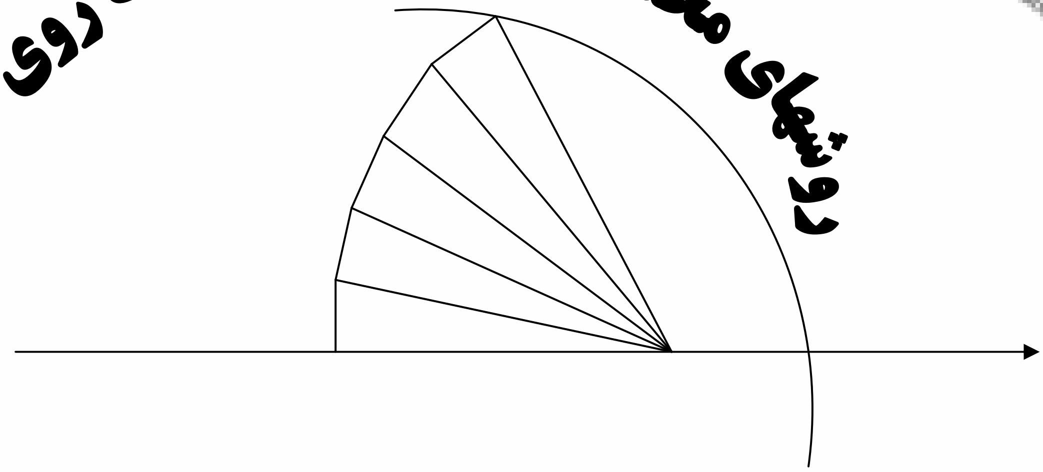
روشهای مختلف نمایش اعداد گنگ روی محور



میدان آزادی سنندج

تهیه و تدوین :

علی اشرف فتحی زاده

دبیر ریاضی ناحیه یک سنندج

به نام خداوندگارنا ظم هستی

روشهای مختلف نمایش اعداد گنگ روی محور

چکیده :

با توجه به اینکه هر نقطه ی محور اعداد دقیقاً بایک عددحقیقی مشخص وهرعدد حقیقی دقیقاً با یک نقطه متناظر می شود واعداد گنگ زیر مجموعه ای ازاعداد حقیقی هستند ، پس برای هر عدد گنگ، نقطه ای روی محور وجوددارد.
در مورد برخی ازاعدادگنگ می توان به روش ترسیم نقطه ی نظیر آنها را یافت و عدد متناظر با هر نقطه را روی محور مشخص کرد .

دراین مقاله روشهای مختلف نمایش اعدادگنگی مانند $\sqrt{A}$ $\pm$ و $n\sqrt{A}$ و $B\pm\sqrt{A}$و $\sqrt{B}\pm\sqrt{A}$ و... ارایه شده و نیز چند مثال برای پیدا کردن اعداد گنگ متناظر با هر نقطه آورده شده است .

بخش اول : اعدادی که به صورت $\pm\sqrt{A}$ هستند. سه روش مختلف برای نمایش این اعداد روی محور ارایه شده است.

بخش دوم : اعدادی که به صورت $n\sqrt{A}$ هستند . برای نمایش این اعداد روی محور ابتدا $\sqrt{A}$ را به یکی از روش های بالاروی محور مشخص و بدون تغییر دهانه ی پرگار واز نقطه نمایش $\sqrt{A}$ کمانی می زنیم تا $۲\sqrt{A}$ به دست آید به ترتیب این کمان زدن را ادامه می دهیم تا به $n\sqrt{A}$ برسیم.

بخش سوم : اعدادی که به صورت $B\pm\sqrt{A}$ هستند . برای نمایش این اعداد روی محور ،ابتدا نقطه ی Bرا به عنوان مبدأ جدید و مرکز کمان در نظر می گیریم و سپس $\sqrt{A}$را با یکی ازروشهای بخش اول مشخص می کنیم .

بخش چهارم:مطالب تکمیلی

مقدمه:

درریاضیات اعدادی وجود دارند که نمی توانیم آنها رابه صورت یک کسر بنویسیم یعنی اعدادی وجود دارند که گویا نیستنداین اعدادرا اعداد گنگ یا اصم می نا مند مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}\pm۱$ و $n\sqrt{۳}$ و ...

شاید $\sqrt{۲}$ اولین عدد گنگی باشد که شناخته شد ، زیرا درزمان فیثا غورس وتعدادی ازشاگردان او ،درمحاسبات هندسی خود به مثلث قائم الزاویه ای برخورد کردند که طول هرضلع آن واحد بود وبرای محاسبه ی وتر ، طبق رابطه ی فیثاغورس به عدد $\sqrt{۲}$برخورد کردند ودریافتند که عدد $\sqrt{۲}$را نمی توان ازتقسیم دوعدد صحیح بریکدیگربه دست آوردواین مطلب را به دلیل آنکه فیثاغورسیان معتقد بودند که هرعدد را می توان با اعداد صحیح ساخت به مدت ده سال مخفی نگه داشتند. اما امروزه مجموعه ای نامتناهی از این اعداد وجود دارد.

بخش اول : اعدادی که به صورت $\pm\sqrt{A}$

روش اول: دراین روش،که به روش حلزونی مشهوراست با به دست آوردن مقدارجذرعدد به روش سال دوم راهنمایی طول یکی ازاضلاع مثلث قائم الزاویه(مثلث اصلی) و تعداد مثلث هایی که با ید با مثلث اصلی رسم شود مشخص می گردد.
درضمن،طول یکی از اضلاع مثلث های قائم الزاویه همیشه یک واحد انتخاب می شود.
(اولین مثلثی که روی محور ساخته می شود مثلث اصلی نام دارد.)

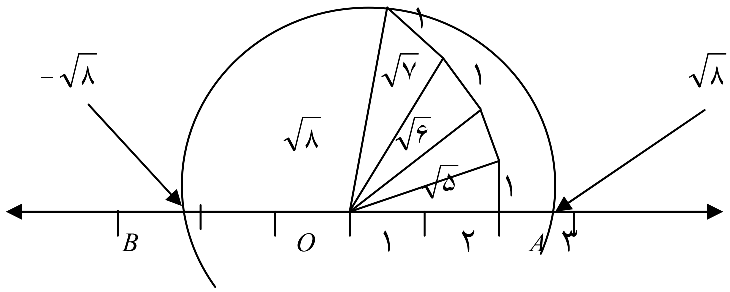
مثال۱ :عدد $\pm\sqrt{۸}$ را روی محور نشان دهید

$$\sqrt{۸}\approx ۲/...$$
$$\frac{-۴}{۴}$$

عدد ۲طول و مبدا مثلث اصلی و عدد ۴تعداد مثلث هایی است که باید رسم شود.

پس از رسم مثلث ها، دهانه ی پرگاررا به اندازه ی وتر آخرین مثلث قائم الزاویه که همان $\sqrt{۸}$است ، باز کرده واز نقطه ی Oکمانی می زنیم تا محور را در نقاط B , A قطع کندکه این نقاط ،همان جایگاه $\pm\sqrt{۸}$ روی محور است .

$$\boxed{\sqrt{۴}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹} \Rightarrow ۲<\sqrt{۸}<۳}$$

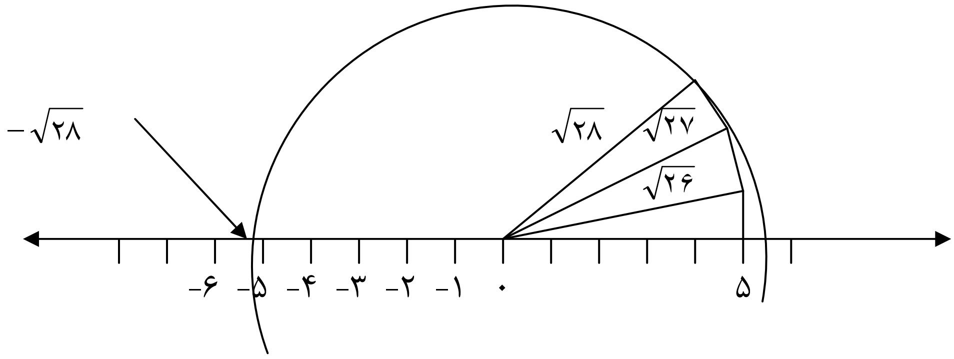


مثال ۲ : عدد $-\sqrt{۲۸}$ را روی محور نشان دهید .

$$\sqrt{۲۸}\approx ۵/...$$
$$\frac{-۲۵}{۳}$$

عدد ۵ طول و مبدأمثلث اصلی و عدد۳ تعداد مثلث های قائم الزاویه است که باید رسم شود .

$$\sqrt{۲۵}<\sqrt{۲۸}<\sqrt{۳۶} \Rightarrow ۵<\sqrt{۲۸}<۶ \quad , -۶<-\sqrt{۲۸}<-۵$$



روش دوم :

در این روش بنا بر رابطه فیثاغورس اعدادی مانند $c\,,b$ را چنان در نظر مـی گیـریم کـه $b^۲$ نزدیکتـرین مربـع کامـل بـه A و $c^۲$ از تفاضل $b^۲$ با A به دست آید . یعنی : $\sqrt{A}=\sqrt{b^۲+c^۲}$ و $c^۲=A-b^۲$ و $b^۲<A$

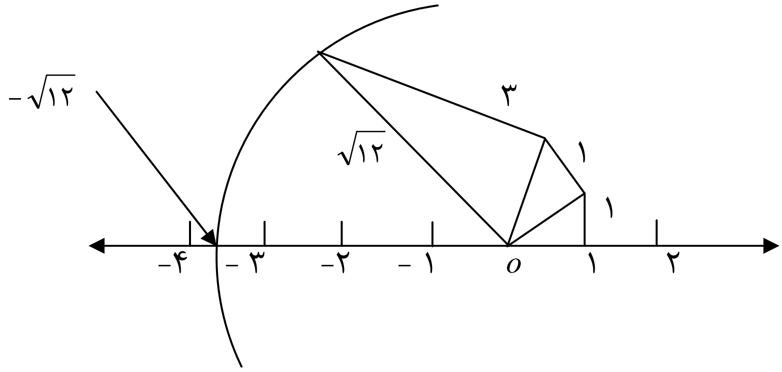
مثال ۳: عدد $-\sqrt{۱۲}$ راروی محور نشان دهید .

$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۹+۳} \Rightarrow b^۲=۹ \Rightarrow b=۳ \quad و \quad c^۲=۳ \Rightarrow c=\sqrt{۳}$$

b,c طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای هستند که وتر این مثلث ،همان $\sqrt{۱۲}$ می باشد .

در این روش پس از مشخص کردن $\sqrt{A}$ ، دهانه ی پرگار را به اندازه ی $\sqrt{A}$ باز کرده واز نقطه ی O کمـانی مـی زنـیم ، اگراین کمان را در ناحیه ی مثبت رسم کنیم $+\sqrt{A}$ واگر آن را در ناحیه ی منفی محور رسم نماییم $-\sqrt{A}$ روی محور به دست می آید.

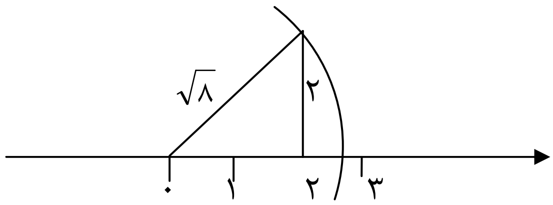
$$\boxed{\sqrt{۹}<\sqrt{۱۲}<\sqrt{۱۶} \Rightarrow ۳<\sqrt{۱۲}<۴ \Rightarrow -۴<-\sqrt{۱۲}<-۳}$$



مثال ۴: عدد $\sqrt{8}$ را روی محور نشان دهید .

$\boxed{2 < \sqrt{8} < 3}$

$\sqrt{8}=\sqrt{4+4} \Rightarrow b^2=4, b=2 \quad , c^2=4 \Rightarrow c=2$



روش سوم:

در این روش اعداد را در **صورت امکان** به صورت دو مربع کامل می نویسیم و سپس تفاضل A را با مجموع این مربع های کامل به دست می آوریم . این عدد (d) نشان دهنده ی تعداد مثلث هایی که پس از مثلث پایه باید رسم شود .

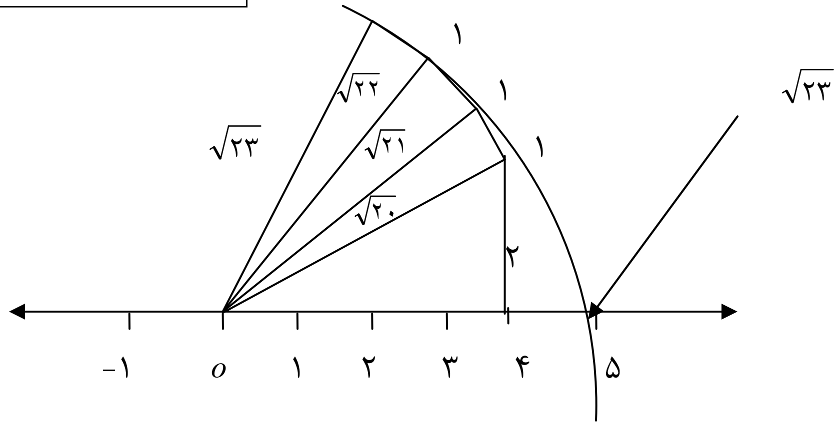
$$\sqrt{A} = \sqrt{b^2+c^2+d} \Rightarrow d = A - (b^2+c^2)$$

مثال ۵: هریک از اعداد $\sqrt{23}$ و $\sqrt{15}$ را روی محور نشان دهید .

$\sqrt{23} = \sqrt{16+4+3} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4, c^2 = 4 \Rightarrow c = 2, d = 3$

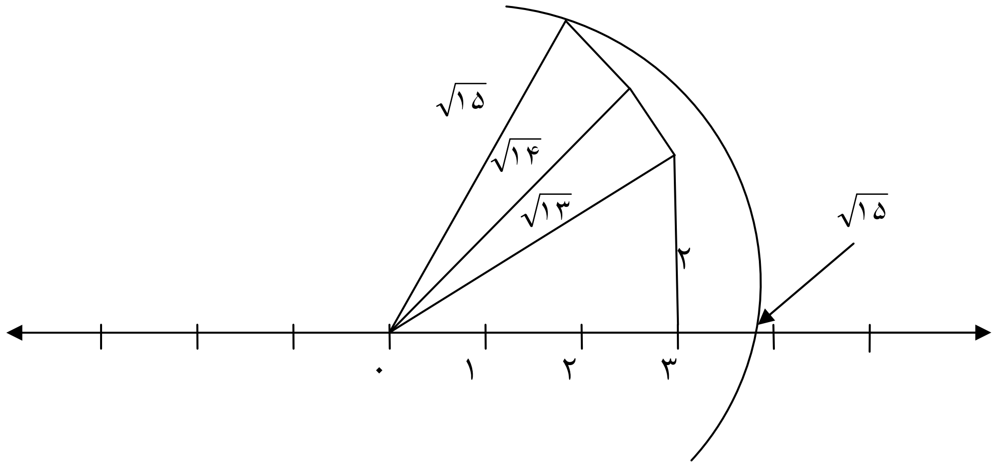
عدد ۳، تعداد مثلثهایی است که پس از رسم مثلث پایه باید رسم شود. b و c طول اضلاع زاویه قائمه ی مثلث پایه می باشد .

$\boxed{\sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{23} < 5}$



$\sqrt{15} = \sqrt{9+4+2} \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3, c^2 = 4 \Rightarrow c = 2, d = 2$

عدد ۲ ، تعداد مثلث هایی است که پس از مثلث پایه باید رسم شود .و اضلاع مثلث پایه ۳و۲ واحد باید در نظر گرفته شود.

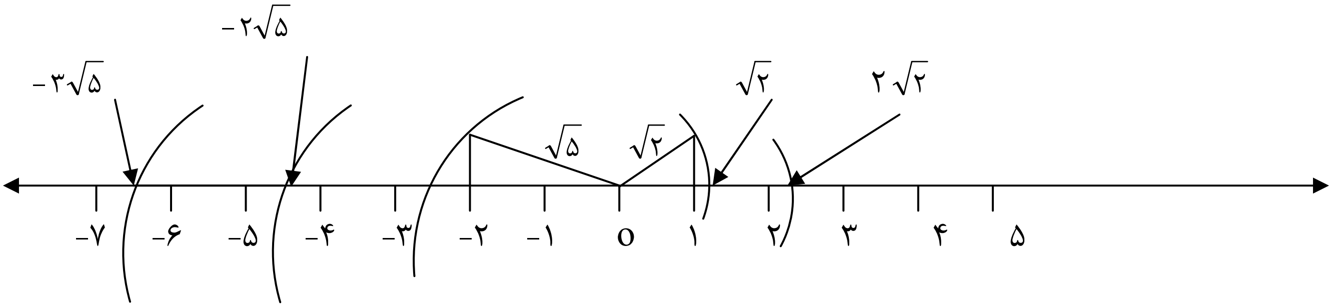


بخش دوم : اعدادی که به صورت $n\sqrt{A}$ هستند .

برای نمایش این اعداد روی محور ابتدا $\sqrt{A}$ را به یکی از روش های بالاروی محور مشخص می کنیم و سپس دهانه ی پرگار را تغییر نداده واز نقطه نمایش $\sqrt{A}$ کمانی می زنیم تا $۲\sqrt{A}$ به دست آید به ترتیب این کمان زدن را ادامه دهیم تا به $n\sqrt{A}$ برسیم .

مثال۶: هر یک از اعداد $۲\sqrt{۲}$ و $-۳\sqrt{۵}$ را روی محور نشان دهید .

$۱ < \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۸}$	$۲ < \sqrt{۵} < ۳ \Rightarrow -۳ < -\sqrt{۵} < -۲$



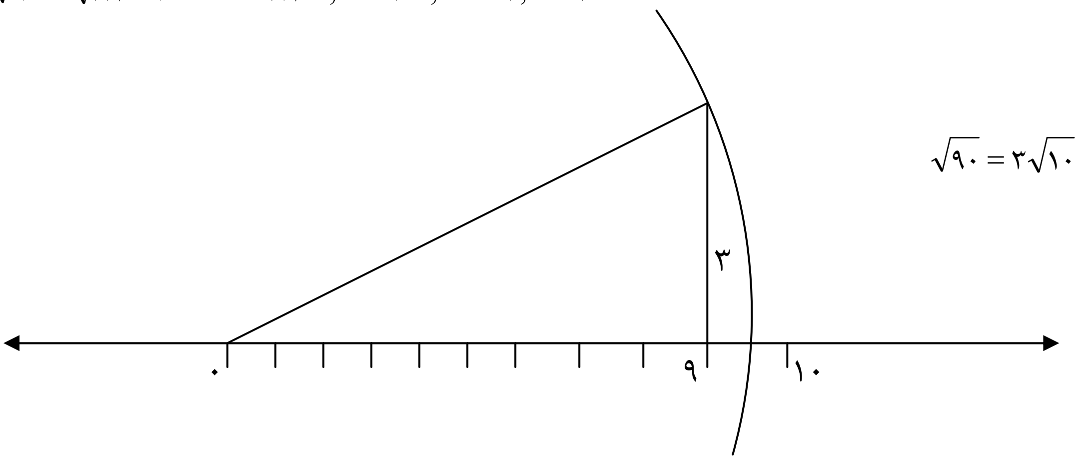
نکته قابل توجه برای اعداد گنگی که به صورت $n\sqrt{A}$ هستند این است که ، می توان عدد n را به داخل رادیکال برده و مانند اعداد بخش اول آن را روی محور نشان داد .

مثال ۷ : عدد $۳\sqrt{۱۰}$ را روی محور نشان دهید .

برای این کار می توان به صورت زیر عمل نمود .

$$۳\sqrt{۱۰} = \sqrt{۳^{۲} \times ۱۰} = \sqrt{۹۰} \Rightarrow ۹ < \sqrt{۹۰} < ۱۰$$

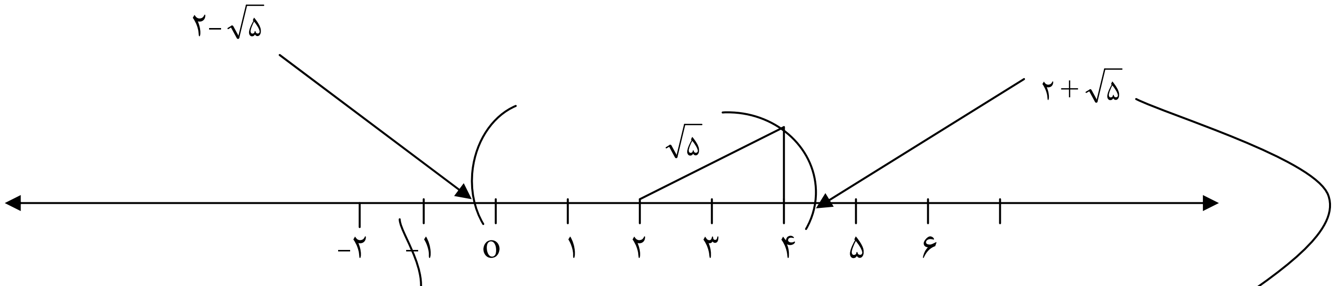
$$\sqrt{۹۰} = \sqrt{۸۱ + ۹} \Rightarrow b^{۲} = ۸۱ \quad ,b = ۹ \quad ,c^{۲} = ۹ , c = ۳$$



بخش سوم : اعداد ی که به صورت $B\pm\sqrt{A}$ هستند .

برای نمایش این اعداد روی محورابتدا نقطه ی Bرا به عنوان مبدا جدید و مرکزکمان در نظر می گیریم و سپس $\sqrt{A}$را با یکی ازروشهای قبلی مشخص می کنیم وکمانی به اندازه ی $\sqrt{A}$ از مبدأ جدید می زنیم .

مثال ۸ : $۲\pm\sqrt{۵}$ را روی محور نشان دهید .

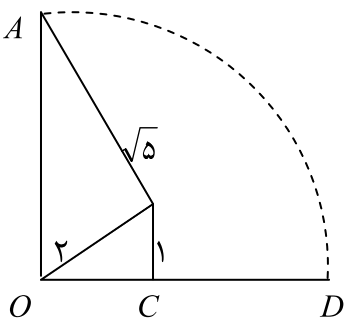


$۲<\sqrt{۵}<۳\Rightarrow ۲+۲<۲+\sqrt{۵}<۲+۳\Rightarrow ۴<۲+\sqrt{۵}<۵$

$-۳<-\sqrt{۵}<-۲\Rightarrow ۲-۳<۲-\sqrt{۵}<۲-۲\Rightarrow -۱<۲-\sqrt{۵}<۰$

بخش چهارم : مطالب تکمیلی

سؤال ۱ : در شکل مقابل طول پاره خط CD چقدر است ؟



ابتدا اندازه ی OC را طبق رابطه ی فیثاغورس به دست می آوریم .

$$OC^۲=۲^۲-۱^۲=۴-۱=۳\Rightarrow OC=\sqrt{۳}$$

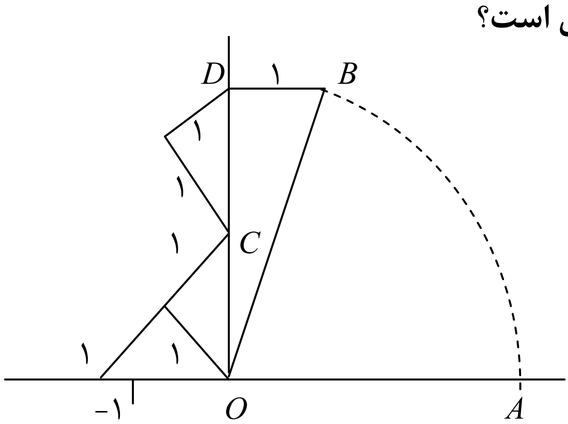
اندازه ی OA نیز برابر است با :

$$OA^۲=(\sqrt{۵})^۲+۲^۲=۵+۴=۹\Rightarrow OA=۳$$

چون کمان به شعاع OA زده شده است پس نقطه ی D معرف عدد ۳ است.

بنابر این $CD=۳-\sqrt{۳}$

سؤال ۲: باتوجه به شکل مقابل نقطه ی A معرف چه عددی است؟



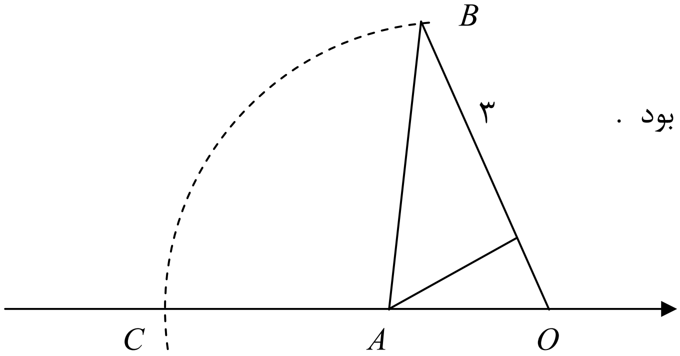
$$OC^۲=۱^۲+۱^۲=۲\Rightarrow OC=\sqrt{۲}$$

$$CD=\sqrt{۲}$$

$$OB^۲=۱^۲+(۲\sqrt{۲})^۲=۱+۸=۹\Rightarrow OB=۳$$

چون کمان به مرکز O و شعاع OB زده شده ،پس نقطه ی A عدد ۳ را نشان می دهد .

سؤال ۳ : در شکل ذیل به شعاع AB و به مرکز A کمانی زده ایم تا محور را در نقطه ی C قطع کند . اگر O مبدأ باشد .نقطه ی C چه عددی را نشان می دهد ؟



$$OA^{۲} = ۲^{۲} + ۱^{۲} = ۵ \Rightarrow OA = -\sqrt{۵}$$

چون OA در سمت چپ محور است ،منفی خواهد بود .

$$AB^{۲} = ۲^{۲} + ۳^{۲} = ۱۳ \Rightarrow \overline{AB} = -\sqrt{۱۳}$$

با توجه به صورت سؤال نقطه ی C برابر با :

۲ ۱

$$C = -\sqrt{۵} + (-\sqrt{۱۳}) = -\sqrt{۵} - \sqrt{۱۳}$$

جمع بندی و نتیجه گیری :

با توجه به اینکه هر نقطه ی محوراعداد دقیقاً بایک عددحقیقی بیان می شود وهرعدد حقیقی دقیقاً با یک نقطـه از محـور متناظرمی شود، باید روشهای مختلفی برای نشان دادن اعداد گنگ که زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است وجود داشـته باشد.روشهای ارائه شده دراین مقاله منحصر به فرد نبوده و روشهای ابتکاری دیگری نیز می تواند وجود داشته باشد .

این مطالب جهت تکمیل مطالب ارائه شده در کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی می باشـد کـه امیـد اسـت مـورد اسـتفاده دبیران و دانش آموزان محترم قرار گیرد .

منابع :

۱. کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات /جلداول/ مرکز نشر دانشگاهی.
۲. مجلات برهان ریاضی راهنمایی شماره های ۱۲و ۱۴.
۳. کتاب المپیاد های ریاضی سوم راهنمایی/ جمشید واحدی-مهندس محمد رضا صالحی.
۴. کتاب سوم راهنمایی.