

محاسبه جمع و همه جمع ها

• محاسبه حاصل جمع عناصر یک آرایه به طول n ($A[1..n]$)
 $A[1] + A[2], A[1] + A[2] + A[3], \dots, A[1] + A[2] + \dots + A[n]$

• استفاده از مدل EREW

- قرار دادن اعداد در برگهای یک درخت دودویی و انجام جمع در هر سطح درخت بطور موازی.
- استفاده از $n/2$ پردازنده.
- حاصل جمع در $A[n]$ قرار خواهد گرفت.
- فرض شود n توانی از ۲ باشد: زمان اجرای الگوریتم $O(\log n)$ خواهد بود.

الگوریتم جمع آرایه ای از اعداد

```

Algorithm Sum_EREW
for i=1 to log n do
  forall  $P_j$ , where  $1 \leq j \leq n/2$  do in parallel
    if  $(2^j \text{ modulo } 2^{i-1}) = 0$  then
       $A[2^j] \leftarrow A[2^j] + A[2^j - 2^{i-1}]$ 
    endif
  endfor
endfor
    
```

main $\rightarrow 2 \rightarrow 4$
 Task 4 $\rightarrow 2 \rightarrow 1$

این هم اولی که در این الگوریتم
 در الگوریتم قبلی در یک $main$ که با $main$ شروع می کردیم
 در این الگوریتم در $main$ که با $main$ شروع می کردیم

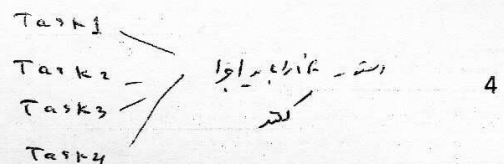
```

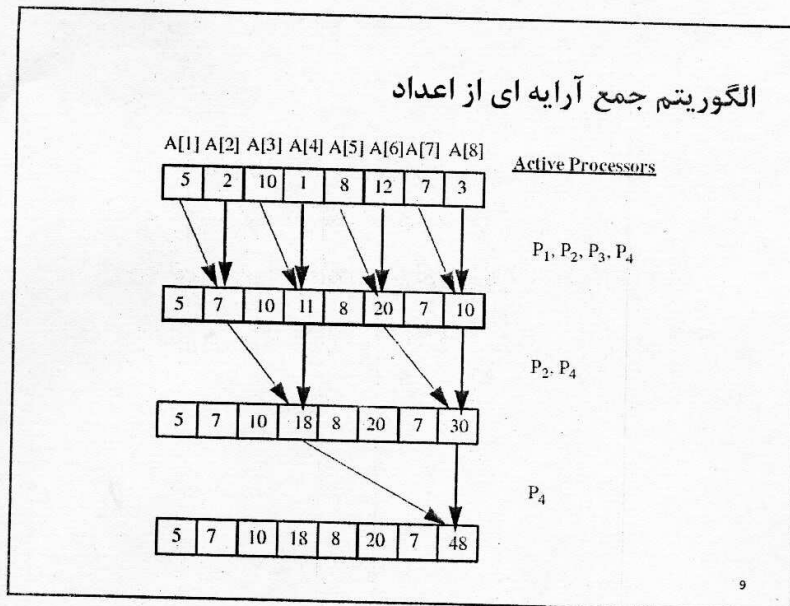
main
{ for  $i=1$  to  $(2 = \log_2 n)$  do
  { for  $j=1$  to  $(n/2 = j)$  do
    { create thread (Task);
    start ( );
  }
}
    
```

```

Task 1
if  $(2^j \text{ modulo } 2^{i-1}) = 0$ 
    
```

$$A[2^j] \leftarrow A[2^j] + A[2^j - 2^{i-1}];$$





خرش براد است
 از زمان بهتر شتر
 به ن آن
 در حد ما قدر پردازنده
 بسیار بود از سرور و این بهینه نیست

تحلیل پیچیدگی الگوریتم جمع آرایه ای از اعداد

- زمان اجرا: $T(n) = O(\log n)$ است چراکه حلقه $\log n$ for اجرا می شود.
- تعداد پردازنده ها: $P(n) = n/2$
- هزینه: $C(n) = O(n \log n)$
 هزینه پردازنده

- با توجه به اینکه یک الگوریتم متوالی مناسب می تواند حاصل جمع لیستی از اعداد را در $O(n)$ محاسبه کند \leq الگوریتم فوق بهینه نیست.

معایب الگوریتم قبل

- هزینه: $C(n) = O(n \log n)$: بهینه نیست.
- اغلب پردازنده ها بیکار هستند.
- در طی تکرار آم، تنها $n/(2^i)$ پردازنده فعال هستند.

11

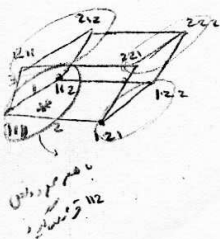
پروژه ۱-۳

- محاسبه بردار ۱۶ عنصری A با الگوریتم فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

12

ضرب دو ماتریس $n \times n$: $2^3 = 8$ ضرایب در هر مرحله
 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} \end{pmatrix}$

2/8/2014



$$P_{ijk} = A[i,k] * b[k,j]$$

در آرایه 3^3 ضرایب در هر مرحله
 در ماتریس $n \times n$ پردازش موازی الگوریتم ضرب ماتریس

- ضرب دو ماتریس $n \times n$
- $A[1..n, 1..n]$ و $B[1..n, 1..n]$
- n توانی از 2 است.
- از مدل CREW استفاده می شود.
- استفاده از n^3 پردازنده
- پردازنده ها در یک آرایه سه بعدی مرتب شده اند. $P(i,j,k)$ دارای شاخص (i,j,k) است.
- یک آرایه سه بعدی $C[i,j,k]$ در حافظه مشترک ذخیره شده است و بعنوان فضای کاری است. ماتریس حاصله در مکانهای $C[i,j,n]$ که $1 \leq j \leq n$ ذخیره خواهد شد.

دو ماتریس $n \times n$ را در یک آرایه سه بعدی

- ### مراحل الگوریتم ضرب ماتریس
- مرحله اول:
 - تمامی پردازنده n^3 ، عمل ضرب را انجام می دهد.
 - در ماتریس خروجی، برای هر n^2 همان، n حاصلضرب محاسبه می شود.
 - پردازنده $P(i,j,k)$ حاصلضرب $A[i,k] * B[k,j]$ را محاسبه کرده و در $C[i,j,k]$ قرار می دهد.
 - مراحل دوم:
 - N حاضر محاسبه شده برای هر همان ماتریس خروجی، برای تولید نتیجه نهایی این سلول، جمع می شوند.
 - ایده الگوریتم Sum-EREW در k بعد، n^2 بار به طور موازی برای محاسبه $C[i,j,n]$ بکار گرفته می شود ($1 \leq j \leq n$)

شبه کد الگوریتم ضرب ماتریس

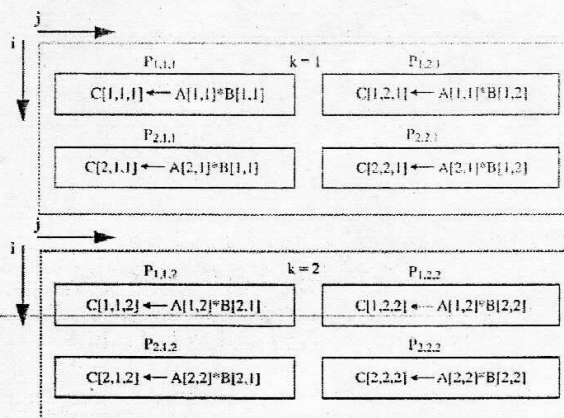
```

Algorithm MatMult_CREW
/* Step 1 */
forall  $P_{i,j,k}$ , where  $1 \leq i, j, k \leq n$  do in parallel
     $C[i,j,k] \leftarrow A[i,k] * B[k,j]$ 
endfor

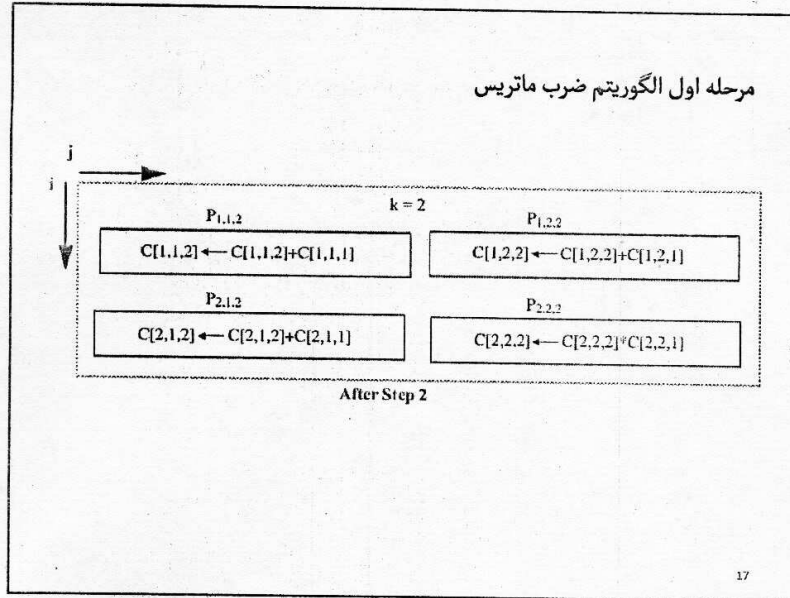
/* Step 2 */
for  $l=1$  to  $\log n$  do
    forall  $P_{i,j,k}$ , where  $1 \leq i, j \leq n$  &  $1 \leq k \leq n/2$  do in parallel
        if  $(2k \bmod 2^l) = 0$  then
             $C[i,j,2k] \leftarrow C[i,j,2k] + C[i,j,2k-2^{l-1}]$ 
        endif
    endfor
/* The output matrix is stored in locations
 $C[i,j,n]$ , where  $1 \leq i, j \leq n$  */
endfor
    
```

15

مرحله اول الگوریتم ضرب ماتریس



16



پیچیدگی الگوریتم ضرب ماتریس

- زمان اجرا: $T(n) = O(\log n)$
- تعداد پردازنده ها: $P(n) = n^3$
- هزینه: $C(n) = O(n^3 \log n)$
- هزینه بهینه است؟

18

کاهش تعداد پردازنده ها در الگوریتم ضرب ماتریس

- در مرحله اول کلیه پردازنده ها مشغول هستند.
- در مرحله دوم تمامی پردازنده ها عمل جمع انجام نمی دهند.
- $\log n$ تکرار وجود دارد. در تکرار اول $(n^3)/2$ پردازنده فعالند، در تکرار دوم $(n^3)/4$ پردازنده فعالند \leq می توان از ماشینی استفاده کرد که $(n^3)/\log n$ پردازنده دارد.
- روش:
- پردازنده $P(i,j,k)$ که $1 \leq k \leq n/\log n$ است، مجموع $\log n$ حاصلضرب را محاسبه می کند. این مرحله $(n^3)/\log n$ جمع جزئی تولید می کند.
- مجموع حاصلضربهای تولید شده در مرحله اول با هم جمع شده تا ماتریس حاصله بدست آید.

19

پروژه 2-3

- محاسبه ضرب دو ماتریس 4^*4 با الگوریتم فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

20

پیچیدگی الگوریتم ضرب ماتریس کاهش یافته

- زمان اجرا: $T(n) = O(\log n)$
- تعداد پردازنده ها: $P(n) = (n^3) / \log n$
- هزینه: $C(n) = O(n^3)$

- هزینه بهینه است؟

21

شماره

فصل پنجم

الگوریتم های مرتب سازی

موضوعات مرتب سازی روی کامپیوترهای موازی

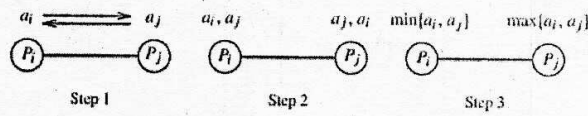
- در الگوریتم های مرتب سازی ترتیبی، دنباله های ورودی و خروجی در حافظه فرایند ذخیره می شوند.
- در الگوریتم های موازی دو مکان برای ذخیره سازی دنباله ها وجود دارد:
- $\frac{1}{2}$ در یکی از فرایندها فقط ذخیره شوند.
- $\frac{2}{2}$ بین فرایندها توزیع شوند.
- فرض می شود که عناصر دنباله خروجی روی فرایندها توزیع شده است، عبارتی اگر P_i قبل از P_j باشد، آنگاه عنصر ذخیره شده در P_i کوچکتر از P_j است.

2

چگونگی انجام مقایسه در الگوریتم های موازی

• به ازای هر فرایند یک عنصر :

Figure 9.1. A parallel compare-exchange operation. Processes P_i and P_j send their elements to each other. Process P_i keeps $\min\{a_i, a_j\}$, and P_j keeps $\max\{a_i, a_j\}$.



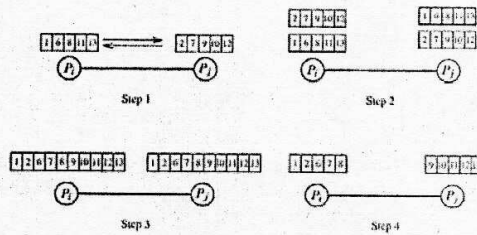
$P_i \xrightarrow{\min} P_j$
 $P_j \xrightarrow{\max} P_i$

3

چگونگی انجام مقایسه در الگوریتم های موازی

• به ازای هر فرایند بیش از یک عنصر :

Figure 9.2. A compare-split operation. Each process sends its block of size n/p to the other process. Each process merges the received block with its own block and retains only the appropriate half of the merged block. In this example, process P_i retains the smaller elements and process P_j retains the larger elements.



4

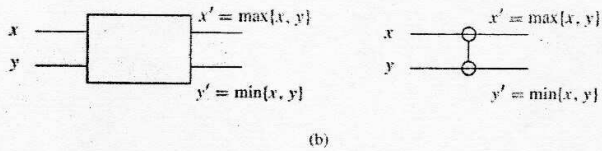
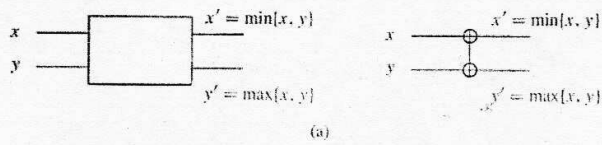
سریال نیست و فرایند
کلیه کارها را در هر فرایند
نقشه فرایند را در هر فرایند
که داشته است
هر چه شده از فرایند ها
سریال با فرایند

فرایند سریال
رسم ساده سریال < و شب ساده موازی

سریال با فرایند موازی
نقشه موازی سریال است

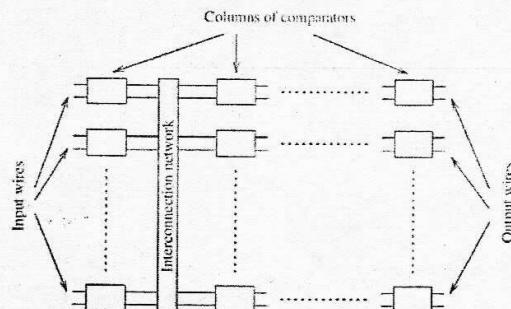
شبکه های مرتب سازی

• جزء اصلی شبکه های مرتب سازی، مقایسه گر (comparator) است.

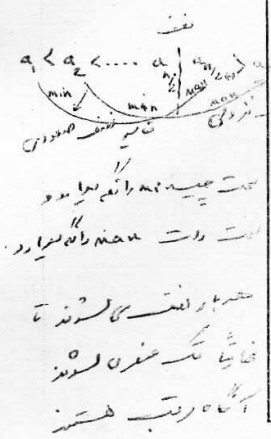


A schematic representation of comparators: (a) an increasing comparator, and (b) a decreasing comparator.

شبکه های مرتب سازی : نحوه اتصال همایک درونی یک درون مرتب سازی



A typical sorting network. Every sorting network is made up of a series of columns, and each column contains a number of comparators connected in parallel.



مرتب سازی BITONIC : دنباله‌ها می‌توانند به ترتیب صعودی و نزولی مرتب شوند

• n عنصر با مرتبه زمانی $O((\log n)^2)$ مرتب می‌شوند.

• دنباله BITONIC: یک دنباله ایی است از عناصر $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$

با این خصوصیت که یا

(۱) یک اندیس i وجود دارد؛ $0 \leq i \leq n-1$ بطوریکه $\langle a_0, a_1, \dots, a_i \rangle$

بطور یکنواخت صعودی و $\langle a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-1} \rangle$ بطور یکنواخت

نزولی مرتب هستند، یا

(۲) شیفت چرخشی روی دنباله (۱) باشد.

• مثال: (۱) $\langle 1, 2, 4, 7, 6, 0 \rangle$

• مثال: (۲) $\langle 8, 9, 2, 1, 0, 4 \rangle$ ، زیرا شیفت چرخشی

$\langle 0, 4, 8, 9, 2, 1 \rangle$ است.

مرتب سازی BITONIC

• فرض شود $S = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ یک دنباله BITONIC باشد. بنابراین:

• زیردنباله های S بصورت زیر هستند:
 $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n/2-1}$ and $a_{n/2} \geq a_{n/2+1} \geq \dots \geq a_{n-1}$

$s_1 = (\min\{a_0, a_{n/2}\}, \min\{a_1, a_{n/2+1}\}, \dots, \min\{a_{n/2-1}, a_{n-1}\})$

$s_2 = (\max\{a_0, a_{n/2}\}, \max\{a_1, a_{n/2+1}\}, \dots, \max\{a_{n/2-1}, a_{n-1}\})$

• در زیردنباله S_1 عنصر $b_i = \min\{a_i, a_{n/2+i}\}$ وجود دارد بطوریکه عناصر قبل از b_i از زیردنباله بخش صعودی و عناصر بعد از آن از بخش نزولی می باشند.

• در زیردنباله S_2 عنصر $b'_i = \max\{a_i, a_{n/2+i}\}$ وجود دارد بطوریکه عناصر قبل از b'_i از زیردنباله بخش نزولی و عناصر بعد از آن از بخش صعودی می باشند.

• بنابراین زیردنباله های S_1 و S_2 از نوع دنباله های BITONIC هستند.

• b_i بزرگتر مساوی همه عناصر S_1 و b'_i کوچکتر مساوی همه عناصر S_2 است و بزرگتر مساوی است از b_i .

مرتب سازی BITONIC

Merging a 16-element bitonic sequence through a series of log 16 bitonic splits.

Original sequence	3	5	8	9	10	12	14	20	95	90	60	40	35	23	18	0
1st Split	3	5	8	9	10	12	14	0	95	90	60	40	35	23	18	20
2nd Split	3	5	8	0	10	12	14	9	35	23	18	20	95	90	60	40
3rd Split	3	0	8	5	10	9	14	12	18	20	35	23	60	40	95	90
4th Split	0	3	5	8	9	10	12	14	18	20	23	35	40	60	90	95

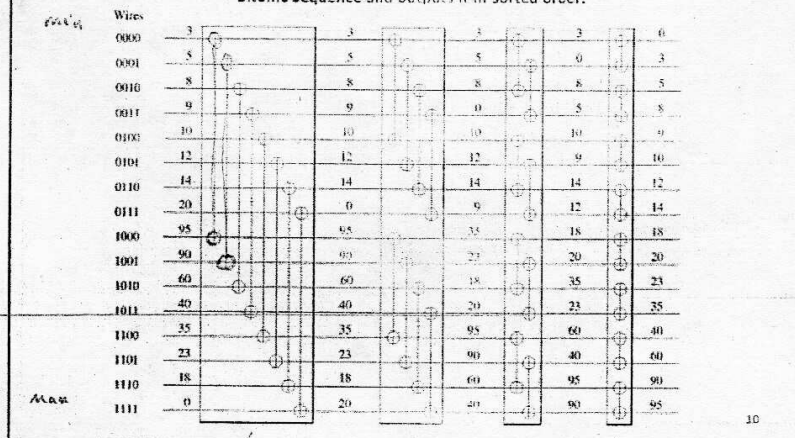
دسته ها را در ترتیب منتهی

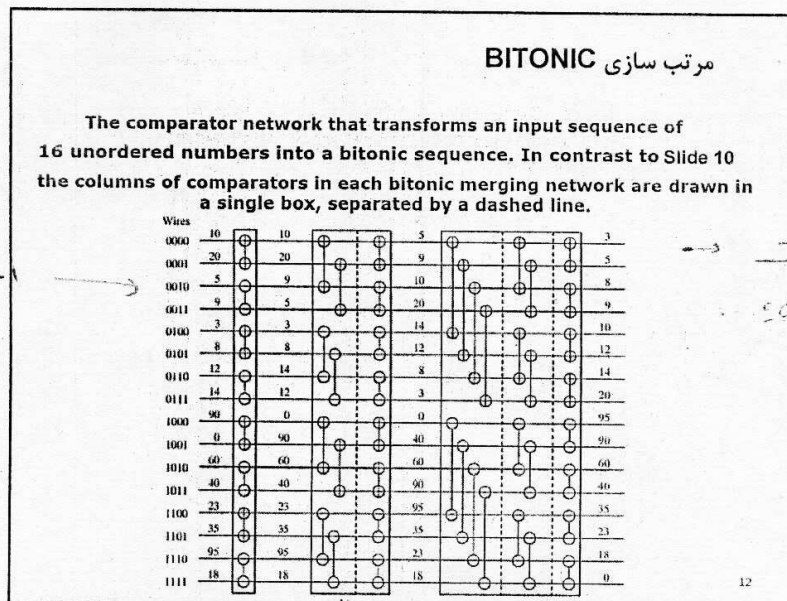
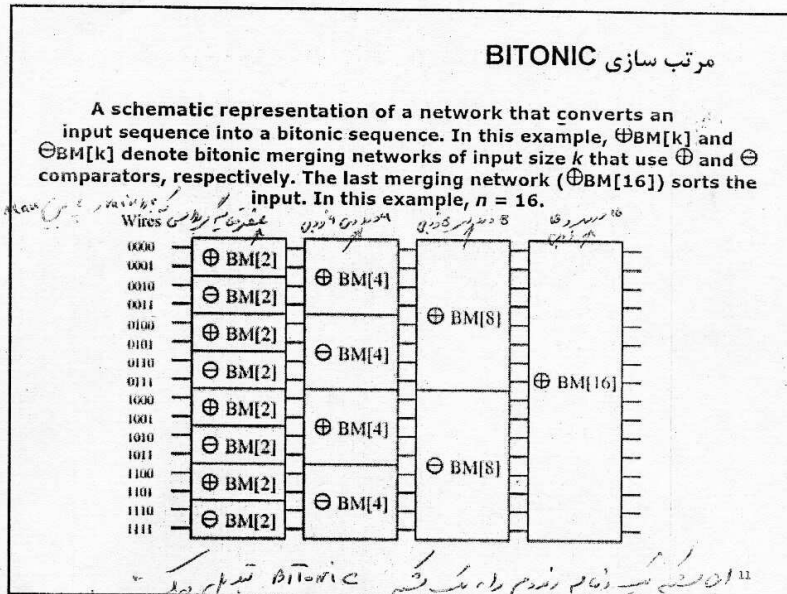
استیج ها را در ترتیب منتهی . 16 پردازنده داریم .

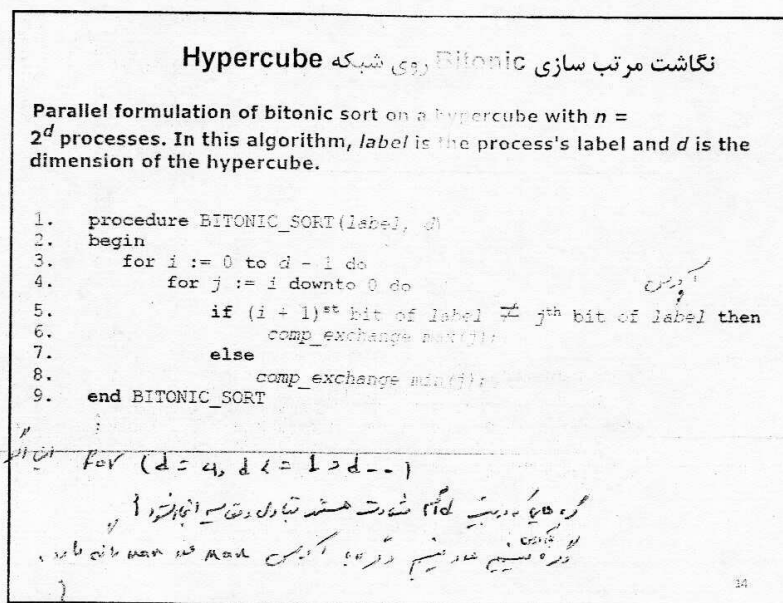
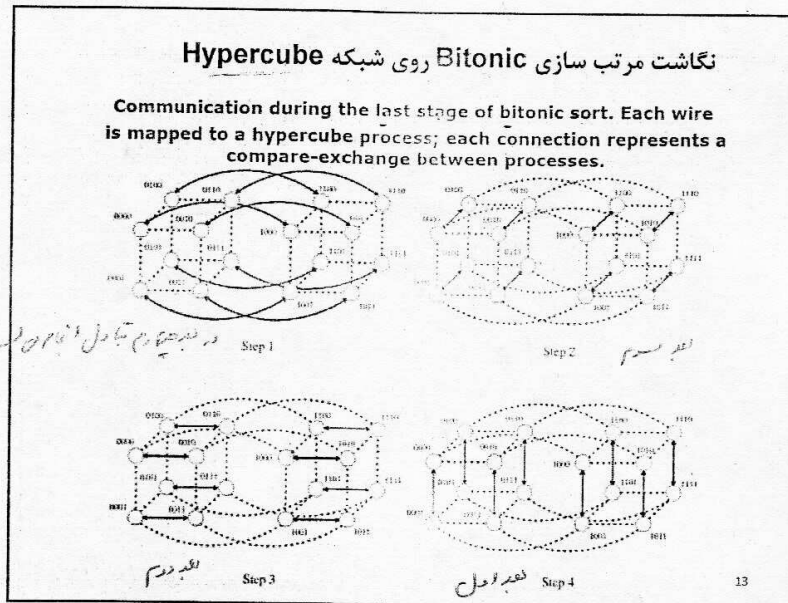
$$n \log_2 n = 5$$

مرتب سازی BITONIC

A bitonic merging network for $n = 16$. The input wires are numbered 0, 1, ..., $n - 1$, and the binary representation of these numbers is shown. Each column of comparators is drawn separately; the entire figure represents a $\oplus BM[16]$ bitonic merging network. The network takes a bitonic sequence and outputs it in sorted order.







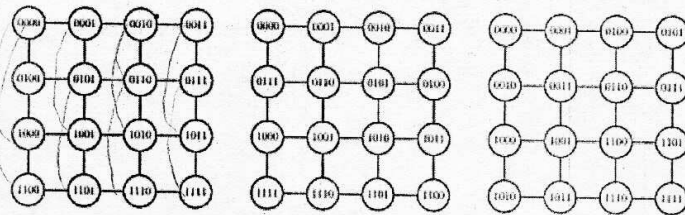
۳۴

1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16

سردسته
سردسته
سردسته
سردسته

نگاشت مرتب سازی Bitonic روی شبکه Mesh

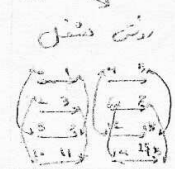
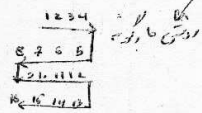
Different ways of mapping the input wires of the bitonic sorting network to a mesh of processes: (a) row-major mapping, (b) row-major snakelike mapping, and (c) row-major shuffled mapping.



(a)

(b)

(c)

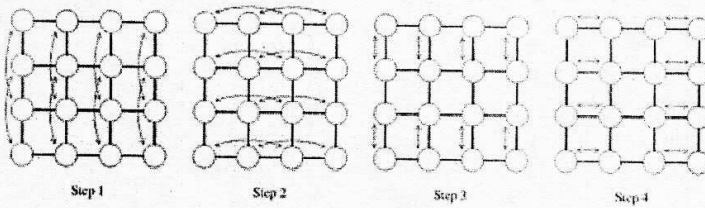


نگاشت مرتب سازی Bitonic روی شبکه Mesh

The last stage of the bitonic sort algorithm for $n = 16$ on a mesh, using the row-major shuffled mapping. During each step, process pairs compare-exchange their elements. Arrows indicate the pairs of processes that perform compare-exchange operations.

سردسته

Stage 4



Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

پروژه ۴-۱

- شبیه سازی شبکه مش و مکعب و پیاده سازی الگوریتم های مرتب سازی فوق با استفاده از: C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

17

در مرتب نمودن: کاره نزدیک
 هم کاره نزدیک است که در اول دارد.
 خردی این min مانده می آید در
 نزدیک با min می آید.
 اگر در این روش (خرد-نزدیک)
 روشی است.

۱ مرتب سازی حبابی
Bubble Sort

• الگوریتم ترتیبی

```

1. procedure BUBBLE_SORT(n)
2. begin
3.   for i := n - 1 downto 1 do
4.     for j := 1 to i do
5.       compare-exchange(aj, aj+1)
6.   end BUBBLE_SORT
    
```

P. 11

18

نویسنده: دکتر سید سعید نورمندی
 تاریخ: ۲۸/۰۲/۱۳۹۳

مرتب سازی حبابی (Bubble Sort)

موازی سازی مرتب سازی حبابی (Odd-Even Transposition)

• جابجایی زوج-فرد

Unsorted

3	2	3	8	5	6	4	1
2	3	3	8	5	6	1	4
2	3	3	5	8	1	6	4
2	3	3	5	1	8	4	6
2	3	3	1	5	4	8	6
2	3	1	3	4	5	6	8
2	1	3	3	4	5	6	8
1	2	3	3	4	5	6	8
1	2	3	3	4	5	6	8

Sorted

```

1. procedure ODD-EVEN_PAR
2. begin
3.   for i := 1 to n do
4.     begin
5.       if i is odd then
6.         for j := 0 to n/2 - 1 do
7.           compare-exchange_min(id + 1);
8.         end for
9.       if i is even then
10.        for j := 1 to n/2 - 1 do
11.          compare-exchange_max(id - 1);
12.        end for
13.      end if
14.    end for
15.  end ODD-EVEN_PAR
    
```

19

مرتب سازی حبابی (Bubble Sort)

• موازی سازی مرتب سازی حبابی

• موازی سازی جابجایی زوج-فرد

• N تا پردازنده که هر کدام یک دنباله را ذخیره کرده اند.

```

1. procedure ODD-EVEN_PAR (n)
2. begin
3.   id := process's label
4.   for i := 1 to n do
5.     begin
6.       if i is odd then
7.         if id is odd then
8.           compare-exchange_min(id + 1);
9.         else
10.          compare-exchange_max(id - 1);
11.        end if
12.       if i is even then
13.         if id is even then
14.           compare-exchange_min(id + 1);
15.         else
16.          compare-exchange_max(id - 1);
17.        end if
18.      end for
19.    end ODD-EVEN_PAR
    
```

20

2 و 1 است و 2 و 3 زوج

تبدیل min و max را در دست راست

این مورد صحیح است

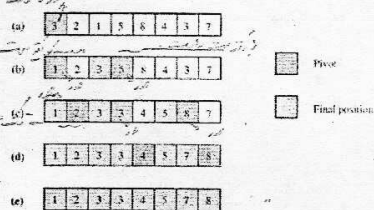
پروژه ۲-۴

- شبیه سازی و پیاده سازی الگوریتم های مرتب سازی فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

21

مرتب سازی سریع
Quick Sort

Example of the quicksort algorithm sorting a sequence of size $n = 8$.



```

1 procedure QUICKSORT (A, q, r)
2 begin
3   if q < r then
4     begin
5       p := A[q];
6       i := q;
7       for j := q + 1 to r do
8         if A[j] <= p then
9           begin
10            i := i + 1;
11            swap(A[i], A[j]);
12          end if
13        swap(A[i], A[q]);
14        QUICKSORT (A, q, i);
15        QUICKSORT (A, i + 1, r);
16      end if
17    end QUICKSORT
    
```

تعداد نام ها
n
2

سرعت

نقطه هرگز کمتر از دو عدد در دست است
تقسیم تا زمانی که عدد را همچون دیگر نو

22

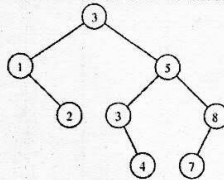
نوشته شده است
 روشی که در این کتاب آمده است
 این روش همزمان با روش دیگر است
 روشی که در این کتاب آمده است

مرتب سازی سریع Quick Sort

• موازی سازی QuickSort برای یک CRCW PRAM

- از رویه اختیاری (arbitrary) برای نوشتن همزمان استفاده شده است.
- از یک درخت دودویی برای نمایش اجرای موازی QuickSort استفاده می شود.
- محور در ریشه و عناصر کوچکتر از آن در زیر درخت چپ و عناصر بزرگتر از آن در زیردرخت راست آن قرار دارند. پیمایش inorder روی درخت، دنباله مرتب شده بدست می آید.

A binary tree generated by the execution of the quicksort algorithm. Each level of the tree represents a different array-partitioning iteration. If pivot selection is optimal, then the height of the tree is $\Theta(\log n)$, which is also the number of iterations.



23

مرتب سازی سریع Quick Sort

• موازی سازی QuickSort برای یک CRCW PRAM

The binary tree construction procedure for the CRCW PRAM parallel quicksort formulation.

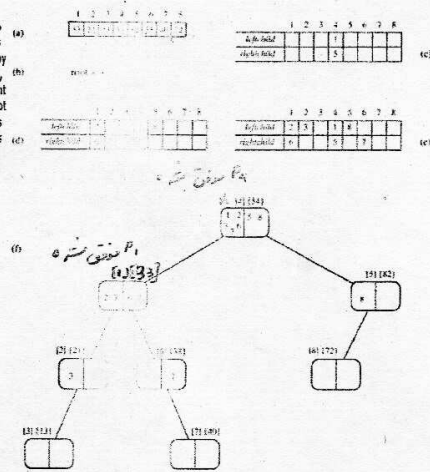
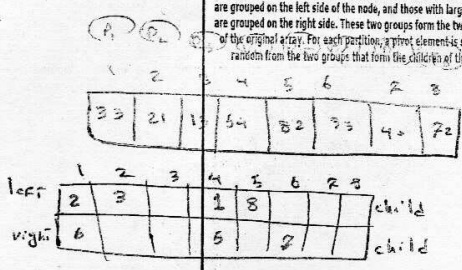
```

1. procedure BUILD TREE (A[1...n])
2. begin
3.   for each process i do
4.     begin
5.       root := i;
6.       parenti := root;
7.       leftchild[i] := rightchild[i] := n + 1;
8.     end for
9.   repeat for each process i ≠ root do
10.    begin
11.     if (A[i] < A[parenti]) or
12.        (A[i] = A[parenti] and i < parenti) then
13.       begin
14.         leftchild[parenti] := i;
15.         if i = leftchild[parenti] then exit
16.         else parenti := leftchild[parenti];
17.       end for
18.     end for
19.   end repeat
20. end procedure
    
```

24

مرتب سازی سریع Quick Sort

The execution of the PRAM algorithm on the array shown in (a). The arrays leftchild and rightchild are shown in (c), (d), and (e) as the algorithm progresses. Figure (f) shows the binary tree constructed by the algorithm. Each node is labeled by the process (in square brackets), and the element is stored at that process (in curly brackets). The element is the pivot. In each node, processes with smaller elements than the pivot are grouped on the left side of the node, and those with larger elements are grouped on the right side. These two groups form the two partitions of the original array. For each partition, a pivot element is selected at random from the two groups that form the children of the node.



همچنین بازنده ها هم به 4 و 5 میزنند و از 4 و 5 میزنند
 همچنین بازنده ها هم به 4 و 5 میزنند و از 4 و 5 میزنند
 همچنین بازنده ها هم به 4 و 5 میزنند و از 4 و 5 میزنند

inorder 1 3 2 4 5 6 7 8

مرتب سازی سریع Quick Sort

- موازی سازی QuickSort در فضای آدرس مشترک
- هر فرایند p بلاک pامین عنصر از آرایه n عنصری A را شامل می شود و برچسب فرایندها ترتیب سراسری دنباله مرتب شده را نشان می دهند.
- ابتدا محور تعیین می شود و فرایندها ارسال می شود. هر P_i به محض دریافت محور، بلاک خود را به دو زیر بلاک آرایش می دهد. مقادیر بلاک سمت چپ از محور کمتر و مقادیر بلاک سمت راست از محور بزرگتر هستند.
- برای هر زیر بلاک از دو فرایند صورت بازگشتی مراحل فوق اعمال می شود.

```

inorder (int i, int A[], int left[], int right[])
if (i == 0 || i == n)
{
    inorder (left[i], A, left, right);
    cout << A[i];
    inorder (right[i], A, left, right);
}
    
```

$i = 4$
 همچنین فرایند 4 از 4 میزنند و از 4 میزنند
 همچنین فرایند 2 از 2 میزنند و از 2 میزنند
 همچنین فرایند 0 از 0 میزنند و از 0 میزنند

مرتب سازی سریع Quick Sort

- موازی سازی QuickSort روی فضای آدرس مشترک

37

پروژه ۳-۴

— شبیه سازی و پیاده سازی الگوریتم های مرتب سازی فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA

— توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

38

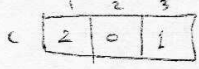
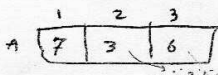
مرتب سازی مبتنی بر ایده شمارشی: تعداد عناصر کوچکتر از a_i را C_i می نامند و در C_i قرار می دهد.

• مکان هر عنصر a_i در لیست مرتب شده را با محاسبه تعداد عناصر کوچکتر از آن تعیین می کند.

• اگر عنصر کوچکتر از a_i وجود داشته باشد، مکان a_i برابر است با $C_i + 1$ در لیست مرتب شده است.

• اگر $a_i = a_j$ باشد، a_i بزرگتر در نظر گرفته می شود. از مدل CREW PRAM n^2 پردازنده استفاده می شود.

• n^2 پردازنده در n ردیف که هر ردیف n عنصر دارد، مرتب می شوند. شماره گذاری پردازنده $P(i, j)$



در تمام i در $A[C_i + 1]$ قرار می دهد.
 A_i را در A_i قرار می دهد.
 $i = 1 : A[3] \leftarrow A[1]$
 $i = 2 : A[2] \leftarrow A[2]$
 $i = 3 : A[1] \leftarrow A[3]$

این انتقال داده ها هستند بر فراز اول پردازنده ۳ است.

CREW
 CS: از هر پردازنده یک بار
 مقایسه و جابجایی

P_{11}	P_{12}	P_{13}
P_{21}	P_{22}	P_{23}
P_{31}	P_{32}	P_{33}

در ردیف اول انتقال داده ها
 مقایسه و جابجایی در ردیف دوم
 مقایسه و جابجایی در ردیف سوم
 مقایسه و جابجایی در ردیف چهارم

مراحل الگوریتم مرتب سازی موازی شمارشی

- هر ردیف i از پردازنده C_i را در $A[C_i + 1]$ قرار می دهد. پردازنده $P(i, j)$ مقایسه و جابجایی $A[i]$ را با $A[j]$ را بهنگام می کند.
- اولین پردازنده در ردیف i در $A[C_i + 1]$ قرار می دهد. در مکان مناسب در لیست مرتب شده قرار می دهد: $C_i + 1$

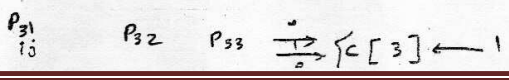
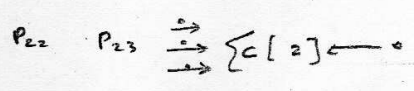
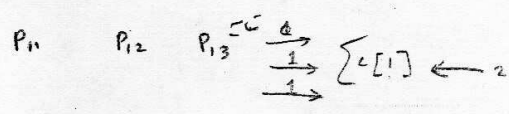
Algorithm Sort_CRCW

```

/* Step 1 */
forall  $P_{i,j}$ , where  $1 \leq i, j \leq n$  in parallel
    if  $A[i] > A[j]$  or  $(A[i] = A[j] \text{ and } i > j)$  then
         $C[i] \leftarrow 1$ 
    else
         $C[i] \leftarrow 0$ 
    endif
endfor
    
```

```

/* Step 2 */
forall  $P_{i,1}$ , where  $1 \leq i \leq n$  in parallel
     $A[C[i] + 1] \leftarrow A[i]$ 
endfor
    
```



در ردیف دوم مقایسه و جابجایی
 در ردیف سوم مقایسه و جابجایی
 در ردیف چهارم مقایسه و جابجایی

این آزمون تکرار کننده است.
 ما زمان $O(n)$
 به آزمون پیچیده زمان $O(n^2)$
 فاز دوم $O(n)$ است.
 این سرتیرین آزمون است.

مثالی از الگوریتم مرتب سازی شمارشی

Initially A = [6 | 1 | 3]

$P_{1,1}$ compares 6 & 6	$P_{1,2}$ compares 6 & 1	$P_{1,3}$ compares 6 & 3
$P_{2,1}$ compares 1 & 6	$P_{2,2}$ compares 1 & 1	$P_{2,3}$ compares 1 & 3
$P_{3,1}$ compares 3 & 6	$P_{3,2}$ compares 3 & 1	$P_{3,3}$ compares 3 & 3

After Step 1 C = [2 | 0 | 1]

After Step 2 A = [1 | 3 | 6]

میخواهیم آرایه $A=[6,3,1]$ را مرتب کنیم. به 9 پردازنده برای مرتب سازی نیاز است.

31

پیچیدگی الگوریتم مرتب سازی شمارشی

- زمان اجرا: $T(n)=O(n)$
- تعداد پردازنده ها: $P(n)=n^2$
- هزینه: $C(n)=O(n^3)$

- هزینه بهینه است؟

32

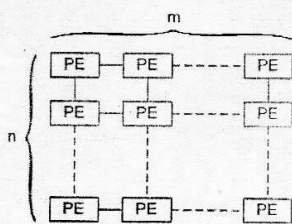
پروژه ۴-۴

- مرتب سازی بردار ۱۶ عنصری با الگوریتم مرتب سازی مبتنی بر شمارشی با استفاده از زبان C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ ممین رنگی باشد.

33

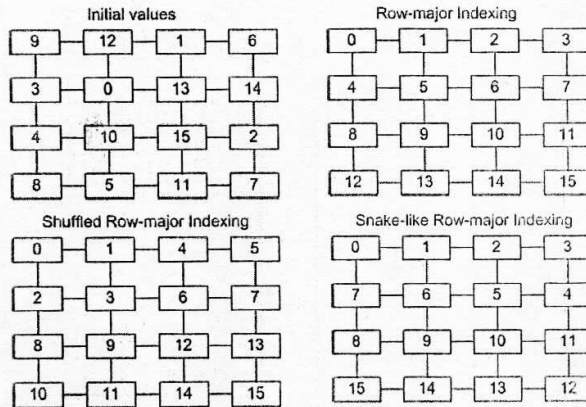
اجرای الگوریتم های مرتب سازی بر روی شبکه مش

- شبکه مش $n \times m$



- پیچیدگی: به واسطه n پردازنده n در T_C است: T_C تبادل است (تبادل در یک قدم خود ندارد)
 - T_r : زمان مسیریابی برای انتقال یک داده از یک PE به یکی از PE های همسایه.
 - T_C : زمان مقایسه در هر مرحله (مقایسه همزمان اجرا $N = n^2$)
- $T_C = 2T_r + T_C$

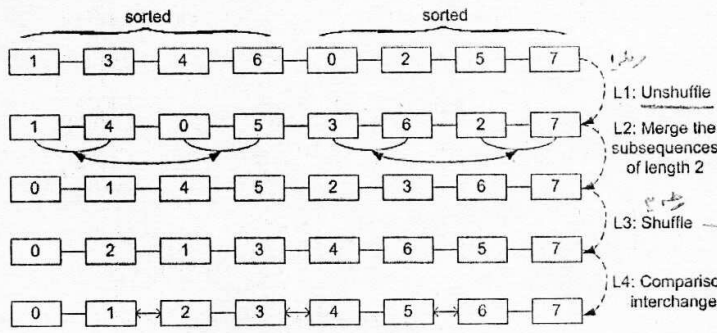
شماهای مختلف شاخص مرتب سازی
(Sorting Indexing Schemes)



عملیات

الگوریتم Batcher's odd-even sort

دو کارای از قبل مرتب شده را مرتب می کند
مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد
مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد

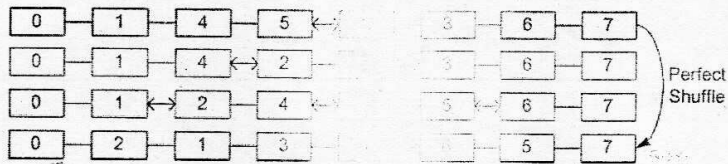


در این مرحله به طول ۲ را در هم ادغام می کند
مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد
مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد

مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد
مثال: ۹.۲ لعل عمل ادغام انجام می دهد

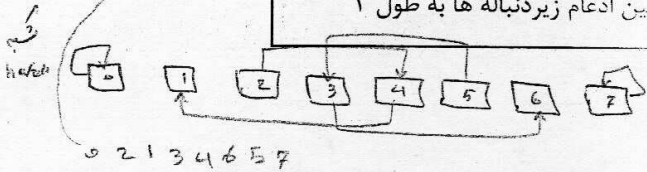
الگوریتم Batchers odd-even sort

- نحوه انجام یک Shuffle یک آرایه خطی (با استفاده از یک رشته از عملیات چپ و راست)



تمرین:

- نحوه انجام Unshuffle (چنین ادغام زیر دنباله ها به طول ۲)

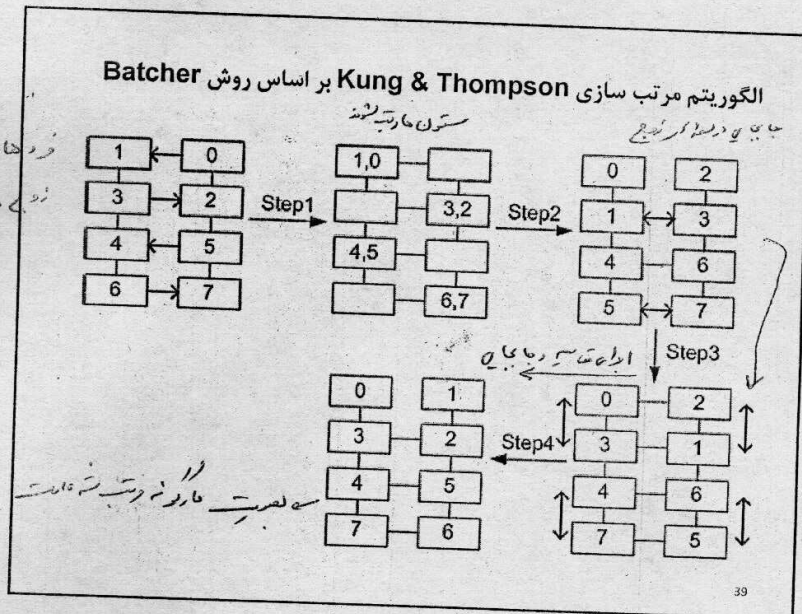


الگوریتم مرتب سازی Kung & Johnson بر اساس روش Batcher

- $M(j, k)$ یک الگوریتم مرتب سازی است که برای مرتب کردن دو زیر آرایه $j.k/2$ (z و k هر دو توان ۲ هستند و $k > 1$).
- الگوریتم بصورت Snake like major در حالت خاص، $(j, 2)$ مقایسه و جایجایی کافی است.
- اگر دو ستون مرتب شده $(z \geq 2)$: الگوریتم $M(j, 2)$ شامل گامهای:

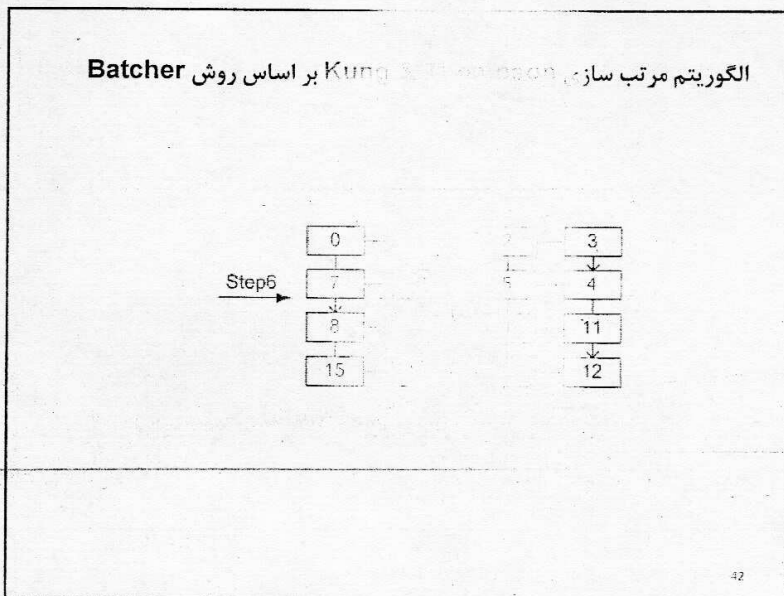
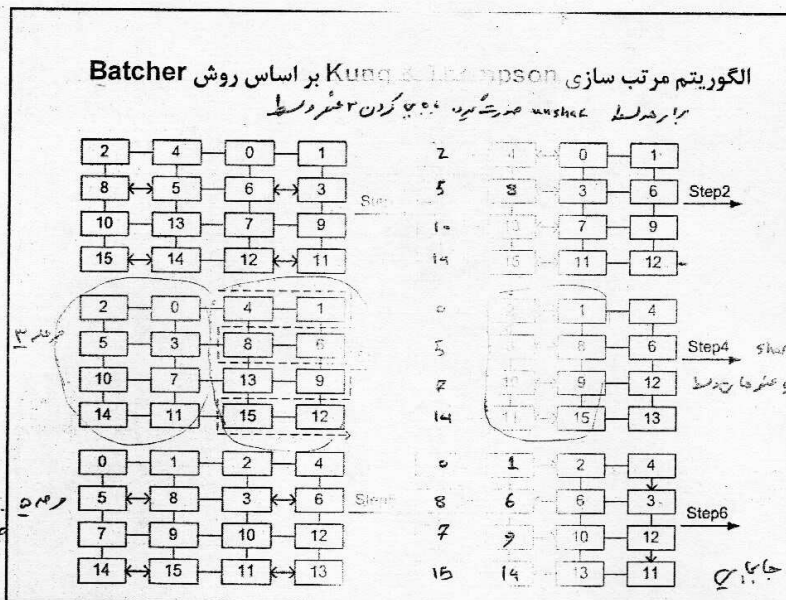
1. تمام ردیفهای فرد خود را به سمت چپ و تمام ردیفهای زوج را به سمت راست انتقال دهید.
2. با استفاده از مرتب سازی $M(j, 2)$ هر ستون مرتب شود (زمان $2Tk + jTc =$)
3. جایجایی در ستونهای فرد (زمان $2Tk$).

موسسه علمی ۲۰۰۰ با برابری



در هر دو طرف مرتب است
در هر دو طرف مرتب است
نکته

- الگوریتم مرتب سازی Kung & Thompson بر اساس روش Batcher**
- . $n = 4$ است
- اجرای الگوریتم مرتب سازی $M(j, k)$ برای $j > 2$ و $k > 2$.
 1. اگر $j > 2$ است، تنها یک گام جابجایی روی سطرها انجام ده. اگر $j = 2$ باشد، ستونها قبلا جدا شده اند (زمان = $2Tk$).
 2. برای هر سطر Unshuffle صورت گیرد (زمان = $(k-1).Tk$).
 3. عمل ادغام با خواندن $M(j, k/2)$ روی هر نیمه آرایه (زمان = $T(j, k/2)$).
 4. برای هر سطر Shuffle صورت گیرد (زمان = $(k-2).Tk$).
 5. در سطرها جابجایی انجام ده (زمان = $(k-2).Tk$).
 6. مقایسه و جابجایی المانهای مجاور هم (هر زوج یا فرد بعدی) (زمان = $4(Tk+Tc)$).
- 40



پروژه ۴-۵

- شبیه سازی شبکه مش و پیاده سازی الگوریتم های مرتب سازی فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA
- توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

43

سوال اول: یک شبکه مش با ۱۰۰۰۰۰ گره و ۱۰۰۰۰۰۰ لبه را در نظر بگیرید.

سوال دوم: نوشته الگوریتم مرتب سازی گره ها.

فصل ششم

الگوریتم جمع چند جمله ایی

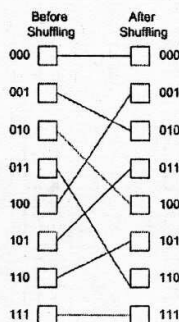
1

شبکه های ایستا

شبکه Shuffle-Exchange: بارها باره کاغذی

توابع: $S(p_{m-1}p_{m-2} \dots p_1 p_0) = p_{m-2}p_{m-3} \dots p_1 p_0 p_{m-1}$
 $E(p_{m-1}p_{m-2} \dots p_1 p_0) = p_{m-1}p_{m-2} \dots p_1 \bar{p}_0$

لهبریت موازی جمع مرتبه

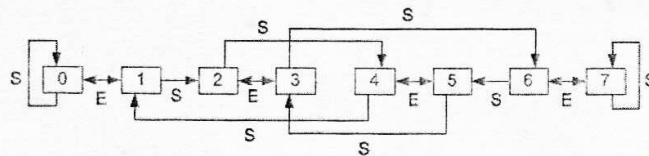


• Shuffle مشابه با بریدن کارتها است (d Shuffling)

2

شبکه های ایستا

- شبکه Shuffle-Exchange: هر پردازنده یک بیت دارد. a_i داخل آن است و یک بیت a_i است.



این الگوریتم در پردازنده های موازی
 کارایی دارد در هر گره
 فقط در هر گره
 در فاز دوم: نتایج حاصل از محاسبه در هر گره
 که یک بیت جمع است را بر...

- مثال: محاسبه چند جمله ای: $a_{N-1}X^{N-1} + a_{N-2}X^{N-2} + \dots + a_1X + a_0$
- هر پردازنده دارای ثبات ضریب (a_i) ، متغیر X و همچنین بیت ماسک $(m=1$ یا $m=0)$.
- اجزای عملیات در دو فاز.
- فاز اول محاسبه در هر گره $a_i X^i$.
- فاز دوم جمع همه ترم ها برای محاسبه نتیجه نهایی.

عملیات فاز اول: ضرب در متغیر X و جمع کردن نتایج در هر گره. اگر $m=0$ باشد فقط متغیر در خود ضرب می شود. اگر $m=1$ باشد متغیر در خود و در ضرب می شود.

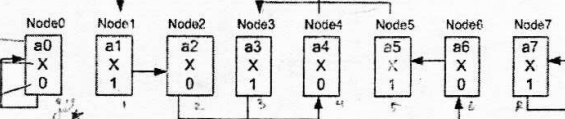
شبکه های ایستا

جمع کردن $a_7 + a_6 X + a_5 X^2 + \dots + a_0$

شبکه های ایستا

- عملیات فاز اول:
- ضرب در متغیر ضرب می شود.
- متغیر در خود ضرب می شود.
- بیتهای ماسک Shuffle می شود.

اگر $m=0$ باشد فقط متغیر در خود ضرب می شود.
 اگر $m=1$ باشد متغیر در خود و در ضرب می شود.



این الگوریتم در پردازنده های موازی
 کارایی دارد در هر گره
 فقط در هر گره
 در فاز دوم: نتایج حاصل از محاسبه در هر گره
 که یک بیت جمع است را بر...

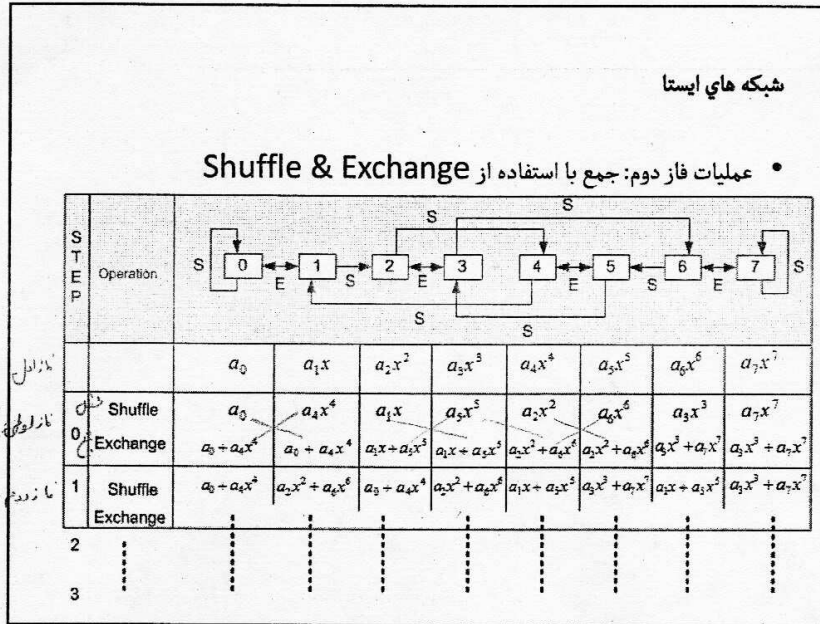
a_0 X^2 0	a_1X X^2 0	a_2 X^2 0	a_3X X^2 1	a_4 X^2 0	a_5X X^2 0	a_6 X^2 1	a_7X X^2 1
a_0 X^4 0	a_1X X^4 0	a_2X^2 X^4 0	a_3X^3 X^4 0	a_4 X^4 1	a_5X X^4 1	a_6X^2 X^4 1	a_7X^3 X^4 1
a_0 X^8 0	a_1X X^8 0	a_2X^2 X^8 0	a_3X^3 X^8 0	a_4X^4 X^8 1	a_5X^5 X^8 1	a_6X^6 X^8 1	a_7X^7 X^8 1

این الگوریتم در پردازنده های موازی
 کارایی دارد در هر گره
 فقط در هر گره
 در فاز دوم: نتایج حاصل از محاسبه در هر گره
 که یک بیت جمع است را بر...

۴۴

شبکه های ایستا

• عملیات فاز دوم: جمع با استفاده از Shuffle & Exchange



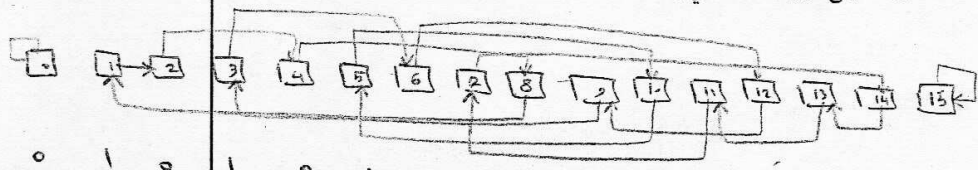
نماز اول
نماز دوم
نماز سوم
نماز چهارم
نماز پنجم
نماز ششم
نماز هفتم
نماز هشتم
نماز نهم
نماز دهم

پروژه 2-2

— محاسبه یک چند جمله ای با الگوریتم فوق با استفاده از نخها در C++ یا JAVA
— توجه: هر نخ مبین یک PE می باشد.

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

شکل



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1