انتگرال گیری از کسرهای گویا:

کسر گویا به کسری گوییم که صورت و مخرج آن چندجمله ای باشند؛ در این بخش به انتگرال گیری این توابع می پردازیم.

یک مطلب کمکی راجع به ساده کردن و تفکیک کسرها:

☑ **گام اول**: در صورت امکان صورت و مخرج را نسبت به هم ساده می کنیم.

☑ **گام دوم**: اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی مخرج باشد صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم و به جای آن کسر گزارش تقسیم را می نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} P' & Q \\ \hline -\ \ \vdots & T \\ P & \end{array} \Rightarrow \frac{P'}{Q} = T + \frac{P}{Q}$$

☑ **گام سوم**: اگر درجه صورت کوچکتر از درجه مخرج باشد، کسر را تفکیک می نماییم:

* الف) مخرج را به عبارات تحویل ناپذیر (عبارات درجه اول و درجه دوم با $\Delta < 0$) تجزیه می نماییم که در نهایت بصورت ضرب عوامل $(x-\alpha)^m$ و $(x^2+\mu x+\lambda)^n$ خواهد بود.

* ب) برای هر عامل $(x-\alpha)^m$، m کسر با مخرج های $(x-\alpha)$، $(x-\alpha)^2$ و ... و $(x-\alpha)^m$ با صورت های مجهول (عددی) A_1، A_2 و ... و A_m در نظر می گیریم؛
و برای هر عامل $(x^2+\mu x+\lambda)^n$، n کسر با مخرج های $(x^2+\mu x+\lambda)$ تا $(x^2+\mu x+\lambda)^n$ با صورت های مجهول درجه اول B_1x+C_1 تا B_nx+C_n در نظر می گیریم.

* ج) کسرهای نوشته شده در قسمت (ب) را مخرج مشترک گیری می نماییم و صورت حاصل را با صورت کسر اولیه در گام سوم متحد قرار می دهیم. دستگاهی بدست می آید که از آن تمام مجهولات A_i، B_i و C_i محاسبه می شوند.

* د) با جایگزینی مقادیر بدست آمده بجای مجهولات کسر تفکیک شده حاصل می گردد.

مثال (تفکیک کسر) : کسر زیر را تفکیک نمائید:

$$\frac{3x^3-7x^2+6x-12}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$\Delta<0$

حل: مخرج تجزیه شده می‌باشد ولذا ۳ کسر ساده‌تر نیاز داریم:

$$\frac{3x^3-7x^2+6x-12}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

x^2-2x+1

تک کسر لازم دارد

دو کسر لازم دارد

$$=\frac{Ax^3-Ax^2+4Ax-4A+Bx^2+4B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

متحد قرار دادن

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} x^3 \text{ ضریب} & \\ x^2 \;\;\text{"} & \\ x \;\;\text{"} & \\ \text{عدد ثابت} & \end{array} \begin{cases} 3=A+C \\ -7=-A+B-2C+D \\ +6=4A+C-2D \\ -12=-4A+4B+D \end{cases}$$

که باید دستگاه را حل نمود، یک راه کلی گذاشتن اعدادی (بخصوص ریشه‌های مخرج) به جای x و حل دستگاه مجهولات است. مثلاً در اینجا $x=1$ را جایگزین می‌نمائیم که صورتهای دو کسر عبارت

$-10=5B$

ولذا $\underline{B=-2}$ را می‌دهند. پس:

$$\begin{cases} 3=A+C & (*) \\ -5=-A-2C+D \\ 6=4A+C-2D \\ -4=-4A+D & (**) \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \\ \longrightarrow \\ \xrightarrow{\times 2} \end{array} \begin{cases} -3=-A-\cancel{C} \\ 6=4A+\cancel{C}-2D \\ -8=-8A+2D \end{cases}$$

$$(+)\qquad -5=-5A \Rightarrow \underline{A=1}$$

$$\Rightarrow (*):\ \underline{C=2} \Rightarrow (**):\ \underline{D=0}$$

که به نحوی درست در دوم نیز صدق می‌کنند. پس:

$$\frac{3x^3-7x^2+6x-12}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{2x}{x^2+4}.$$

انتگرال گیری از کسرهای گویا : اولویت با فرمول مشتق مخرج در صورت است. در غیر این صورت برای محاسبه این نوع مسائل ابتدا انتگرالده را به ساده ترین حالت (طبق نکات اول و دوم) و سپس تفکیک کسر (طبق نکات سوم) می نویسیم.

عبارات و کسرهای ساده تر ایجاد می شوند که به انتگرال گیری آنها می پردازیم:

* قالبهای کسرهای ساده و تفکیک شده *

۱/ $\int \frac{1}{x+\alpha}\,dx \longrightarrow$ مشتق مخرج در صورت

۲/ $\int \frac{1}{(x+\alpha)^n}\,dx \longrightarrow u=x+\alpha$ تغییر متغیر

۳/ $\int \frac{1}{\underbrace{x^2+\mu x+\lambda}_{\Delta<0}}\,dx$ یا $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a}$

تبدیل با مربع کامل

۴/ $\int \frac{1}{(x^2+\mu x+\lambda)^n}\,dx$ یا $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \overset{\text{فرمول تحویل}}{=} \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

تبدیل با مربع کامل

۵/ $\int \frac{x}{x^2+\mu x+\lambda}\,dx$

۶/ $\int \frac{x}{(x^2+\mu x+\lambda)^n}\,dx$

$\longrightarrow$ با ساخت مشتق عبارت درجه ۲ در صورت به فرم های بالا تبدیل می شوند.

مثال: انتگرال های زیر را حساب کنید

$$* \int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$$

تفکیک کسر: $\Delta>0 \Rightarrow x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$$\frac{x}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\begin{cases} x=-2 \Rightarrow -2=B(-5) \Rightarrow B=\frac{2}{5} \\ x=3 \Rightarrow 3=A(5) \Rightarrow A=\frac{3}{5} \end{cases}$$

حل انتگرال:

$$\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx=\int \frac{\frac{3}{5}}{x-3}+\frac{\frac{2}{5}}{x+2}\,dx=\frac{3}{5}\operatorname{Ln}|x-3|+\frac{2}{5}\operatorname{Ln}|x+2|$$

$$* \int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$$

$$\Delta<0 \Rightarrow x^2+4x+7=(x+2)^2-4+7$$ مربع کامل کردن

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+7}=\int \frac{dx}{\underbrace{(x+2)^2}_{\text{خطی}}+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}}$$

$$* \int \frac{2x^7+3x^4+x-6}{x^3-1}\,dx$$

تقسیم (درجه صورت بیشتر از مخرج) (گام دوم): $\int 2x^4+5x+6\,\frac{x-1}{x^3-1}\,dx=\frac{2x^5}{5}+\frac{5x^2}{2}+6\int \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}\,dx$

$$=\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2+6\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2\underbrace{-\frac{1}{4}+1}_{\to +\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2+6\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$* \int \frac{3x^3-7x^2+6x-12}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx = A$$

ص ۱۳۲

برای این مثال قبلاً تفکیک کسر را در مثال ۱ انجام دادیم لذا:

$$A=\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int (x-2)^{-2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

$$u=x-2 \Rightarrow \int u^{-2} = \frac{u^{-1}}{-1}$$

$$= \mathrm{Ln}|x-1| - 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \mathrm{Ln}(x^2+4)\ . \ \square$$

$$* \int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx = B$$

تفکیک کسر:
$$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{x^2}{(x^2+4)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

پس از محاسبه

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} 0 = C+A+B \\ 1 = D+2A-2B \\ 0 = -4C+4A+4B \\ 0 = -4D+8A-8B \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C=0 \\ D=\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{8} \\ B=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

انتگرال:

$$B=\int \frac{1}{8}\frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-1}{8}\frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\mathrm{Ln}|x-2| - \frac{1}{8}\mathrm{Ln}|x+2| + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2}\ . \ \square$$

$$* \int \frac{3x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx = A$$

تفکیک :
$$\frac{3x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{\overset{1}{A}}{x} + \frac{\overset{-1}{B}x+\overset{0}{C}}{x^2+2} + \frac{\overset{1}{D}x+\overset{1}{E}}{(x^2+2)^2}$$

انتگرال :
$$A = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+2}\times\frac{2}{2}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\times\frac{2}{2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

ت.ج : $u = x^2+2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1}$

فرمول تکرار

$$= Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+2}\,dx$$

$$= Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$$

یادآوری فرمول تکرار :
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$