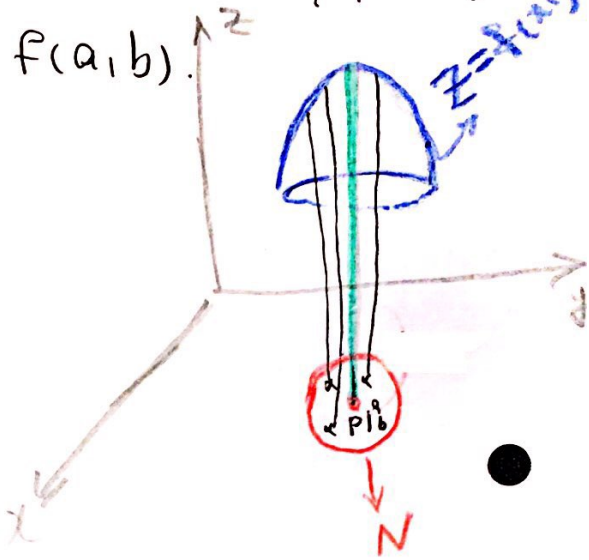
اکسترمم‌های موضعی (نسبی) توابع چند متغیره

نقطه $P(a,b)$ را ماکزیمم موضعی تابع $z=f(x,y)$ گوییم هرگاه همسایگی N از P چنان موجود باشد که

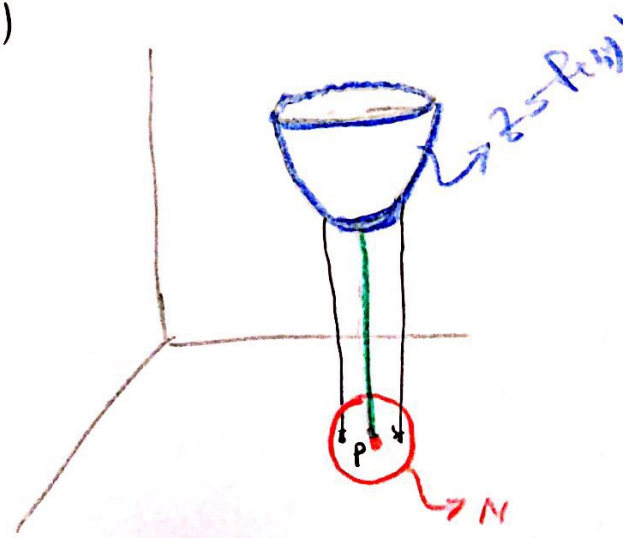
$$\forall (x,y)\in N: \quad f(x,y)\le f(a,b).$$



$$f(x,y) \le f(a,b)$$
$$\forall (x,y)\in N.$$

نقطه $P(a,b)$ را مینیمم موضعی تابع $z=f(x,y)$ گوییم هرگاه همسایگی N از P چنان موجود باشد که

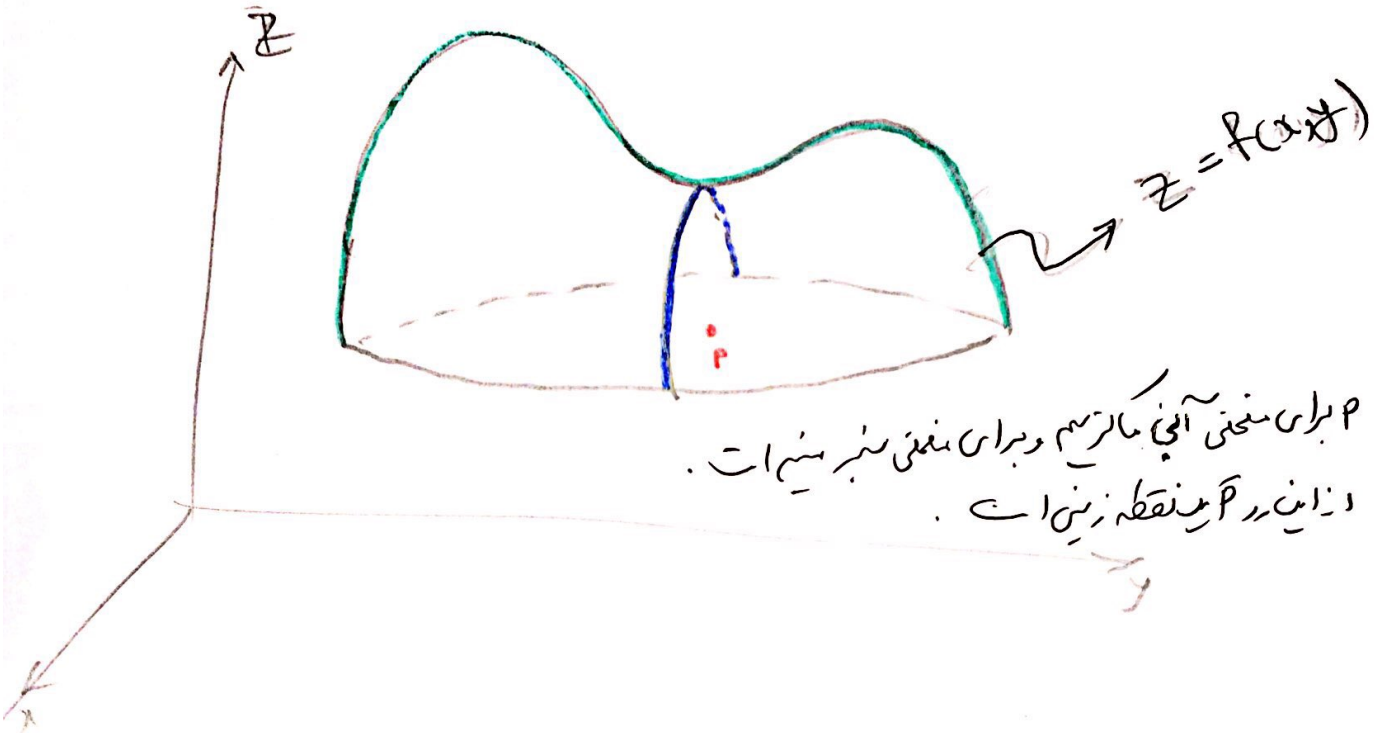
$$\forall (x,y)\in N: \quad f(a,b)\le f(x,y)$$



$$\forall (x,y)\in N: \quad f(a,b) \le f(x,y)$$

Scanned with CamScanner

نقطه $P(a,b)$ را یک نقطه زینی یا مینیماکس گوییم هرگاه این نقطه برای برخی منحنی‌ها ماکزیمم و برای برخی دیگر مینیمم باشد.



- P برای منحنی آبی ماکزیمم و برای منحنی سبز مینیمم است.
- در این روند P یک نقطه زینی است.

تعریف: نقطه $P(a,b)$ را یک نقطه بحرانی برای تابع $z=f(x,y)$ گوییم هرگاه در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد و اگر مشتق‌پذیر باشد $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$.

قضیه: فرض کنیم تابع $z=f(x,y)$ در (a,b) دارای اکسترمم موضعی باشد، در این صورت یا f در (a,b) مشتق‌پذیر نیست یا اگر مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$.

- یعنی برای پیدا کردن نقاط اکسترمم موضعی یک تابع در مجموعه نقاط بحرانی در پی آنها هستیم.
- نگفته نماند در این درس اغلب توابع مشتق‌پذیرند.

سوال: آیا تابعی سراغ دارید که در $(0,0)$ مینیمم موضعی داشته باشد، اما $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ آن موجود نباشد؟

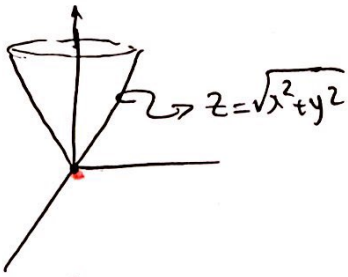
Scanned with CamScanner

Ex) تابع $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در $(0,0)$

1) دارای مکزیمم است 2) دارای نقطه زینی است 3) دارای مینیمم موضعی است

4) $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$.

حل: با توجه به شکل



$(0,0)$ نقطه مینیمم موضعی برای تابع است

1) $z_x = \dfrac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \dfrac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}$; $z_x(0,0)$, $z_y(0,0)$

هر دو تعریف نشده‌اند. در واقع سوال قبل هم پاسخ دارد.

با استفاده از قضیه بعدی ماهیت نقاط بحرانی را که اغلب در $f_x=f_y=0$ صدق می‌کنند مشخص می‌کنیم.

قضیه (آزمون جزئی های درم)

فرض کنید $P(a,b)$ یک نقطه بحرانی تابع $z=f(x,y)$ باشد و f دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته در P و $D:=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$ در این صورت

آ- اگر $D(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)<0$ آنگاه f در $P(a,b)$ ماکزیمم موضعی دارد.

ب- اگر $D(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)>0$ آنگاه f در $P(a,b)$ مینیمم موضعی دارد.

پ- اگر $D(a,b)<0$ آنگاه $P(a,b)$ نقطه زینی است

ت- اگر $D(a,b)=0$ آنگاه آزمون بی حاصل است.

Scanned with CamScanner

p: 80

EX) ماهیت نقاط بحرانی توابع زیر را مشخص کنید:

① $z = \ln(x^2 + xy + y^2 + 4)$

حل: برای یافتن نقاط بحرانی دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2+4} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2+4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -2\left\{ x+2y=0 \right. \end{cases}$$

$$\boxed{y=0=x}$$

پس $(0,0)$ نقطه بحرانی برای تابع ① است. حال

$$z_{xx} = \frac{2(x^2+xy+y^2+4) - (2x+y)(2x+y)}{(x^2+xy+y^2+4)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2+xy+y^2+4) - (x+2y)^2}{(x^2+xy+y^2+4)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{1(x^2+xy+y^2+4) - (x+2y)(2x+y)}{(x^2+xy+y^2+4)^2}$$

$$z_{xx}(0,0) = \frac{1}{2} \quad , \quad z_{xy} = \frac{1}{4} \quad z_{yy} = 1/2$$

$$D(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$

$(0,0)$ نقطه مینیمم است

$z_{xx}(0,0) = 1/2 > 0$

Scanned with CamScanner

- اگر سوال قبل یک تست بود و زمان پاسخگویی برای آن دو یا سه دقیقه تعیین شده باشد به سبب صعودی بودن تابع Ln می‌توانستیم به جای تابع داده شده، ماهیت نقاط بحرانی تابع $g(x,y)=x^2+xy+y^2+z$ را بررسی کنیم، تا در محاسبه مشتقات جزئی اول و دوم زمان کمتری صرف نماییم.

② $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases}$$

$$x=y^2 \xrightarrow{y=x^2} x=(x^2)^2 \Longrightarrow x(1-x^3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^2 \xrightarrow{x=0} y=0 \\ y=x^2 \xrightarrow{x=1} y=1 \end{cases}$$

$(0,0)$, $(1,1)$ نقاط بحرانی برای f هستند و

$$f_{xx}=6x \quad , \quad f_{xy}=-3 , \quad f_{yy}=+6y$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy-9$$

نقطه بحرانی P	$f_{xx}(P)$	$D(P)$	نتیجه
$(0,0)$	0	$-9<0$	زینی
$(1,1)$	$6>0$	$27>0$	مینیمم موضعی

Scanned with CamScanner

p: 82

Ex) در تابع $f(x,y)=\ln(2x(y-1)+1)$ نقطه $(0,1)$:

1) مینیمم موضعی است 2) ماکزیمم موضعی است 3) زینی است 4) نقطه بحرانی نیست

حل: چون $\ln$ صعودی است از این رو برای یافتن نقاط بحرانی تابع $g(x,y)=2xy-2x+1$ را بدست می‌آوریم و ماهیت آنها را مشخص می‌کنیم

$$\begin{cases} g_x = 2y-2 = 0 \Rightarrow y=1 \\ g_y = 2x = 0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$(0,1)$ نقطه بحرانی برای g است (این گزینه 4 غلط است)

$$g_{xx}=0$$
$$g_{xy}=2$$
$$g_{yy}=2$$

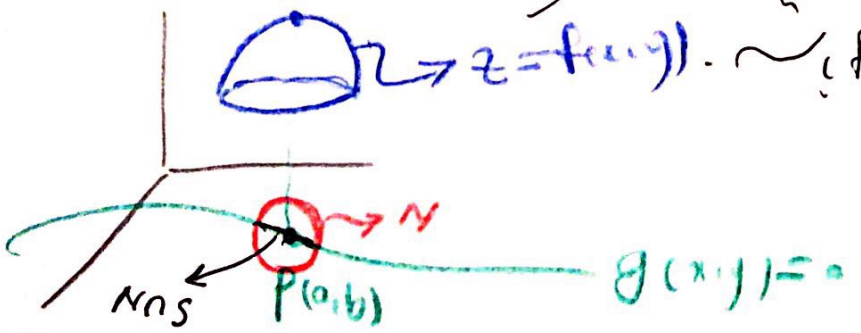
$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4$$

$D(0,1)=-4<0 \Rightarrow$ $(0,1)$ زینی است

گزینه 3

اکسترمم مشروط (یا مقید)

نقطه $P(a,b)$ اکسترمم مشروط تابع $z=f(x,y)$ تحت شرط $g(x,y)=0$ گوییم هرگاه، اگر $S=\{(x,y): g(x,y)=0\}$ همسایگی N از P به گونه‌ای موجود باشد که P در $N\cap S$ اکسترمم موضعی f باشد.



Scanned with CamScanner

با استفاده از قضیه زیر، اکسترمم‌های مشروط تابع چندمتغیره f تحت شرط تابع چند متغیره g بدست می‌آوریم. این قضیه به نام قضیه ضرایب لاگرانژ مشهور است.

قضیه ضرایب لاگرانژ: اگر توابع چند متغیره f, g در همسایگی نقطه p دارای مشتقات جزئی پیوسته، $\nabla g(p) \neq 0$، p اکسترمم مشروط تابع f تحت شرط $g=0$ باشد، آنگاه عدد حقیقی λ به گونه‌ای وجود دارد که $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$

یعنی: نقاط اکسترمم مشروط f تحت شرط $g=0$ در دستگاه $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ صدق می‌کند).

Ex) اکسترمم تابع $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ تحت شرط $2x-y-2z=3$ بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} f = x^2+y^2+z^2 \\ g = 2x-y-2z-3=0 \quad (\text{شرط}) \end{cases}$$

طبق قضیه ضرایب لاگرانژ عمل می‌کنیم

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(2,-1,-2)$$

$$\Rightarrow (2x, 2y, 2z) = (2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda \rightarrow x = \lambda \\ 2y = -\lambda \rightarrow y = \frac{-\lambda}{2} \\ 2z = -2\lambda \rightarrow z = -\lambda \\ (g=0)\ 2x-y-2z-3=0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{g=0}$ جایگزین می‌کنیم

Scanned with CamScanner

P:84 $\quad 2\lambda + \frac{\lambda}{2} + 2\lambda = 3 \Longrightarrow \frac{\cancel{9}^{3}\lambda}{2} = \cancel{3}^{1} \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases} , \quad f\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = 1$$

برای آنکه بجا ببریم این نقطه ماکزیمم یا مینیمم شرط است یک نقطه دلخواه از قید $g=0$ اختیار می‌کنیم مثل $(0,0,-\frac{3}{2})$ حال

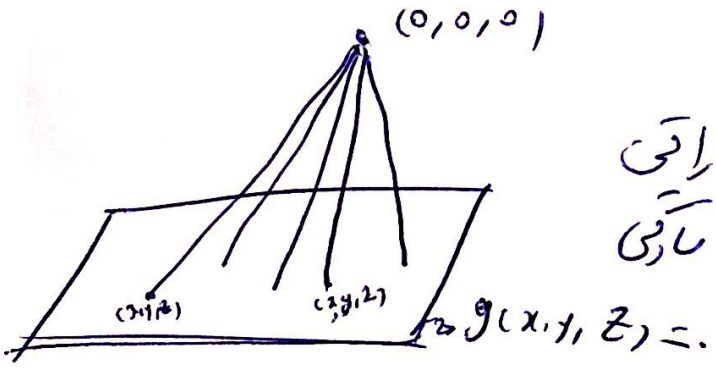
$$f\left(0,0,-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} > 1 = f\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

بنابراین $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ نقطه مینیمم شرط است.

---

* مثال قبل را می‌توان از نظر هندسی این طور تعبیر کرد:

نقطه‌ای از صفحه $2x - y - 2z = 3$ را پیدا کنید که کوتاه‌ترین فاصله را تا مبدا داشته باشد.



تابع $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت $g(x,y,z)=0$ مینیمم می‌کنیم، اما برای سادگی تا در $f := (x^2+y^2+z^2)$ محاسبه ∇f را صفر عمل کنیم. یادمان باشد کوتاه‌ترین فاصله برابر با جذر مقدار $f(p)$ است، اگر p نقطه مینیمم شرط باشد.

Scanned with CamScanner

p: 85 مقام کمترین فاصله نقطه $(0,0,1)$ را تا مخروط $z^2 = x^2+2y^2$ بیابید.

حل: با توجه توضیحات قبل تابع $F = x^2+y^2+(z-1)^2$ را مینیمم می‌کنیم

تحت شرط $g(x,y,z) = x^2+2y^2-z^2=0$. پس می‌نویسیم

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (2x, 2y, 2(z-1)) = \lambda(2x, 4y-2z)$$

$$\Rightarrow (2x, 2y, 2(z-1)) = (2\lambda x, 4\lambda y, -2\lambda z)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \Rightarrow x(1-\lambda)=0 \begin{cases} x=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \\ 2y = 4\lambda y \\ 2(z-1) = -2\lambda z \\ (g=0) \quad x^2+2y^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\text{if } \lambda=1 \rightarrow \left.\begin{cases} 2y = 4y \rightarrow y=0 \\ 2z-2 = -2z \rightarrow z = 1/2 \end{cases}\right\} \xrightarrow{g=0} x^2 = 1/4 \Rightarrow x = \pm 1/2$$

$(\pm 1/2, 0, 1/2)$ در نقطه بدست آمده، $f(\pm 1/2, 0, 1/2) = \frac{1}{2}$

$$\text{if } x=0 \rightarrow 2y = 4\lambda y \Rightarrow y(1-2\lambda)=0 \begin{cases} y=0 \xrightarrow{g=0} z=0 \rightarrow (0,0,0) \\ \lambda = 1/2 \xrightarrow{2(z-1)=-2\lambda z} z = \frac{2}{3} \xrightarrow[g=0]{x=0,\ z=2/3} y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$ در نقطه که $f(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

$(0,0,0)$ هم نقطه دیگری است که $f(0,0,0) = 1$

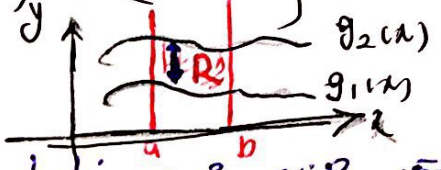
پس با توجه به مقایسه مقادیر بالا، $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$ نقاط مینیمم هستند و کوتاه‌ترین فاصله $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است

Scanned with CamScanner

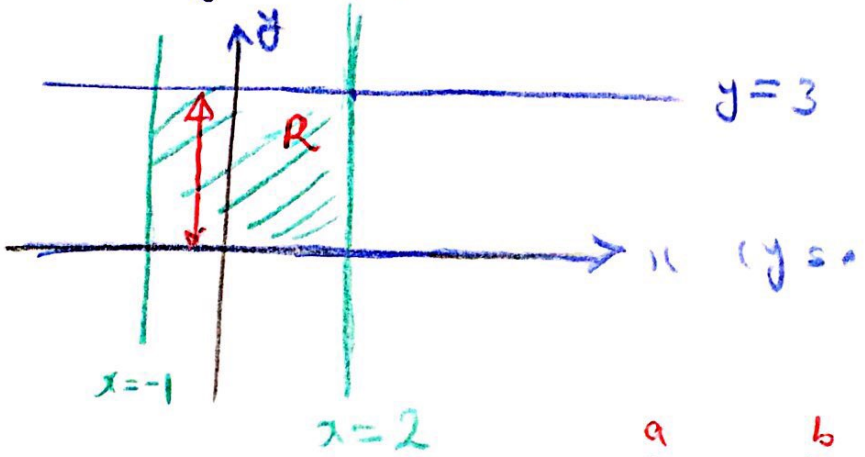
فصل 16 انتگرالهای چندگانه

تعریف: ناحیه R را در صفحه قایم ساده گوییم هرگاه توابع پیوسته g_1 و g_2 به گونه‌ای موجود باشند که

$$R=\{(x,y):\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\ ;\ a\le x<b\},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

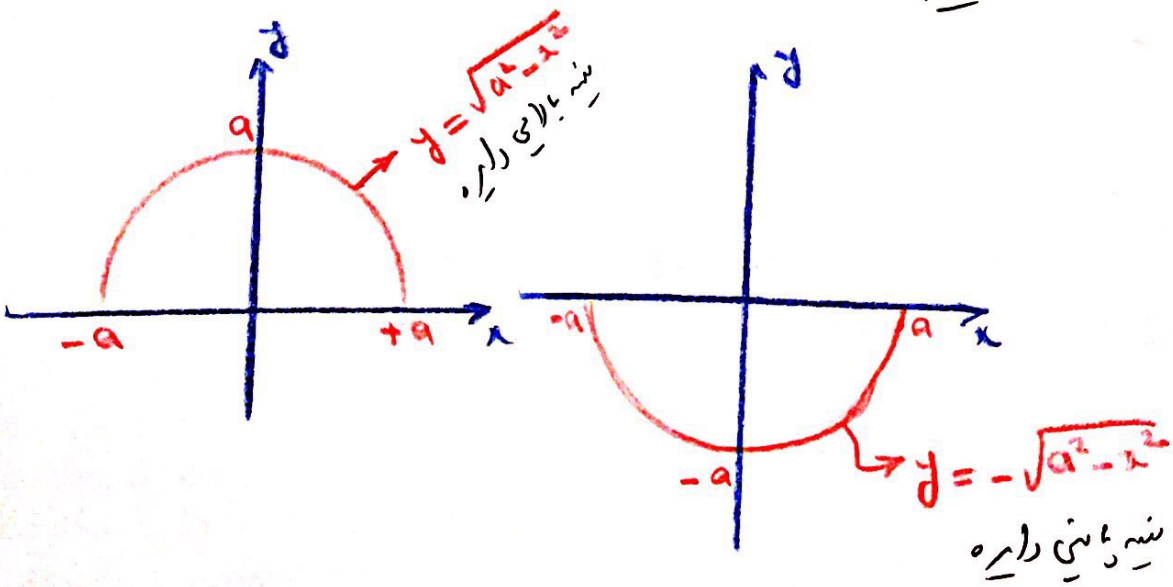


Ex) R ناحیه محدود به خطوط $x=-1$ ، $x=2$ ، $y=0$ ، $y=3$ است.



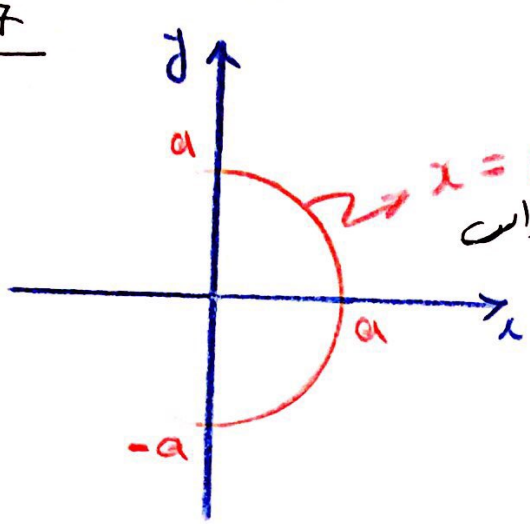
$$R=\{(x,y):\ \underset{g_1(x)=0}{0}\le y\le \underset{g_2(x)=3}{3}\ ;\ \overset{a}{-1}\le x\le \overset{b}{2}\}$$

یادآوری: می‌دانیم $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ معادله دایره‌ای به مرکز (0,0) شعاع a است



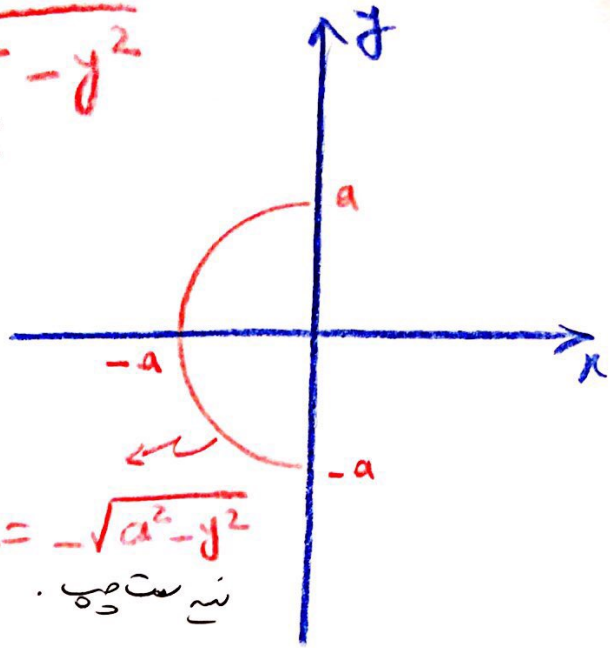
Scanned with CamScanner

P: 87



$x = \sqrt{a^2 - y^2}$

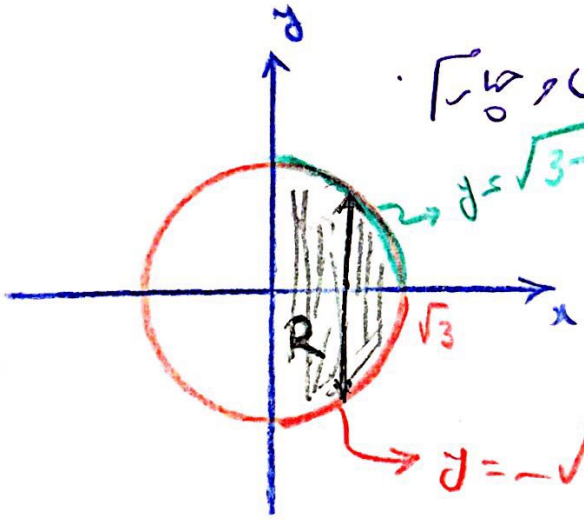
نیم‌سمت راست



$x = -\sqrt{a^2 - y^2}$

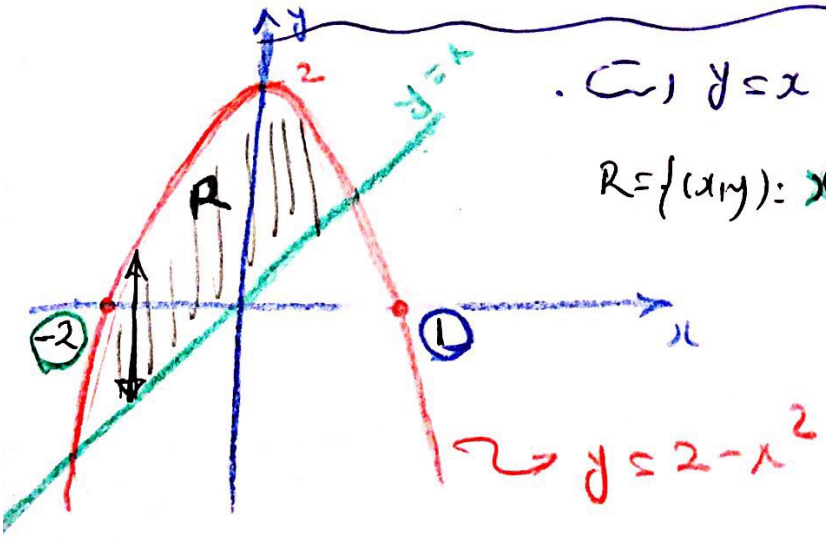
نیم‌سمت چپ.

Ex) R ناحیه داخل دایره $x^2+y^2=3$ در ربع اول و چهارم.



$R=\{(x,y): -\sqrt{3-x^2} \le y \le \sqrt{3-x^2};\ 0 \le x \le \sqrt{3}\}$

Ex) R ناحیه بین $y=2-x^2$, $y=x$ است.



$R=\{(x,y): x \le y \le 2-x^2;\ -2 \le x \le 1\}$

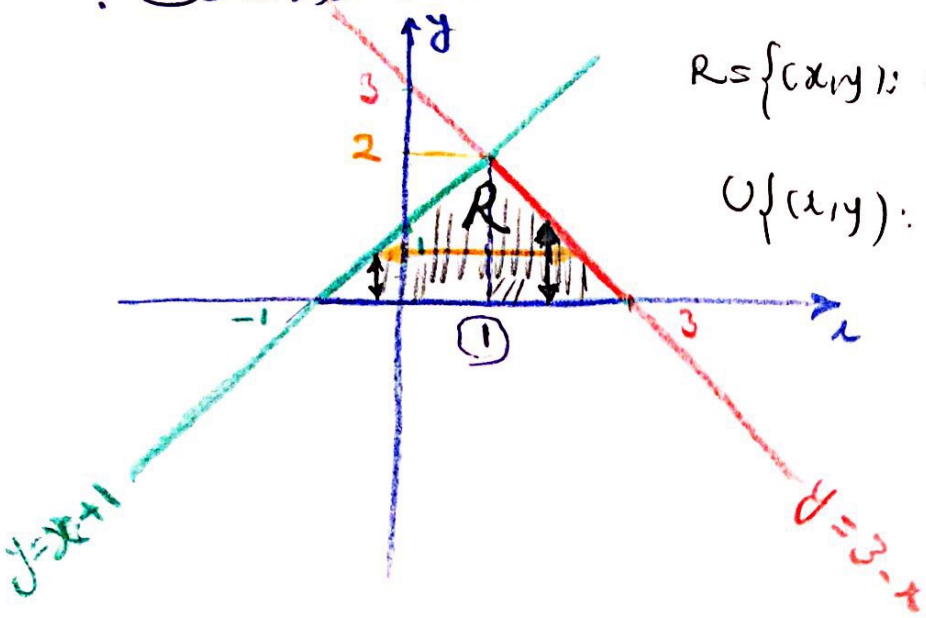
$\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow x=2-x^2 \Rightarrow$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=-2,\ x=1$

Scanned with CamScanner

Ex) R ناحیه محصور به خطوط $y=3-x$, $y=x+1$, محورهاست.



$$R=\{(x,y):\ 0\le y\le x+1;\ -1\le x\le 1\}$$

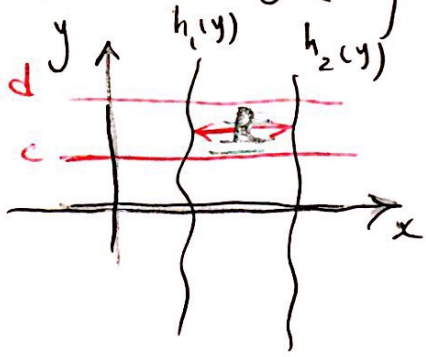
$$\cup\{(x,y):\ 0\le y\le 3-x;\ 1\le x\le 3\}$$

$$\begin{cases} y=3-x \\ y=x+1 \end{cases} \Longrightarrow 3-x=x+1$$

$$\Longrightarrow 2x=2 \Longrightarrow x=1$$

تعریف: ناحیه R را در صفحه افقی ساده گوییم هرگاه توابع پیوسته h_1 و h_2 به گونه‌ای موجود باشند که

$$R=\{(x,y):\ h_1(y)\le x\le h_2(y);\ c\le y\le d\},\quad c,d\in\mathbb{R}.$$



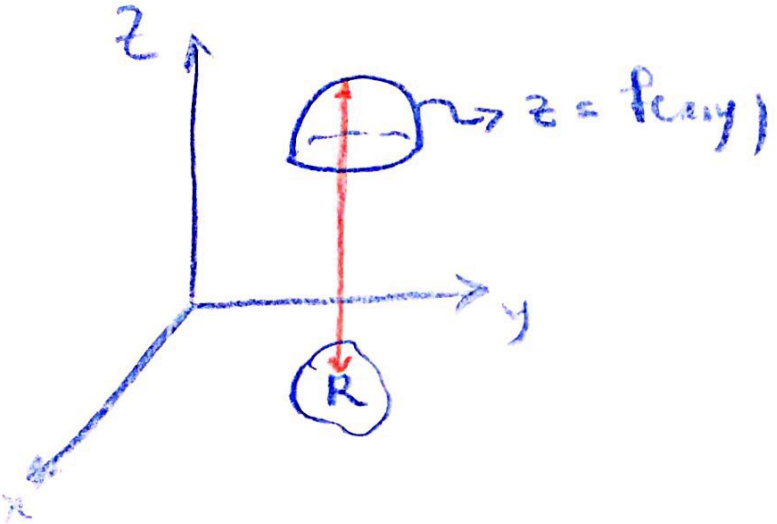
Ex) همان مثال بالا را به صورت افقی ساده می‌نویسیم

$$R=\{(x,y):\ y-1\le x\le 3-y;\ 0\le y\le 2\}.$$

Scanned with CamScanner

خواص انتگرال دوگانه

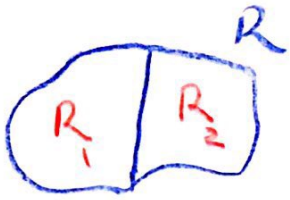
* 1- $\iint_R f(x,y)\,dA$ حجم جسمی است که از بالا به سطح $z=f(x,y)$ و از پایین به ناحیه R محدود است.



* 2- $\iint_R dA$ مساحت ناحیه R است.

3- اگر $R = R_1 \cup R_2$ و R_1 و R_2 تنها در مرز مشترک باشند، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$



* قضیه: اگر R یک ناحیه قائم ساده در صفحه باشد، یعنی اگر

$$R=\{(x,y):\ g_1(x) \le y \le g_2(x);\ a \le x \le b\}$$

آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy}_{1}\ dx \quad (2)$$

Scanned with CamScanner

و اگر R یک ناحیه افقی ساده در صفحه باشد، یعنی اگر

$$R=\{(x,y):\ h_1(y)\le x\le h_2(y);\ c\le y\le d\}$$

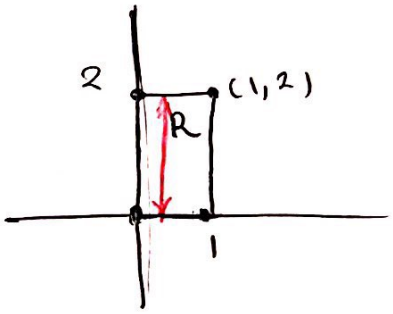
آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(2) (1)

Ex) حاصل $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ وقتی R مستطیلی به رئوس $(0,0)$ ، $(0,2)$ ، $(1,2)$ و $(1,0)$ است، کدام است؟

1- $\frac{3}{2}$ 2- $\frac{2}{3}$ 3- 1 4- $\frac{10}{3}$



حل: $R=\{(x,y):\ 0\le y\le 2;\ 0\le x\le 1\}$

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dA=\int_0^1\int_0^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

(2) (1)

$$=\int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2\,dx=\int_0^1\left(2x^2+\frac{8}{3}-0\right)dx$$

(2)

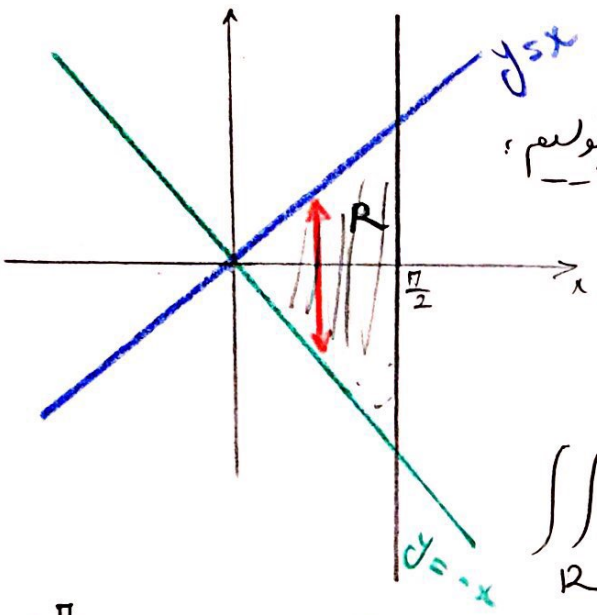
$$=2\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}x\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}.$$

گزینه 4

Scanned with CamScanner

Ex) حاصل $\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA$ هرگاه R، محدود به خطوط $y-x=0$ ، $y+x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ باشد، کدام است؟

1) -1 2) -2 3) -3 4) -4



حل: توجه کنید که لازم است R را به صورت قائم ساده بنویسیم؛ پس

$$R=\{(x,y):\ -x\le y\le x;\ 0\le x\le \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-x}^{x} \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx$$

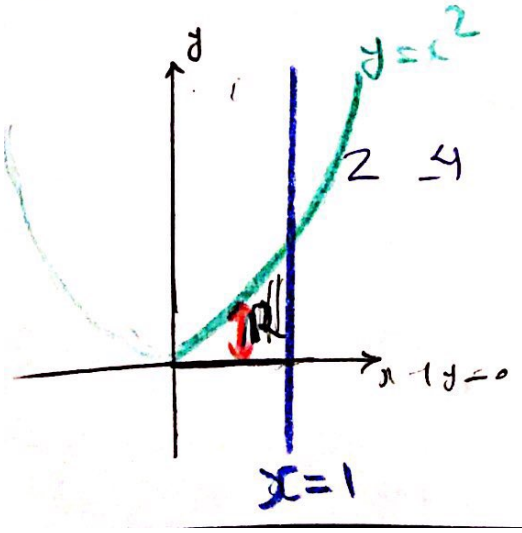
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{\sin x}{x}\Big|_{-x}^{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-(-x))\,\frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)$$

$$= 2(1) = 2$$ گزینه 2

Ex) حاصل $\iint_R e^{\frac{y}{x}}\, dA$ هرگاه R، ناحیه محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ و سهمی $y=x^2$ باشد، کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\frac{3}{2}$ 4) 2



اینجا هم لازم است R را به صورت قائم ساده بنویسیم، پس

$$R=\{(x,y):\ 0\le y\le x^2;\ 0\le x\le 1\}$$

ادامه در صفحه بعد ⟶

Scanned with CamScanner

$$\iint_R e^{\frac{y}{x}}\,dA = \int_0^1\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{x}}\, e^{\frac{y}{x}}\Big|_0^{x^2} dx$$

یادآوری

$$\boxed{\int e^{\alpha y}\,dy = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha y}}$$

$$= \int_0^1 x\left(e^{\frac{x^2}{x}} - e^{0}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (x e^{x} - x)\,dx = \int_0^1 x e^{x}\,dx - \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left(x e^{x} - e^{x} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - e - \frac{1}{2} + e^{0} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

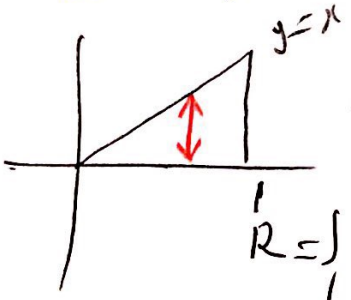
یادآوری (جزء به جزء)

$$\boxed{\int x e^{x}\,dx = x e^{x} - e^{x}}$$

سوال: چرا ناحیه قسمت قبل را بازه‌ی افقی ساده در نظر گرفتیم؟

Ex) $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ برابر است با:

1) $\frac{1}{2}(e-1)$ 2) $\frac{1}{4}(e-1)$ 3) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ 4) $\frac{1}{2}(e^2-1)$



ح: ناحیه R عبارتست از: $R=\{(x,y):\ y\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$

که یک ناحیه افقی ساده است. اول باید $\int e^{x^2}dx$ را حساب کنیم، که ممکن نیست

خب راه حل چیست؟ اگر اول $\int e^{x^2}dy$ را می‌کردیم حساب کنیم تا در به حل آن بودیم.

پس ناحیه R را قائم ساده می‌نویسیم:

$R=\{(x,y):\ 0\le y\le x;\ 0\le x\le 1\}$.

Scanned with CamScanner

P: 93

$$I=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 y e^{x^2}\Big|_0^x dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\,e^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{1}{2}(e-1)$$ گزینه 1

Ex) $I=\int_0^1\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ برابر است با:

1- $\int_0^1\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

2- $\int_0^1\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

3- $\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

4- $\int_0^1\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

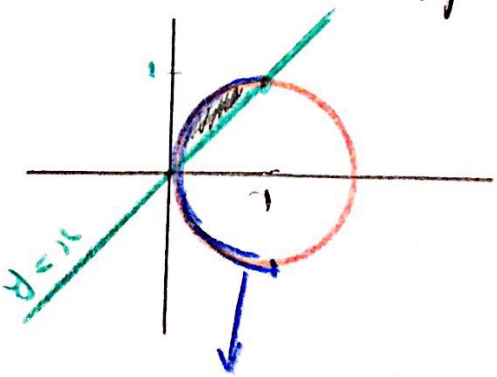
حل: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $R=\{(x,y):\ x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\ ;\ 0\le x\le 1\}$ است که به صورت قائم ساده زیر توصیف می‌شود:

$$y=\sqrt{2x-x^2}\Longrightarrow y^2=2x-x^2\Longrightarrow x^2-2x+y^2=0$$

$$\Longrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}\Longrightarrow 2x^2-2x=0$$

$$\rightarrow 2x(x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$



$$x-1=-\sqrt{1-y^2}$$

$$x=1-\sqrt{1-y^2}$$

افقی ساده

$$R=\{(x,y):\ 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le y\ ;\ 0\le y\le 1\}$$

Scanned with CamScanner

P: 94

$$I=\int_0^1\int_{1-\sqrt{2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$ گزینه 3

Ex) حاصل $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dy\,dx$ برابر است با

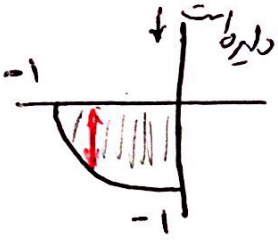
1- مساحت ربع اول دایره $x^2+y^2=1$

2- مساحت ربع دوم دایره $x^2+y^2=1$

3- مساحت ربع سوم دایره $x^2+y^2=1$

4- هر سه مورد 1، 2، 3 صحیح اند.

دقت کنید که ناحیه‌ای که در آن انتگرال گرفته شده ربع دوم دایره است



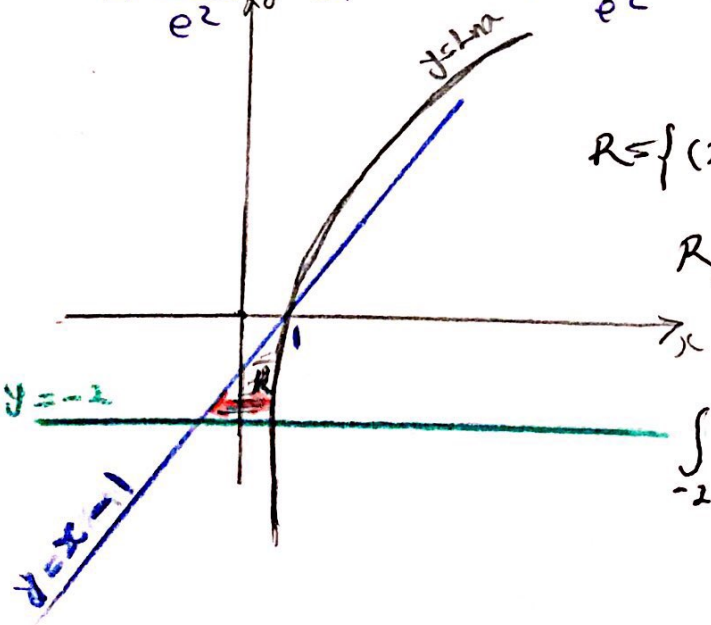
اما هر سه مساحت برابرند.

یعنی همه برابرند با $\frac{1}{4}\times\pi\times1^2$

Ex) مساحت ناحیه R محدود به منحنی‌های $y=\ln x$ ، $y=x-1$ ، $y=-2$ کدام است

1- $1-\frac{1}{e}$ 2- $1+\frac{1}{e}$ 3- $1-\frac{1}{e^2}$ 4- $1+\frac{1}{e^2}$

$y=\ln x \to e^y=x$



$$R=\{(x,y):\ y+1\le x\le e^y;\ -2\le y\le 0\}$$

مساحت ناحیه R $\iint_R dA=\int_{-2}^{0}\int_{y+1}^{e^y} dx\,dy$

$$\int_{-2}^{0} x\Big|_{y+1}^{e^y} dy=\int_{-2}^{0}(e^y-y-1)\,dy$$

$$=e^y-\frac{y^2}{2}-y\Big|_{-2}^{0}$$

$$=1-e^{-2}+\frac{4}{2}-2=1-\frac{1}{e^2}.$$

گزینه 3

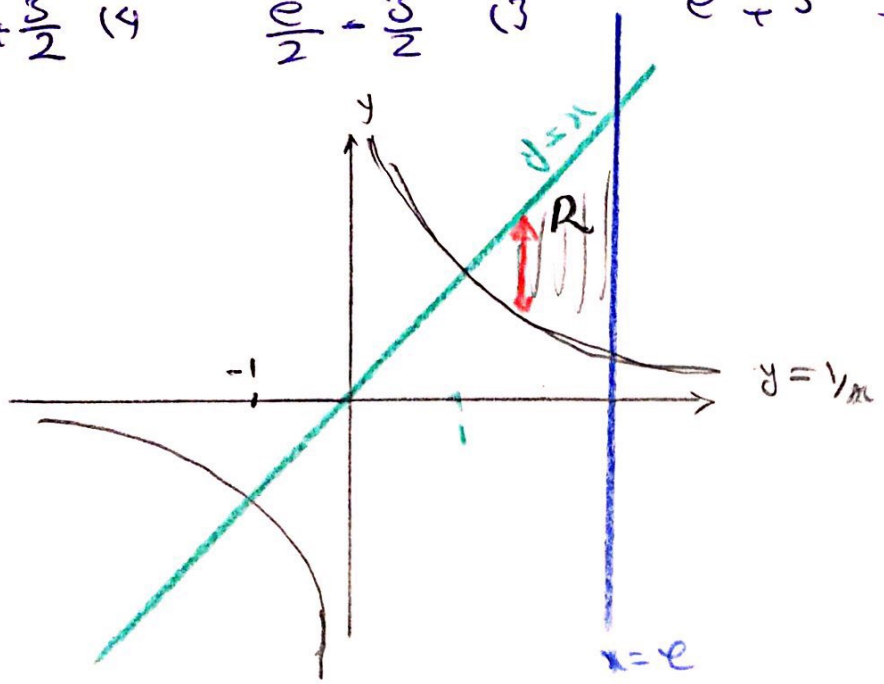
Scanned with CamScanner

P: 95

Ex) مساحت ناحیه محدب منحنی $xy=1$, $x=y$, $x=e$ کدام است

1) e^2-3 2) e^2+3 3) $\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}$ 4) $\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=y \end{cases} \longrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$



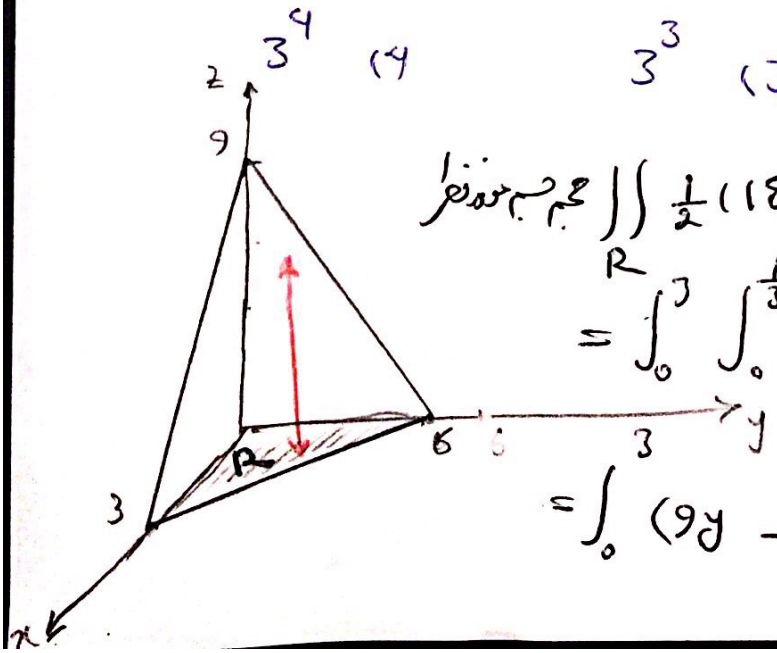
$$\text{مساحت ناحیه } R = \iint_R dA = \int_1^e \int_{\frac{1}{x}}^{x} dy\, dx = \int_1^e \left(x-\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln x \Big|_1^e$$

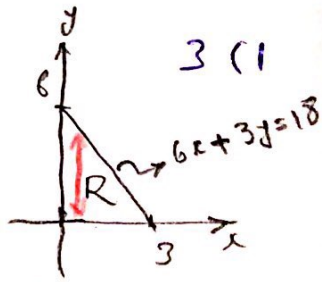
$$= \frac{e^2}{2} - \cancel{\ln e}^{\,1} - \frac{1}{2} + \cancel{\ln 1}^{\,0} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

گزینه 3

Ex) حجم جسم محدب صفحات مختصات صفحه $6x+3y+2z=18$ کدام است:

1) 3 2) 3^2 3) 3^3 4) 3^4





$$\text{حجم جسم مورد نظر} = \iint_R \frac{1}{2}(18-6x-3y)\, dA$$

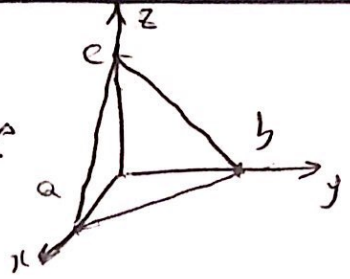
$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(18-6x)} \frac{1}{2}(18-6x-3y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0 \left(9y - 3xy - \frac{3y^2}{4}\right)\Big|_0^{6-2x} dx = \dots = 27.$$

Scanned with CamScanner

p: 96

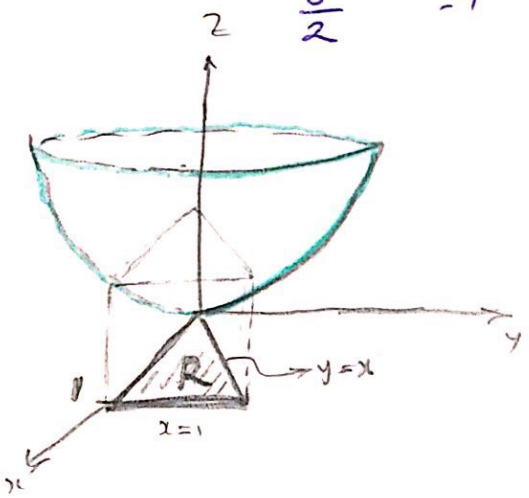
حجم این چهار وجهی



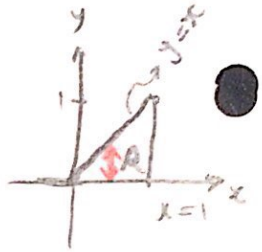
برابر است با: $\frac{1}{6}abc$

Ex) حجم جسم محدب سهمی گون $z=x^2+y^2$ ، صفحات $x=1$ و $z=0$ ، $y=0$ ، $y=x$ کدام است؟

1- $\frac{1}{3}$ 2- $\frac{1}{2}$ 3- $\frac{2}{3}$ 4- $\frac{3}{2}$



$$\text{حجم جسم مورد نظر} = \iint_R (x^2+y^2)\,dA$$



$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 x + \frac{x^3}{3}\right) dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

Scanned with CamScanner