به نام خدا

آزمون شماره 1

پاسخ:

ریاضی:

1-گزینه ۳ صحیح است.

$$y'y(1-x^2)-xy^2+\sin x\cos x=0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[y^2(1-x^2)]'+\frac{1}{2}[\sin^2 x]'=0$$
$$\Rightarrow \quad y^2(1-x^2)+\sin^2 x=C$$
$$y(0)=2 \quad \Rightarrow \quad C=4 \quad \Rightarrow \quad y^2(1-x^2)+\sin^2 x=4$$

۲-گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به نکته (۱) سوال قبلی، در نتیجه با بسط دارن تابع $f(x)$ خودبخود بسط فوریه آن را نیز محاسبه نموده ایم.

$$f(x)=(\cos^2 x-\frac{1}{2}+\sin x)^2=\underbrace{(\cos^2 x-\frac{1}{2})^2}_{\text{یک تابع زوج است}}+\sin^2 x+2(\sin x)(\cos^2 x-\frac{1}{2})$$
یک تابع زوج است

باتوجه به این که b_2 خواسته شده است در نتیجه به بخش فرد تابع مراجعه کنید؛ یعنی $2\sin x\cos^2 x$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$2\sin x\cos^2 x=2\sin x(1-\sin^2 x)=2\sin x-2\sin^3 x=2\sin x-2\left(\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right)=\frac{1}{2}\sin x+\underbrace{\frac{1}{2}}_{b_2}\sin 3x$$

نکته: در بسط فوریه تابع $f(x)$ ضرایب کسینوسی a_n فقط از قسمت زوج تابع $f(x)$ محاسبه می شوند و ضرایب سینوسی b_n از قسمت فرد تابع $f(x)$ به عبارتی اگر

* مفاهیم بیان شده در سوال های ۱ و ۲ به کررات در سوال های کنکور استفاده شده است.

$$f(x)=\underbrace{(\text{مجموعه ای از توابع زوج})}_{a_n \text{ مرتبط با}}+\underbrace{(\text{مجموعه ای توابع فرد})}_{b_n \text{ مرتبط با}}$$

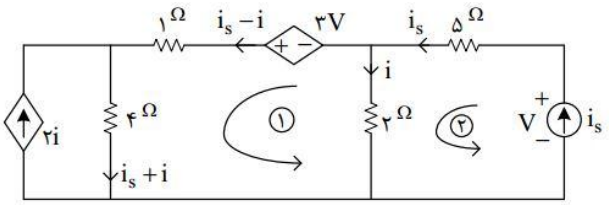
3-گزینه ۱ صحیح است.

باتوجه به گزینه ها $f(x)$ تابعی فرد است.

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty B(x)\sin(\omega x)d\omega$$
$$\Rightarrow B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx \Rightarrow \frac{dB(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)\cos(\omega x)dx \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx+\int_0^\infty xf(x)\cos(\omega x)dx=0$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}[B(\omega)+\frac{dB(\omega)}{d\omega}]=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dB(\omega)}{B(\omega)}=-d\omega \quad \Rightarrow \quad B(\omega)=ce^{-\omega}$$
$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega \quad \Rightarrow \quad f(x)=c\int_0^\infty e^{-\omega}\sin(\omega x)\,d\omega$$
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{cx}{1+x^2} \\ f(1)=1 \quad \Rightarrow \quad C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

مدار:

۱- گزینه۲ صحیح است.



$$KVL: ۲i = -۳v + ۱(i_s - i) + ۴(i_s + i) \Rightarrow$$

$$-i = -۳v + ۵is \quad \text{معادله(۱)}$$

$$KVL:\ v = ۵is + ۲i \quad \text{معادله(۲)}$$

$$-i = -۳(۵is + ۲i) + ۵is \Rightarrow ۵i = -۱۰i_S \Rightarrow i = -۲i_S \quad \text{معادلات(۱) و(۲) :}$$

$$V = ۵i_S + ۲i = ۵i_S - ۴i_S = i_S$$

$$P(t) = ۳v(i - i_S) = ۳i_S(۳i_S) = ۹i_S^۲$$

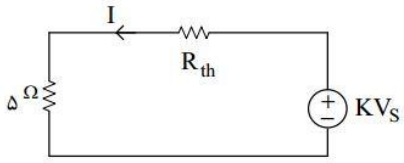
$$P(t) = ۹(۱ + \frac{۲}{۳}\cos t)^۲ = ۹(۱ + \frac{۴}{۹}\cos^۲ t + \frac{۴}{۳}\cos t)$$

$$P = \overline{P(t)} = ۹(۱ + \frac{۲}{۹} + ۰) = ۱۱w$$

لذا منبع وابسته یک عنصر تولید کننده توان است.

۲- جواب گزینه۴ صحیح است.

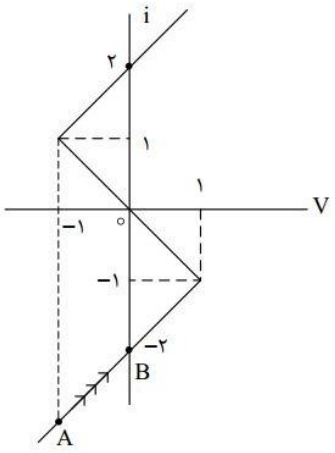
ابتدا از دید مقاومت ۵Ω معادل تونن میبینیم.



$$\text{درصد تعادل ارسالی به } ۵\Omega \Rightarrow \frac{\text{توان } ۵\Omega}{\text{توان منبع}} = \frac{۵I^۲}{KV_sI} = \frac{۵I}{KV_s} = \frac{۵}{KV_s} \cdot \frac{KV_s}{۵ + R_{th}} = \frac{۵}{۵ + R_{th}}$$

لذا در صد توان خروجی مستقل از منبع ولتاژ است و به مقدار مقاومت و شبکه N وابسته است.

۳- گزینه۲ صحیح است.



از نقطه A به B داریم:

$$i = v - ۲$$
$$i = -c\frac{dV}{dt} = V - ۲$$
$$\frac{dV}{dt} = ۲ - V \Rightarrow \frac{dV}{۲-V} = H \Rightarrow LnV - ۲ = -t + c$$
$$V - ۲ = ce^{-t} \Rightarrow V = ۲ + ce^{-t}$$
$$V(۰) = -۱ \Rightarrow -۱ = ۲ + c \Rightarrow c = -۳$$
$$V(t) = ۲ - ۳e^{-t} \Rightarrow V(t) = ۰ \Rightarrow ۲ - ۳e^{-t} = ۰ \Rightarrow t = Ln\frac{۳}{۲}s$$

کنترل:

۱-گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از جمع آثار خروجی را بر حسب $T_۱$ $T_۲$ بدست می آوریم:

$$C(s) = \frac{\frac{k_۲}{s+۱}\cdot\frac{۱}{s}}{۱+\frac{k_۱}{s+۱۰}\frac{k_۲}{s+۱}}T_۱(s) + \frac{۱}{۱+\frac{k_۱}{s+۱۰}\frac{k_۲}{s+۱}}T_۲(s)$$
$$= G_{T_۱}(s)T_۱(s) + G_{T_۲}(s)T_۲(s)$$
$$G_{T_۱}(s) = \frac{k_۲(s+۱۰)}{s((s+۱۰)(s+۱)+k_۱k_۲)}\ ,\ G_{T_۲}(s) = \frac{(s+۱۰)(s+۱)}{(s+۱۰)(s+۱)+k_۲k_۱}$$

برای کاهش اثر $T_۱$ باید $G_{T_۱}(s)$ کم شود پس باید $k_۲$ کوچک باشد. برای کاهش اثر $T_۲$ باید $G_{T_۲}(s)$ کم شود پس باید $k_۲k_۱$ بزرگ شود.

۲ - گزینه ۴ صحیح است .

تابع تبدیل حلقه سیستم بصورت زیر است :

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k}{\tau s+1}}{1+\frac{kh}{\tau s+1}}=\frac{k}{\tau s+(1+kh)}$$

با استفاده از این تابع تبدیل حساسیت را نسبت به τ بدست می آوریم :

$$S_{\tau}^{T(s)}=\frac{\partial T(s)}{\partial \tau}\frac{\tau}{T(s)}=\frac{-sk}{(\tau s+(1+kh))^{2}}\frac{\tau}{\frac{k}{\tau s+(1+kh)}}=\frac{-s\tau}{\tau s+(1+kh)}$$

اگر $s\to\infty$ حساسیت به سمت ۱- و اگر $s\to 0$ حساسیت به سمت ۰ میل می کند . پس گزینه ۴ صحیح است .

سیگنال:

۱-گزینه ۴ صحیح است.

ضابطه ورودی – خروجی این سیستم را می توان بصورت زیر نوشت:

$$y(t)=x(t)-|y(t-1)|$$

چون سیستم همگن نمی باشد پس خطی نیست.

$$y_1(t)=y_2(t) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_1(t-1)|=|y_2(t-1)| \\ x_1(t)-|y_1(t-1)|=x_2(t)-|y_2(t-1)| \end{cases}\Rightarrow$$

معکوس پذیر $x_1(t)=x_2(t)\Rightarrow$

۲-گزینه ۴ صحیح است.

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$y(t)=\delta(t-2\tau)=\frac{1}{2}\delta(\frac{t}{2}-\tau) \quad\Rightarrow\quad y(t)=\frac{1}{2}x(\frac{t}{2})$$

۳- گزینه ۱ صحیح است .

$$P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{2}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{-10}4dt+\int_{-10}^{10}16dt+\int_{10}^{3}36dt\right)$$

$$\Rightarrow\quad P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}(40T-80)=20$$