

فوت و فن ریاضی

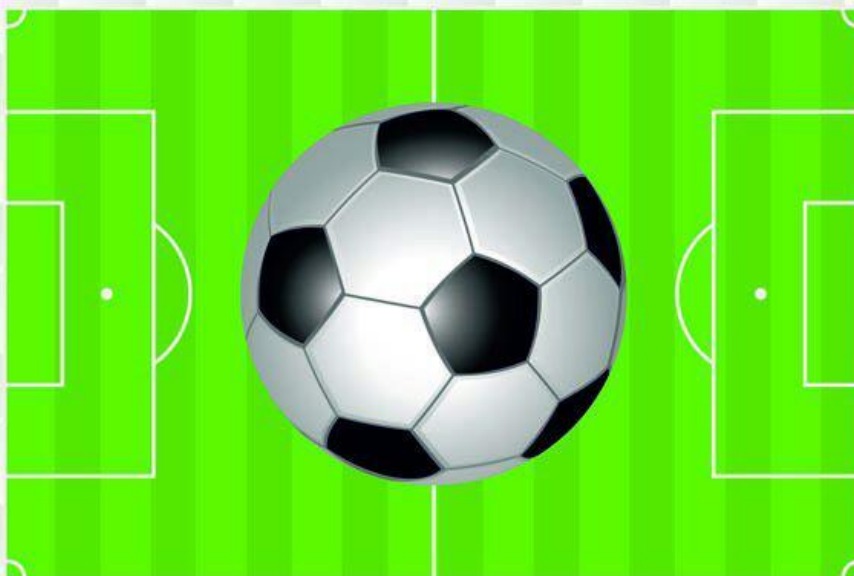
آموزش ریاضی به روش کانگورو

مؤلفان:

علی جباری، سید جواد حسینی، سعید پور رحیمی

۳ کتاب
در ۱ کتاب

کتاببر متفاوت!



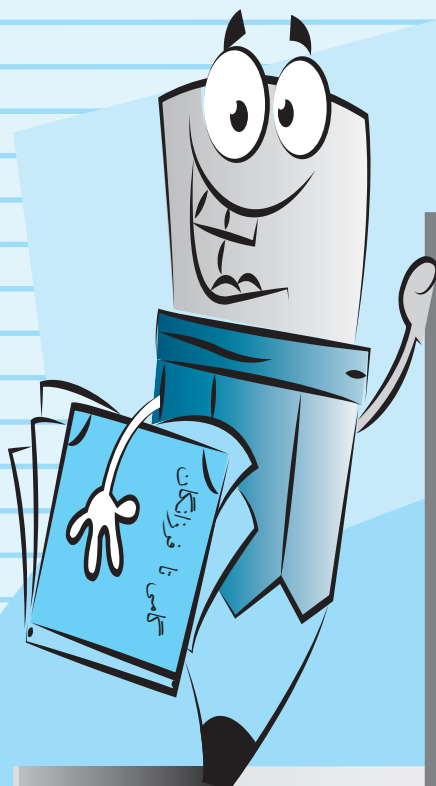
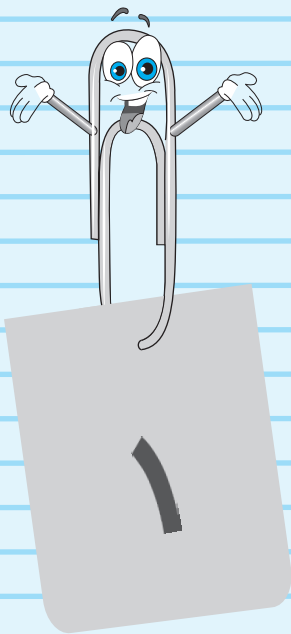
آموزش کتاب درسی

حل تمرین های کتاب درسی به عنوان مثال

تمرین در کلاس و منزل (کتاب کار)

(ریاضی) خانه ی (ریاضی)

<http://www.math-home.blog.ir>



مجموعه ها

درس اول: معرفی مجموعه

۱

واژه مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص که عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین و متمایز (غیر تکرار) باشد استفاده می‌شود. به اشیاء و یا افراد ... تشکیل‌دهنده مجموعه عضوهای مجموعه گفته می‌شود.

در مجموعه عضوهای تکراری معنی ندارد.



در صورت امکان متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.



- آ. $A = \{۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ۱۲۵\}$ ب. $B = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots\}$ پ. $C = \{۱۰\}$
- ت. ۵ عدد طبیعی بین ۱ تا ۲۰ قرار داشته باشند. ث. اعداد طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰.
- ج. اعداد صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارند. چ. اعداد اول دو رقمی که مضرب ۷ باشند.
- حل. آ. مکعب اعداد طبیعی یک تا ۵. ب. مربع اعداد طبیعی. پ. اولین عدد دو رقمی.
- ت. این عبارت دقیقاً اعضای خاص را مشخص نکرده است لذا نمی‌تواند معرف مجموعه باشد.
- ث. $E = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots, ۹۹۹\}$
- ج. $F = \{\}$ چون اعداد صحیح بین ۴ و ۷ منفی هستند.
- چ. $G = \{\}$ چون عددی که مضرب ۷ باشد نمی‌تواند اول باشد لذا این مجموعه عضوی ندارد.

ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس

مانند الگو کامل کنید.

- ۱) $A = \{۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\} = \{\text{اعداد اول دو رقمی بین } ۱۰ \text{ تا } ۲۰\}$
- ۲) $B = \{\dots\} = \{\text{اعداد اول زوج}\}$
- ۳) $C = \{\dots\} = \{\text{شمارنده‌های عدد } ۱۸\}$
- ۴) $D = \{\dots\} = \{\text{اعداد طبیعی مجذور کم‌تر از } ۱۰۰\}$
- ۵) $E = \{\dots\} = \{\text{حروف صدادر انگلیسی}\}$

۲ عبارتهایی که مجموعه مشخص می‌کنند را با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید.

- آ. چهار عدد زوج متوالی ☐ ب. پنج عدد فرد بین ۱۰ تا ۲۰ ☐ پ. پنج فوتبالیست مشهور ☐
- ت. مضارب دو رقمی ۵ ☐ ث. اسامی ۵ پیامبر ☐ چ. پنج پیامبر اولوالعزم ☐

برای بیان عضویت از نماد \in استفاده می‌کنیم. مثلاً در مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ برای بیان این که ۲ عضو A است از نماد $۲ \in A$ استفاده می‌کنیم و چون a عضو A نیست می‌نویسیم $a \notin A$.



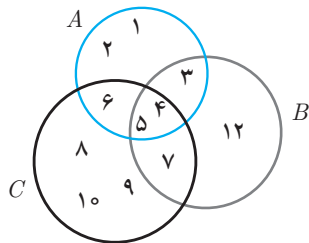


برای این که بعضی از مفاهیم مجموعه‌ها را ساده‌تر بیان کنیم مجموعه‌ها را به صورت منحنی یا خط‌های شکسته بسته نمایش می‌دهیم که به آن نمودار ون گویند.



با توجه به نمودار ون مجموعه‌های A و B و C را نشان دهید.

مثال ۲



$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 7, 12\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

حل.

اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد آن مجموعه را مجموعه تهی می‌نامند و آن را با نماد ϕ یا $\{\}$ نشان می‌دهند. توجه شود که این مجموعه با مجموعه $\{0\}$ یا $\{\phi\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

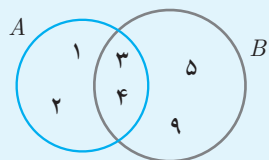


ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس

۱ با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه‌های A و B را بنویسید و تعداد اعضای آن‌ها را تعیین کنید.



۲ هر کدام از عبارت‌های زیر که مجموعه تهی را مشخص می‌کند را با علامت \checkmark مشخص کنید.

☐ ب. شمارنده‌های زوج ۹

☐ آ. مجموعه اعداد اول زوج

☐ ت. اعداد صحیح بین ۱- و ۱

☐ پ. انسان‌های ساکن کره ماه

ایستگاه کار در منزل

ایست



۱. کدام یک از عبارت‌های زیر بیانگر مجموعه می‌باشند؟ در صورت مجموعه بودن اعضای آن‌ها را بنویسید.

ب. بچه‌های درس‌خوان کلاس

آ. شاعران معروف ایران

پ. اعداد صحیح بزرگ‌تر از صفر

ت. اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵ و بزرگ‌تر از ۱

ث. اعداد طبیعی کوچک‌تر از صفر

ج. شمارنده‌های زوج ۴۸

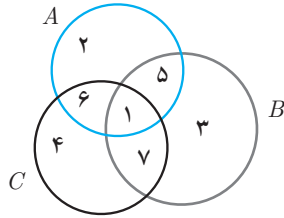
۲. مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام یک غیر تهی است و دلیل آن را بنویسید.

پ. $\{ \}$

ب. $\{ \{ \} \}$

آ. $\{ \phi \}$

۳. با توجه به نمودار ون، مجموعه‌های A ، B و C را مشخص کنید.



$A =$

$B =$

$C =$

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

۲

۱

دو مجموعه A و B را برابر گوئیم هرگاه هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$.

اگر حتی یک عضو در A یا B باشد که در دیگری نباشد دو مجموعه برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مجموعه اعداد زوج و طبیعی یک رقمی با مجموعه اعداد زوج و صحیح بین ۱ تا ۱۰ با هم برابرند زیرا:

$$A = \{2, 4, 6, 8\} : \text{اعداد زوج و طبیعی یک رقمی}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\} : \text{اعداد زوج و طبیعی بین ۱ تا ۱۰}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر دو مجموعه اعضای یکسان دارند لذا $A = B$.

اما مجموعه‌های اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ و مجموعه اعداد صحیح نامنفی کوچک‌تر از ۶ با هم برابر نیستند، زیرا:

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\} : \text{اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶}$$

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} : \text{اعداد صحیح نامنفی کوچک‌تر از ۶}$$

همان‌طور که می‌بینید $0 \in D$ ولی $0 \notin C$ لذا $D \neq C$.

مثال ۳



جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد.

$$\{5, \boxed{-3}, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3}\} = \{\frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \boxed{4}, \sqrt{25}\}$$

$$\{7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, \boxed{-2}, \frac{0}{625}\} = \{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{0}{5}, \frac{5}{8}, \boxed{-2}, -2\}$$

مثال ۴





کار کلاس

ایست

ایستگاه کار در کلاس

۱ اگر دو مجموعه $A = \{3, 2x - 1, 5, 4\}$ و $B = \{3y - 4, 7, 3, 4\}$ با هم برابر باشند. مقدار x و y را بیابید.



۲ تعیین کنید کدام یک از جملات زیر درست یا غلط است دلیل آن را بنویسید.



آ. مجموعه اعداد زوج اول برابر مجموعه تهی است.

ب. مجموعه اعداد طبیعی زوج برابر مجموعه اعداد صحیح و نامنفی زوج است.

پ. مجموعه اعداد صحیح و منفی بزرگ‌تر مساوی صفر برابر مجموعه تهی است.

ت. مجموعه $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ برابر مجموعه اعداد شمارنده ۳۲ است.

زیرمجموعه

مجموعه B را زیر مجموعه A گوئیم هرگاه تمام عضوهای B در A نیز باشند و می‌نویسیم $B \subseteq A$.
با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است: $A \subseteq A$ ، زیرا تمام اعضای A در خود A وجود دارند.

برای این که بگوئیم B زیر مجموعه A نیست کافی است عضوی در B بیابیم که در A نباشد در این صورت می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.



با توجه به نکته فوق چون در مجموعه تهی نمی‌توان عضوی یافت که در مجموعه دلخواه A نباشد لذا تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه A است: $\phi \subseteq A$.

زیر مجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

مثال ۵

حل.



$$A_1 = \{\}$$

$$A_2 = \{1\}$$

$$A_3 = \{2\}$$

$$A_4 = \{3\}$$

$$A_5 = \{1, 2\}$$

$$A_6 = \{1, 3\}$$

$$A_7 = \{2, 3\}$$

$$A_8 = \{1, 2, 3\}$$



مثال ۶



سه مجموعه مانند A و B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ ؟
حل. مجموعه‌های A ، B و C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{a, b, c, d, e\} \quad C = \{a, b, c, d, e, f\}$$

چون همه عضوهای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B نیز می‌باشند؛ پس $A \subseteq B$.
 همچنین همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی C نیز می‌باشند؛ بنابراین $B \subseteq C$.
 همان‌طور که می‌بینید؛ $A \subseteq C$ ، زیرا همه عضوهای A در C نیز وجود دارند.

ایستگاه کار در کلاس

ایست

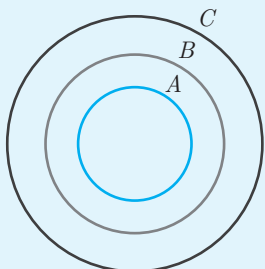
کار کلاس



۱ تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, ۲, b\}$ را بنویسید.

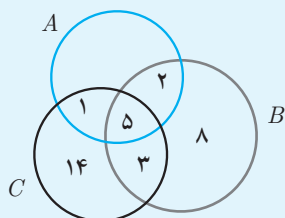


۲ با توجه به نمودار ون گزینه‌های درست را مشخص کنید.



$$\begin{array}{lll} A \subseteq A & \dots\dots & B \subseteq A & \dots\dots & C \subseteq C & \dots\dots \\ A \not\subseteq C & \dots\dots & B \subseteq C & \dots\dots & \phi \subseteq A & \dots\dots \\ A \subseteq B & \dots\dots & C \subseteq A & \dots\dots & B \not\subseteq \phi & \dots\dots \end{array}$$

۳ با توجه به نمودار ون مجموعه‌های A و B و C را با عضوهایشان مشخص کنید و سپس درست یا غلط بودن گزینه‌های زیر را با دلیل مشخص کنید.



$$A = \{\dots\dots\dots\}$$

$$B = \{\dots\dots\dots\}$$

$$C = \{\dots\dots\dots\}$$

$$\begin{array}{lll} A \subseteq B & \dots\dots\dots & A \subseteq C & \dots\dots\dots & C \subseteq B & \dots\dots\dots \\ B \subseteq C & \dots\dots\dots & B \subseteq A & \dots\dots\dots & C \subseteq A & \dots\dots\dots \end{array}$$



ایستگاه کار در منزل

ایست



۱. زیر مجموعه‌های $B = \{\phi, \{\}, \{\phi\}\}$ را بنویسید.

۲. اگر $A \subseteq B, A \subseteq C, B \not\subseteq C$ و $C \not\subseteq B$ ، این رابطه‌ها را با نمودار ون نشان دهید.

۳. با نوشتن تعداد زیرمجموعه‌های، مجموعه‌های $\phi, A = \{a\}, B = \{a, b\}$ و $C = \{a, b, c\}$ تعیین تعداد زیرمجموعه‌های آن‌ها یک فرمول برای تعیین تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی حدس بزنید.

نمایش مجموعه‌های اعداد

مجموعه اعداد را با نمادهای خاصی که به طور قراردادی برای آن‌ها تعیین شده است نشان می‌دهند.

مجموعه اعداد طبیعی

مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نشان می‌دهند که به صورت زیر است.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

به غیر از نمودار ون، از روش دیگری برای نشان دادن مجموعه اعداد استفاده می‌شود که به آن روش نمادهای ریاضی می‌گویند.



مثال ۷



مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

ب. مجموعه اعداد فرد طبیعی.

آ. مجموعه اعداد زوج طبیعی.

حل. آ. مجموعه اعداد زوج طبیعی:

$$\mathbb{E} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

ب. مجموعه اعداد فرد طبیعی:

$$\mathbb{O} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

همان‌طور که در مثال فوق می‌بینید برای نمایش مجموعه اعداد به زبان ریاضی اول یک فرمول که اعضای مجموعه موردنظر را مشخص می‌کند تعریف می‌کنیم و سپس علامت « \mid » به معنی «به‌طوری‌که» را قرار می‌دهیم و در ادامه آن مشخص می‌کنیم که چه اعداد باید در فرمول قرار گیرند.

مثال ۸



اعضای مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

$$A = \{2x + 1 = 3 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{2x \mid x = 0, 2, 3, 4\}$$

حل. آ. برای تعیین اعضای مجموعه‌ی A ؛ باید معادله‌ی $2x + 1 = 0$ را در اعداد طبیعی حل کنیم.

$$2x + 1 = 3$$

$$2x = 3 - 1$$

عدد ۱ را به سمت راست انتقال می‌دهیم

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$A = \{2x + 1 = 3 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$

ب. به ازای x ‌های داده شده؛ اعضای مجموعه‌ی B را به دست می‌آوریم.

$$x = 0 : 2(0) = 0$$

$$x = 2 : 2(2) = 4$$

$$x = 3 : 2(3) = 6$$

$$x = 4 : 2(4) = 8$$

$$B = \{2x \mid x = 0, 2, 3, 4\} = \{0, 4, 6, 8\}$$



کار کلاس

ایست

ایستگاه کار در کلاس

۱ مجموعه‌های زیر را مانند الگو به زبان ریاضی بنویسید.



- ۱) $A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\} = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}, ۱ \leq k \leq ۵\}$
- ۲) $B = \{۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\} = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}, \dots \leq k \leq \dots\}$
- ۳) $C = \{۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲\} = \{\dots \mid k \in \mathbb{N}, \dots \leq k \leq ۵\}$
- ۴) $D = \{\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \frac{۱}{۸۱}\} = \{\dots\}$
- ۵) $E = \{۵, ۱۰, ۱۵, \dots, ۷۵\} = \{\dots\}$

۲ مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید.



۱) $A = \{\frac{n+۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq ۱۰\}$

$$n = ۱: \frac{۱+۱}{۱} = \frac{۲}{۱} = ۲, \quad n = ۲: \frac{۲+۱}{۱} = \frac{۳}{۱}, \dots$$

$$A = \{\frac{n+۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq ۱۰\} = \{۲, \frac{۳}{۲}, \dots, \frac{۱۱}{۱۰}\}$$

۲) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq ۲۵\}$

۳) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid ۳x - ۶ = ۱۲\}$

۴) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid ۵x - ۸ \leq ۷\}$

۵) $E = \{(-\frac{۱}{۲})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



مجموعه اعداد حسابی

یکی دیگر از مجموعه اعداد، مجموعه اعداد حسابی است که آن را با \mathbb{W} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

بدیهی است که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$.

مجموعه اعداد صحیح

مجموعه دیگر اعداد، مجموعه اعداد صحیح می‌باشد که آن را با \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم و عضوهای آن به صورت زیر است.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه اعداد حسابی و طبیعی عضو مجموعه \mathbb{Z} می‌باشند لذا داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$$

ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس



۱ مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

۱) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\} =$

۲) $B = \left\{ \frac{x-1}{x+2} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 3 \right\} =$

۳) $C = \left\{ \frac{n}{1-n} \mid n \in \mathbb{Z}, 4 \leq n < 5 \right\} =$



۲ اگر $A = \{-1, 0, 1\}$ مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

۱) $A = \{x \in A \mid x^2 = 1\} =$

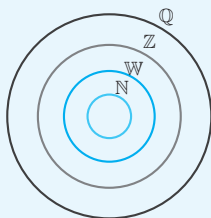
۲) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 < 0\} =$

مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعداد گویا را با \mathbb{Q} نشان می‌دهند که چون نمی‌توان اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا را مشخص

کرد نمی‌توان آن را با اعضا نشان داد و به همین دلیل با نماد ریاضی معرفی می‌شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$



چون هر عدد صحیح $n = \frac{n}{1}$ لذا داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$



ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس



۱ تعیین کنید مجموعه‌های ذکر شده زیر مجموعه چه مجموعه‌هایی (\mathbb{N} ، \mathbb{W} ، \mathbb{Z} یا \mathbb{Q}) می‌باشند.

۱) $A = \left\{ \frac{x}{4} \mid x = 6, 12, 18, 20 \right\}$

۲) $B = \left\{ \frac{x+3}{3} \mid x = 2, 5, 8, 11 \right\}$

۳) $C = \{x \mid 3x - 2 = 0\}$

۴) $D = \left\{ \frac{2^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

۲ اعضای مجموعه‌های زیر را نوشته و با هم مقایسه کنید.

۱) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\} = \{\dots\}$

۲) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3\} = \{\dots\}$

ایستگاه کار در منزل

ایست



۱. مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱) $A = \{3^n \mid n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 3\} = \{\dots\}$

۲) $B = \left\{ \frac{2n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \right\} = \{\dots\}$

۳) $C = \left\{ \frac{n^3}{n+3} \mid n \in \mathbb{Z}, -1 \leq n \leq 1 \right\} = \{\dots\}$

۲. مجموعه‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

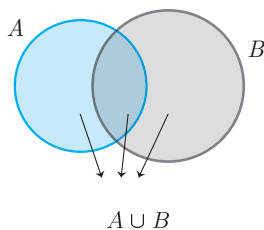
۱) $A = \{-2, 0, 2\} =$

۲) $B = \{3, 9, 27, \dots\} =$

۳) $C = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} =$



اجتماع



اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند آن‌گاه اجتماع آن‌ها را به صورت $A \cup B$ می‌نویسیم و می‌خوانیم: « A اجتماع B » و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$A \cup B = \{\text{تمام عضوهایی که در } A \text{ یا } B \text{ قرار دارند}\} \\ = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

اگر $A = \{0, 1, 2, 3\}$ و $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ؛ مجموعه $A \cup B$ را با اعضایش نشان دهید.
حل. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, -2, -1\}$

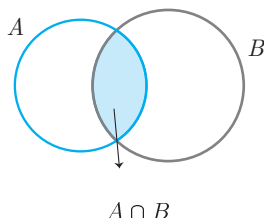
مثال ۹



چون عضو تکراری در مجموعه‌ها بی معنی است لذا عضوهایی که هم در A و هم در B باشند را فقط یکبار به حساب می‌آوریم.



اشتراک



اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند آن‌گاه اشتراک آن‌ها را به صورت $A \cap B$ می‌نویسیم و می‌خوانیم: « A اشتراک B » و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$A \cap B = \{\text{عضوهایی که هم در } A \text{ و هم در } B \text{ باشند}\} \\ = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ ؛ مجموعه $A \cap B$ را با اعضایش نشان دهید.
حل. $A \cap B = \{c, d\}$

مثال ۱۰



مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید و هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

ت. $A \cap B$ پ. $A \cup C$ ب. $B \cup C$ آ. $A \cup B$ ج. $C \cup \phi$ ج. $A \cap \phi$ ث. $A \cap A$ 

مثال ۱۱



حل. آ. $A \cup B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱, ۵, ۷, ۳\}$

ب. $B \cup C = \{۱, ۵, ۷, ۳, ۹, ۸, ۱۰, ۱۱\}$

پ. $A \cup C = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱, ۷, ۱۰, ۱۱\}$

ت. $A \cap B = \{۹\}$

ث. $A \cap A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۹\} = A$

ج. $A \cap \phi = \phi$

چ. $C \cup \phi = C$

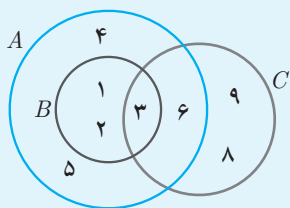
ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس



۱ با توجه به نمودار ون مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.



۱) $A \cup B = \{\dots\dots\dots\}$

۲) $A \cap B = \{\dots\dots\dots\}$

۳) $A \cup C = \{\dots\dots\dots\}$

۴) $A \cap C = \{\dots\dots\dots\}$

۵) $B \cup C = \{\dots\dots\dots\}$

۶) $B \cap C = \{\dots\dots\dots\}$

۷) $A \cap B \cap C = \{\dots\dots\dots\}$

۲ اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.



۱) $A \cap \phi = \phi$

۲) $A \cup A = A$

۳) $A \cup \phi = A$

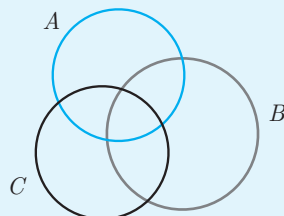
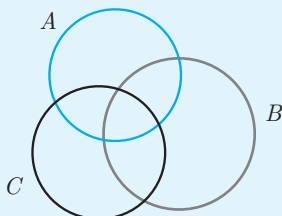
۴) $A \cap A = A$

۳ در هر نمودار ون مجموعه خواسته شده را هاشور بزنید.



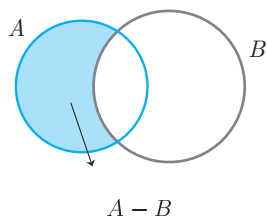
۱) $(A \cap B) \cap C$

۲) $(A \cap B) \cup C$





تفاضل



اگر A و B دو مجموعه باشند آن گاه تفاضل A منهای B به صورت زیر نوشته و محاسبه می شود.

$$A - B = \{ \text{عضوهایی از } A \text{ که در } B \text{ نباشد} \}$$

$$= \{ x \mid x \in A \text{ و } x \notin B \}$$

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ مجموعه $A - B$ و $B - A$ را با اعضا نشان دهید.

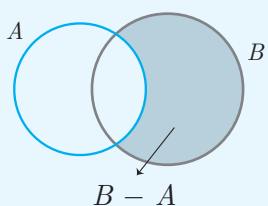
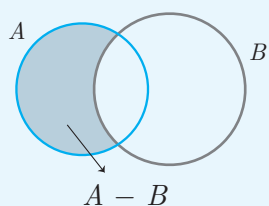
$$A - B = \{3, 4\}, \quad B - A = \{-1, 0\}$$

مثال ۱۲



حل.

توجه داشته باشید که: $A - B \neq B - A$.



نکته ۸



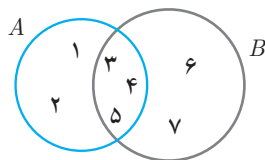
قرارداد

تعداد اعضا مجموعه ای مانند A را با $n(A)$ نشان می دهیم.

مثال. اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ آن گاه داریم $n(A) = 5$.

با توجه به نمودار ون، گزاره های درست را با \checkmark و گزاره های نادرست را با \times مشخص کنید.

- ۱) $B - A = \{6, 7\}$
- ۲) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
- ۳) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$
- ۴) $n(A \cup B) = 8$
- ۵) $A - B = B - A$
- ۶) $n(A - B) = n(B - A)$



مثال ۱۳



حل.

- ۱) $B - A = \{6, 7\} \checkmark$
- ۲) $(A - B) \cup (A \cap B) = A \checkmark$

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{1, 2\} \\ A \cap B = \{3, 4, 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$$



$$۳) (A - B) \cup (B - A) = \{۱, ۲, ۶\} \times$$

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{۱, ۲\} \\ B - A = \{۶, ۷\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{۱, ۲, ۶, ۷\}$$

$$۴) n(A \cup B) = ۸ \times$$

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} \Rightarrow n(A \cup B) = ۷ \times$$

$$۵) A - B = B - A$$

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{۱, ۲\} \\ B - A = \{۶, ۷\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - B \neq B - A$$

$$۶) n(A - B) = n(B - A) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} n(A - B) = ۲ \\ n(B - A) = ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow n(A - B) = n(B - A)$$

ایستگاه کار در کلاس

ایست

کار کلاس



۱ اگر $A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ و $B = \{-۴, -۳, -۲, -۱\}$ ، مجموعه‌های ساخته شده را با اعضایشان مشخص کنید و تعداد اعضای آن‌ها را بنویسید.



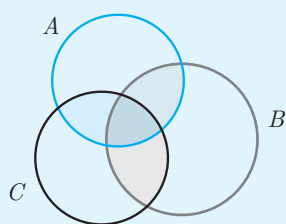
$$۱) A - B =$$

$$۲) B - A =$$

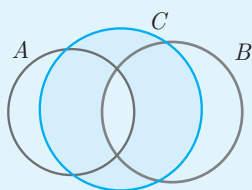
$$۳) (A - B) \cup (B - A) =$$

$$۴) (A - B) \cap (B - A) =$$

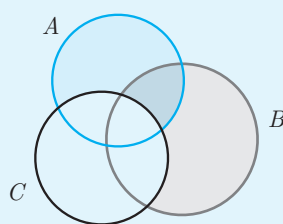
۲ در نمودارهای ون زیر مجموعه‌هایی که قسمت‌های هاشورخورده مشخص می‌کنند را تعیین کنید.



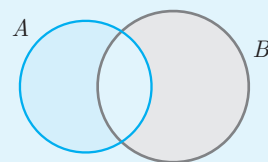
.....



.....



.....



.....



اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند داریم:

$$۲) A \subseteq A \cup B$$

$$۱) A \cap B \subseteq A$$

$$۴) A - B \subseteq A$$

$$۳) A \cap B \subseteq A \cup B$$



ایستگاه کار در منزل

ایست

۱. اگر $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ ، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $C = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$ ، هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

$$۱) (A \cup B) - (A \cap B) =$$

$$۲) (A - B) \cup (B - A) =$$

$$۳) (A - B) \cup C =$$

$$۴) (A \cup C) - B =$$

۲. به کمک نمودار ون تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$۱) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$۲) (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$۳) A \cup (B \cap A) = A$$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

۴

۱

یادآوری

احتمال رخ دادن یک پیشامد از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$



مثال ۱۴



روی ۱۰ کارت یکسان اعداد یک تا ۱۰ نوشته شده است، یک کارت بدون نگاه کردن از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت مضرب ۳ باشد؟

$$\text{احتمال مضرب ۳ بودن عدد روی کارت} = \frac{\text{تعداد مضرب‌های ۳ کل کارت‌ها}}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

حال با آشنا شدن با مفاهیم مجموعه‌ها می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر بیان کرد.
مجموعه کل حالات ممکن را S می‌نامیم و مجموعه حالت‌های مطلوب را با A یا B یا C ... نشان می‌دهیم. (هر یک از زیر مجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم).
احتمال رخ دادن پیشامد A نیز با $P(A)$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

مثال ۱۵



اگر تاسی را بیاندازیم چقدر احتمال دارد:

آ. عدد رو شده زوج باشد

ب. عدد رو شده زوج و بزرگ‌تر از ۲ باشد

پ. عدد رو شده زوج و اول باشد

ت. عدد رو شده کم‌تر از ۳ باشد

حل. مجموعه‌ی کل حالات ممکن $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است، پس $n(S) = ۶$.

آ. فرض می‌کنیم A مجموعه اعداد رو شده‌ی زوج باشد، در این صورت $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و $n(A) = ۳$ بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ب. B را مجموعه اعداد رو شده‌ی زوج و بزرگ‌تر از ۲ در نظر می‌گیریم، در این صورت $B = \{۴, ۶\}$ و $n(B) = ۲$ در نتیجه

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

پ. فرض می‌کنیم C مجموعه اعداد رو شده‌ی زوج و اول باشد، در این صورت $C = \{۲\}$ و $n(C) = ۱$ از این رو

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

ت. D را مجموعه اعداد رو شده‌ی کم‌تر از ۳ در نظر می‌گیریم، پس $D = \{۱, ۲\}$ و $n(D) = ۲$ در نتیجه

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$



اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید و ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو پسر باشد؟

حل. مجموعه کل حالات ممکن عبارتست از

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

بنابراین

$$n(S) = ۸$$

پیشامد داشتن دو پسر عبارتست از

$$A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ)\}$$

پس

$$n(A) = ۳$$

در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۱۶



در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد اگر ۱ مهره به طور تصادف از این جعبه خارج کنیم چقدر احتمال دارد:

آ. این مهره آبی باشد. **ب.** این مهره سبز نباشد. **پ.** این مهره قرمز یا سبز باشد.

حل. کل حالت‌های ممکن عبارتست از $n(S) = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$

آ. فرض می‌کنیم A مجموعه‌ی مهره آبی باشد، در این صورت $n(A) = ۴$ پس

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

ب. فرض می‌کنیم B مجموعه‌ی مهره سبز نباشد، در این صورت $n(B) = ۷$ در نتیجه

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۷}{۱۲}$$

پ. فرض می‌کنیم C مجموعه‌ی مهره قرمز یا سبز باشد، در این صورت $n(C) = ۸$ بنابراین

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۱۷



اگر تاسی را دوبار بیاندازیم چقدر احتمال دارد:

آ. هر دو بار عدد اول رو شود. **ب.** دو عدد رو شده، مثل هم باشد. **ت.** مجموع دو عدد، ۷ شود. **پ.** دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد.

مثال ۱۸





حل.

بار دوم \ بار اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 36$$

آ. A را مجموعه‌ی هر دو بار عدد اول رو شود در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$n(A) = 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ب. B را مجموعه‌ی دو عدد رو شده مثل هم باشند فرض می‌کنیم. پس

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

پ. C را مجموعه‌ی دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$C = \{(3, 6), (3, 3), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$n(C) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

ت. D را مجموعه‌ی دو عدد ۷ باشد فرض می‌کنیم. در نتیجه

$$D = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$n(D) = 6$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$



کار کلاس

ایست

ایستگاه کار در کلاس



۱ یک سکه و یک تاس را باهم می‌اندازیم، مجموعه S را با اعضایش (تمام حالات ممکن) را بنویسید.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots\}$$



۲ روی ۵۰ کارت یکسان اعداد یک تا ۵۰ نوشته شده است، یک کارت به تصادف از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد:
آ. عدد روی کارت زوج باشد.

ب. عدد روی کارت مضرب ۷ باشد.

پ. عدد روی کارت بزرگ‌تر از ۴۵ باشد.



ایست

ایستگاه کار در منزل

۱. ظرفی دارای ۷ مهره قرمز، ۵ مهره آبی و ۳ مهره سبز است. ۱ مهره به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد:
آ. این مهره قرمز یا آبی باشد.



ب. این مهره آبی باشد.

پ. این مهره قرمز نباشد.

۲. سه سکه را باهم می‌اندازیم:

آ. مجموعه تمام حالات ممکن را بنویسید؟ ($S = ?$)

ب. چقدر احتمال دارد فقط یک‌بار رو بیاید.

پ. چقدر احتمال دارد حداقل یک‌بار رو بیاید.

ت. چقدر احتمال دارد حداکثر یک‌بار رو بیاید.

۳. از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست و ۳ کشتی‌گیر می‌خواهیم یک نماینده انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد:

آ. این نماینده فوتبالیست باشد.

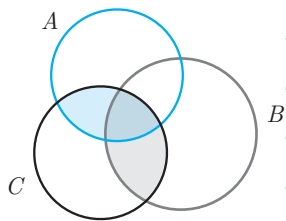
ب. این نماینده کشتی‌گیر یا والیبالیست باشد.



تمرین‌های تکمیلی فصل ۱

۱

۵ مجموعه‌ای را که در نمودار ون زیر هاشور خورده است را بنویسید.



۱ زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{\{1, 2, \phi, 3, \{\}\}\}$ را بنویسید.

۲ دلیل درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بنویسید.

۱) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{W}) \subseteq \mathbb{W}$

۲) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{W}$

۳) $(\mathbb{W} \cup \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{W}$

۴) $(\mathbb{W} \cap \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{W}$

۳ اگر $A = \{\{\{\phi\}, \{a\}, a\}\}$ و $B = \{a, \phi\}$ مجموعه‌های زیر را با عضو مشخص کنید.

۱) $A \cup B =$

۲) $A \cap B =$

۳) $B - A =$

۴) $A - B =$

۴ مجموعه‌ی زیر، چند زیرمجموعه دارد.

$$A = \{x \mid x(x-1)(x-2) = 0\}$$

۶ اگر $A = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{x \mid 2 \leq x < 7, x \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌های زیر را با اعضایشان نشان دهید.

۱) $A \cup B =$

۲) $A \cap B =$

۳) $A - B =$

۴) $B - A =$

۷ با استفاده از نمودار ون نشان دهید که دو مجموعه‌ی $(A - B) \cup (B - A)$ و $(A \cup B) - (A \cap B)$ باهم برابرند.

۸ اگر $A \subset B$ باشد حاصل عبارت زیر را بنویسید.

۱) $A - B =$

۲) $B - A =$



۳) $A \cup B =$

۴) $A \cap B =$

۵) $(A \cup B) - (A \cap B) =$

۶) $(A - B) \cup (B - A) =$

۹ مجموعه‌ای از اعداد را با اعضایش تعیین کنید که ۱۶ زیر مجموعه داشته باشد و مجموع عضوهایش ۱۷ باشد و اشتراک آن با مجموعه اعداد فرد برابر $\{3, 5, 7\}$ باشد.

ب. بلیط استخر یا سینما انتخاب کند.

پ. بلیط موزه یا سینما انتخاب نکند.

۱۱ اگر یک سکه را سه بار بیاندازیم:
آ. کل حالات ممکن (S) را بنویسید.

ب. چقدر احتمال دارد فقط یک‌بار رو بیاید.

پ. چقدر احتمال دارد حداقل یک‌بار رو بیاید.

ت. چقدر احتمال دارد حداکثر یک‌بار رو بیاید.

۱۰ معلمی برای تشویق دانش‌آموزانش به آن‌ها در ازای انجام تمرین بلیت‌های ورزشی و فرهنگی هدیه می‌دهد. اگر انتخاب بلیط به تصادف باشد و معلم ۷ بلیط استخر، ۵ بلیط سینما و ۳ بلیط موزه را به صورت درهم ریخته (مخلوط) روی میز قرار دهد و معلم یک بلیط به تصادف انتخاب کند چقدر احتمال دارد:
آ. بلیط سینما انتخاب کند.



سؤال‌های چهار گزینه‌ای

۱ کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی می‌باشد.

(۱) $B = \{x \mid x + 8 = 8\}$

(۲) $A = \{x \mid x^2 = 9\}$

(۳) $D = \{x \mid x \neq x\}$

(۴) $C = \{x \mid \frac{1}{3}x^2 = 3\}$

۲ کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) $\phi \subseteq M$

(۲) $A \subseteq A$

(۳) $A \in m$

(۴) $\phi \subseteq A$

۳ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آن‌گاه:

(۱) $A \cup C = C$

(۲) $A \cap C = B$

(۳) $A \cup B = A$

(۴) $A \cap B = b$

۴ مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} اعداد حسابی \mathbb{W} و اعداد صحیح \mathbb{Z} می‌باشد، نتیجه‌ی نادرست کدام است؟

(۱) $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$

(۲) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$

(۳) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$

(۴) $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$

۵ اگر برای دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم، $A \cap B = \phi$ کدام گزینه حتماً صحیح است؟

(۱) $A - B = A$

(۲) $A = \phi$ یا $B = \phi$

(۳) $A \cup B = \phi$

(۴) $A \cap B = \phi$

۶ اگر $A \cap B = \phi$ کدام گزینه زیر نادرست است؟

(۱) $A \cup B = A$

(۲) $A = B = A$

(۳) $B - A = B$

(۴) $A - (A \cap B) = A$

۷ A ، B و C سه مجموعه و داریم $C \subseteq B \subseteq A$ مجموعه‌ی $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ برابر کدام است؟

(۱) A

(۲) B

(۳) $A \cup B$

(۴) $B \cup C$

۸ اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A \cup B$ برابر کدام است؟

(۱) A

(۲) B

(۳) M

(۴) ϕ

۹ کدام توصیف برای مجموعه‌ی $\{x \mid x > 2\}$ مناسب است؟

(۱) مجموعه اعداد کسری و بزرگ‌تر از ۲

(۲) مجموعه اعداد حقیقی و بزرگ‌تر از ۲

(۳) مجموعه اعداد کسری و صحیح بزرگ‌تر از ۲

(۴) $\{3, 4, 5, \dots\}$

۱۰ اگر $A = \{x \mid x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ و مجموعه‌ی B اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰ باشد، مجموع عضوهای $A \cap B$ چه قدر است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۱

(۳) ۱۲

(۴) ۱۳