قلم را آن زبان نبود که سرّ عشق گوید باز
ورای حد تقریر است شرح آرزومندی
درین بازار اگر سودی ست با درویش خرسند است
خدایا منعمم گردان به درویشی و خرسندی

فصل پنجم: تیرها

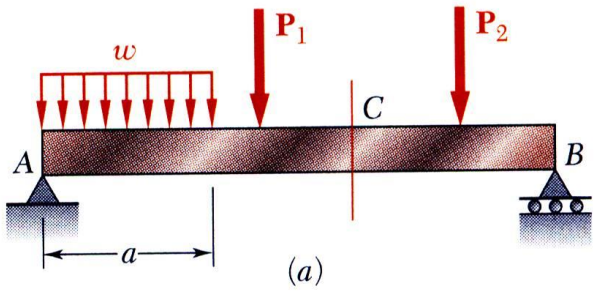
Beams

اکبر اقبالی

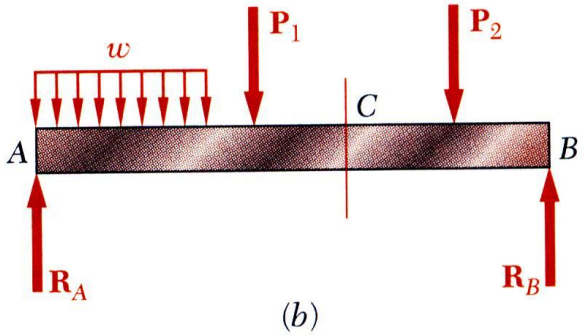
WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

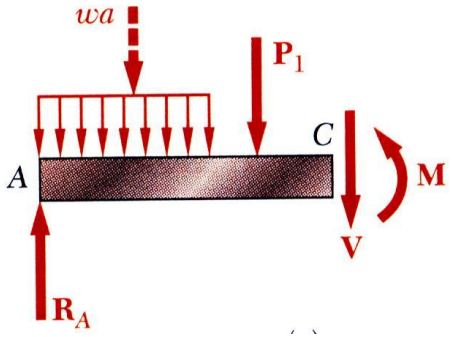
مقدمه



- هدف: تحلیل و طراحی تیرها
- تیرها: اعضای سازه ای که بارهای اعمال شده در نقاط مختلف را تحمل می کنند.



- بارگذاری ها در تیرها به دو صورت متمرکز و گسترده (توزیع شده) وجود دارند.
- در اثر بارگذاری، نیروی برشی (ناشی از تنشبرشی) و گشتاور خمشی (ناشی از تنش عمودی) در تیرها ایجاد می شود.



- در اغلب موارد تنش عمودی معیار طراحی است که باید موقعیت بزرگترین ممان خمشی را محاسبه نمود.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{|M|}{S}$$

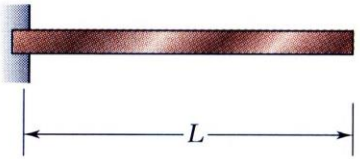
مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

دسته بندی قیدها در تیرها

Statically Determinate Beams

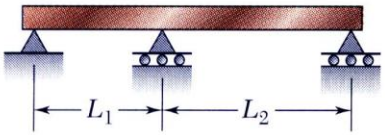
(a) Simply supported beam

(b) Overhanging beam

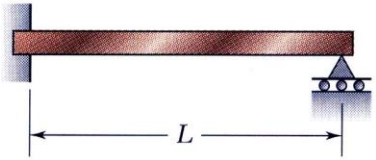


(c) Cantilever beam

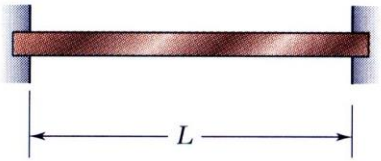
Statically Indeterminate Beams



(d) Continuous beam



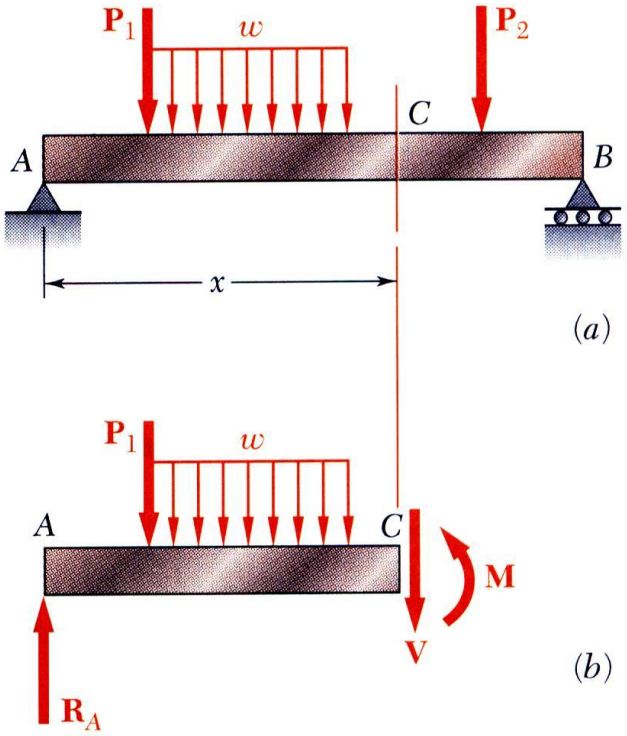
(e) Beam fixed at one end and simply supported at the other end



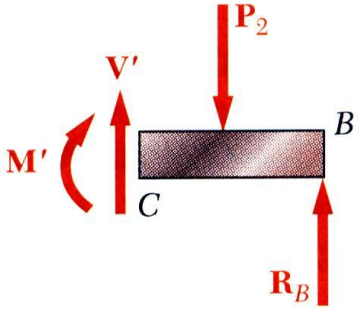
(f) Fixed beam

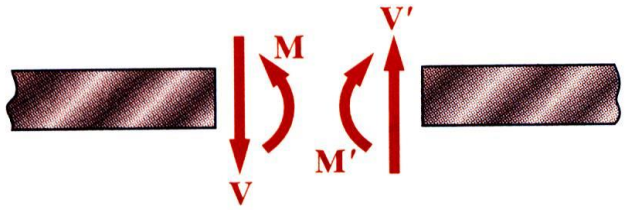
مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

برش و ممان خمشی



- محاسبه حداکثر تنش های عمودی و برشی نیازمند شناسایی حداکثر نیروی برشی داخلی و کوپل خمشی است.
- نیروی برشی و کوپل خمشی در یک نقطه با مقطع زدن در یک نقطه، و اعمال معادلات تعادل بدست می آید.
- علامت مثبت:





(a) Internal forces
(positive shear and positive bending moment)

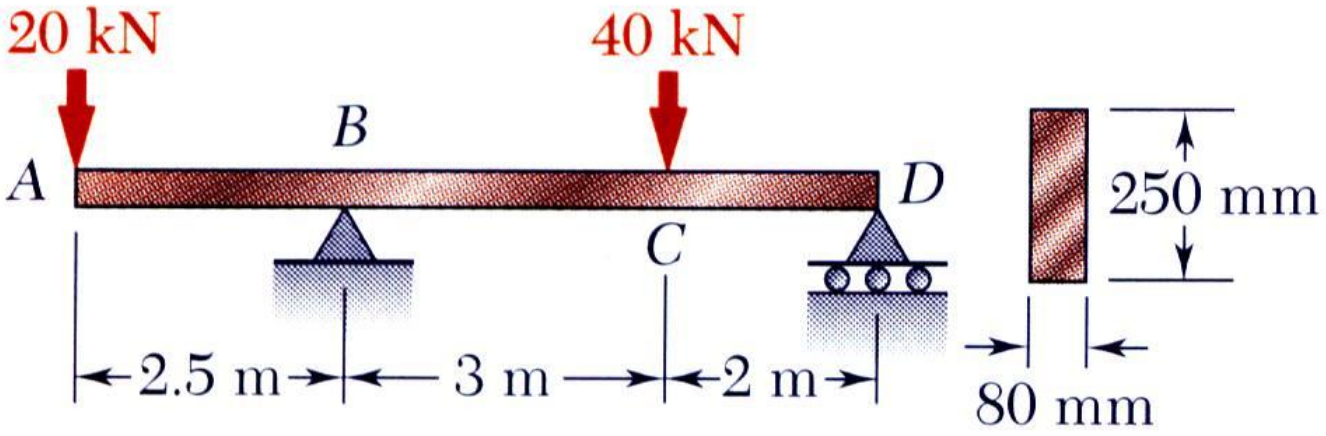
مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مقدمه

- ترمو

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

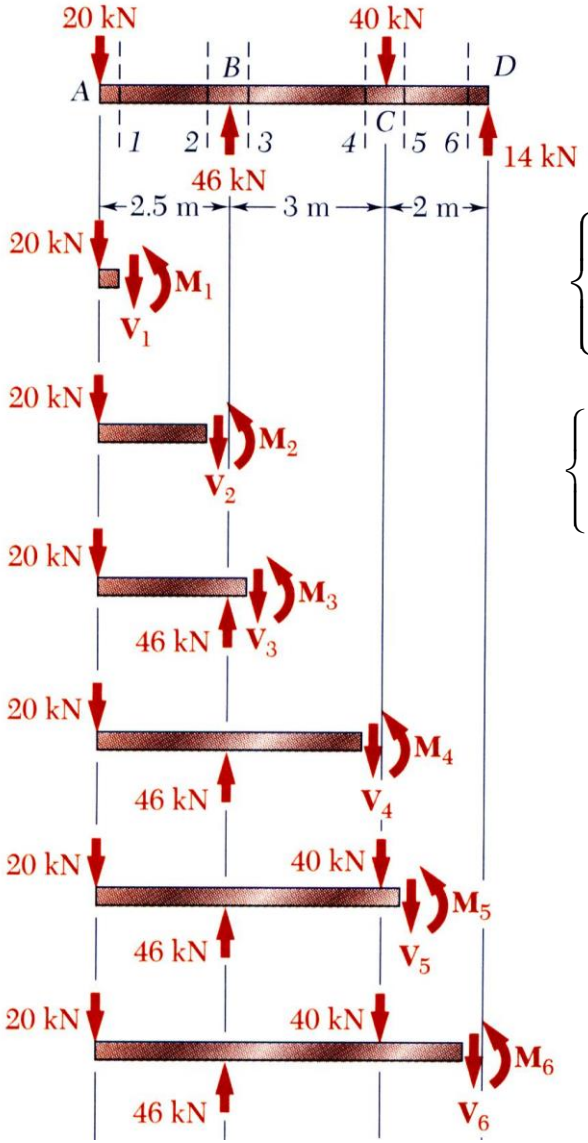
مثال ۵-۱



- با فرض جسم صلب، نیروهای عکس العمل را محاسبه می کنیم.
- تیر را در نقاط مختلف مقطع زده و معادلات تعادل را اعمال می کنیم.
- نیروهای برشی و کوپل خمشی را در هر مقطع محاسبه می کنیم.
- بیشترین نیروی برشی و ممان خمشی را از نمودارها بدست می آوریم.
- روابط کشسانی ناحیه الاستیک را برای محاسبه تنش حداکثر متناظر اعمال می کنیم.

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۱



$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}R_D = 14\,\text{kN} \\ R_B = 40\,\text{kN}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum F_y = 0 & -20\,\text{kN} - V_1 = 0 & V_1 = -20\,\text{kN} \\ \sum M_1 = 0 & (20\,\text{kN})(0\,\text{m}) + M_1 = 0 & M_1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum F_y = 0 & -20\,\text{kN} - V_2 = 0 & V_2 = -20\,\text{kN} \\ \sum M_2 = 0 & (20\,\text{kN})(2.5\,\text{m}) + M_2 = 0 & M_2 = -50\,\text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$$V_3 = +26\,\text{kN} \quad M_3 = -50\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

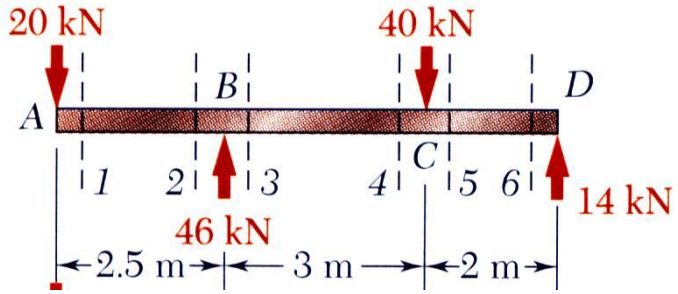
$$V_4 = +26\,\text{kN} \quad M_4 = +28\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$V_5 = -14\,\text{kN} \quad M_5 = +28\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

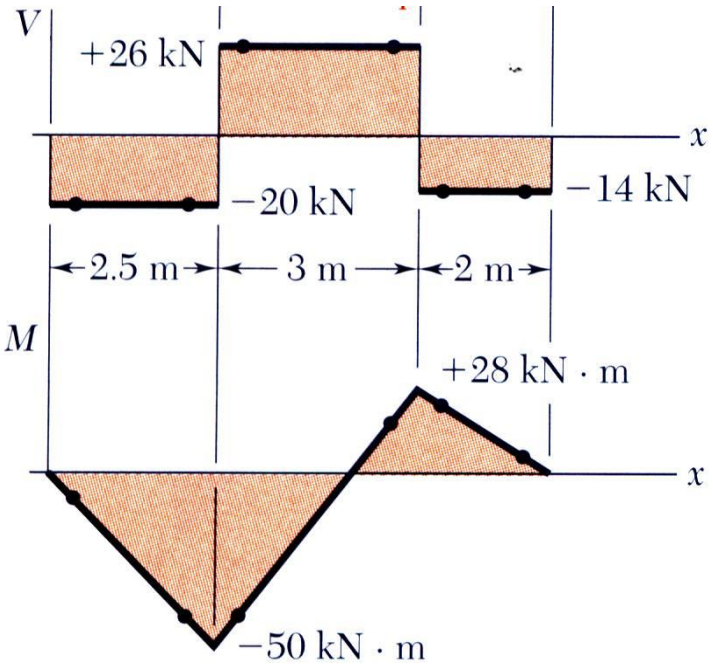
$$V_6 = -14\,\text{kN} \quad M_6 = 0$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۱



$$\begin{cases} V_m = 26\,\text{kN} \\ M_m = |M_B| = 50\,\text{kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$



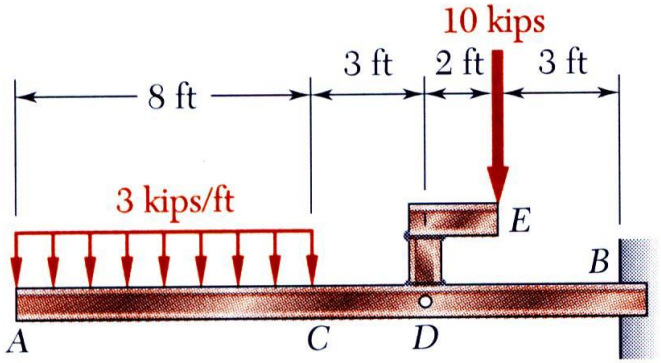
$$S = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}(0.080\,\text{m})(0.250\,\text{m})^2$$
$$= 833.33\times10^{-6}\,\text{m}^3$$

$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{S} = \frac{50\times10^3\,\text{N}\cdot\text{m}}{833.33\times10^{-6}\,\text{m}^3}$$

$$\sigma_m = 60.0\times10^6\,\text{Pa}$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۲



W10x112 rolled-steel beam.

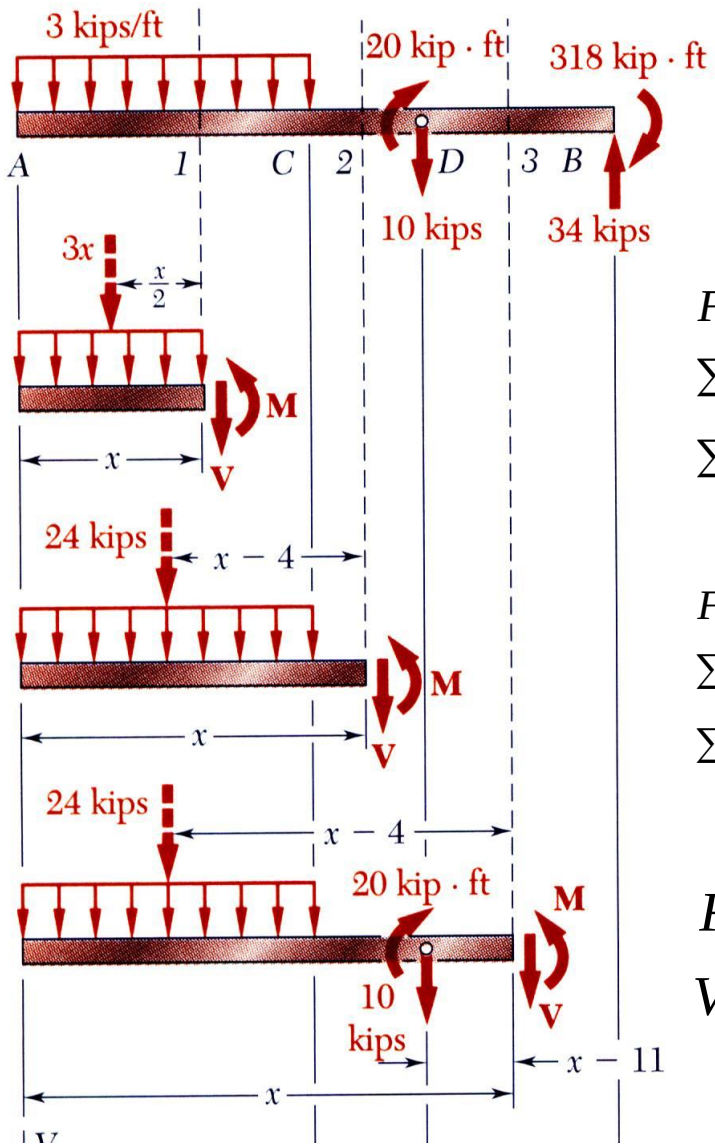
(a) Shear and bending-moment diagrams

(b) Normal stress in sections just to the right and left of point D.

- نیروی *10kips* را در نقطه ***D*** جایگزین می کنیم.
- واکنش در تکیه گاه ها را محاسبه می کنیم.
- تیر را در چند نقطه مقطع می زنیم.
- نیروهای برشی و کوپل خمشی را در هر مقطع محاسبه می کنیم.
- روابط کشسانی ناحیه الاستیک را برای محاسبه تنش حداکثر متناظر اعمال می کنیم.

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۲



$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}M_B = 318 kip.ft \\ R_B = 34 kips\end{cases}$$

From A to C :

$\sum F_y = 0 \quad -3x - V = 0 \qquad V = -3x \text{ kips}$

$\sum M_1 = 0 \quad (3x)\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0 \qquad M = -1.5x^2 \text{ kip} \cdot \text{ft}$

From C to D :

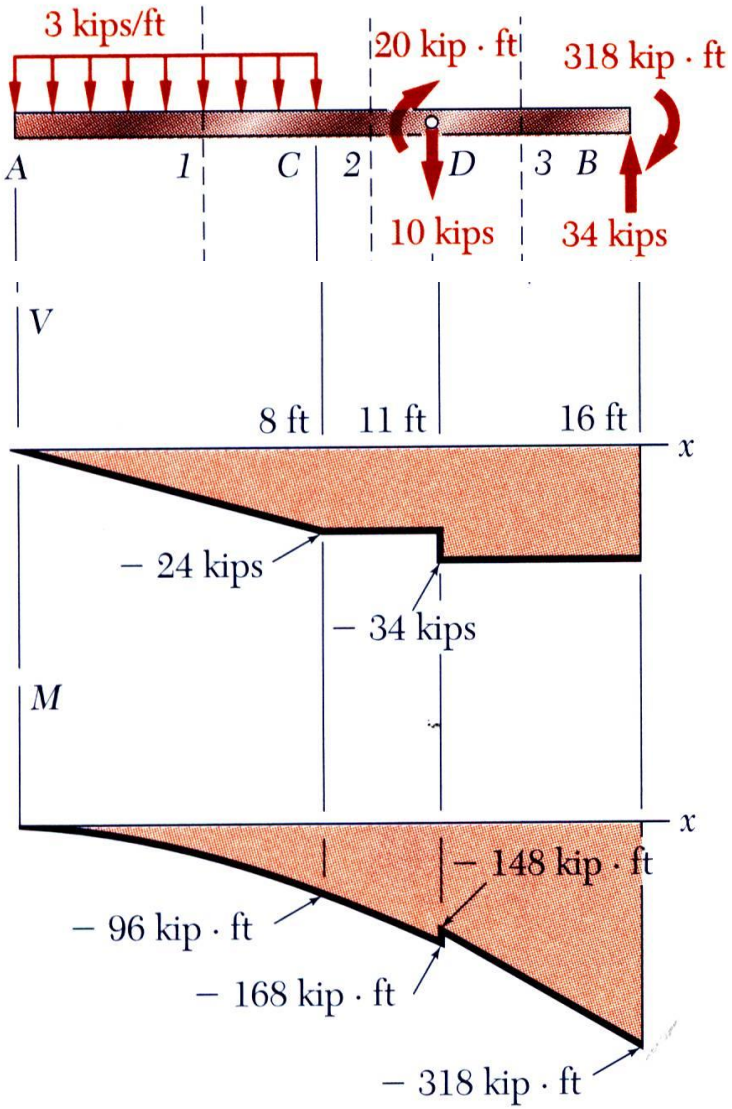
$\sum F_y = 0 \quad -24 - V = 0 \qquad V = -24 \text{ kips}$

$\sum M_2 = 0 \quad 24(x-4) + M = 0 \qquad M = (96 - 24x) \text{ kip} \cdot \text{ft}$

From D to B :

$V = -34 \text{ kips} \qquad M = (226 - 34x) \text{ kip} \cdot \text{ft}$

مثال ۵-۲



To the left of D :

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{2016\,\text{kip}\cdot\text{in}}{126\,\text{in}^3}$$

$$\sigma_m = 16.0\,\text{ksi}$$

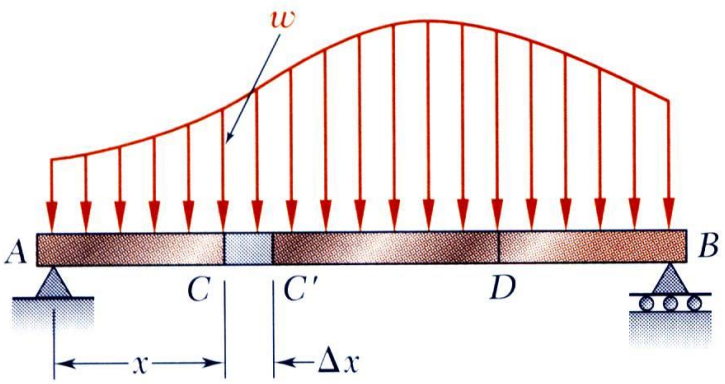
To the right of D :

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{1776\,\text{kip}\cdot\text{in}}{126\,\text{in}^3}$$

$$\sigma_m = 14.1\,\text{ksi}$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

روابط میان بار، نیروی برشی و ممان خمشی

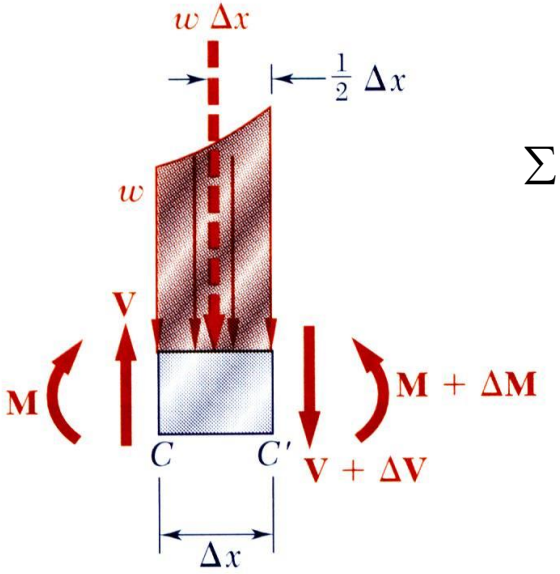


$$\sum F_y = 0: \quad V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\Delta x$$

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\, dx$$



$$\sum M_{C'} = 0: \quad (M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

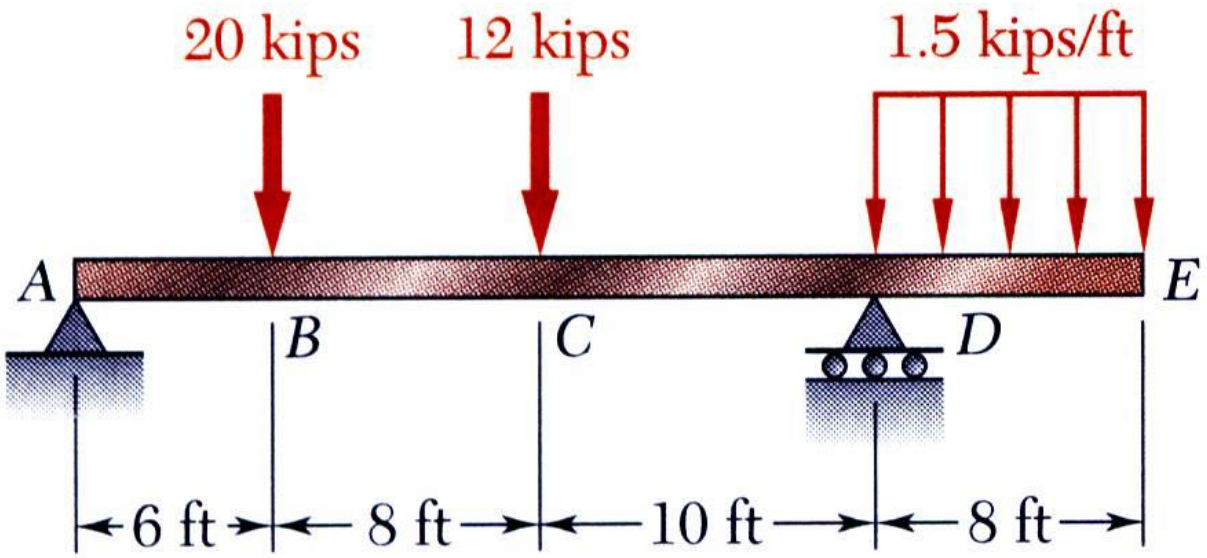
$$\Delta M = V\Delta x - \frac{1}{2} w(\Delta x)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = 0$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\, dx$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

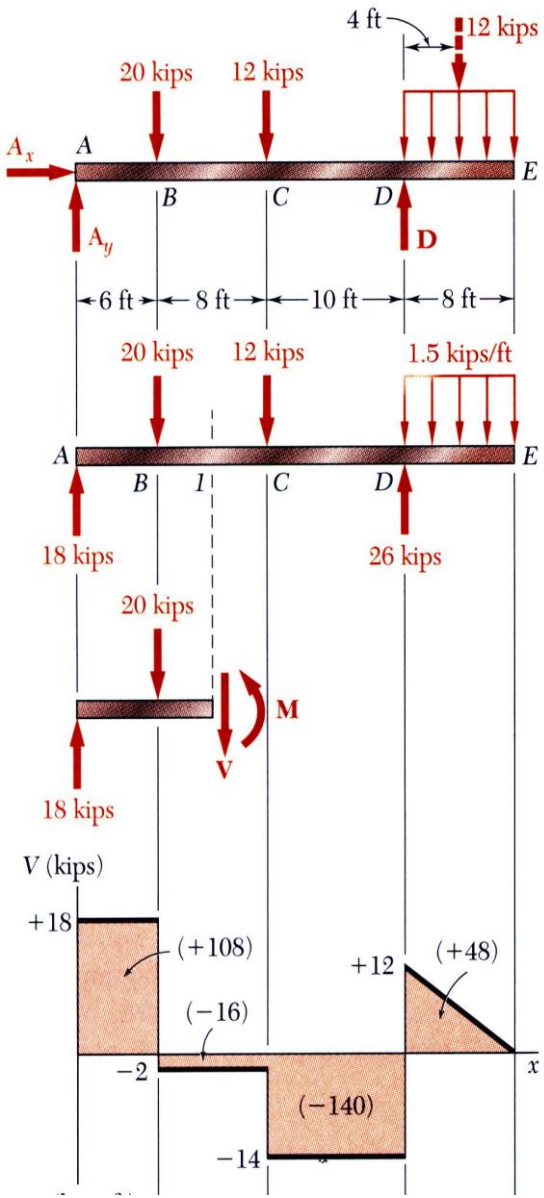
مثال ۵-۳



- واکنش در تکیه گاه ها را محاسبه می کنیم.
- روابط بار و نیروی برشی را برای رسم دیاگرام برش اعمال می کنیم.
- روابط ممان خمشی و نیروی برشی را برای رسم دیاگرام ممان خمشی اعمال می کنیم.

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۳



$$\sum M_A = 0$$

$$0 = D(24\,\text{ft}) - (20\,\text{kips})(6\,\text{ft}) - (12\,\text{kips})(14\,\text{ft}) - (12\,\text{kips})(28\,\text{ft})$$

$$D = 26\,\text{kips}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$0 = A_y - 20\,\text{kips} - 12\,\text{kips} + 26\,\text{kips} - 12\,\text{kips}$$

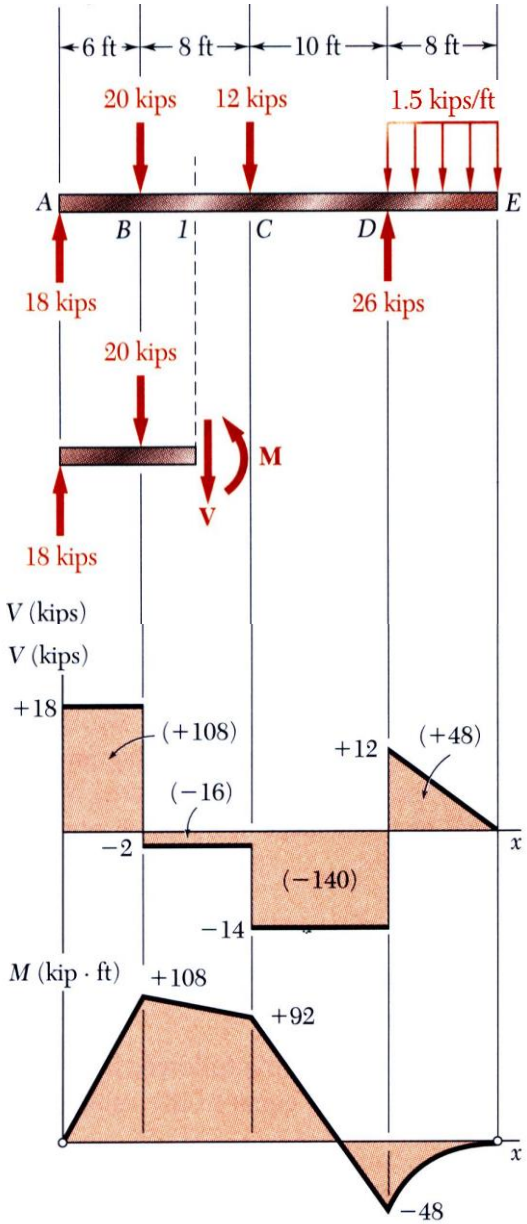
$$A_y = 18\,\text{kips}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad dV = -w\,dx$$

- *zero slope between concentrated loads*
- *linear variation over uniform load segment*

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۳



$$\sum M_A = 0$$

$$0 = D(24\,\text{ft}) - (20\,\text{kips})(6\,\text{ft}) - (12\,\text{kips})(14\,\text{ft}) - (12\,\text{kips})(28\,\text{ft})$$

$$D = 26\,\text{kips}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$0 = A_y - 20\,\text{kips} - 12\,\text{kips} + 26\,\text{kips} - 12\,\text{kips}$$

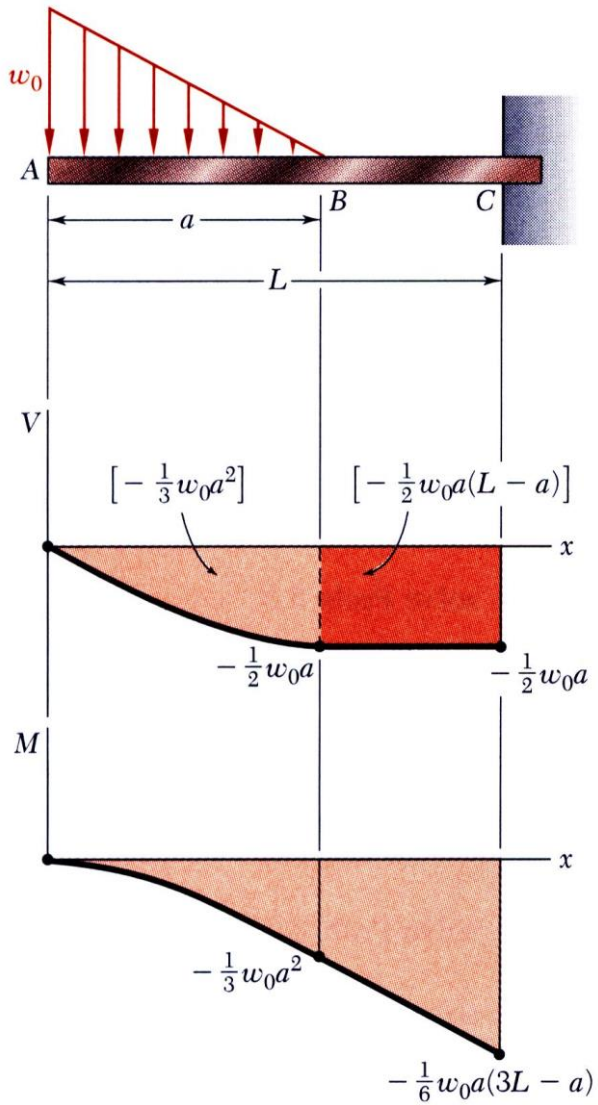
$$A_y = 18\,\text{kips}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad dV = -w\,dx$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad dM = V\,dx$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۵-۵



$$\sum F_y = 0 = -\tfrac{1}{2}w_0 a + R_C$$

$$R_C = \tfrac{1}{2}w_0 a$$

$$\sum M_C = 0 = \tfrac{1}{2}w_0 a\left(L - \frac{a}{3}\right) + M_C$$

$$M_C = -\tfrac{1}{2}w_0 a\left(L - \frac{a}{3}\right)$$

$$V_B - V_A = -\int_0^a w_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = -\left[w_0\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^a$$

$$V_B = -\frac{1}{2}w_0 a = -(\text{area under load curve})$$

$$M_B - M_A = \int_0^a \left(-w_0\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)\right)dx = \left[-w_0\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a}\right)\right]_0^a$$

$$M_B = -\frac{1}{3}w_0 a^2$$

$$M_B - M_C = \int_a^L \left(-\frac{1}{2}w_0 a\right)dx = -\frac{1}{2}w_0 a(L-a)$$

$$M_C = -\frac{1}{6}w_0 a(3L-a) = \frac{a\,w_0}{2}\left(L - \frac{a}{3}\right)$$

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

طراحی تیرها برای خمش

- بزرگترین تنش عمودی در صفحه ای پیدا می شود که بزرگترین ممان خمشی ایجاد می شود.

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\max} c}{I} = \frac{|M|_{\max}}{S}$$

- برای طراحی ایمن بایستی تنش عمودی حداکثر کمتر از تنش عمودی مجاز برای ماده استفاده شده باشد. این معیار برای اندازه گیری حداقل مدول سطح قابل قبول بکار می رود.

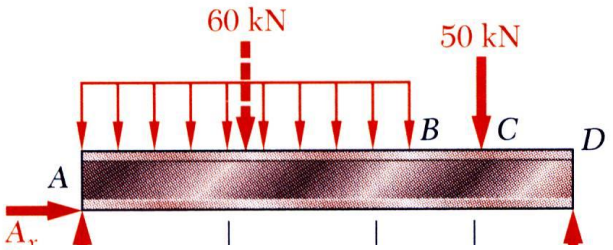
$$\sigma_m \le \sigma_{all}$$

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{all}}$$

- برای انتخاب میان مدول های قابل قبول، کمترین وزن در واحد سطح مقطع بهترین انتخاب خواهد بود.

مقدمه
خمش و برش
دیاگرام ها
مثال
روابط
مثال
طراحی تیر
مثال

مثال ۸-۵



Shape	S, mm^3
W410×38.8	637
W360×32.9	474
W310×38.7	549
W250×44.8	535
W200×46.1	448

$$\sum M_A = 0 = D(5\,\text{m}) - (60\,\text{kN})(1.5\,\text{m}) - (50\,\text{kN})(4\,\text{m})$$

$$D = 58.0\,\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + 58.0\,\text{kN} - 60\,\text{kN} - 50\,\text{kN}$$

$$A_y = 52.0\,\text{kN}$$

$$V_A = A_y = 52.0\,\text{kN}$$

$$V_B - V_A = -(\textit{area under load curve}) = -60\,\text{kN}$$

$$V_B = -8\,\text{kN}$$

$$|M|_{\max} = (\textit{area under shear curve, A to E})$$

$$= 67.6\,\text{kN}$$

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{all}} = \frac{67.6\,\text{kN}\cdot\text{m}}{160\,\text{MPa}}$$

$$= 422.5\times10^{-6}\,\text{m}^3 = 422.5\times10^{3}\,\text{mm}^3$$

$$W360\times32.9$$

ای مردم!

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام