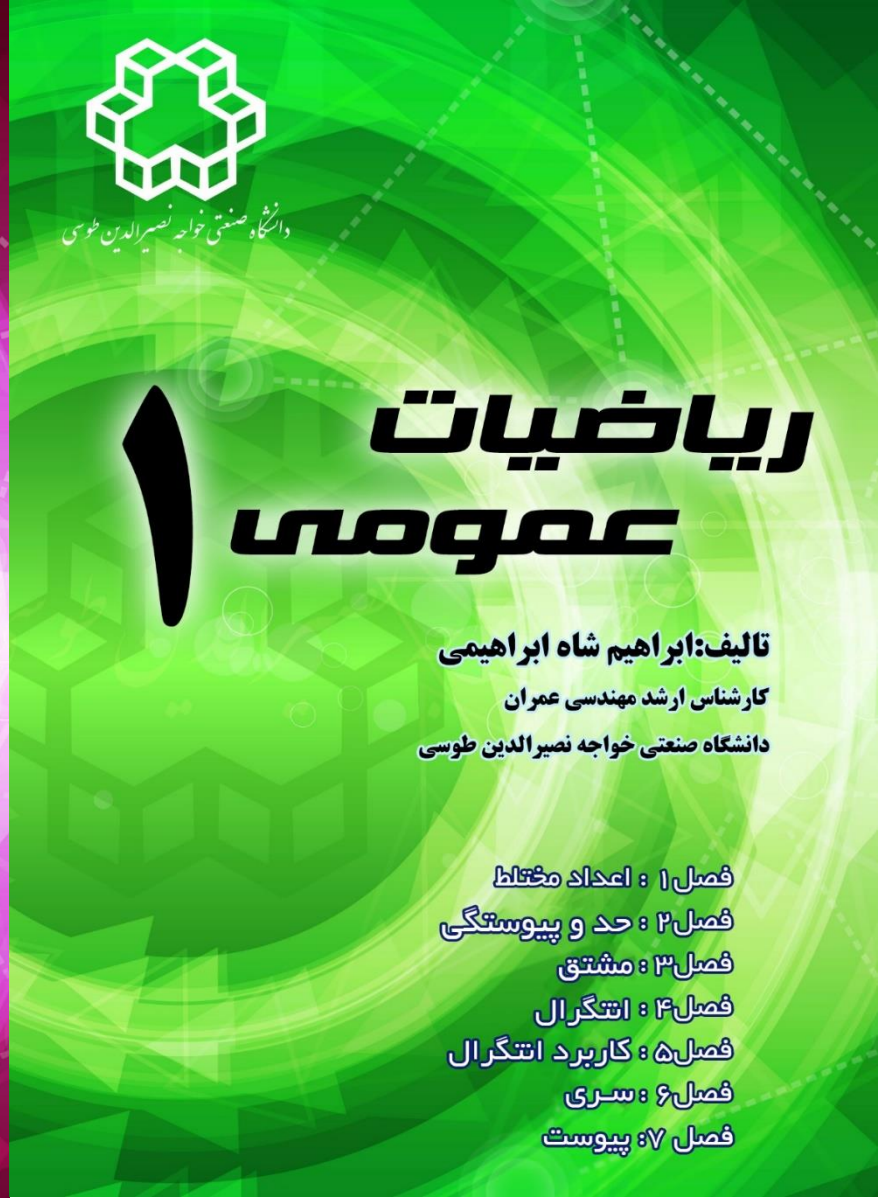
صفر تا صد انتگرال

ابراهیم شاه ابراهیمی

پاییز ۹۹



برای دریافت فایل و ویدئوهای اصلی کلاس به ایدی @EShahebrahimi در تلگرام پیام دهید .

وبسایت آموزش ریاضیات دانشگاهی به همراه نمونه سوالات با پاسخ تشریحی : EbiMath.com

$$۳)\int \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۴]{x}}dx \quad \begin{cases} x = u^{۴} \\ dx = ۴u^{۳}du \end{cases} \rightarrow \int \frac{u^{۲}}{۱+u}(۴u^{۳}du) \rightarrow ۴\int \frac{u^{۵}}{۱+u}du$$

(حل با تکنیک ۳)

$$۴)\int \frac{۱+\sqrt[۳]{x}}{۱+\sqrt{x}}dx \quad \begin{cases} x = u^{۶} \\ dx = ۶u^{۵}du \end{cases} \rightarrow \int \frac{۱+u^{۲}}{۱+u^{۳}}(۶u^{۵}du) \rightarrow ۶\int \frac{u^{۵}+u^{۷}}{۱+u^{۳}}du$$

(حل با تکنیک ۳)

$$۹)\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}} \quad \begin{cases} x = u^{۶} \\ dx = ۶u^{۵}du \end{cases} \rightarrow = \int \frac{۶u^{۵}du}{u^{۳}-u^{۲}} = ۶\int \frac{u^{۵}}{u^{۲}(u-۱)}du = ۶\int \frac{u^{۳}}{u-۱}du$$

(حل با تکنیک ۳)

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

۷ تکنیک:

۱) تغییر متغیر
- ایده کاربردی در اکثر انتگرال‌ها
- وجود یک تابع + مشتق آن در انتگرال
- ایده‌کاربردی در انتگرال‌های نپر دار

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{cases} g(x)=u \\ g'(x)dx=du \end{cases} \Rightarrow \int f(u)du$$

۲) رادیکالی: زیر رادیکال رو بزن بترکون (تغییر متغیر) زیر رادیکال $=(u)^{\text{فرجه}}$ یا ضرب کردن در مزدوج

۳) کسری
- ۱) درجه صورت > درجه مخرج ← تقسیم دبیرستان
- ۲) درجه صورت = درجه مخرج ← ایجاد مخرج در صورت + تفکیک
- ۳) درجه صورت < درجه مخرج
  - ۱) ۱ درجه ← ایجاد مشتق مخرج در صورت + تفکیک
  - ۲) ۲ درجه ← رجوع به تکنیک ۵ (مربع کامل)
  - ۳) درجات بالاتر ← رجوع به تکنیک ۴

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۵: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (کسری و تجزیه)

$$۳)\int \frac{x^۴}{x-۱}dx = \int (x^۳+x^۲+x+۱+\frac{۱}{x-۱})dx = \frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+x+\ln|x-۱|+C$$

$$۲)\int \frac{x^۵+x-۱}{x^۳+۱}dx = \int (x^۲+\frac{-x^۲+x-۱}{x^۳+۱})dx = \int (x^۲+\frac{-x^۲+x-۱}{(x+۱)(x^۲-x+۱)})dx = \int (x^۲-\frac{۱}{x+۱})dx = \frac{۱}{۳}x^۳-\ln|x+۱|+C$$

$$۱)\int \frac{x^۴+۹x^۲+x+۲}{x^۲+۹}dx = \int (x^۲+\frac{x+۲}{x^۲+۹})dx = \int (x^۲+\frac{x}{x^۲+۹}+\frac{۲}{x^۲+۹})dx = \frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۹)+\frac{۲}{۳}\tan^{-۱}\frac{x}{۳}+C$$

$$۴)\int \frac{x}{۱+x}dx = \int \frac{x+۱-۱}{۱+x}dx = \int (۱-\frac{۱}{۱+x})dx = x-\ln|۱+x|+c$$

$$۵)\int \frac{x^۲}{۱+x^۲}dx = \int \frac{x^۲+۱-۱}{۱+x^۲}dx = \int (۱-\frac{۱}{۱+x^۲})dx = x-\tan^{-۱}x+c$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

تست ۱۲) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} u^2 = x \\ 2udu = dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{2udu}{1+u} = 2\int \frac{u+1-1}{1+u}du = 2\int (1-\frac{1}{1+u})du$$

$$= 2(u - \ln|1+u|) + c$$

۱) $2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + c$

۲) $2(\sqrt{x} + \ln|1-\sqrt{x}|) + c$

۳) $2(x + \ln|1+\sqrt{x}|) + c$

۴) $2(x - \ln|1+\sqrt{x}|) + c$

تست ۱۳) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{1-u^2}{1+u^2}du = \int \frac{-(1+u^2)+2}{1+u^2}du = \int (-1+\frac{2}{1+u^2})du$$

$$= -u + 2\tan^{-1} u + c$$

۱) $-\sin x + 2\tan^{-1}(\sin x) + c$

۱) $\sin x - 2\tan^{-1}(\sin x) + c$

۱) $-2\sin x + \tan^{-1}(\sin x) + c$

۱) $2\sin x - \tan^{-1}(\sin x) + c$

تست ۱۴) $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

$$\begin{cases} u^2 = e^x - 1 \\ 2udu = e^x dx \end{cases}$$

$$= \int u(\frac{2udu}{u^2+1}) = 2\int \frac{u^2}{u^2+1}du = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = 2\int (1-\frac{1}{u^2+1})du$$

$$= 2(u - \tan^{-1} u) + c$$

۱) $2(e^x - 1 + \tan^{-1}(e^x - 1)) + c$

۲) $2(e^x - 1 - \tan^{-1}(e^x - 1)) + c$

۳) $2(\sqrt{e^x - 1} + \tan^{-1}\sqrt{e^x - 1}) + c$

۴) $2(\sqrt{e^x - 1} - \tan^{-1}\sqrt{e^x - 1}) + c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

(تست۱۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۴+\sqrt[۳]{x})}$

$$\begin{cases} u^{۶} = x \\ ۶u^{۵}du = dx \end{cases} \quad = \int \frac{۶u^{۵}du}{u^{۳}(۴+u^{۲})} \quad = ۶\int \frac{u^{۲}du}{۴+u^{۲}}$$

$$= ۶\int \frac{u^{۲}+۴-۴}{۴+u^{۲}}du \quad = ۶\int (۱-\frac{۴}{۴+u^{۲}})du$$

$$= ۶(u - ۲\tan^{-۱}(\frac{u}{۲})) + c$$

۱) $۶\sqrt[۶]{x} - ۱۲\tan^{-۱}(\frac{\sqrt[۶]{x}}{۲}) + c$

۲) $\sqrt[۶]{x} - ۲\tan^{-۱}(\frac{\sqrt[۶]{x}}{۲}) + c$

۳) $۶\sqrt[۳]{x} - ۱۲\tan^{-۱}(\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲}) + c$

۴) $۶\sqrt[۳]{x} - \tan^{-۱}(\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲}) + c$

(تست۱۶) $\int \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۴]{x}}dx$

$$\begin{cases} u^{۴} = x \\ ۴u^{۳}du = dx \end{cases} \quad = \int \frac{u^{۲}}{۱+u}۴u^{۳}du \quad = ۴\int \frac{u^{۵}}{۱+u}du \quad = ۴\int (u^{۴} - u^{۳} + u^{۲} - u + ۱ - \frac{۱}{u+۱})du$$

$$= ۴(\frac{u^{۵}}{۵} - \frac{u^{۴}}{۴} + \frac{u^{۳}}{۳} - \frac{u^{۲}}{۲} + u - \ln|u+۱|) + c$$

۱) $x^{\frac{۱}{۲}} - x^{\frac{۱}{۴}} + \ln(۱+x^{\frac{۱}{۴}})$

۲) $\frac{۴}{۵}x^{\frac{۵}{۴}} - x + \frac{۴}{۳}x^{\frac{۳}{۴}} - ۲x^{\frac{۱}{۲}} + ۴x^{\frac{۱}{۴}} - ۴\ln|۱+x^{\frac{۱}{۴}}| + c$

۳) $x^{\frac{۱}{۴}} - ۱ + \ln(۱+x^{\frac{۱}{۴}})$

۴) $\frac{۳}{۴}x^{\frac{۳}{۴}} + \ln(۱+x^{\frac{۱}{۴}})$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۵: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (کسری و تجزیه)

$$۱)\int \frac{۱}{x^۲+۲x+۵}dx = \int \frac{۱}{(x+۱)^۲+۴}dx = \int \frac{۱}{u^۲+۴}du = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{u}{۲}) = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{x+۱}{۲})$$

$$۲)\int \frac{۱}{x^۲+۲x-۳}dx = \int \frac{۱}{(x+۱)^۲-۴}dx = \int \frac{۱}{u^۲-۴}du = \frac{۱}{۲\times ۲}\ln\left|\frac{u-۲}{u+۲}\right| = \frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۳}\right|$$

$$۱۷)\int \frac{x+۱}{x^۲+۴x+۸}dx \xrightarrow{\text{ایجاد مشتق مخرج در صورت}} \int \frac{\frac{۱}{۲}(۲x+۴)-۱}{x^۲+۴x+۸}dx \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{\frac{۱}{۲}\int \frac{۲x+۴}{x^۲+۴x+۸}dx}_{I_۱} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^۲+۴x+۸}}_{I_۲}$$

$$I_۲ \xrightarrow{\text{مربع کامل}} \int \frac{dx}{(x+۲)^۲+۴} \begin{cases} x+۲=u \\ dx=du \end{cases}$$

$$= \frac{۱}{۲}Ln(x^۲+۴x+۸) - \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{(x+۲)}{۲}+c$$

تمرین

$$۱)\int \frac{x^۳}{x^۲+۲x+۵}dx$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

کلاس آنلاین صفر تا صد انتگرال
مهندس شاه ابراهیمی
EbiMath.com

(تست۱۷) $\int \frac{dx}{x(\ln^{۲} x+\ln x+۱)}$ $\begin{cases}\ln x=u\\ \frac{۱}{x}dx=du\end{cases}$ $=\int \frac{du}{u^{۲}+u+۱}=\int \frac{du}{(u+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}}$

$=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{u+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})+c=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{۲u+۱}{\sqrt{۳}})+c$

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{\ln x^{۲}+۱}{\sqrt{۳}})+c$ ۳) $\tan^{-۱}(\frac{\ln x^{۲}+۱}{\sqrt{۳}})+c$

۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{\ln x+۱}{\sqrt{۳}})+c$ ۴) $\tan^{-۱}(\frac{\ln x+۱}{\sqrt{۳}})+c$

(تست۱۸) $\int \frac{e^{x}dx}{e^{۲x}+۵e^{x}+۶}$ $\begin{cases}e^{x}=u\\ e^{x}dx=du\end{cases}$ $=\int \frac{du}{u^{۲}+۵u+۶}=\int \frac{du}{(u+\frac{۵}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۲}}\ln\left|\frac{u+\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}}{u+\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}}\right|+c=\ln\left|\frac{u+۲}{u+۳}\right|+c$

۱) $\ln\left|\frac{e^{x}-۲}{e^{x}-۳}\right|+c$ ۲) $\ln\left|\frac{e^{x}+۲}{e^{x}+۳}\right|+c$ ۳) $\ln\left|\frac{e^{x}-۳}{e^{x}-۲}\right|+c$ ۴) $\ln\left|\frac{e^{x}+۳}{e^{x}+۲}\right|+c$

(تست۱۹) $\int \frac{dx}{۲\sqrt{x+۳}+x}$ $\begin{cases}u^{۲}=x+۳\\ ۲udu=dx\end{cases}$ $\rightarrow=\int \frac{۲udu}{۲u+(u^{۲}-۳)}=\int \frac{۲u}{u^{۲}+۲u-۳}du=\int \frac{۲u+۲-۲}{u^{۲}+۲u-۳}du$

$=\int \frac{۲u+۲}{u^{۲}+۲u-۳}du-۲\int \frac{du}{u^{۲}+۲u-۳}=\ln\left|u^{۲}+۲u-۳\right|-۲\int \frac{du}{(u+۱)^{۲}-۴}$

$\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{u+۱-۲}{u+۱+۲}\right|=\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{u-۱}{u+۳}\right|$

۱) $\frac{۱}{۲}\ln\left|(\sqrt{x+۳}-۱)(\sqrt{x+۳}+۳)^{۳}\right|+c$

۲) $\frac{۱}{۲}\ln\left|(\sqrt{x+۳}+۱)(\sqrt{x+۳}-۳)^{۳}\right|+c$

۳) $\frac{۱}{۲}\ln\left|(\sqrt{x+۳}-۱)^{۳}(\sqrt{x+۳}+۳)\right|+c$

۴) $\frac{۱}{۲}\ln\left|(\sqrt{x+۳}+۱)^{۳}(\sqrt{x+۳}-۳)\right|+c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

۷ تکنیک:

۱) تغییر متغیر

ایده کاربردی در اکثر انتگرال‌ها

وجود یک تابع + مشتق آن در انتگرال

ایده‌کاربردی در انتگرال‌های نپر دار

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{cases} g(x) = u \\ g'(x)dx = du \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(u)du$$

۲) رادیکالی:

زیر رادیکال رو بزن بترکون (تغییر متغیر) زیر رادیکال $= (u)^{\text{فرجه}}$ یا ضرب کردن در مزدوج

۳) کسری

۱) درجه صورت > درجه مخرج ← تقسیم دبیرستان

۲) درجه صورت = درجه مخرج ← ایجاد مخرج در صورت + تفکیک

۳) درجه صورت < درجه مخرج

- ۱) ۱ درجه ← ایجاد مشتق مخرج در صورت + تفکیک
- ۲) ۲ درجه ← رجوع به تکنیک ۵ **(مربع کامل)**
- ۳) درجات بالاتر ← رجوع به تکنیک ۴

٤) تجزیه کسری

۱) وجود عامل $(x+a)^n$

$$\frac{A}{(x+a)^n} + \frac{B}{(x+a)^{n-1}} + \ldots + \frac{Z}{(x+a)^1} \xleftarrow{\text{تجزیه}}$$

۲) وجود عامل $(ax^2+bx+C)^n$

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+C)^n} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \ldots + \frac{Zx+Y}{(ax^2+bx+C)^1} \xleftarrow{\text{تجزیه}}$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۵: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (کسری و تجزیه)

$$۶)\int \frac{۱-x}{x^۳+x^۴}dx = \int \frac{۱-x}{x^۳(۱+x)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x^۲}dx + \int \frac{C}{x^۳}dx + \int \frac{D}{۱+x}dx$$

$$= -2\ln(|x+1|) + 2\ln(|x|) + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$۷)\int \frac{۱}{x^۲+x^۴}dx = \int \frac{۱}{x^۲(۱+x^۲)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x^۲}dx + \int \frac{Cx+D}{۱+x^۲}dx = -\arctan(x) - \frac{1}{x} + C$$

$$۱۴)\int \frac{۱۰}{(x-۱)(x^۲+۹)}dx = \int (\frac{۱}{x-۱} + \frac{-x-۱}{x^۲+۹})dx = \int (\frac{۱}{x-۱} - \frac{x}{x^۲+۹} - \frac{۱}{x^۲+۹})dx$$

$$\frac{۱۰}{(x-۱)(x^۲+۹)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{Bx+C}{x^۲+۹} \begin{cases} A=۱ \\ B=-۱ \\ C=-۱ \end{cases}$$

$$= \ln|x-۱| - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۹) - \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}) + C$$

$$۱۵)\int \frac{x^۲-x+۶}{x^۳+۳x}dx = \frac{x^۲-x+۶}{x^۳+۳x} = \frac{x^۲-x+۶}{x(x^۲+۳)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^۲+۳} \begin{cases} A=۲ \\ B=-۱ \\ C=-۱ \end{cases}$$

$$= \int (\frac{۲}{x} + \frac{-x-۱}{x^۲+۳})dx$$

$$= \int (\frac{۲}{x} - \frac{x}{x^۲+۳} - \frac{۱}{x^۲+۳})dx = ۲\ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۳) - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۳}}) + C$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

(تست۲۰) $\int \frac{dx}{x^۲+x\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} u^۲=x \\ ۲udu=dx \end{cases} \rightarrow = \int \frac{۲udu}{u^۴+u^۳} = \int \frac{۲du}{u^۳+u^۲} = ۲\int \frac{du}{u^۲(u+۱)}$$

۱) $-\frac{۲}{\sqrt{x}}+۲\ln\left|\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}}\right|+c$

۲) $-\frac{۲}{\sqrt{x}}+\ln\left|\frac{x}{(\sqrt{x}+۱)^۳}\right|+c$

۲) $\frac{۲}{x}+\ln\left|\frac{x}{(\sqrt{x}+۱)}\right|+c$

۲) $-\frac{۲}{\sqrt{x}}+\ln\left|\frac{x^۲}{(\sqrt{x}+۱)}\right|+c$

$$\frac{۱}{u^۲(u+۱)} = \frac{A}{u^۲}+\frac{B}{u}+\frac{C}{u+۱}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[u=۰]{\times u^۲} \frac{u^۲}{u^۲(u+۱)} = \frac{Au^۲}{u^۲}+\frac{Bu^۲}{u}+\frac{Cu^۲}{u+۱} \rightarrow ۱=A \\ \xrightarrow[u=-۱]{\times(u+۱)} \frac{(u+۱)}{u^۲(u+۱)} = \frac{A(u+۱)}{u^۲}+\frac{B(u+۱)}{u}+\frac{C(u+۱)}{u+۱} \rightarrow ۱=C \\ \xrightarrow{u=۱} \frac{۱}{۲}=A+B+\frac{C}{۲} \xrightarrow{A=C=۱} \frac{۱}{۲}=B+\frac{۳}{۲} \rightarrow B=-۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow = ۲\left(\int \frac{۱}{u^۲}du - \int \frac{۱}{u}du + \int \frac{۱}{u+۱}du\right) = ۲\left(-\frac{۱}{u}-\ln|u|+\ln|u+۱|\right)+c$$

(تست۲۱) $\int \frac{dx}{x^۳+x} = \int \frac{dx}{x(x^۲+۱)}$

۱) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}\right|+c$

۳) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}\right|+c$

۲) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right|+c$

۴) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}\right|+c$

$$\frac{۱}{x(x^۲+۱)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^۲+۱}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[x=۰]{\times x} \frac{x}{x(x^۲+۱)} = \frac{Ax}{x}+\frac{(Bx+C)x}{x^۲+۱} \rightarrow ۱=A \\ \xrightarrow[x\to\infty]{\times x} \frac{x}{x(x^۲+۱)} = \frac{Ax}{x}+\frac{(Bx+C)x}{x^۲+۱} \rightarrow ۰=A+B \rightarrow B=-۱ \\ \xrightarrow{x=۱} \frac{۱}{۲}=A+\frac{B+C}{۲} \xrightarrow{A=۱,B=-۱} \frac{۱}{۲}=۱+\frac{-۱+C}{۲} \rightarrow C=۰ \end{cases}$$

$$= \int \frac{۱}{x}dx - \int \frac{x}{x^۲+۱}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln|x^۲+۱|+c$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

تست۲۴) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = (\frac{1}{b-a})(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b})$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = (\frac{1}{2a})(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + c$$

۱) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

۲) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$

۳) $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

۴) $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

۷ تکنیک:

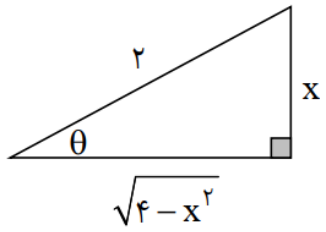
۵) تغییر متغیر مثلثاتی

$x^2 + a^2$	$\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$	$x = a\tan\theta$	$(dx = a\sec^2\theta d\theta)$
$x^2 - a^2$	$\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$	$x = a\sec\theta$	$(dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta)$
$a^2 - x^2$	$\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$	$x = a\sin\theta$	$(dx = a\cos\theta d\theta)$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\text{۱)}\int \frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}} \quad \begin{cases} x = ۲\sin\theta \\ dx = ۲\cos\theta d\theta \end{cases} \quad \sqrt{۴-x^{۲}} = \sqrt{۴-۴\sin^{۲}\theta} = \sqrt{۴\cos^{۲}\theta} = ۲|\cos\theta| = ۲\cos\theta.$$

$$= \int \frac{۲\cos\theta}{۴\sin^{۲}\theta(۲\cos\theta)} d\theta = \frac{۱}{۴}\int \csc^{۲}\theta d\theta = -\frac{۱}{۴}\cot\theta + C$$



$$= -\frac{\sqrt{۴-x^{۲}}}{۴x} + C$$

$$x = a\sin\theta \xleftarrow{\text{تغییر متغیر}} a^{۲}-x^{۲}$$

۱) $-\frac{\sqrt{۴-x^{۲}}}{۴x}+c$

۲) $-\frac{۴x}{\sqrt{۴-x^{۲}}}+c$

۳) $-x\sqrt{۴-x^{۲}}+c$

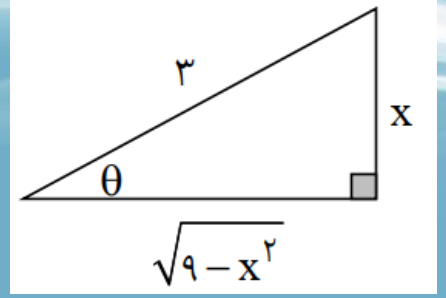
۴) $x\sqrt{۴-x^{۲}}+c$

$$\text{۲)}\int \frac{x^{۲}}{\sqrt{۹-x^{۲}}}dx \quad \begin{cases} x = ۳\sin\theta \\ dx = ۳\cos\theta d\theta \end{cases} \quad \to \sqrt{۹-x^{۲}} = \sqrt{۹-۹\sin^{۲}\theta} = \sqrt{۹\cos^{۲}\theta} = ۳|\cos\theta| = ۳\cos\theta.$$

$$= \int \frac{۹\sin^{۲}\theta}{۳\cos\theta} ۳\cos\theta\, d\theta = ۹\int \sin^{۲}\theta\, d\theta$$

$$\text{۱)}\sin^{۲}x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \qquad \cos^{۲}x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

$$= ۹\int \frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)d\theta = \frac{۹}{۲}(\theta - \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta) + C = \frac{۹}{۲}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$



$$= \frac{۹}{۲}(\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}) - \frac{x}{۳}.\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{۳}) + C$$

۱) $\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}) - \sqrt{۹-x^{۲}}+c$

۲) $\frac{۹}{۲}\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}) - \frac{۱}{۲}x+c$

۳) $\frac{۱}{۲}(۹\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}) - x\sqrt{۹-x^{۲}})+c$

۴) $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}) - x+c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

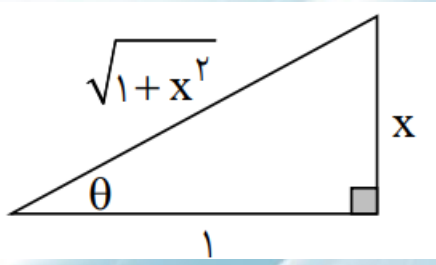
$$x^2+a^2 \xleftarrow{\text{تغییر متغیر}} x=a\tan\theta$$

۳) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ $\begin{cases} x=\tan\theta \\ dx=\sec^2\theta d\theta \end{cases}$ $\rightarrow \sqrt{1+x^2}=\sec\theta$

$$=\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int (\csc\theta+\sec\theta\tan\theta)d\theta = \ln|\csc\theta-\cot\theta|+\sec\theta+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}+C$$



۱) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$

۲) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}\right|+\sqrt{1+x^2}+c$

۳) $\ln\left|\sqrt{1+x^2}-1\right|+\sqrt{1+x^2}+c$

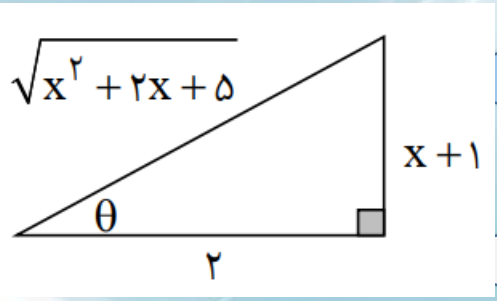
۴) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+\sqrt{1+x^2}+c$

---

۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ $=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$ $\begin{cases} x+1=2\tan\theta \\ dx=2\sec^2\theta d\theta \end{cases}$ $=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}}$ $=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{2\sec\theta}$ $=\int \sec\theta\, d\theta$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}+\frac{x+1}{2}\right|+C_1$$



۱) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right|+c$

۲) $-\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right|+c$

۴) $\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$

۳) $-\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

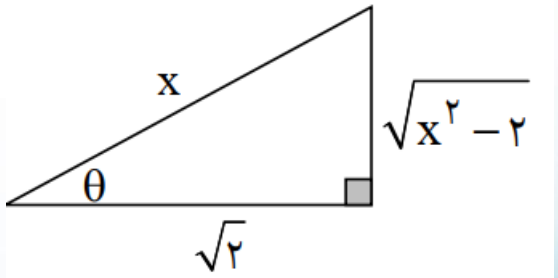
$$۵)\int \frac{dx}{x^{۴}\sqrt{x^{۲}-۲}}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{۲}\sec\theta \\ dx=\sqrt{۲}\sec\theta\tan\theta d\theta \end{cases} \rightarrow = \int \frac{\sqrt{۲}\sec\theta\tan\theta d\theta}{۴\sec^{۴}\theta\sqrt{۲}\tan\theta} = \frac{۱}{۴}\int \cos^{۳}\theta d\theta$$

$$= \frac{۱}{۴}\int (۱-\sin^{۲}\theta)\cos\theta d\theta \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} u=\sin\theta \\ du=\cos\theta d\theta \end{cases}$$

تغییر متغیر $x=a\sec\theta \leftarrow$ $x^{۲}-a^{۲}$

$$= \frac{۱}{۴}[\sin\theta - \frac{۱}{۳}\sin^{۳}\theta]+C$$



$$= \frac{۱}{۴}[\frac{\sqrt{x^{۲}-۲}}{x} - \frac{(x^{۲}-۲)^{۳/۲}}{۳x^{۳}}]+C$$

۱) $\frac{۱}{۴}(\frac{\sqrt{x^{۲}-۲}}{x} - \frac{x^{۲}-۲}{۳x^{۲}})+c$

۲) $(\frac{\sqrt{x}}{۲}(۱-\frac{x^{۲}-۲}{۳x^{۲}}))+c$

۳) $\frac{۱}{۴}(\frac{\sqrt{۲}}{x}(۱-\frac{x^{۲}-۲}{۳x^{۲}}))+c$

۴) $\frac{۱}{۴}(\frac{\sqrt{x^{۲}-۲}}{x}(۱-\frac{x^{۲}-۲}{۳x^{۲}}))+c$

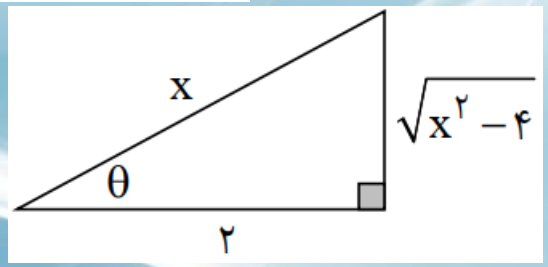
$$۶)\int \frac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{x}dx$$

$$\begin{cases} x=۲\sec\theta \\ dx=۲\sec\theta\tan\theta d\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{x^{۲}-۴} = \sqrt{۴\sec^{۲}\theta-۴} = \sqrt{۴(\sec^{۲}\theta-۱)} = \sqrt{۴\tan^{۲}\theta} = ۲|\tan\theta| = ۲\tan\theta$$

$$= \int \frac{۲\tan\theta}{۲\sec\theta}۲\sec\theta\tan\theta d\theta = ۲\int \tan^{۲}\theta d\theta = ۲\int (\sec^{۲}\theta-۱)d\theta = ۲(\tan\theta-\theta)+C$$

$$= ۲[\frac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{۲} - \sec^{-۱}(\frac{x}{۲})]+C$$



۱) $\sqrt{x^{۲}-۴} - \frac{۱}{۲}\sec^{-۱}\frac{x}{۲}+c$

۲) $۲\sqrt{x^{۲}-۴} - \sec^{-۱}\frac{x}{۲}+c$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{x^{۲}-۴}} - \frac{۱}{۲}\sec^{-۱}\frac{x}{۲}+c$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۴}} - ۲\sec^{-۱}\frac{x}{۲}+c$

کلاس آنلاین صفر تا صد انتگرال
مهندس شاه ابراهیمی
EbiMath.com

تست۷) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ $\begin{cases} x = a\tan\theta \\ dx = a\sec^2\theta d\theta \end{cases}$ $= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c$ $= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

۱) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ ۲) $a\tan^{-1}x+c$ ۳) $\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ ۴) $a\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

تست۸) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta d\theta \end{cases}$ $= \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}x + c$

۱) $\sin^{-1}x+c$ ۲) $\sinh^{-1}x+c$ ۳) $\sec^{-1}x+c$ ۴) $\sec h^{-1}x+c$

تست۹) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ $\begin{cases} x = \sec\theta \\ dx = \sec\theta\tan\theta d\theta \end{cases}$ $= \int \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \int d\theta = \theta + c = \sec^{-1}x + c$

۱) $\sin^{-1}x+c$ ۲) $\sinh^{-1}x+c$ ۳) $\sec^{-1}x+c$ ۴) $\sec h^{-1}x+c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

تست۱۰) $\int \frac{dx}{\sqrt{۴x-x^۲}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-۲)^۲+۴}}$ $\begin{cases} x-۲=۲\sin\theta \\ dx=۲\cos\theta d\theta \end{cases}$ $= \int \frac{۲\cos\theta d\theta}{\sqrt{۴-۴\sin^۲\theta}} = \int d\theta$

$= \theta + c$

$= \sin^{-۱}\frac{x-۲}{۲} + c$

۱) $\sin^{-۱}\frac{x-۲}{۲}+c$

۲) $\sinh^{-۱}\frac{x-۲}{۲}+c$

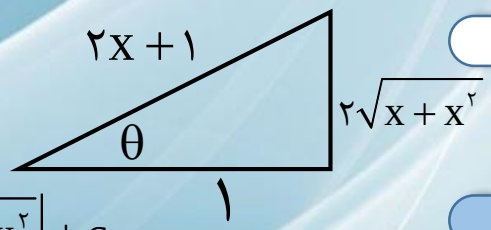
۳) $\sec^{-۱}\frac{x-۲}{۲}+c$

۴) $\sec h^{-۱}\frac{x-۲}{۲}+c$

تست۱۱) $\int \frac{۱}{\sqrt{x+x^۲}}dx = \int \frac{۱}{\sqrt{(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}}}dx$ $\begin{cases} x+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sec\theta \\ dx=\frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta d\theta \end{cases}$ $= \int \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}\sec^۲\theta-\frac{۱}{۴}}}(\frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta d\theta)$

$= \int \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\tan\theta}(\frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta d\theta) = \int \sec\theta d\theta$

$= \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c = \ln|۲x+۱+۲\sqrt{x+x^۲}|+c$



۱) $\ln|۲\sqrt{x+x^۲}|+c$

۲) $\ln|۲x+۱+۲\sqrt{x+x^۲}|+c$

۳) $-\ln|۲\sqrt{x+x^۲}|+c$

۴) $\ln|۲x+۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+x^۲}}|+c$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

۷ تکنیک:

۵) تغییر متغیر مثلثاتی

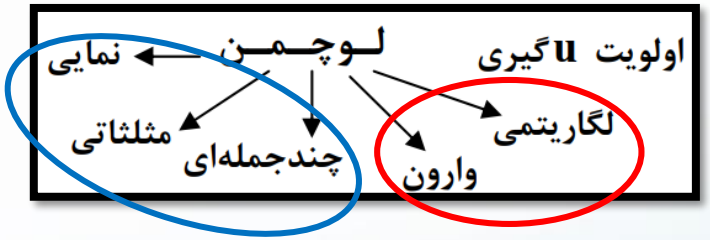
x^2+a^2	تغییر متغیر $\leftarrow$	$x=a\tan\theta$	$(dx=a\sec^2\theta d\theta)$
x^2-a^2	تغییر متغیر $\leftarrow$	$x=a\sec\theta$	$(dx=a\sec\theta\tan\theta d\theta)$
a^2-x^2	تغییر متغیر $\leftarrow$	$x=a\sin\theta$	$(dx=a\cos\theta d\theta)$

۶) جزبه‌جز:

$$\int u.dv = uv - \int vdu$$

$$(uv)' = u'v + v'u \xrightarrow{\int} uv = \int vdu + \int udv$$

انتگرال‌گیری از عبارات حاصلضرب (چند جمله‌ای در نمایی، نمایی در مثلثاتی، چندجمله‌ای در مثلثاتی، توابع معکوس، لگاریتمی و ...)



مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

کلاس آنلاین صفر تا صد انتگرال
مهندس شاه ابراهیمی
EbiMath.com

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$۱۲)\int x\ln x \quad \begin{cases} u=\ln x \xrightarrow{(\,)'} du=\frac{۱}{x}dx \\ dv=xdx \xrightarrow{\int} v=\frac{۱}{۲}x^{۲} \end{cases} \xrightarrow{uv-\int vdu} =\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{۱}{۲}\int x^{۲}.\frac{۱}{x}dx$$

$$=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{x^{۲}}{۴}+c$$

۱) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x-\frac{x^{۲}}{۲}+c$

۱) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x+\frac{x^{۲}}{۲}+c$

۲) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x-\frac{x^{۲}}{۴}+c$

۱) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x+\frac{x^{۲}}{۴}+c$

$$۱۳)\int \ln x dx \quad \begin{cases} \ln x=u \to \frac{dx}{x}=du \\ dx=dv \to x=v \end{cases} \xrightarrow{uv-\int vdu} =x\ln x-\int x.\frac{dx}{x} \quad =x\ln x-x$$

۱) $x\ln x+x+c$

۲) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x-\frac{x^{۲}}{۴}+c$

۳) $\frac{x^{۲}}{۲}\ln x-\frac{x^{۲}}{۴}+c$

۴) $x\ln x-x+c$

$$۱۴)\int (\ln x)^{۲}dx \quad \begin{cases} u=(\ln x)^{۲} \xrightarrow{(\,)'} du=۲\ln x.\frac{۱}{x}dx \\ dv=dx \xrightarrow{\int} v=x \end{cases} \xrightarrow{uv-\int vdu} =x(\ln x)^{۲}-۲\int x\ln x.\frac{۱}{x}dx$$

$$=x(\ln x)^{۲}-۲\underbrace{\int \ln x dx}_{I_۱}$$

۱) $x(\ln x)^{۲}-۲x\ln x-۲x+c$

۲) $x(\ln x)^{۲}-۲x+c$

۳) $x^{۲}\ln x-۲x\ln x-۲x+c$

۴) $x\ln x-۲x+c$

$$\Rightarrow \int (\ln x)^{۲}dx=x(\ln x)^{۲}-۲(x\ln x-x+c_۱)$$

کلاس آنلاین صفر تا صد انتگرال
مهندس شاه ابراهیمی
EbiMath.com

$$۱۵)\int \tan^{-۱} x\,dx \quad \begin{cases} u=\tan^{-۱} x \to du=\frac{۱}{۱+x^۲}dx \\ dv=dx \to v=x \end{cases} \xrightarrow{uv-\int vdu}$$

$$=x\tan^{-۱} x-\int \frac{x}{۱+x^۲}dx \quad =x\tan^{-۱} x-\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)+c$$

۱) $۲x\tan^{-۱} x-\ln(\sqrt{۱+x^۲})+c$

۲) $x\tan^{-۱} x-\ln(۱+x^۲)+c$

۳) $x\tan^{-۱} x-\ln(\sqrt{۱+x^۲})+c$

۴) $۲\tan^{-۱} x-\ln(۱+x^۲)+c$

$$۱۶)\int \sin^{-۱} x\,dx \quad \begin{cases} u=\sin^{-۱} x \to du=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx \\ dv=dx \to v=x \end{cases} \xrightarrow{uv-\int vdu}$$

$$=x\sin^{-۱} x-\int \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$=x\sin^{-۱} x+\sqrt{۱-x^۲}+c$$

۱) $x\sin^{-۱} x+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-x^۲}+c$

۲) $x\sin^{-۱} x+\ln\left|\sqrt{۱-x^۲}\right|+c$

۳) $x\sin^{-۱} x+\ln\left|۱-x^۲\right|+c$

۴) $x\sin^{-۱} x+\sqrt{۱-x^۲}+c$

روش سریع

چندجمله ای × نمایی

چندجمله ای × مثلثاتی

نمایی × مثلثاتی

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

x	e^x	+
1	e^x	−
0	e^x	

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + c$$

x	$\sin x$	+
1	$-\cos x$	−
0	$-\sin x$	

$$\int x^2 e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

x^2	e^x	+
$2x$	e^x	−
2	e^x	+
0	e^x	

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

x^2	$\cos x$	+
$2x$	$-\cos x$	−
2	$-\sin x$	+
0	$\cos x$	

$$\int e^x \sin x dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\rightarrow 2\int e^x \sin x dx = -e^x\cos x + e^x\sin x$$

$$\rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{-e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + c$$

e^x	$\cos x$	+
e^x	$-\cos x$	−
e^x	$-\sin x$	+
	$\int$	

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

۷ تکنیک:

۱) $\sin^m .\cos^n$

۱) حداقل یکی فرد: تبدیل عبارت دارای توان فرد به دیگری — تنها بکنش

۲) جفت زوج: روابط کاربردی $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ — بشکن

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

۳) جفت منفی: قرار دادن عبارت $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲) $\sec^m .tg^n$ یا $(\csc^m .\cot^n)$

۱) sec زوج ← تغییر متغیر $u = \tan u$ و تبدیل secها به tan

۲) sec فرد ← همه تبدیل به sec و رجوع به تکنیک ۶

۳) هر دو فرد ← تغییر متغیر $u = \sec x$

۷) مثلثاتی

۳) $\frac{a}{b\sin x + c\cos x + d}$ ← تغییر متغیر $Z = tg(\frac{x}{2})$

$dx = \frac{2dZ}{1+Z^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$ $\quad \sin x = \frac{2Z}{1+Z^2}$

۴) $\frac{a}{b\sin^2 x + c\cos^2 x}$ ← ایده: همه عبارات صورت و مخرج تقسیم بر $\cos^2 x$ استفاده از تغییر متغیر $u = \tan x$

۵) $\frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$ مشابه کسری ایجاد خود مخرج و مشتق مخرج در صورت

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۷: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (مثلثاتی)

۱) $\int \sin^{۲}x \cos^{۳}x\,dx = \int \sin^{۲}x \cos^{۲}x \cos x\,dx = \int \sin^{۲}x (۱-\sin^{۲}x)\cos x\,dx \overset{s}{=} \int u^{۲}(۱-u^{۲})du$

$= \int (u^{۲}-u^{۴})du = \frac{۱}{۳}u^{۳} - \frac{۱}{۵}u^{۵} + C = \frac{۱}{۳}\sin^{۳}x - \frac{۱}{۵}\sin^{۵}x + C$

۲) $\int \sin^{۳}\theta \cos^{۴}\theta\,d\theta = \int \sin^{۲}\theta \cos^{۴}\theta \sin\theta\,d\theta = \int (۱-\cos^{۲}\theta)\cos^{۴}\theta \sin\theta\,d\theta \overset{c}{=} \int (۱-u^{۲})u^{۴}(-du)$

$= \int (u^{۶}-u^{۴})du = \frac{۱}{۷}u^{۷} - \frac{۱}{۵}u^{۵} + C = \frac{۱}{۷}\cos^{۷}\theta - \frac{۱}{۵}\cos^{۵}\theta + C$

۴) $\int \sin^{۵}x\,dx = \int \sin^{۴}x \sin x\,dx = \int (۱-\cos^{۲}x)^{۲}\sin x\,dx \overset{c}{=} \int (۱-u^{۲})^{۲}(-du)$

$= \int (-۱+۲u^{۲}-u^{۴})du = -u + \frac{۲}{۳}u^{۳} - \frac{۱}{۵}u^{۵} + C = -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \cos(x) + C$

فرد تنها بکنش

مهندس شاه ابراهیمی EbiMath.com

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۷: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (مثلثاتی)

$$۱)\ \sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \qquad \cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

بشکن

$$\int \cos^۲ x\,dx = \int \left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)dx = \frac{۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x\right) + c$$

بشکن

$$\int \sin^۴ x\,dx = \int (\sin^۲ x)^۲\,dx = \int \left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)^۲ dx = \frac{۱}{۴}\int (۱ - ۲\cos ۲x + \cos^۲ ۲x)\,dx = \frac{۱}{۴}\left(x - \sin ۲x + \frac{۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{۴}\sin ۴x\right)\right) + c$$

بشکن

$$\frac{۱+\cos ۴x}{۲}$$

بشکن بشکن

$$\int \sin^۲ x \cos^۲ x\,dx = \int \left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)\left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)dx = \frac{۱}{۴}\int (۱ - \cos^۲ ۲x)\,dx = \frac{۱}{۴}\int \left(۱ - \left(\frac{۱+\cos ۴x}{۲}\right)\right)dx = \frac{۱}{۴}\left(x - \frac{۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{۴}\sin ۴x\right)\right) + c$$

بشکن بشکن

$$\int \sin^۲ x \cos^۴ x\,dx = \int \left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)\left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)^۲ dx = \frac{۱}{۴}\int (۱ - \cos^۲ ۲x)\left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)dx$$

بشکن

$$= \frac{۱}{۸}\int (۱ + \cos ۲x - \cos^۲ ۲x - \cos^۲ ۲x \cos ۲x)\,dx$$

زوج بشکن

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۷: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (مثلثاتی)

$$\int \tan x \sec^{۳} x\,dx = \int \tan x \sec x \sec^{۲} x\,dx \quad \begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x\,dx \end{cases} = \int u^{۲}du = \frac{۱}{۳}u^{۳} + C = \frac{۱}{۳}\sec^{۳} x + C$$

$$\int \tan^{۳} x \sec x\,dx = \int \tan^{۲} x \sec x \tan x\,dx = \int (\sec^{۲} x - ۱)\sec x \tan x\,dx \quad \begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x\,dx \end{cases}$$

$$= \int (u^{۲} - ۱)du = \frac{۱}{۳}u^{۳} - u + C = \frac{۱}{۳}\sec^{۳} x - \sec x + C$$

$$\int \tan^{۳} x \sec^{۷} x\,dx = \int \tan^{۳} x \sec^{۶} x.\sec x\,dx = \int \tan^{۲} x \sec^{۶} x.\sec x.\tan x\,dx \quad \begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x\,dx \end{cases}$$

$$= \int (\sec^{۲} x - ۱)\sec^{۶} x.\sec x.\tan x\,dx = \int (u^{۲} - ۱)u^{۶}.du = \int (u^{۸} - u^{۶})du = \frac{u^{۹}}{۹} - \frac{u^{۷}}{۷} + c = \frac{\sec^{۹} x}{۹} - \frac{\sec^{۷} x}{۷} + c$$

$$\int \cot^{۵} x \csc^{۳} x\,dx = \int \cot^{۵} x \csc^{۲} x.\csc x\,dx = \int \cot^{۴} x \csc^{۲} x.\csc x \cot x\,dx \quad \begin{cases} \csc x = u \\ -\csc x \cot x\,dx = du \end{cases}$$

$$= \int (\csc^{۲} x - ۱)^{۲} \csc^{۲} x.\csc x \cot x\,dx = -\int (u^{۲} - ۱)^{۲} u^{۲}.du = \int (-u^{۶} + ۲u^{۴} - u^{۲})du$$

$$= -\frac{u^{۷}}{۷} + ۲\frac{u^{۵}}{۵} - \frac{u^{۳}}{۳} + c = -\frac{\csc^{۷} x}{۷} + ۲\frac{\csc^{۵} x}{۵} - \frac{\csc^{۳} x}{۳} + c$$

فرد تنها بکنش

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$(\ln|\sec x + \tan x| + c)' = \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

$$\int \sec^3 x dx \quad \begin{cases} u = \sec x \rightarrow du = \sec x \tan x dx \\ dv = \sec^2 x dx \rightarrow v = \tan x \end{cases} \xrightarrow{uv - \int vdu} = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$$

$$(\sec^2 x - 1)$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$\ln|\sec x + \tan x|$$

$$\rightarrow 2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c)$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \csc^3 x dx \quad \begin{cases} u = \csc x \rightarrow du = -\csc x \cot x dx \\ dv = \csc^2 x dx \rightarrow v = -\cot x \end{cases} \xrightarrow{uv - \int vdu} = -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x dx$$

$$(\csc^2 x - 1)$$

$$= -\csc x \cot x - \int \csc^3 x dx + \int \csc x dx$$

$$\ln|\csc x - \cot x|$$

$$\rightarrow 2\int \csc^3 x dx = -\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x| + c \rightarrow \int \csc^3 x dx = \frac{1}{2}(-\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x|) + c$$

کد حفظی ؟

مهندس شاه ابراهیمی EbiMath.com

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

مثال ۷: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. (مثلثاتی)

بشکن

$$\int \tan^{۳} x \sec^{۶} x\,dx = \int \tan^{۳} x \sec^{۴} x \sec^{۲} x\,dx = \int \tan^{۳} x(۱+\tan^{۲} x)^{۲} \sec^{۲} x\,dx \quad \begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^{۲} x\,dx \end{cases}$$

$$\int u^{۳}(۱+u^{۲})^{۲}\,du \qquad \int u^{۳}(u^{۴}+۲u^{۲}+۱)du = \int (u^{۷}+۲u^{۵}+u^{۳})du = \frac{۱}{۸}u^{۸}+\frac{۱}{۳}u^{۶}+\frac{۱}{۴}u^{۴}+C$$

$$= \frac{۱}{۸}\tan^{۸} x+\frac{۱}{۳}\tan^{۶} x+\frac{۱}{۴}\tan^{۴} x+C$$

بشکن

$$\int \tan^{۲}\theta \sec^{۴}\theta d\theta = \int \tan^{۲}\theta \sec^{۲}\theta \sec^{۲}\theta d\theta = \int \tan^{۲}\theta(\tan^{۲}\theta+۱)\sec^{۲}\theta d\theta \quad \begin{cases} u=\tan\theta \\ du = \sec^{۲}\theta d\theta \end{cases}$$

$$= \int u^{۲}(u^{۲}+۱)du = \int (u^{۴}+u^{۲})du = \frac{۱}{۵}u^{۵}+\frac{۱}{۳}u^{۳}+C = \frac{۱}{۵}\tan^{۵}\theta+\frac{۱}{۳}\tan^{۳}\theta+C$$

بشکن

$$\int \csc^{۴} x \cot^{۴} x\,dx = \int \csc^{۲} x \cot^{۴} x.\csc^{۲} x\,dx = \int (\cot^{۲} x+۱)\cot^{۴} x.\csc^{۲} x\,dx \quad \begin{cases} u = \cot\theta \\ du = -\csc^{۲}\theta d\theta \end{cases}$$

$$= -\int (u^{۲}+۱)u^{۴}.du = -\int (u^{۶}+u^{۴})du = -\frac{u^{۷}}{۷}-\frac{u^{۵}}{۵}+c$$

$$= -\frac{\cot^{۷} x}{۷}-\frac{\cot^{۵} x}{۵}+c$$

زوج بشکن

مهندس شاه ابراهیمی EbiMath.com

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\int \frac{dx}{۴\sin^۲ x + ۲۵\cos^۲ x} = \int \frac{\sec^۲ x dx}{۴\tan^۲ x + ۲۵} \begin{cases} \tan x = u \\ \sec^۲ x dx = du \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{۴u^۲ + ۲۵} = \frac{۱}{۴}\int \frac{du}{u^۲ + \frac{۲۵}{۴}} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۵}\tan^{-۱}\left(\frac{۲u}{۵}\right)\right) + c = \frac{۱}{۱۰}\tan^{-۱}\left(\frac{۲\tan x}{۵}\right) + c$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^۴ x + \cos^۴ x} dx = \int \frac{(\sin x \cos x)/\cos^۴ x}{(\sin^۴ x + \cos^۴ x)/\cos^۴ x} dx = \int \frac{\tan x \sec^۲ x}{\tan^۴ x + ۱} dx \begin{cases} u = \tan^۲ x, \\ du = ۲\tan x \sec^۲ x dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{۱}{u^۲ + ۱}\left(\frac{۱}{۲}du\right) = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱} u + C = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\tan^۲ x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^۴ x + \cos^۴ x} = \int \frac{dx}{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x} = \int \frac{dx}{۱ - ۲(\sin x \cos x)^۲} = \int \frac{dx}{۱ - ۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲}$$

$$= \int \frac{dx}{۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x} = \int \frac{۲dx}{۲ - \sin^۲ ۲x} = \int \frac{۲dx}{۲(\sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x) - \sin^۲ ۲x} = \int \frac{۲dx}{\sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x}$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ t = \tan(\frac{x}{2})$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2+2t-1+t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2+2t} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int (\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt$$

$$= Lnt - Ln(1+t) = Ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

$$\int \frac{\cot x}{\cos x+1}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(\cos x+1)}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1)}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1-t^2}{(t-t^3+t+t^3)}dt = \int \frac{1-t^2}{2t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{t}-t)dt = \frac{1}{2}(\ln t - \frac{t^2}{2})+c = \frac{1}{2}(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2})+c$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\int \frac{\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx = \int \frac{A(3\sin x + 2\cos x) + B(3\cos x - 2\sin x)}{3\sin x + 2\cos x}dx$$

$$= A\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{3\sin x + 2\cos x}dx + B\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx = \boxed{Ax + B\ln|3\sin x + 2\cos x|}$$

$$\xrightarrow{\text{یافتن A و B}} 3A - 2B = 1 \quad , \quad 2A + 3B = 0 \rightarrow \boxed{A = \frac{3}{13}, B = \frac{-2}{13}}$$

$$\int \frac{5\cos x + 6}{2\cos x + \sin x + 3}dx = \int \frac{A(2\cos x + \sin x + 3) + B(-2\sin x + \cos x)}{2\cos x + \sin x + 3}dx$$

$$= A\int \frac{(2\cos x + \sin x + 3)}{2\cos x + \sin x + 3}dx + B\int \frac{(-2\sin x + \cos x)}{2\cos x + \sin x + 3}dx$$

$$\begin{cases} 2A + B = 5 \\ A - 2B = 0 \\ 3A = 6 \end{cases}$$

$$= Ax + B\ln|2\cos x + \sin x + 3|$$

$$= 2x + \ln|2\cos x + \sin x + 3|$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \xrightarrow{1=\sin^2 x+\cos^2 x} \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx \xrightarrow{\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}} \int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x$$

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}dx = \int \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x \cos x}dx = \int \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}dx = \int |\sin x+\cos x|dx$$

$$= -\cos x+\sin x+c$$

$$\int \sqrt{1-\cos 2x}dx$$

$$1)\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

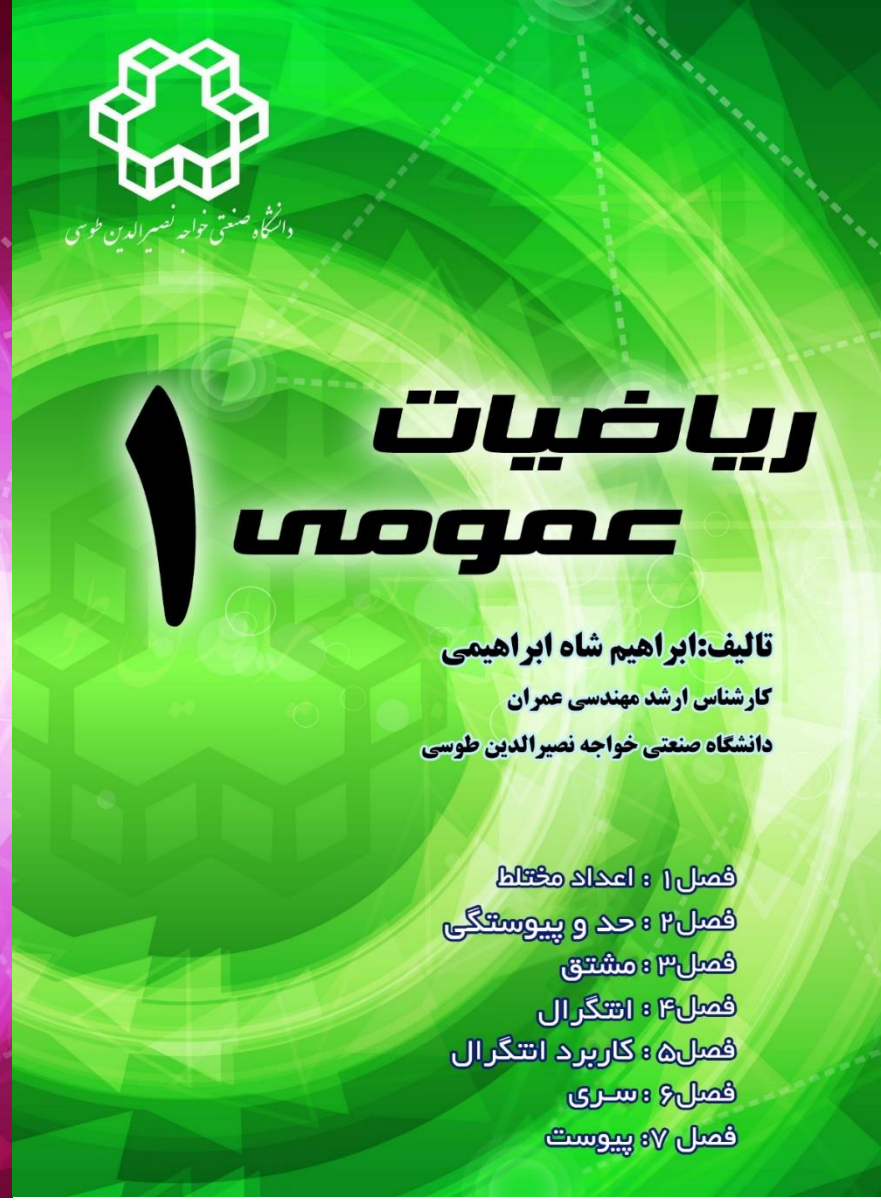
$$= \int \sqrt{2\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\int |\sin x|dx = -\sqrt{2}\cos x+c$$

مقدمه
فصل۱) اعداد مختلط
فصل۲) حد
فصل۳) مشتق
فصل۴) انتگرال
فصل۵) کاربرد انتگرال
فصل۶) سری

پایان انتگرال

۲۹ آبان ۹۹

با تشکر از توجه شما



برای دریافت فایل و ویدئوهای اصلی کلاس به ایدی @EShahebrahimi در تلگرام پیام دهید .

وبلاگ آموزش ریاضیات دانشگاهی به همراه نمونه سوالات با پاسخ تشریحی : EbiMath.com