

سری سوم سوالات*

حسین نادری
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف

دوشنبه ۲۱ دی ۱۳۹۴

۱ شعبده بازی

شعبده بازی در یکی از حقه های نمایشش از ۵ داوطلب می خواهد که ۵ ورق متفاوت از یک دسته ۵۲ تایی ورق انتخاب کنند. سپس به دستیارش می گوید ۴ تا از ورق ها را به من نشان بده تا ورق پنجم را با توجه به جادویی که دارم، مشخص کنم. سپس دستیار که ۵ کارت در دست اوست؛ ۴ کارت را یکی یکی رو به جمعیت و شعبده باز نشان می دهد و پنجمی را فقط به تماشاچیان نشان می دهد. پس از مدتی شعبده باز کارت پنجم را به درستی حدس می زند. به نظر شما چگونه چنین چیزی ممکن است؟ در اینجا چند سوال مطرح شده که حل آن ها به تدریج سخت شده و شما را به حل مساله اصلی راهنمایی می کنند.

۱. واقعیت این است که وقتی دستیار دارد این ۴ کارت را به شعبده باز نشان می دهد تنها اطلاعات ضمنی که با چهار کارت می تواند به او بدهد ترتیب نشان دادن کارت هاست^۱. روی این مساله با این شرط فکر کنید که دسته ورق ما ۲۸ کارت داشته باشد. چگونه حدس زدن برای شعبده باز ممکن است؟

۲. حال ثابت کنید روشی وجود دارد که شعبده باز با آن بتواند کارت پنجم را از میان ۵۲ کارت مشخص کند^۲.

۳. حال روشی عملی که با آن یک انسان (نه کامپیوتر) بتواند در ظرف حداکثر دو سه دقیقه برای ۵۲ کارت، کارت پنجم را حدس بزند، بیابید.

*مسائل این سری به چند سوال آسان تر تقسیم شده اند، که مطابق با روند راه حل مساله اصلی است. این گونه مساله حل کردن باعث می شود، مساله حل کن انسجام فکری بهتری داشته باشد.

^۱شعبده باز از ایده های دیگری که ممکن است به ذهن خلاق شما خطور کند، مانند سر و ته نشان دادن کارت ها استفاده نمی کند؛

^۲البته برای ۱۲۴ کارت هم چنین روشی وجود دارد. اگر مسیر خوبی برای ۵۲ کارت طی کرده باشید (که به احتمال قوی همین طور است)، برای ۱۲۴ کارت هم به راحتی میتوانید اثبات وجودی کنید

۲ مونتی هال

راستش را بخواهید این مساله مبتدی بوده و حل آن سختی چندانی ندارد. فقط بدانید زمانی که این سوال و پاسخ آن در مجله ای مطرح شد؛ بسیاری از افراد با شنیدن پاسخ این سوال شوکه شدند و اعتقاد داشتند که جواب نوشته شده غلط است و نامه های بسیاری به نویسنده سوال فرستادند تا او را از خطایش مطلع کنند! با این که جواب سوال درست بود و نتیجه های شبیه سازی کامپیوتری هم همین را نشان می داد، اما عده ای باور داشتند جواب چیز دیگری است. قسمت بدترش اینجاست که حدود هزار نفر که مدرک PhD داشتند چنین ادعایی می کردند! برای کسب اطلاعات بیشتر *MontyHallProblem* را در وب جست و جو کنید.

در یک مسابقه تلویزیونی سه در به روی شما قرار گرفته، شما یکی را انتخاب می کنید و به مجری انتخاباتان را اعلام می کنید. پشت یکی از سه در یک خودرو و پشت دو در دیگر پوست بز گذاشته شده است. مجری برنامه یکی از دو دری را که شما انتخاب نکرده اید را باز می کند و به شما نشان می دهد که پشت آن پوست بز است و اکنون به شما این فرصت را می دهد که انتخاباتان را عوض کنید. حال به نظر شما بهتر است که انتخاباتان را عوض کنید یا نظرتان را تغییر ندهید؟

۳ بازی عادلانه یا ناعادلانه؟

می خواهیم عادلانه یا ناعادلانه بودن یک بازی دو نفره را بررسی کنیم. در این بازی نفر اول دو عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می کند و فقط یکی از آن ها را به نفر دوم نشان می دهد (دقت کنید که نفر اول لزومن به صورت تصادفی عدد انتخاب نمی کند، فقط در صورتی تصادفی انتخاب می کند که احتمال بردش را بیشتر کند). نفر دوم باید حدس بزند عدد بزرگ تر کدام است. اگر درست حدس بزند او می برد و در غیر این صورت نفر اول. به نظر شما این بازی عادلانه است؟ یعنی احتمال برد دو بازیکن یکسان است؟

۱. می دانیم نفر دوم با تصادفی انتخاب کردن استراتژی نباختن دارد (به احتمال $1/2$ می برد). آیا می توانید برای او استراتژی بردن نیز پیدا کنید؟

۲. فرض کنید عدد نیم صحیح x میان دو عدد انتخابی نفر اول باشد. حال با دانستن x و عدد نشان داده شده عدد دیگر معلوم می شود. فقط مانده است یافتن x . اکنون احتمال بردن نفر دوم را به شرطی بررسی کنید که به طور تصادفی x را انتخاب کند.

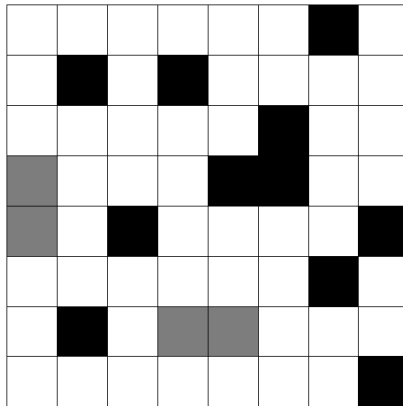
۴ دومینو چینی

می خواهیم در یک صفحه شطرنجی که تعدادی از خانه های آن کنده شده است، دومینو 4 بچینیم. چیدن به صورتی است که تمامی خانه ها پوشیده می شوند و روی هر خانه بیش از یک دومینو قرار نگیرد. شرط لازم و کافی برای این که یک صفحه دومینو چین پذیر باشد (بتوان صفحه را با دومینو پر کرد)، چیست؟^۵

^۳ اعداد به صورت $z + 1/2$ را که $z \in \mathbb{Z}$ z نیم صحیح می نامیم.

^۴ به مستطیل 1×2 یا 2×1 دومینو می گویند.

^۵ راهنمایی: یک راه حل ممکن است صفحه را به گراف دو بخشی تبدیل کند و جواب مساله را به تطابق کامل ربط دهد.



شکل ۱: نمونه یک صفحه که خانه های سیاه خانه های ناموجود اند و خانه های دوتایی مجاور خاکستری دومینو ها را نشان می دهند.

سعی کنید حدس زیر را رد یا اثبات کنید:
صفحه همبندی^۶ که هیچ خانه ی ای با بیش از یک خانه تنها (خانه ای که یک همسایه دارد) همسایه نیست و تعداد خانه های سیاه^۷ با سفید برابر است، دومینو چین پذیر است.

۵ چند سوال با ظاهر جالب

این سوال ها مانند مساله شعیده باز نیستند، ولی صورت بسیار جالب دارند.
ثابت کنید اگر نقشه ی ایران را به جایی از اتاقی که در آن هستید پرت کنید تا روی زمین بیفتد؛ نقطه ای از نقشه وجود دارد که درست روی نقطه متناظرش روی زمین قرار می گیرد.
ثابت کنید به ازای هر $n, n \in \mathbb{N}$ عدد مرکب متوالی وجود دارد، ولی نامتناهی عدد مرکب متوالی وجود ندارد. همین طور ثابت کنید به ازای هر $n, n \in \mathbb{N}$ نقطه ناهم خط در صفحه وجود دارد که فاصله ی دو به دوی آن ها صحیح باشد ولی نامتناهی نقطه ناهم خط^۸ وجود ندارد که فاصله ی دو به دوی آن ها صحیح باشد.^۹

^۶ از هر خانه به هر خانه ی دیگر، مسیری از خانه ها باشد.

^۷ منظور از خانه های سیاه و سفید رنگ خانه ها است، اگر صفحه را به صورت شطرنجی رنگ کنیم.

^۸ هیچ سه نقطه ای روی یک خط نباشند.

^۹ از مقاله ای از مریم میرزاخانی