به نام خدا

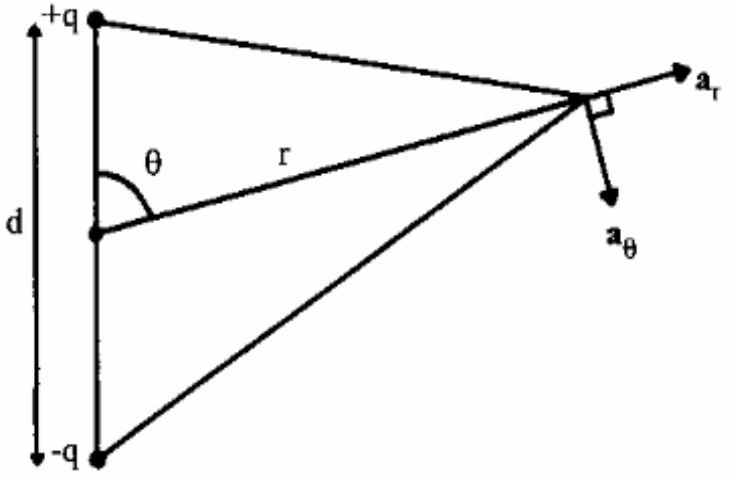
درس الکترومغناطیس

www.IranMadar.tk

دو قطبی الکتریکی

دو قطبی الکتریکی مجموعه‌ای است شامل دو بار الکتریکی $+q$ و $-q$ که در فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند. (فرض می‌شود که فاصلهٔ d در مقابل فاصله‌ای که می‌خواهیم شدت میدان را در آن نقطه محاسبه کنیم بسیار کوچکتر است) در اینصورت میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از مرکز دو قطبی بصورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$



چنانکه ملاحظه می‌شود شدت میدان الکتریکی با فاصله بصورت $\frac{1}{r^3}$ رابطه دارد (در مقایسه با یک بار نقطه‌ای که بصورت $\frac{1}{r^2}$ بود)

اگر از روابط گفته شده در قسمت قبل استفاده نماییم معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی یک دو قطبی بصورت $r = K\sin^2\theta$ بدست خواهد آمد.

چگالی شار الکتریکی

چگالی شار الکتریکی کمیتی است برداری که برخلاف بردار شدت میدان الکتریکی به خصوصیات محیط بستگی ندارد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

طبق قانون گوس اگر یک سطح بسته را در نظر بگیریم، انتگرال چگالی شار الکتریکی روی آن سطح برابر است با مقدار بار داخل آن سطح یعنی داریم:

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q$$

بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

با استفاده از قانون گوس به سادگی می‌توان برای مسائلی که دارای تقارن می‌باشند چگالی شار الکتریکی را محاسبه کرد. در این مسائل راحت‌تر است که از این راه شدت میدان الکتریکی را بدست آورد. مثلاً برای یک بار نقطه‌ای q، در فاصلهٔ r از آن چگالی شار الکتریکی بصورت $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$ خواهد بود.

پتانسیل الکتریکی

برای جابجا کردن واحد بار در داخل یک میدان از یک نقطه به نقطهٔ دیگر کاری باید انجام گیرد که مقدار آن برابر اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه تعریف شده است.

$$V(B) - V(A) = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot dl$$

پس برای انتقال بار Q از نقطهٔ A به نقطهٔ B، در داخل میدان الکتریکی E باید کار انجام دهیم و مقدار آن برابر است با:

$$W = QV_{BA} = Q[V(B) - V(A)]$$

غالباً یک نقطه در بینهایت دور را بعنوان پتانسیل مرجع انتخاب می‌کنند و به آن پتانسیل صفر نسبت می‌دهند. و پتانسیل هر نقطهٔ دیگر نسبت به این نقطه سنجیده می‌شود:

$$V(A) = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

با توجه به مقدار شدت میدان در اطراف یک بار نقطه‌ای با محاسبهٔ انتگرال بالا نتیجه می‌گیریم که پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای در فاصلهٔ r از آن بصورت

$$V(A) = \frac{q}{۴\pi\varepsilon r}$$

خواهد بود. این نتیجه را طبق اصل برهم نهی می‌توان برای مجموعهٔ چند بار گسسته تعمیم داد:

$$V(A) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{q_i}{۴\pi\varepsilon r_i}$$

در مواردی که توزیع پیوسته‌ای از بار داشته باشیم مجموع فوق به انتگرال تبدیل می‌شود و خواهیم داشت:

$$V = \int \frac{dq}{۴\pi\varepsilon\, r}$$

عنصر بار dq بسته به اینکه توزیع بار، حجمی، سطحی یا خطی باشد بصورت ρdv، $\rho_s\ as$ یا $\rho_l\ al$ تغییر می‌یابد و انتگرال روی حجم، سطح یا خط مورد نظر اعمال می‌شود.

رابطهٔ بین پتانسیل و شدت میدان الکتریکی بصورت

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

خواهد بود. در خیلی از موارد برای بدست آوردن شدت میدان می‌توان ابتدا پتانسیل را بدست آورد و با اعمال عملگر گرادیان، شدت میدان الکتریکی را محاسبه نمود. از رابطهٔ بالا بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

و بنابر قضیهٔ استوکس نتیجه می‌گیریم:

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

به نوعی بیان کنندهٔ قانون ولتاژ کیرشهف *(KVL)* می‌باشد.

انرژی الکتریکی

هنگامی که مجموعه‌ای از N بار نقطه‌ای در فضا داشته باشیم در این مجموعه انرژی ذخیره می‌شود، به عبارتی دیگر می‌توان گفت برای تشکیل چنین سیستمی باید انرژی صرف نمود که مقدار این انرژی از رابطهٔ

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

بدست می‌آید که در این رابطه برای هر بار q_i مقدار پتانسیل ناشی از سایر بارها در آن نقطه، یعنی V_i را بدست می‌آوریم (خاطر نشان می‌شود که این انرژی می‌تواند مثبت یا منفی باشد).

در مواردی که توزیع پیوستهٔ باری با چگالی ρ داریم مقدار انرژی پتانسیل ذخیره شده در این مجموعه را می‌توان از رابطهٔ

$$W = \frac{1}{2} \int_{v'} \rho V dv$$

بدست آورد. V در رابطهٔ فوق نشانگر پتانسیل می‌باشد و dv عنصر حجم میباشد و انتگرال روی حجم V' که در آن ناحیه بار وجود داد گرفته می‌شود.

کمیت دیگری که می‌توان تعریف نمود چگالی انرژی الکتریکی w می‌باشد و می‌توان مقدار آن را از روابط زیر بدست آورد:

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon \mid \mathbf{E} \mid^2$$

$$w = \frac{1}{2}\frac{\mid \mathbf{D} \mid^2}{4}$$

با انتگرالگیری از w روی حجم مورد نظر می‌توان مقدار کل انرژی را محاسبه نمود یعنی:

$$W = \int_{v'} w dv$$

از کمیت چگالی انرژی الکتریکی می‌توان برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سطح در فصل مشترک دو محیط متفاوت استفاده نمود. بدین ترتیب نیروی وارد بر واحد سطح فصل مشترک دو محیط برابر اختلاف چگالی انرژی در دو محیط می‌باشد. و برای حاسبهٔ کل نیرو باید از این مقدار روی سطح مورد نظر انتگرال گرفت. پس

$$\text{نیروی وارد بر واحد سطح} = W_1 - W_2$$

www.IranMadar.tk
ایران مدار