۳۵ آزمایشی برای تعیین غلظت دو نوع متفاوت بنزین سربدار و بدون سرب، نتایج زیر را به دست داده است

نوع سربدار : $n_1 = ۲۵ \;,\; \bar{x}_1 = ۳۵/۸۴ \;,\; s_1^2 = ۱۳۰/۴۵۷۶$

نوع بدون سرب : $n_2 = ۲۵ \;,\; \bar{x}_2 = ۳۰/۶۰ \;,\; s_2^2 = ۵۳/۰۶۰۴$

به فرض نرمال بودن، یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای نسبت واریانسهای دو جمعیت به دست آورید.

۳۶ دو نمونه تصادفی با اندازه‌های ۲۵ و ۱۶ به ترتیب از دانشجویان پسر و دختری که در یک آزمون شرکت کرده‌اند را انتخاب کرده و مشاهده نموده‌ایم که میانگین نمرات دانشجویان پسر ۸۲ و واریانس آن ۶۴ است، در حالیکه میانگین نمرات دانشجویان دختر ۷۸ و واریانس آن ۴۹ می‌باشد. یک فاصله اطمینان ۹۸ درصدی برای نسبت انحراف معیار نمرات پسرها به دخترها به دست آورید. فرض کنید توزیع نمرات نرمال باشد.

فصل هشتم

آزمون فرضهای آماری

۱.۸ مفاهیم اولیه

در فصل قبل یکی از شاخه‌های استنباط آماری یعنی برآورد پارامتر مجهول جمعیت را مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل یکی دیگر از شاخه‌های استنباط آماری یعنی آزمون فرضیه‌های آماری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا تعریف یک فرض آماری را می‌آوریم.

تعریف ۱.۸ یک فرض آماری ادعائی در مورد یک یا چند جمعیت مورد بررسی است که ممکن است درست یا نادرست باشد. به عبارت دیگر فرض آماری یک ادعا یا گزاره‌ای در مورد توزیع یک جمعیت یا توزیع یک متغیر تصادفی است.

برای درک مفهوم فرض آماری به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱.۸ آزمایشی نشان داده است که میزان مؤثربودن نوعی داروی استاندارد روی یک بیماری بخصوص ۶۰ درصد است. یک داروساز ادعا می‌کند که اثر داروی جدیدی که او ساخته است بیشتر از داروی استاندارد می‌باشد. این ادعای داروساز یک فرض آماری است. حال برای اینکه ادعای این داروساز را مورد بررسی قرار دهیم، بایستی این دارو را روی افراد بیمار جمعیت آزمایش کنیم و نتایج را مورد بررسی قرار دهیم. اما آزمایش این دارو روی تمامی افراد بیمار جمعیت معقولانه نمی‌باشد و بجای آن بایستی دارو را روی تعدادی از افراد بیمار جمعیت آزمایش کنیم که این تعداد افراد همان نمونه ما را تشکیل می‌دهند. بنابراین فرض کنید که این دارو را روی ۲۰ بیمار آزمایش کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیمارانی در بین ۲۰ بیمار در نظر بگیریم

که توسط داروی جدید معالجه شده‌اند. در این صورت $X \sim B(۲۰,p)$ که در آن p مقداری نامعلوم و درصد مؤثر بودن داروی جدید است. مؤثر بودن داروی جدید به این معنی است که $p>۰/۶۰$ است. بنابراین در رابطه با این سئوال که "آیا میزان مؤثر بودن داروی جدید بیشتر از داروی استاندارد است؟" دو حالت (دو فرض) زیر پیش می آید.

۱ـ داروی جدید بهتر از داروی استاندارد است $\quad p>۰/۶۰$

۲ـ داروی جدید بهتر از داروی استاندارد نیست $\quad p\leq ۰/۶۰$

حال بایستی بوسیله اطلاعاتی که از نمونه به دست می‌آید در مورد درست بودن یا نبودن این فرضیات نتیجه‌گیری کنیم.

از دو فرضی راکه در یک مسئله آزمون فرض مطرح می‌شود یکی را فرض صفر یا خنثی[1] گفته و آن را با H_0 نمایش داده و دیگری را فرض مقابل[2] گفته و آن را با H_1 نمایش می‌دهند. هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق تائید آن بوسیله اطلاعات حاصل از نمونه ثابت کنیم، خلاف آن ادعا را در فرض صفر H_0 و خود آن ادعا را در فرض مقابل H_1 قرار می‌دهیم. بنابراین در مثال ۱.۱.۸ با مسئله آزمون فرضهای زیر مواجه می‌شویم

$$\begin{cases} H_0 : p\leq ۰/۶۰ \\ H_1 : p > ۰/۶۰ \end{cases}$$

آزمون فرضهای آماری در یک مسئله آزمون فرضهای آماری اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 "ناسازگار" باشد در این صورت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در مقابل فرض H_1 را می‌پذیریم و اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 "سازگار" باشد در این صورت گوئیم که اطلاعات به دست آمده از نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 ندارد و یا در حقیقت گوئیم فرض H_0 را می‌پذیریم. مثلاً در مثال ۱.۱.۸ اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه از ۶۰ درصد بیشتر باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و ادعای داروساز را می‌پذیریم و در مقابل اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه کمتر از ۶۰ درصد باشد آنگاه دلیلی بر رد فرض H_0 نداریم. در مسئله آزمون فرضها وقتی می‌گوئیم یک فرض آماری رد شده است به این معنی است که از روی نمونه انتخابی فرض آماری با قاطعیت رد شده است. اما وقتی گوئیم یک فرض آماری پذیرفته شده است به این معنی است که نمونه به دست آمده از جمعیت دلیلی بر رد کردن آن فرض آماری را به دست نمی‌دهد. بنابراین در

1- null hypothesis

2- Alternative hypothesis

$\beta = P(X \notin C \mid p=\frac{1}{2}) = P(X<9 \mid p=\frac{1}{2}) = P(X\leq 8 \mid p=\frac{1}{2}) = ۰٫۲۵۱۷$

$\beta^{*} = 1-\beta = 1-۰٫۲۵۱۷ =$

یک مسئله آزمون فرضها هدف ما رد کردن فرض H_0 و در نتیجه پذیرفتن فرض مقابل H_1 یعنی ادعای موردنظر می‌باشد.

ناحیه بحرانی و آماره آزمون برای انجام یک آزمون آماری نیاز به آماره و ناحیه بحرانی آزمون داریم که با ذکر یک مثال آنها را تشریح می‌کنیم.

مثال ۲.۱.۸ فرض کنید که یک داروی استاندارد ۲۵٪ در درمان یک بیماری مؤثر است و شخصی ادعا می‌کند که داروی ساخته شده توسط او ۵۰٪ در درمان آن بیماری مؤثر می‌باشد. بنابراین برای تحقیق در صحت حرف این شخص با آزمون زیر مواجه می‌شویم

$$\begin{cases} H_0 : p=\frac{1}{4} \\ H_1 : p=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$n=۲۰$

$X \sim B(۲۰, p) \qquad C = \{x \mid x \geq 9\}$

$\alpha = P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ درست}) = P(X\in C \mid p=\frac{1}{4}) = P(X\geq 9 \mid p=\frac{1}{4}) = 1-P(X\leq 8) = ۰/۰۴۰۹$

حال این سئوال مطرح می‌شود که چگونه این آزمون را انجام دهیم. همانطور که قبلاً گفته شد، بایستی نمونه‌ای از بیماران را در نظر بگیریم و دارو را روی آنها آزمایش کنیم. فرض کنید که ۲۰ بیمار را انتخاب کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیماران بهبود یافته توسط داروی جدید در بین ۲۰ بیمار در نظر بگیریم. در این صورت اگر مقادیر مشاهده شده X کوچک باشد، مثلاً کمتر از ۸ آنگاه نمی توان H_0 را رد کرد زیرا در این صورت کمتر از ۴۰٪ افراد بیمار بهبود یافته‌اند و نمی تواند $p=\frac{1}{2}$ باشد. حال فرض کنید قرارداد کنیم که اگر مقادیر مشاهده شده X بزرگتر یا مساوی ۹ باشد آنگاه فرض H_0 را رد خواهیم کرد. یعنی اگر مقادیر مشاهده شده X متعلق به مجموعه $C=\{x \mid x\geq 9\}$ باشد آنگاه H_0 را رد کنیم و اگر چنین نبود H_0 را رد نکنیم. به این آماره X که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن فرض H_0 را رد یا قبول می‌کنیم آماره آزمون گویند و به ناحیه C که کلیه مقادیر مربوط به رد فرض H_0 را به دست می‌دهد، ناحیه بحرانی آزمون گویند.

تعریف ۲.۸ آماره $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن یک فرض را رد یا قبول می‌کنیم آماره آزمون گویند و به مجموعه مقادیری از این آماره که به ازای آن فرض H_0 را بایستی رد کرد، ناحیه بحرانی آزمون گویند و با نماد C نمایش می‌دهند. متمم ناحیه بحرانی یعنی C' را ناحیه پذیرش آزمون گویند.

اگر ناحیه بحرانی C یک آزمون مشخص شود در این صورت با جمع آوری نمونه و محاسبه $t=T(x_1,\ldots,x_n)$ می توان آزمون آماری را به صورت زیر انجام داد. اگر $T(x_1,\ldots,x_n)\in C$

آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

بنابراین در مثال ۲.۱.۸ اگر $x \geq 9$ فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر ایـن صـورت آن را می‌پذیریم.

خطاهای آزمون

آیا قضاوتی را که در مثال ۲.۱.۸ انجام دادیم بدون خطا می‌باشد؟ جواب این سئوال منفی است. زیرا ممکن است که واقعاً H_0 درست باشد یعنی داروی جدید نیز ۲۵٪ مؤثر باشد و ما مشاهده کنیم که در این نمونه ۲۰ بیماری ۱۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را رد کنیم. بنابراین ممکن است فرض H_0 درست باشد و ما آن را رد کنیم که این خطا را خطای نوع اول آزمون گویند. در مقابل ممکن است که فرض H_0 درست نباشد یعنی داروی جدید ۵۰٪ مؤثر باشد و ما مشاهده کنیم که ۶ بیمار از بین ۲۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را قبول کنیم. بنابراین ممکن است فرض H_0 نادرست باشد و ما آن را قبول کنیم که این خطا را خطای نوع دوم آزمون گویند. احتمال خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند و آن را **سطح معنی‌دار یا سطح تشخیص آزمون** گویند و احتمال خطای نوع دوم را با β نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha=P(\text{رد شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_0)=P(T(X_1,\dots,X_n)\in C \mid \text{درست است } H_0)\\ \beta=P(\text{قبول شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1)=P(T(X_1,\dots,X_n)\notin C \mid \text{درست است } H_1)\end{array}}$$

توان آزمون احتمال رد کردن فرض H_0 در صورتی که فرض H_1 درست باشد یعنی احتمال رد کردن فرض H_0 به حق را توان آزمون گویند و با β^* نشان می‌دهند. بنابراین

$$\boxed{\beta^*=P(\text{رد شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1)=1-P(\text{قبول شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1)=1-\beta}$$

مثال ۳.۱.۸ در مثال ۲.۱.۸ احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل در مثال ۲.۱.۸ داشتیم که $C=\{x \mid x\geq 9\}$ و $X\sim B(20,p)$ بنابراین

$$\alpha=P(X\in C \mid \text{درست } H_0)=P(X\geq 9 \mid p=\tfrac{1}{4})$$

$$=1-P(X\leq 8 \mid p=\tfrac{1}{4})=1-0.9591=0.0409$$

$$\beta=P(X\notin C \mid \text{درست } H_1)=P(X<9 \mid p=\tfrac{1}{2})$$

$$=P(X\leq 8 \mid p=\tfrac{1}{2})=0.2517$$

$$\beta^*=1-\beta=1-0.2517=0.7483$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول کم و احتمال خطای نوع دوم زیاد است.

مثال ۴.۱.۸ در مثال ۲.۱.۸ اگر ناحیه بحرانی به صورت $C=\{x \mid x\geq 8\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل

$$\alpha=P(X\geq 8 \mid p=\tfrac{1}{4})=1-P(X\leq 7 \mid p=\tfrac{1}{4})=1-0.8982=0.1018$$

$$\beta=P(X<8 \mid p=\tfrac{1}{2})=P(X\leq 7 \mid p=\tfrac{1}{2})=0.1316$$

$$\beta^*=1-0.1316=0.8684$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول افزایش یافت و در مقابل احتمال خطای نوع دوم کاهش یافت.

با مقایسه دو مثال بالا دیده می‌شود که با تغییر دادن ناحیه بحرانی نمی‌توان هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را همزمان کاهش داد. موقعی که یکی را کاهش می‌دهیم، دیگری افزایش می‌یابد و برعکس. بنابراین بایستی آن ناحیه بحرانی را انتخاب کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای احتمال خطای نوع اول بتوان احتمال خطای نوع دوم را تا آنجاکه ممکن است کاهش داد و یا به عبارتی تا آنجاکه ممکن است توان آزمون را حداکثر کرد.

مثال ۵.۱.۸ فرض کنید $X\sim N(\mu,4)$ و آزمون زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}H_0: \mu=0\\ H_1: \mu=1\end{cases}$$

یک نمونه تصادفی به اندازه $n=25$ از X در نظر می‌گیریم اگر ناحیه بحرانی به صورت $C=\{(X_1,\dots,X_{25}) \mid \overline{X}>c\}$ باشد، مقدار c را چنان تعیین کنید که $\alpha=0.1$ باشد و احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل می‌دانیم که $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{4}{25})$ بنابراین

$$0.1=\alpha=P(\overline{X}>c \mid \mu=0)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-0}{\frac{2}{5}}\right)=P(Z>2.5c)$$

در نتیجه

$$P(Z\leq 2.5c)=0.9 \Rightarrow 2.5c=z_{0.9}=1.28 \Rightarrow c=\frac{1.28}{2.5}=0.512$$

$$\beta=P(\overline{X}\le C \mid \mu=1)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{0/512-1}{\frac{2}{5}}\right)=P(Z<-1/22)=0/1112$$

$$\beta^{*}=1-\beta=1-0/1112=0/8888$$

انواع فرضها فرضهای آماری به طور کلی به دو دسته ساده و مرکب تقسیم می‌شوند. فرضی را ساده گوئیم که تحت آن فرض توزیع جمعیت کاملاً مشخص گردد. مثلاً در مثال ۵.۱۸ فرض $H_0: \mu=0$ یک فرض ساده می‌باشد. فرضی را مرکب گوئیم که تحت آن فرض توزیع جمعیت کاملاً مشخص نمی‌گردد. مثلاً در مثال ۱.۱۸ فرض $H_1: p>0/6$ یک فرض مرکب می‌باشد زیرا اگر این فرض درست باشد مقدار p دقیقاً مشخص نمی‌شود و در نتیجه توزیع جمعیت کاملاً مشخص نمی‌گردد.

آزمونهای یک طرفه و دو طرفه فرض کنید θ پارامتر مجهول جمعیت باشد و بخواهیم آزمونهایی در مورد این پارامتر انجام دهیم. آزمون هر فرضیه آماری که در آن فرضیه مقابل یک طرفه باشد، آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. برای مثال اگر θ_0 مقدار ثابتی از θ باشد آنگاه هر یک از آزمونهای زیر یک طرفه می‌باشد

$$\begin{cases} H_0: \theta\le\theta_0 \\ H_1: \theta>\theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \theta=\theta_0 \\ H_1: \theta<\theta_0 \end{cases}$$

آزمون هر فرضیه آماری که در آن فرضیه مقابل دو طرفه باشد یعنی

$$\begin{cases} H_0: \theta=\theta_0 \\ H_1: \theta\ne\theta_0 \end{cases}$$

یک آزمون دو طرفه نامیده می‌شود.

مراحل انجام یک آزمون با توجه به مطالب گفته شده در این بخش، برای انجام یک آزمون آماری بایستی مراحل زیر را طی کرد.

۱ـ تعیین فرضهای صفر H_0 و مقابل H_1

۲ـ تعیین یک سطح معنی دار α که معمولاً آن را ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ می‌گیرند.

۳ـ تعیین آماره آزمون $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ که معمولاً براساس برآوردگر نقطه‌ای پارامتر مجهول θ می‌باشد.

۴ـ تعیین ناحیه بحرانی آزمون C که بر اساس آماره آزمون، فرض مقابل آزمون و سطح

معنی دار α می‌باشد.

۵ـ محاسبه مقدار مشاهده شده آماره آزمون بر اساس نمونه تصادفی مشاهده شده x_1، x_2، ... و x_n

۶ـ نتیجه گیری: اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون یعنی $T(x_1,\ldots,x_n)$ در ناحیه بحرانی C قرار گرفت آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت فرض H_0 را قبول می‌کنیم.

در بخش بعد این مراحل را در انجام آزمون روی پارامترهای مختلف جمعیت بکار می‌بریم.

۲.۸ آزمون فرضهای آماری روی پارامترهای جمعیت

در این بخش با توجه به مطالب بیان شده در بخش قبل آزمون فرضهای آماری روی میانگین و واریانس جمعیت در حالتهای مختلف را انجام می‌دهیم. در ابتدا آزمون فرض روی میانگین یک جمعیت موقعی که واریانس جمعیت معلوم است را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که از یک جمعیت X با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونه تصادفی X_1، X_2، ... و X_n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمونهایی روی میانگین μ انجام دهیم. برای این منظور ۳ حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف در آزمون فرض $\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu>\mu_0 \end{cases}$ که در آن μ_0 مقداری معلوم است. اگر $\overline{X}$ برآوردگر μ مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\overline{X}>c$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به صورت $\overline{X}>c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌گردد که سطح معنی دار آزمون برابر مقدار مشخص شده α باشد یعنی

$$\alpha=P(\overline{X}>c \mid \mu=\mu_0)$$

حال اگر جمعیت نرمال باشد و یا اینکه نرمال نبوده اما $n\ge 30$ باشد آنگاه طبق مطالب بخش ۶.۲ داریم که

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

بنابراین برای تعیین c داریم که

$$\alpha=P(\overline{X}>c \mid \mu=\mu_0)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=P\left(Z>\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

در نتیجه
$$\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \Rightarrow c=\mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به صورت $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$ می‌باشد.

در نتیجه

> در آزمون $\begin{cases}H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu>\mu_0\end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به صورت $H_0 : \mu\le\mu_0$ باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی هنوز به صورت فوق می‌باشد.

ب در آزمون فرض $\begin{cases}H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu<\mu_0\end{cases}$ اگر $\bar{X}$ مقادیر کوچک را اختیار کند یعنی $\bar{X}<c$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}<c$ است که در آن c با انجام عملیات مشابه قسمت (الف) برابر $c=\mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ به دست می‌آید و بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}<\mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ خواهد بود. بنابراین

> در آزمون $\begin{cases}H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu<\mu_0\end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به صورت $H_0 : \mu\ge\mu_0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی هنوز به صورت فوق می‌باشد.

ج در آزمون فرض $\begin{cases}H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu\neq\mu_0\end{cases}$ اگر $\bar{X}$ مقادیر کوچک یا مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\bar{X}>c_2$ یا $\bar{X}<c_1$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}>c_2$ یا $\bar{X}<c_1$ است که در آن c_1 و c_2 به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$\alpha=P(\bar{X}<c_1 \text{ یا } \bar{X}>c_2 \mid \mu=\mu_0) \Rightarrow 1-\alpha=P(c_1<\bar{X}<c_2 \mid \mu=\mu_0)$$

بنابراین
$$1-\alpha=P\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{c_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

و در نتیجه
$$\frac{c_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=-\frac{c_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

و یا $c_1=\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $c_2=\mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}>\mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ یا $\bar{X}<\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا معادلاً $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ می‌باشد.

بنابراین

> در آزمون $\begin{cases}H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu\neq\mu_0\end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$|Z| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال ۱.۲.۸ یک کارخانه تولیدکننده لامپهای روشنایی، لامپهایی تولید می‌کند که طول عمر آنها از توزیع نرمال با حد متوسط ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. می‌خواهیم آزمون $\mu=800$ در مقابل $\mu\neq 800$ را انجام دهیم. اگر یک نمونه تصادفی ۳۰ تایی از آن لامپها دارای حد متوسط طول عمر ۷۸۸ ساعت باشد، آزمون فوق را در سطح معنی دار ۰/۰۴ انجام دهید.

حل آزمون از نوع (ج) می‌باشد که در آن $\bar{x}=788$ ، $\sigma=40$ ، $n=30$ ، $\mu_0=800$ و $\alpha=0/04$ است بنابراین

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{788-800}{\frac{40}{\sqrt{30}}}=-1/643 \quad , \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0/98}=2/05$$

چون $|Z| = 1/643 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2/05$ بنابراین فرض H_0 رد نمی‌شود، یعنی حد متوسط طول عمر لامپها برابر ۸۰۰ ساعت است.

مثال ۲.۲.۸ تعداد زیادی از بیماران مبتلا به یک بیماری بخصوص را گرد آورده و گزارش کرده‌اند که مدت درمان بیماری به روش استاندارد دارای میانگین ۱۵ روز و انحراف معیار ۳ روز می‌باشد. ادعا شده که یک روش جدید می‌تواند مدت درمان را کوتاه‌تر کند و انحراف معیار درمان

همان ۳ روز می‌باشد. برای روش جدید درمان را بر روی ۷۰ بیمار آزمایش کرده و میانگین مدت درمان ۱۴ روز شده است. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲۵ روش جدید بهتر است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu=۱۵ \\ H_1: \mu<۱۵ \end{cases}$ مواجه هستیم، پس فرض H_0 را رد می‌کنیم در صورتی که $Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ از طرفی داریم که

$$\alpha=۰/۰۲۵ \Rightarrow z_{1-\alpha}=z_{۰/۹۷۵}=۱/۹۶$$

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{۱۴-۱۵}{\frac{۳}{\sqrt{۷۰}}}=-۲/۷۸۹$$

چون $-۲/۷۸۹ = Z < -z_{1-\alpha} = -۱/۹۶$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین مدت درمان روش جدید کمتر است.

برای آزمون فرض روی میانگین موقعی که واریانس نامعلوم است، آزمون فرض روی واریانس یک جمعیت، آزمون فرض روی تفاضل میانگین دو جمعیت و یا نسبت واریانس دو جمعیت نیز می‌توان با انجام عملیات مشابه حالتهای (الف) تا (ج) نواحی بحرانی آزمون را تعیین کرد. حاصل این عملیات در جدولهای ۱۸ و ۲۸ ارایه گردیده است. در جدول ۱۸ یک نمونه تصادفی nتایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 انتخاب شده و آزمونهایی روی μ یا σ^2 انجام گرفته است. در آزمونهای ۱ تا ۳ اگر $n \geq ۳۰$ باشد فرض نرمال بودن جمعیت را می‌توان حذف کرد. در جدول ۲۸ یک نمونه تصادفی n_1تایی از جمعیت نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و یک نمونه تصادفی n_2تایی از جمعیت نرمال دیگری با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 انتخاب شده‌اند و این دو نمونه از یکدیگر مستقل هستند. سپس آزمونهایی روی تفاضل میانگین دو جمعیت و یا نسبت واریانس دو جمعیت انجام گرفته است. در آزمونهای ۱۰ تا ۱۲ اگر $n_1 \geq ۳۰$ و $n_2 \geq ۳۰$ باشد فرض نرمال بودن را می‌توان حذف کرد. در زیر مثالهایی از این آزمونها را می‌آوریم. توجه کنید اگر در مسئله‌ای مقدار α مشخص نشده باشد آن را ۰/۰۵ در نظر می‌گیریم.

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$Z>z_{1-\alpha}$
۲	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$Z<-z_{1-\alpha}$
۳	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$\lvert Z\rvert>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۴	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$T>t_{1-\alpha}(n-1)$
۵	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$T<-t_{1-\alpha}(n-1)$
۶	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$\lvert T\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
۷	$\sigma^2=\sigma_0^2$ یا $\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
۸	$\sigma^2=\sigma_0^2$ یا $\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)$
۹	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ یا $X^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

جدول ۱.۸ آزمونهای آماری روی میانگین و واریانس یک جمعیت نرمال

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱۰	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\le d_0$	$\mu_1-\mu_2>d_0$	$Z=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$Z>z_{1-\alpha}$
۱۱	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\ge d_0$	$\mu_1-\mu_2<d_0$	$Z=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$Z<-z_{1-\alpha}$
۱۲	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$Z=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$\lvert Z\rvert>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۱۳	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\le d_0$	$\mu_1-\mu_2>d_0$	$T=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$T>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
۱۴	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\ge d_0$	$\mu_1-\mu_2<d_0$	$T=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$T<-t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
۱۵	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$\lvert T\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
۱۶	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
۱۷	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F<F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
۱۸	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ یا $F>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

جدول ۲.۸ آزمونهای آماری روی تفاضل میانگینها و نسبت واریانسهای دو جمعیت نرمال

مثال ۳.۲.۸ نمونه تصادفی از پرونده‌های فراوان شرکتی نشان می‌دهد که سفارشات برای قطعه معینی از ماشینها به ترتیب در ۱۰، ۱۲، ۱۹، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۱۱ و ۱۳ روز بایگانی شده است. اگر تعداد روزهای بایگانی از توزیع نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان ادعا کرد که میانگین زمان بایگانی چنین سفارشاتی از ۱۰/۵ روز بیشتر است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases}H_0: \mu=10/5\\ H_1: \mu>10/5\end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شماره ۴ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها به دست می‌آوریم که $n=8$، $\sum x_i=112$ و $\sum x_i^2=1640$ بنابراین

$$\bar x=\frac{112}{8}=14 \quad , \quad s^2=\frac{1}{7}\left[1640-\frac{(112)^2}{8}\right]=10/286$$

$$\alpha=0/01 \Rightarrow t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0/99}(7)=3/0$$

$$T=\frac{\bar x-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{14-10/5}{\sqrt{\frac{10/286}{8}}}=3/087$$

چون $3/087=T>t_{1-\alpha}(n-1)=3/0$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین زمان بایگانی بیش از ۱۰/۵ روز است.

مثال ۴.۲.۸ یک تولید کننده قطعات پیش ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. یک نمونه تصادفی ۱۰تایی از این محصولات نتایج $\bar x=312$ و $s^2=195$ را به دست داده است. اگر اندازه مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشند، آیا نتایج به دست آمده با ادعای تولید کننده سازگار است؟ سطح معنی‌دار را ۰/۰۵ بگیرید.

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases}H_0: \sigma^2=100\\ H_1: \sigma^2\neq 100\end{cases}$ مواجه هستیم بنابراین از آزمون شماره ۹ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$X^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9(195)}{100}=17/55$$

$$\alpha=0/05 \Rightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/025}(9)=2/70 \quad , \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/975}(9)=19/0$$

چون $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-۱)=۲/۷۰ \not< X^2=۱۷/۵۵$ و $\chi^2_{۱-\frac{\alpha}{2}}(n-۱)=۱۹/۰ \not> X^2=۱۷/۵۵$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی نتایج با ادعای تولید کننده سازگار است.

مثال ۵.۲.۸ یک نمونه تصادفی به اندازه ۳۶ از یک جمعیت با انحراف معیار ۵/۲ دارای میانگین ۸۱ است. یک نمونه تصادفی دیگر به اندازه ۴۹ از یک جمعیت دیگر با انحراف معیار ۳/۴ دارای میانگین ۷۶ است. آیا در سطح معنی دار ۰/۰۶ میانگین این دو جمعیت با هم برابر است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu_1=\mu_2 \\ H_1: \mu_1\neq\mu_2 \end{cases}$ مواجه هستیم که واریانسها معلوم می‌باشند.

بنابراین از آزمون شماره ۱۲ با $d_0=۰$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_1=۳۶ \ , \ \sigma_1=۵/۲ \ , \ \bar{x}_1=۸۱$$

$$n_2=۴۹ \ , \ \sigma_2=۳/۴ \ , \ \bar{x}_2=۷۶$$

بنابراین

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{۸۱-۷۶-۰}{\sqrt{\frac{(۵/۲)^2}{۳۶}+\frac{(۳/۴)^2}{۴۹}}}=۵/۰۳۳$$

$$\alpha=۰/۰۶ \Rightarrow z_{۱-\frac{\alpha}{2}}=z_{۰/۹۷}=۱/۸۸$$

چون $z_{۱-\frac{\alpha}{2}}=۱/۸۸ < |Z|=۵/۰۳۳$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی $\mu_1\neq\mu_2$ و چون $Z=۵/۰۳۳ > ۱/۸۸$ بنابراین نتیجه می‌شود که $\mu_1>\mu_2$ است.

مثال ۶.۲.۸ دو گروه ۴۰ نفری برای انجام یک آزمایش انتخاب شده‌اند. گروه اول را با رژیم غذایی A و گروه دوم را با رژیم غذایی B مورد آزمایش قرار داده‌ایم. میانگین و انحراف استاندارد کاهش وزن در رژیم غذایی A به ترتیب ۱۱ و ۴/۳ کیلوگرم و در رژیم غذایی B به ترتیب ۸ و ۵/۷ کیلوگرم بوده است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که میانگین کاهش وزن بوسیله رژیم غذایی A از میانگین کاهش وزن بوسیله رژیم غذایی B به اندازه حداقل یک کیلوگرم بیشتر است؟ فرض کنید کاهش وزن دو نوع رژیم دارای توزیع نرمال با واریانسهای مساوی باشند.

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu_A\leq\mu_B+۱ \\ H_1: \mu_A>\mu_B+۱ \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۱۳ با $d_0=۱$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_1=۴۰ \ , \ \bar{x}_1=۱۱ \ , \ s_1=۴/۳$$

$$n_2=۴۰ \ , \ \bar{x}_2=۸ \ , \ s_2=۵/۷$$

بنابراین

$$s_p^2=\frac{۳۹(۴/۳)^2+۳۹(۵/۷)^2}{۷۸}=۲۵/۴۹$$

$$T=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{۱۱-۸-۱}{\sqrt{۲۵/۴۹}\sqrt{\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۴۰}}}=۱/۷۷۲$$

$$\alpha=۰/۰۵ \Rightarrow t_{۱-\alpha}(n_1+n_2-۲)=t_{۰/۹۵}(۷۸)=Z_{۰/۹۵}=۱/۶۴$$

چون $t_{۱-\alpha}(n_1+n_2-۲)=۱/۶۴ < T=۱/۷۷۲$ بنابراین فرض H_0 رد می‌شود و ادعای گفته شده درست می‌باشد.

مثال ۷.۲.۸ یک درس را به دو روش تدریس نموده‌ایم. سپس در روش اول از ۱۶ نفر امتحان به عمل آورده و انحراف استاندارد نمرات ۹ به دست آمد، در حالیکه در روش دوم از ۲۵ نفر امتحان بعمل آورده و انحراف استاندارد نمرات ۱۲ به دست آمده است. آیا در سطح معنی دار ۰/۰۱ می‌توان متقاعد شد که پراکندگی نمرات در روش اول کمتر از روش دوم است؟ فرض کنید نمرات دو روش از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2\geq\sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2<\sigma_2^2 \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۲۷ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_1=۱۶ \ , \ s_1=۹ \ , \ n_2=۲۵ \ , \ s_2=۱۲$$

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\left(\frac{۹}{۱۲}\right)^2=۰/۵۶۲۵$$

$$\alpha=۰/۰۱ \Rightarrow F_\alpha(n_1-۱,n_2-۱)=\frac{۱}{F_{۱-\alpha}(n_2-۱,n_1-۱)}=\frac{۱}{F_{۰/۹۹}(۲۴,۱۵)}=۰/۳۰۴$$

چون $F_\alpha(n_1-۱,n_2-۱)=۰/۳۰۴ \not< F=۰/۵۶۲۵$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود، یعنی پراکندگی نمرات در روش اول کمتر نیست.

مثال ۸.۲.۸ ادعا شده است که وزن قوطی‌های روغنی بخصوص ۱۰ انس است. اگر وزنهای یک نمونه تصادفی ۱۰تایی از این قوطیها به صورت زیر باشد و وزن قوطیها دارای توزیع نرمال باشد، آیا این ادعا را می‌پذیرید؟

$$10.2,\ 9.7,\ 10.1,\ 10.3,\ 10.1,\ 9.8,\ 9.9,\ 10.4,\ 10.3,\ 9.8$$

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu \neq 10 \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شماره ۶ با $\mu_0 = 10$ و $\alpha = 0.05$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n = 10\ ,\quad \sum x_i = 100.6\ ,\quad \sum x_i^2 = 1012.58$$

در نتیجه $\bar{x} = 10.06$ و $s = 0.246$ و همچنین

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(9) = 2.26$$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{10.06 - 10}{\frac{0.246}{\sqrt{10}}} = 0.771$$

چون $2.26 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \not< |T| = 0.771$ پس H_0 رد نمی‌شود یعنی ادعا درست می‌باشد.

مثال ۹.۲.۸ در یک آزمون حساب سال پنجم ابتدایی نمره ۸ دانش‌آموز پسر و ۶ دانش‌آموز دختر به صورت زیر به دست آمده است.

پسرها	۱۰	۱۷	۱۴	۱۲	۱۱	۱۶	۱۸	۱۹
دخترها	۱۶	۱۸	۱۷	۱۳	۱۴	۱۱		

با فرض نرمال بودن نمره‌ها و تساوی واریانسها، آیا به طور متوسط نمرات دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۱۵ با $d_0 = 0$ و $\alpha = 0.05$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله به دست می‌آوریم که

$$n_1 = 8\ ,\quad \bar{x}_1 = 14.625\ ,\quad s_1^2 = 11.41$$

$$n_2 = 6\ ,\quad \bar{x}_2 = 14.83\ ,\quad s_2^2 = 6.97$$

بنابراین

$$s_p^2 = \frac{7(11.41) + 5(6.97)}{12} = 9.56$$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{14.625 - 14.83 - 0}{\sqrt{9.56}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}} = -0.123$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.975}(12) = 2.18$$

چون $2.18 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \not< |T| = 0.123$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی به طور متوسط نمرات دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است.

۳.۸ آزمون برازندگی

در آزمونهایی که تاکنون در این فصل انجام داده‌ایم فرض کرده‌ایم که جمعیت دارای یک توزیع احتمال بخصوص است و در مورد پارامترهای مجهول جمعیت مانند μ و σ^2 آزمونهایی را انجام داده‌ایم. در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن توزیع احتمال جمعیت خود نیز مجهول می‌باشد و ما به جمعیت توزیع مشخصی را نسبت داده و آن را مورد آزمون قرار می‌دهیم. یعنی آزمونی را در نظر می‌گیریم که تعیین می‌کند آیا جمعیتی دارای یک توزیع مشخص است یا نه. در بسیاری موارد یک توزیع احتمال برای یک سری مشاهدات در نظر گرفته می‌شود، مثلاً توزیع دو جمله‌ای برای درصدی از جمعیت که دارای خصیصه معینی هستند و یا توزیع یکنواخت برای هم شانس بودن انتخاب افراد جمعیت یا توزیع پواسون برای تعداد غلطهای چاپی در صفحات کتاب و ... می‌خواهیم بدانیم که مشاهدات به دست آمده بر اساس یک نمونه تصادفی از جمعیت، با یک توزیع مفروض مطابقت دارد یا نه؟

توزیعی را که حدس می‌زنیم داده‌ها از آن باشند، توزیع برازنده بر داده‌ها و آزمون لازم را آزمون برازندگی می‌نامند. یکی از این آزمونهای برازندگی، آزمون مربع-کای برای برازندگی توزیع می‌باشد که در زیر آن را می‌آوریم.

فرض کنید که نتیجه یک آزمایش تصادفی به یکی از k طبقه دو به دو مجزای C_1، C_2، ... و C_k متعلق باشد به طوری که احتمال متعلق بودن به طبقه C_i برابر مقدار $0 < p_i < 1$ باشد که $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. این آزمایش تصادفی را n مرتبه مستقلاً انجام می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$i=1,2,\dots,k$ تعداد دفعاتی از این n آزمایش که نتیجه آزمایش به طبقه C_i متعلق باشد $= O_i$

در این صورت $O_i \sim B(n,p_i)$, $i=1,2,\dots,k$ و متغیر تصادفی O_i را فراوانی مشاهده شده[1] می‌نامند. می‌خواهیم این فرض را آزمون کنیم که قانون احتمال آزمایش تصادفی بوسیله p_i^*ها مشخص می‌شود یا نه، یعنی

$$\begin{cases} H_0 : p_1=p_1^*,\dots,p_k=p_k^* \\ H_1 : p_i \neq p_i^* \quad \text{برای حداقل یک } i=1,2,\dots,k \end{cases}$$

که در آن p_i^*ها مقادیر معینی هستند و $0 < p_i^* < 1$ و $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. اگر فرض H_0 درست باشد آنگاه $E(O_i)=np_i^*$، یعنی اگر H_0 درست باشد و آزمایش را n بار مستقلاً تکرار کنیم، انتظار داریم که در این n آزمایش به طور متوسط فراوانی نتایجی که به طبقه C_i تعلق دارند برابر $e_i=E(O_i)=np_i^*$ باشد. عدد e_i را فراوانی مورد انتظار[2] می‌نامند. واضح است که

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = n$$

برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 از آماره زیر که به آماره X^2 پیرسون مشهور است استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-e_i)^2}{e_i}} \qquad (۱.۸)$$

می‌توان نشان داد که به طور تقریبی $X^2 \sim \chi^2_{(k-1)}$. واضح است که فرض H_0 موقعی پذیرفته می‌شود که اختلاف O_iها و e_iها و در نتیجه X^2 کوچک باشد. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $X^2 > c$ خواهد بود. اگر بخواهیم سطح معنی‌دار آزمون برابر α باشد آنگاه ناحیه بحرانی به صورت $X^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ تبدیل می‌شود، یعنی

> در آزمون برازندگی، فرض H_0 (برازندگی توزیع) رد می‌شود اگر و فقط اگر
> $X^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

مثال ۱.۳.۸ یک تاس را ۱۲۰ بار پرتاب می‌کنیم و مشاهدات زیر را به دست می‌آوریم. در سطح معنی‌دار $\alpha=0/05$ آزمون کنید که آیا تاس سالم است

1- observed frequency
2- Expected frequency

شماره تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
فراوانی	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴	۱۲۰

حل در این مثال با آزمون زیر مواجه هستیم

$$\begin{cases} H_0 : p_1=p_2=\dots=p_6=\frac{1}{6} \\ H_1 : p_i \neq \frac{1}{6} \quad i=1,2,\dots,6 \quad \text{برای حداقل یک} \end{cases}$$

بنابراین $e_i=np_i^*=120\times\frac{1}{6}=20\ ,\ i=1,\dots,6$ و در نتیجه جدول زیر را به دست می‌آوریم

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
O_i	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴	۱۲۰
e_i	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۱۲۰

و از این جدول داریم که

$$X^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(O_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(18-20)^2}{20}+\dots+\frac{(24-20)^2}{20}=2/5$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)=\chi^2_{0/95}(5)=11/1$$

چون $11/1=\chi^2_{1-\alpha}(k-1) \not< X^2=2/5$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی تاس سالم است.

تذکر ۱ آزمون برازندگی را می‌توان در مواردی که مقادیر مورد انتظار e_iها (و یا p_i^*ها) به پارامترهای نامعلوم θ_1، θ_2، ... و θ_t وابسته هستند نیز بکار برد. برای این منظور ابتدا θ_1، θ_2 ... و θ_t را بوسیله مشاهدات O_1، O_2، ... و O_k برآورد می‌کنیم. سپس به وسیلهٔ برآوردهای $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$ ... و $\hat{\theta}_t$ مقادیر مورد انتظار e_1، e_2، ... و e_k را محاسبه و در فرمول X^2 قرار می‌دهیم. در این حالت فرض H_0 را رد خواهیم کرد اگر و فقط اگر $X^2>\chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)$ که در آن t تعداد پارامترهایی است که توسط مشاهدات برآورد شده‌اند.

تذکر ۲ اگر در آزمون برازندگی مقدار بعضی از مقادیر مورد انتظار کوچکتر از ۵ باشد، بایستی چند طبقهٔ مجاور را با هم ادغام کنیم، تا جمع مقادیر مورد انتظار طبقات جدید بزرگتر یا مساوی ۵ شود.

مثال ۲.۳.۸ تعداد غلطهای چاپی در ۱۰۰ صفحه یک کتاب را شمرده‌ایم و مشاهدات در جدول

زیر آورده شده است. آیا توزیع پواسون در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ بر داده‌ها برازنده است.

تعداد غلطها i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد صفحات o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱

حل اگر X تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه کتاب باشد آنگاه آزمون

$$\begin{cases} H_۰ : X \sim P(\mu) \\ H_۱ : X \nsim P(\mu) \end{cases}$$

مورد نظر است. در ابتدا به وسیلهٔ مشاهدات، μ میانگین توزیع پواسون را برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i=\frac{۱}{۱۰۰}\left[(۰\times۳۶)+(۱\times۴۰)+\dots+(۶\times۱)\right]=۱$$

بنابراین تحت فرض $H_۰$ داریم که

$$f_X(x)=\frac{e^{-۱}۱^x}{x!}=\frac{۱}{x!}e^{-۱} \qquad x=۰,۱,۲,\dots$$

در نتیجه

$$p_۰=P(X=۰)=e^{-۱}=۰/۳۶۷۹ \Rightarrow e_۰=np_۰=۱۰۰(۰/۳۶۷۹)=۳۶/۷۹$$

$$p_۱=P(X=۱)=e^{-۱}=۰/۳۶۷۹ \Rightarrow e_۱=۳۶/۷۹$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۶/۱۳	۱/۵۳	۰/۳۱	۰/۰۵	۱۰۰

چون ۳ طبقهٔ آخر دارای مقادیر مورد انتظار کمتر از ۵ هستند پس ۴ طبقهٔ آخر را با هم ادغام می‌کنیم و جدول زیر به دست می‌آید

i	۰	۱	۲	بزرگتر از ۲	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۵	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۸/۰۲	۱۰۰

بنابراین

$$X^۲=\sum_{i=۰}^{۳}\frac{(o_i-e_i)^۲}{e_i}=\frac{(۳۶-۳۶/۷۹)^۲}{۳۶/۷۹}+\dots+\frac{(۵-۸/۰۲)^۲}{۸/۰۲}=۱/۴۵۴$$

$$d.f.=k-۱-t=۴-۱-۱=۲ \Rightarrow \chi^۲_{۱-\alpha}(k-۱-t)=\chi^۲_{۰/۹۵}(۲)=۵/۹۹$$

چون $۵/۹۹=\chi^۲_{۱-\alpha}(k-۱-t) \ngtr X^۲=۱/۴۵۴$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع پواسون بر داده‌ها برازنده است.

مثال ۳.۳.۸ طول عمر ۱۰۰۰ لامپ یک کارخانه را اندازه‌گیری کرده‌ایم و اطلاعات جدول زیر به دست آمده است همچنین $\sum x_i=۲۰۰۰۰۰$. سرپرست کارخانه ادعا دارد که طول عمر لامپها دارای توزیع نمایی است. آیا ادعای او را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌پذیرید.

طول عمر t	تعداد
$t\le ۱۵۰$	۵۴۳
$۱۵۰<t\le ۳۰۰$	۲۵۸
$۳۰۰<t\le ۴۵۰$	۱۲۰
$۴۵۰<t\le ۶۰۰$	۴۸
$۶۰۰<t\le ۷۵۰$	۲۰
$۷۵۰<t$	۱۱

حل اگر X طول عمر لامپ تولیدی کارخانه باشد آنگاه آزمون

$$\begin{cases} H_۰ : X \sim E(\theta) \\ H_۱ : X \nsim E(\theta) \end{cases}$$

مورد نظر است. در ابتدا θ میانگین توزیع نمایی را بوسیله مشاهدات برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\theta}=\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum x_i=\frac{۲۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰}=۲۰۰$$

بنابراین تحت فرض $H_۰$ داریم که

$$f_X(x)=\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x} \qquad x>۰$$

در نتیجه

$$p_۱=P(X\le ۱۵۰)=\int_۰^{۱۵۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۵۲۷۷ \Rightarrow e_۱=۱۰۰۰p_۱=۵۲۷/۷$$

$$p_۲=P(۱۵۰<X\le ۳۰۰)=\int_{۱۵۰}^{۳۰۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۲۴۹۲ \Rightarrow e_۲=۲۴۹/۲$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۵۴۳	۲۵۸	۱۲۰	۴۸	۲۰	۱۱	۱۰۰۰
e_i	۵۲۷/۷	۲۴۹/۲	۱۱۷/۷	۵۵/۶	۲۶/۳	۲۳/۵	۱۰۰۰

بنابراین

$$X^{۲}=\sum_{i=۱}^{۶}\frac{(o_i-e_i)^{۲}}{e_i}=\frac{(۵۴۳-۵۲۷/۷)^{۲}}{۵۲۷/۷}+\dots=۹/۹۹۶$$

$$d.f.=k-۱-t=۶-۱-۱=۴ \Rightarrow \chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t)=\chi^{۲}_{./۹۹}(۴)=۱۳/۳$$

چون $۱۳/۳=\chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t) \not< X^{۲}=۹/۹۹۶$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع نمایی برازنده بر داده‌ها است.

۴.۸ تمرینات

۱ در هر کدام از حالتهای زیر، فرض صفر و فرض مقابل را مشخص کنید.

الف- یک تولیدکنندهٔ اتومبیل می‌خواهد ادعای تهیه کننده‌ای را بررسی کند که حداکثر مقاومت سیمهایی که می‌سازد کمتر از ۵۰ اهم باشد.

ب- ادارهٔ تحقیقات ادعا می‌کند رشته‌هایی که برای لامپها درست کرده است، عمر متوسط لامپها را تا بیش از ۳۰۰ ساعت افزایش خواهد داد. یک بازرس علاقه‌مند به بررسی این ادعا می‌باشد.

۲ می‌خواهیم برای یک سکه آزمون $\begin{cases} H_۰: p=\frac{۱}{۲} \\ H_۱: p=\frac{۳}{۴} \end{cases}$ را انجام دهیم. سکه را ده بار پرتاب می‌کنیم و X را تعداد شیرها در این ده پرتاب در نظر می‌گیریم. اگر $X\geq ۸$ فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم.

الف- احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

ب- اگر $X\geq c$ را ناحیهٔ بحرانی بگیریم، c را چنان تعیین کنید تا احتمال خطای نوع دوم بیش از ۰/۰۹ نباشد.

۳ نسبت خانواده‌های ساکن در شهر بخصوصی که از کمپانی A شیر می‌خرند ۰/۶ است. اگر از یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ خانواری ۳ یا کمتر از کمپانی A شیر بخرند فرضیهٔ صفر p=۰/۶ را به نفع فرضیهٔ مقابل p<۰/۶ رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول را محاسبه نمایید. احتمال خطای نوع دوم را برای مقادیر p=۰/۳، p=۰/۴ و p=۰/۵ محاسبه نمایید.

۴ در صورتی که از یک جمعیت نرمال با واریانس ۴ یک نمونهٔ تصادفی به حجم ۱۶ انتخاب کرده باشیم، در آزمون $\begin{cases} H_۰: \mu=۸ \\ H_۱: \mu=۱۰ \end{cases}$ در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ احتمال خطای نوع دوم را

محاسبه کنید.

۵ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد

$$f_\theta(x)=\begin{cases} \frac{۱}{\theta}e^{-\frac{۱}{\theta}x} & x>۰,\theta>۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

می‌خواهیم آزمون $\begin{cases} H_۰: \theta=۲۰۰ \\ H_۱: \theta=۵۰۰ \end{cases}$ را انجام دهیم. اگر X>۳۰۰ مشاهده شود، فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

۶ متوسط قد دانشجویان مرد سال اول یک دانشکده بخصوص ۶۸/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۷ اینچ گزارش شده است. اگر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰ تایی از دانشجویان سال اول فعلی دارای حد متوسط قد ۶۹/۷ اینچ باشد، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲ دلیلی برای تصور تغییر در حد متوسط قد وجود دارد؟

۷ وزارت کار و امور اجتماعی، مزد روزانهٔ کارگران کارخانه را به طور متوسط ۱۳۲۰ تومان با انحراف ۲۵۰ تومان تعیین نموده است. اگر کارخانه‌ای به ۴۰ کارگر خود روزانه به طور متوسط ۱۲۲۰ تومان پرداخت نماید، آیا می‌توان این کارخانه را متهم نمود که کمتر از مزد تعیین شدهٔ وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند.

۸ لامپهای تلویزیون موجود در بازار دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت با انحراف معیار ۳۰۰ ساعت هستند. کارخانه‌ای لامپ جدیدی تولید کرده و مدعی است که میانگین طول عمر لامپهای ساخت کارخانه‌اش بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰۰ تایی انتخاب و میانگین طول عمر ۱۲۶۵ ساعت به دست آمده است. آیا با ادعای صاحب کارخانه موافق هستید؟

۹ یک فرایند تولید رنگ موجود است که توزیع تولید روزانه آن نرمال با میانگین ۸۰۰ و انحراف معیار ۳۰ تن است. به منظور ازدیاد تولید اصلاحاتی در این فرایند پیشنهاد شده است و یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ روزه از تولید فرایند اصلاح شده دارای میانگین ۸۱۲ تن می‌باشد. در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آیا فرایند اصلاح شده میانگین تولید روزانه را افزایش می‌دهد؟