی پذیر است.

اکسترمم شدن تابع I : $\delta I = 0$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi(x), \phi_x(x))\,dx \qquad \delta I = \int_{x_1}^{x_2}\delta f\,dx$$

$$\delta f = f(x, \bar{\phi}, \bar{\phi}_x) - f(x, \phi, \phi_x) = f(x, \phi+\varepsilon\eta, \phi_x+\varepsilon\eta_x) - f(x, \phi, \phi_x)$$

$$f(x, \phi+\varepsilon\eta, \phi_x+\varepsilon\eta_x) = f(x, \phi, \phi_x) + \frac{\partial f}{\partial \phi}\varepsilon\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}}_{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \phi_x}\varepsilon\eta_x + \cdots$$

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\eta + \frac{\partial f}{\partial \phi_x}\eta_x\right)\varepsilon$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\delta f\,dx = \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\eta + \frac{\partial f}{\partial \phi_x}\eta_x\right)dx = 0$$

$$\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\eta_x\right)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\eta\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\right)dx+\eta\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\Big|_{x_1}^{x_2}$$

اگر $$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\phi,\phi_x,\phi_{xx})\,dx$$

$$\bar\phi(x)=\phi(x)+\varepsilon\eta(x) \qquad \bar I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\bar\phi,\bar\phi_x,\bar\phi_{xx})\,dx$$

$$\frac{d\bar I}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0 \qquad \frac{d\bar I}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\int f\,dx=\int\left(\frac{\partial f}{\partial\bar\phi}\underbrace{\frac{\partial\bar\phi}{\partial\varepsilon}}_{\eta}+\frac{\partial f}{\partial\bar\phi_x}\underbrace{\frac{\partial\bar\phi_x}{\partial\varepsilon}}_{\eta_x}+\frac{\partial f}{\partial\bar\phi_{xx}}\underbrace{\frac{\partial\bar\phi_{xx}}{\partial\varepsilon}}_{\eta_{xx}}\right)dx$$

$$\varepsilon=0\longrightarrow\bar\phi=\phi \Rightarrow \frac{d\bar I}{d\varepsilon}=\int\left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\eta+\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\eta_x+\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\eta_{xx}\right)dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\eta_x\,dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\right)\eta\,dx+\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\eta_{xx}\,dx=\underbrace{-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\eta_x\,dx}+\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\eta_x\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\eta_x\,dx=\overbrace{\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\eta\,dx-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}+\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\eta_x\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{d\bar I}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial\phi}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\right]\eta\,dx+\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial\phi_x}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}}_{\text{صفر}}-\underbrace{\cancel{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\right)\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}}_{\text{صفر}}$$
$$+\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial\phi_{xx}}\eta_x\Big|_{x_1}^{x_2}}}_{\text{صفر}}$$

$$\left.\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad at\ x_1, x_2 \quad \begin{cases} \phi_{(x)} \\ \phi_x(x) = \dfrac{d\phi_x}{dx} \end{cases}$$ معین یا ثابت هستند

$$at\ x_1, x_2 \begin{cases} \eta(x) = 0 \\ \eta_x(x) = 0 \end{cases}$$

شرط لازم برای مینیمم کردن انتگرال $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi, \phi_x, \phi_{xx})\, dx$ به صورت رابطه اویلر-لاگرانژ بدست می‌آید:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{xx}}\right) \right] \eta\, dx$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \frac{d^{n-j}}{dx^{(n-j)}} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi^{(n-j)}} \right) = 0 \qquad \phi^{(j)} = \frac{d^j \phi(x)}{dx^j} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

n ماکزیمم مرتبه مشتق تابع f است. تعداد ϕ ها (متغیرهای وابسته) نشان‌دهنده تعداد درجات آزادی سیستم است.

اگر $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi_1, (\phi_1)_x, \phi_2, (\phi_2)_x, \dots, \phi_n, (\phi_n)_x)$

$$(\phi_i)_x = \frac{d\phi_i}{dx} \qquad \bar{\phi}_i = \phi_i + \varepsilon \eta_i(x) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0 \qquad \phi_i(x_1) = \phi_{i1} \qquad \phi_i(x_2) = \phi_{i2}$$

$$\bar{I}(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{\phi}_1, (\bar{\phi}_1)_x, \bar{\phi}_2, (\bar{\phi}_2)_x, \dots, \bar{\phi}_n, (\bar{\phi}_n)_x)\, dx \qquad \left.\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\int f\,dx = \int\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_1}\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_{1x}}\eta_{1x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_2}\eta_2 + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_{2x}}\eta_{2x} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_n}\eta_n + \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_{nx}}\eta_{nx}\right)$$

$$\varepsilon = 0 \quad \begin{cases} \bar{\phi}_i \to \phi_i \\ \bar{\phi}_{ix} = \phi_{ix} \end{cases} = \int\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\eta_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \phi_n}\eta_n + \frac{\partial f}{\partial (\phi_1)_x}\eta_{1x} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial (\phi_n)_x}\eta_{nx}\right)dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_x}\eta_{ix}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_x}\right)\eta_i\,dx + \underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_x}\eta_i\Big|_{x_1}^{x_2}}}_{\text{صفر}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_x}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$ رابطه اولر-لاگرانژ

اگر در تابع f مشتقات مرتبه دوم $(\phi_i)_{xx}$ وجود داشته باشد

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_{xx}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)_x}\right) + \frac{\partial f}{\partial \phi_i} = 0$$ رابطه اولر-لاگرانژ

اگر مشتق مرتبه j ام $(\phi_i)^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j}\phi_i(x)$ داشته باشیم

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\frac{d^{n-j}}{dx^{(n-j)}}\left(\frac{\partial f}{\partial(\phi_i)^{(n-j)}}\right) = 0$$ رابطه اولر-لاگرانژ

مثال: انتگرال I را با شرط J مینیمم کنید؟

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi, \phi_x)\,dx \qquad \bar{\phi} = \phi(x) + \varepsilon_1\eta_1(x) + \varepsilon_2\eta_2(x)$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, \phi, \phi_x)\,dx \qquad \eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$$

$$\phi(x_1)=\phi_1 \qquad \phi(x_2)=\phi_2 \qquad L = I(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\lambda J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int F(x,\phi,\phi_x)\,dx$$

$$F(x,\phi,\phi_x)=f(x,\phi,\phi_x)+\lambda g(x,\phi,\phi_x)$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_i=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_i=0}=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \phi}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \phi_x}=0$$

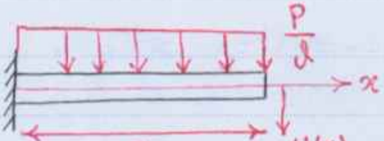
$$I=U=\int \rho\, ds\, g\, y \qquad J=\int_{s=0}^{l} ds = L \qquad g=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds^2=dx^2+dy^2 \qquad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad f=\rho g y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

شرایط مرزی طبیعی :
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \phi_{xx}}\right|_{x_1}^{x_2}=0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial \phi_x}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{xx}}\right)\right|_{x_1}^{x_2}=0$$

شرایط مرزی اجباری (هندسی) :
$$\left.\delta\phi\right|_{x_1}^{x_2}=0 \Rightarrow \left.\eta\right|_{x_1}^{x_2}=0 \qquad \left.\delta\phi_x\right|_{x_1}^{x_2}=0 \Rightarrow \left.\eta_x\right|_{x_1}^{x_2}=0$$

مثال: یک تیر الاستیک به طول l که روی آن بار واحد طول $\frac{P}{l}$ به صورت گسترده توزیع شده است. خیز تیر را برحسب طول تیر بدست آورید؟



یک عضو از بین همه شکل‌هایی که می‌تواند به خودش بگیرد که آن شکل‌ها شرایط مرزی را ارضا کنند، شکلی را به خودش می‌گیرد که انرژی پتانسیل را به حداقل برساند.

U = انرژی کرنشی (Π) − کار نیروهای خارجی (W)

U : انرژی پتانسیل

$$\Pi=\frac{EI}{2}\int_0^{l}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx \qquad W=\int_0^{l} P\,u(x)\,dx$$

$$U = \int_0^l \left[\frac{EI}{2}(u'')^2 - Pu \right] dx$$

شرط لازم برای مینیمم کردن انتگرال بالا ارضا معادله لاگرانژ زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_x}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{xx}}\right) = 0$$

$$f(x, \phi, \phi_x, \phi_{xx})$$

$$f(x, u, u', u'') = \frac{EI}{2}(u'')^2 - Pu \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = -P \qquad \frac{\partial f}{\partial u'} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial u''} = EIu''$$

$$\xrightarrow[\text{لاگرانژ}]{\text{در معادله}} -P + EIu'''' = 0$$

$$\underbrace{EIu'''}_{\text{نیروی برشی}} \; \underbrace{\delta u}_{\text{خیز}} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad \underbrace{EIu''}_{\text{گشتاور}} \; \underbrace{\delta u'}_{\text{شیب}} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$EIu'''' = P = \text{Const}$$

$$EIu''' = Px + C_1 \rightarrow x = l \Rightarrow u''' = 0 \rightarrow C_1 = -Pl$$

$$EIu'' = P\frac{x^2}{2} - Plx + C_2 \rightarrow x = l \Rightarrow u'' = 0 \rightarrow C_2 = \frac{Pl^2}{2}$$

$$EIu' = \frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} + \frac{Pl^2x}{2} + C_3 \rightarrow x = 0 \Rightarrow u' = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EIu = \frac{Px^4}{24} - \frac{Plx^3}{6} + \frac{Pl^2x^2}{4} + C_3x + C_4 \rightarrow x = 0 \Rightarrow u = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{P}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3 l}{3} + \frac{x^2 l^2}{2}\right)$$

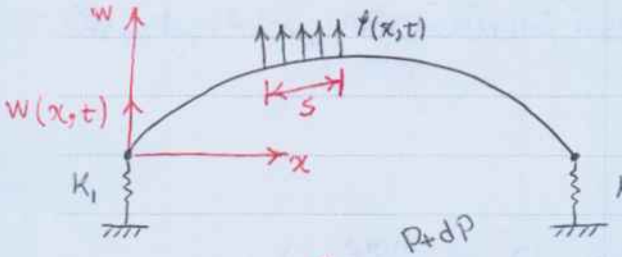
اصل هامیلتون: ابتدا تابع لاگرانژ را به فرم $L = \underbrace{T}_{\text{انرژی جنبشی}} - \underbrace{U}_{\text{انرژی پتانسیل}}$ درست کرده و آن را مینیمم می‌کنیم.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

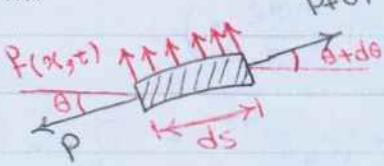
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1,2,3$$

q_i مشتقات تعمیم یافته است.
شروط لازم برای مینیمم کردن تابع لاگرانژ به روش اصل هامیلتون
رابطه بالا خواهد بود.
بایستی $\delta I = 0$ قرار گیرد که داریم:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - \pi + w)\,dt = 0$$



معادله حاکم کابل:
ρ: جرم بر واحد طول
f: نیروی گسترده بر واحد طول
l: طول کابل



$$(P+dP)\sin(\theta + d\theta) + f\,dx - P\sin\theta = \rho \frac{d^2 w}{dt^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[P\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x)\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\xrightarrow[P = C_{te}]{f(x,t)=0} \quad P\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \rho\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad \frac{P}{\rho} = c^2$$

$$\Rightarrow c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

اگر $w(x,t) = W(x)\,T(t)$

$$\Rightarrow \frac{c^2\,d^2 W}{W\,dx^2} = \frac{1}{T}\,\frac{d^2 T}{dt^2} = a \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 W}{dx^2} - \dfrac{a}{c^2} W = 0 \\ \dfrac{d^2 T}{dt^2} - aT = 0 \end{cases}$$

فرض: $a = -\omega^2$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 W}{dx^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2} W = 0 \\ \dfrac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W(x) = A\cos\dfrac{\omega x}{c} + B\sin\dfrac{\omega x}{c} \\ T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \end{cases}$$

مقادیر A و B از شرایط مرزی و C و D از شرایط اولیه بدست می‌آید.

کابل دو سر گیردار :

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$w(l,t) = 0 \Rightarrow B\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \xrightarrow{B \neq 0} \sin\frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n l}{c} = n\pi$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{l} \qquad n = 1, 2, \dots$$

فرکانس طبیعی اصلی در $n=1$ اتفاق می‌افتد که داریم : $\omega_n = \frac{\pi c}{l}$

$$w_n(x,t) = W_n(x)\, T_n(t)$$

$$w_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overset{*}{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)}$$

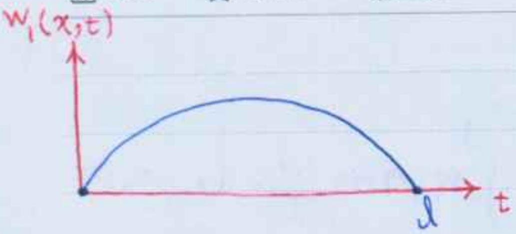
شرایط اولیه : $w(x,0) = w_0(x) \qquad \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

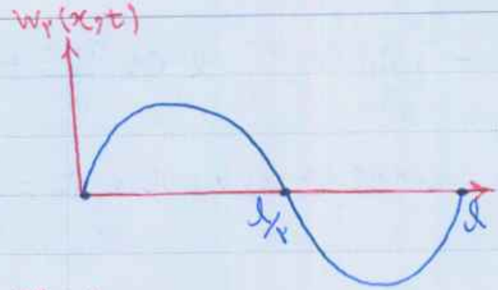
با اعمال شرایط اولیه در معادله فوق به روابط زیر می‌رسیم :

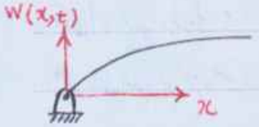
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x = w_0(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \dot{w}_0(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\ D_n = \frac{2}{\pi c n}\int_0^l \dot{w}_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 1 \overset{*}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{\pi c}{l}t\right) = w_1(x,t) = 0 \\ \sin\frac{\pi}{l}x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{l}x = m\pi \Rightarrow x = ml \xrightarrow{m=0,1,\dots} x = 0, l \end{cases}$$

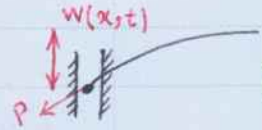
$$\begin{cases} n = 2 \overset{*}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{2\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{2\pi c}{l}t\right) = w_2(x,t) = 0 \\ \sin\frac{2\pi}{l}x = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{l}x = m\pi \rightarrow x = \frac{ml}{2} \xrightarrow{m=0,1,\dots} x = 0, \frac{l}{2}, l \end{cases}$$



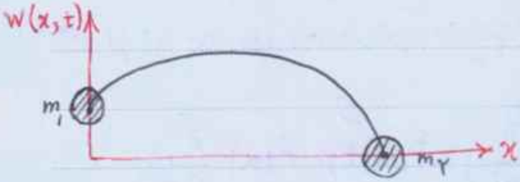




$$w(0,t)=0$$

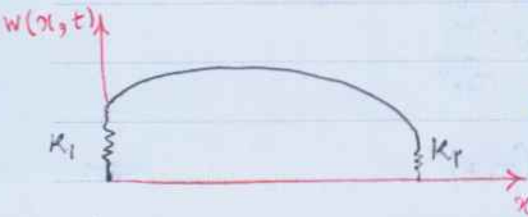


$$P(x)\,\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=0$$



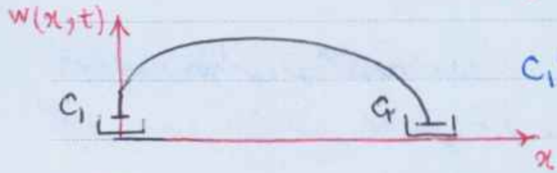
$$m_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$

$$-m_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$



$$K_1\,w(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$

$$-K_2\,w(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$



$$C_1\frac{\partial w}{\partial t}(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$

$$-C_2\frac{\partial w}{\partial t}(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$

مثال:

$$w_0(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x & 0\leq x\leq \dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{2h(l-x)}{l} & \dfrac{l}{2}\leq x\leq l\end{cases}$$

$$\dot{w}_0(x)=0$$

با توجه به اینکه $\dot{w}_0(x)=0$ است پس $D_n=0$ خواهد شد و جواب فقط بصورت زیر باقی می ماند:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

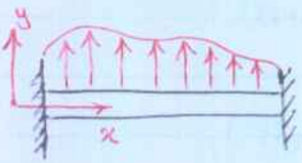
با اعمال $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$ در رابطه فوق جوابها را حساب می‌کنیم.

تیر اویلر برنولی:

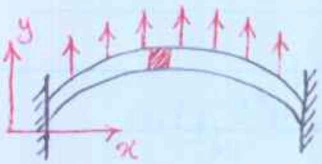
۱) از کرنش برشی صرفنظر می‌کنیم.

۲) نیروی محوری صفر در نظر گرفته می‌شود.

۳) از اینرسی دورانی صرفنظر می‌کنیم (تیر نازک در نظر گرفته می‌شود)



$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_{(x)}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\cancelto{0}{f(x,t)}=\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



$$-EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y(x,t)=Y(x)G(t)$$

$$-\frac{d^4 Y}{dx^4}=\frac{\rho\omega^2}{EI}Y \qquad \beta^4=\frac{\rho\omega^2}{EI}$$

اگر جابجایی صفر باشد نیرو صفر نخواهد بود.

اگر ممان صفر باشد شیب صفر نخواهد بود.

$$\frac{d^4 Y}{dx^4}-\beta^4 Y=0$$

$$y(x)=C_2\cos\beta x+C_1\sin\beta x+C_3\sinh\beta x+C_4\cosh\beta x$$

$$x=0\begin{cases} y(0)=0\Rightarrow C_2+C_4=0\Rightarrow C_4=-C_2\\ \frac{dy}{dx}=0\Rightarrow C_1+C_3=0\Rightarrow C_3=-C_1\end{cases}$$

$$y(x)=C_1(\sin\beta x-\sinh\beta x)+C_2(\cos\beta x-\cosh\beta x)$$

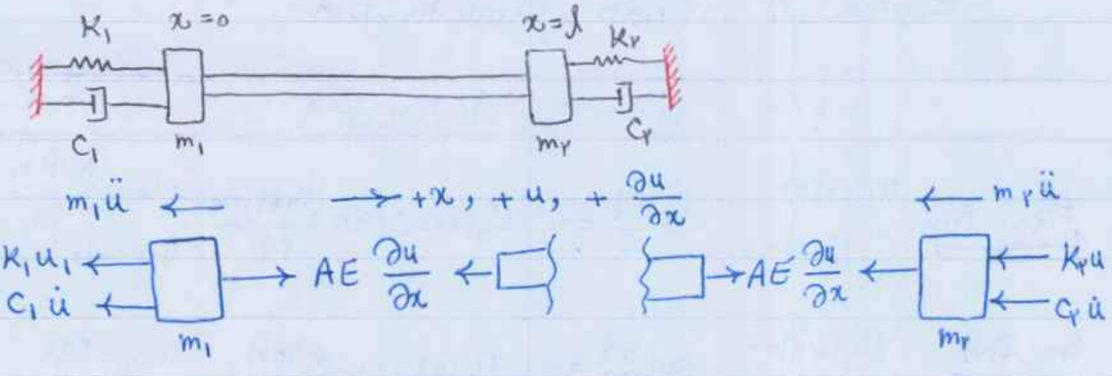
$$x = l \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow -C_1(\sin\beta l + \sinh\beta l) - C_2(\cos\beta l + \cosh\beta l) = 0 \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = 0 \Rightarrow C_1(\cos\beta l + \cosh\beta l) + C_2(-\sin\beta l + \sinh\beta l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\beta l + \sinh\beta l & \cos\beta l + \cosh\beta l \\ \cos\beta l + \cosh\beta l & -\sin\beta l + \sinh\beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sinh^2\beta l - \sin^2\beta l - (\cos^2\beta l + \cosh^2\beta l + 2\cos\beta l \cosh\beta l) = 0$$
$$-1 - 1 - 2\cos\beta l \cosh\beta l = 0 \Rightarrow \cos\beta l \cosh\beta l = 1 \Rightarrow \beta = \checkmark$$

$$C_1 = -C_2 \frac{\cos\beta l + \cosh\beta l}{\sin\beta l + \sinh\beta l}$$

مثال: یک میله مطابق شکل را در نظر بگیرید. شرایط مرزی این میله را بدست آورید. Exp(8.2)

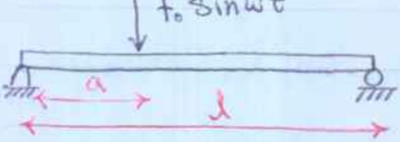


$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = K_1 u(0,t) + C_1\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -K_2 u(l,t) - C_2\frac{\partial u}{\partial t}(l,t) - m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$$

$$\sin^2\beta_n x = \frac{1-\cos 2\beta_n x}{2}$$

مثال: ارتعاشات اجباری یک تیر دوسر مفصل را که نیروی هارمونیک $f(x,t)=f_0\sin\omega t$ در فاصله a از سمت چپ تیر به آن وارد می‌شود را بدست آورید.



Exp(8.8) معادله فرکانسی تیر دوسر مفصل در شکل 8.15 به صورت زیر است:

$$W_n(x)=\sin\beta_n x=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

نیروی وارد از رابطه $Q_n(t)=\int_0^l f(x,t)W_n(x)\,dx$ بدست می‌آید:

$$\beta_n l = n\pi$$

$$Q_n(t)=\int_0^l f(x,t)\sin\beta_n x\,dx = f_0\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t$$

در شرایط steady-state پاسخ به صورت زیر است درصورتی که در حالت کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$q_n(t)=\frac{1}{\rho A b\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad q_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t+\text{ترم سمت چپ}$$

$$b=\int_0^l W_n^2(x)\,dx=\int_0^l\sin^2\beta_n x\,dx=\frac{l}{2} \xrightarrow{\text{Solve}} q_n(t)=\frac{2f_0}{\rho A l}\,\frac{\sin\frac{n\pi a}{l}}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\omega t$$

$$W(x,t)=\frac{2f_0}{\rho A l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l/l=1}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\omega t$$

پاسخ نیز از رابطه $W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x)q_n(t)$ بدست می‌آید.

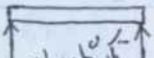
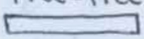
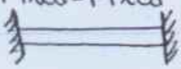
Figure 8.7 (جدول حالتهای میله bar)

	شرایط مرزی	معادله فرکانسی	مد شکل (توابع نرمال)	فرکانس طبیعی
Fixed-free	$u(0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$, $n=0,1,2,\dots$
free-free	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=0,1,2,\dots$
Fixed-Fixed	$u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=1,2,3,\dots$

Subject: 50

Year: Month: Date:

Figure 8.15 (شرایط مرزی مشترک برای ارتعاشات عرضی تیر)

	معادله فرکانسی	شکل مد (توابع نرمال)	مقادیر $\beta_n l$
Pinned-Pinned 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n\left[\sin \beta_n x\right]$	$\beta_1 l = \pi$, $\beta_2 l = ۲\pi$ $\beta_3 l = ۳\pi$, $\beta_4 l = ۴\pi$
Free-Free 	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n\left[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + a_n(\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)\right]$ $a_n = \left(\dfrac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l =$ ۴٫۷۳۰۰۴۱ $\beta_2 l =$ ۷٫۸۵۳۲۰۵ $\beta_3 l =$ ۱۰٫۹۹۵۶۰۸ $\beta_4 l =$ ۱۴٫۱۳۷۱۶۵ $\beta l = 0$ (مد صلب)
Fixed-Fixed 	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n\left[\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + a_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)\right]$ $a_n = \left(\dfrac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l =$ ۴٫۷۳۰۰۴۱ $\beta_2 l =$ ۷٫۸۵۳۲۰۵ $\beta_3 l =$ ۱۰٫۹۹۵۶۰۸ $\beta_4 l =$ ۱۴٫۱۳۷۱۶۵
Fixed-Free	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n\left[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - a_n(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)\right]$ $a_n = \left(\dfrac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l =$ ۱٫۸۷۵۱۰۴ $\beta_2 l =$ ۴٫۶۹۴۰۹۱ $\beta_3 l =$ ۷٫۸۵۴۷۵۷ $\beta_4 l =$ ۱۰٫۹۹۵۵۴۱

Subject: 49

Year: Month: Date:

Figure 8.12 جدول حالتهای شفت (تحت پیچش)

	شرایط مرزی	معادله فرکانسی	شکل مد (توابع نرمال)	فرکانس طبیعی
Fixed-free	$\theta(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$ $n=0,1,2,\ldots$
free-free	$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$ $n=0,1,2,\ldots$
Fixed-Fixed	$\theta(0,t)=0$ $\theta(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$ $n=1,2,3,\ldots$

Figure 8.15 (شرایط مرزی مشترک برای ارتعاشات عرضی تیر)

	معادله فرکانسی	شکل مد (توابع نرمال)	مقادیر $\beta_n l$
Fixed-Pinned	$\tan\beta_n l-\tanh\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x-\sinh\beta_n x+a_n(\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x)]$ $a_n=\left(\frac{\sin\beta_n l-\sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l-\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=$ ۳,۹۲۶۶۰۲ $\beta_2 l=$ ۷,۰۶۸۵۸۳ $\beta_3 l=$ ۱۰,۲۱۰۱۷۶ $\beta_4 l=$ ۱۳,۳۵۱۷۶۸
Pinned-free	$\tan\beta_n l-\tanh\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x+a_n\sinh\beta_n x]$ $a_n=\left(\frac{\sin\beta_n l}{\sinh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=$ ۳,۹۲۶۶۰۲ $\beta_2 l=$ ۷,۰۶۸۵۸۳ $\beta_3 l=$ ۱۰,۲۱۰۱۷۶ $\beta_4 l=$ ۱۳,۳۵۱۷۶۸ $\beta l=0$ (مد صلب)