سیگنال و سیستم

(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)

۱۳-۱۱-۱۱۸

بخش نخست

پیش‌گفتار

سیگنال‌های پایه

عوارض سیگنال

خصوصیات سیستم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

فهرست مطالب (ادامه...)

- تبدیل‌ها
- سیگنال‌های پایه
- خواص سیگنال
- خواص سیستم‌ها
  - حافظه‌دار بودن
  - پایداری
  - معکوس‌پذیری
  - علی بودن
  - خطی بودن
  - تغییر ناپذیر با زمان

دیباچه

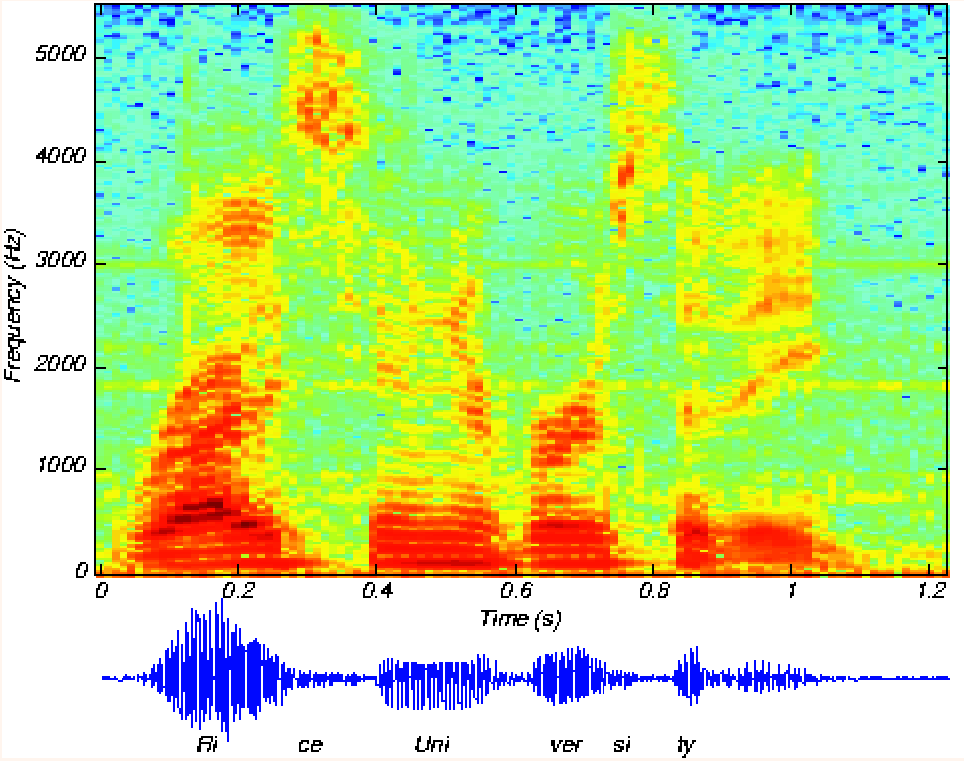
- مفاهیم مرتبط با این درس در زمینه‌های گوناگونی از علوم و فناوری کاربرد دارند؛ زمینه‌های نظیر انتقال داده، طراحی مدار، هوانوردی، مهندسی پزشکی، سیستم‌های توزیع قدرت، مهندسی کنترل، پردازش تصویر، صوت و ویدئو
- هرچند ذات کاربردهای گفته شده در بالا با هم متفاوت است، در دو مفهوم اشتراک دارند: «سیگنال و سیستم»

کاربردها

- در بسیاری از کاربردها می‌خواهیم بدانیم پاسخ یک سیستم به یک سیگنال چگونه است.
  - پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس سیستم اقتصادی
  - پاسخ یک مدار به یک سیگنال ورودی
- در مواردی می‌خواهیم سیستمی طراحی کنیم که به سیگنال‌های خاص پاسخ مشخصی داشته باشد.
  - طراحی سیستمی برای بازیابی سیگنال
  - ارتقاء کیفیت سیگنال (سیگنال‌های تصویر)
- بهبود کارایی یک سیستم توسط ترکیب با سیستم‌های دیگر

موضوع درس

- در این درس با ابزارهایی آشنا می‌شویم که ما در دستیابی به اهداف فوق یاری کند.



تذکرات تکراری ولی مهم

- در صورتی که در رابطه با مطلبی، ایمیل می‌زنید، لطفا در پایان ایمیل نام خود را هم بنویسید، به ویژه اگر از نام مستعار برای شناسه‌ی ایمیل خود استفاده می‌کنید.
- نام درس [و گروه] فراموش نشود.
- یکی از مهمترین مواردی که رعایت آن بر عهده‌ی ماست، رعایت «اخلاق آکادمیک» است. کپی کردن تکالیف، استفاده از مطلبی بدون ذکر منبع و هم‌فکری در امتحان از موارد بارز تخلف محسوب می‌شود.
- توجه داشته باشید، برای نمره گرفتن همراه آوردن والدین سودی ندارد.
- از نوشتن به صورت فینگیلیش بپرهیزید.

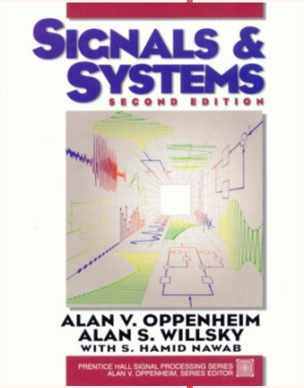
بارم‌بندی

- تکالیف ٪۱۵
- کوییزها ٪۱۰
- میان‌ترم ٪۲۵-۳۰
- پایان‌ترم ٪۴۰-۵۰

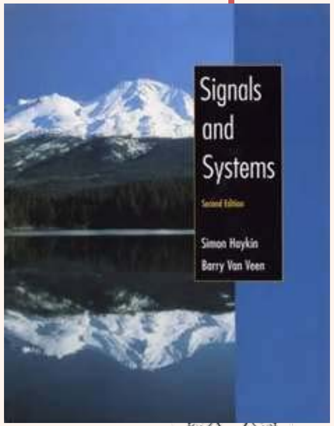
توجه: بارم‌بندی فوق تقریبی است و با توجه به شرایط قابل تغییرات است.

تحویل ندادن تکالیف و شرکت نکردن در کوییزها نمره‌ی منفی دارد.

منابع



- Signals and Systems, Oppenheim & Willsky

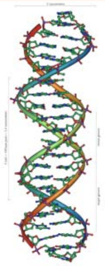


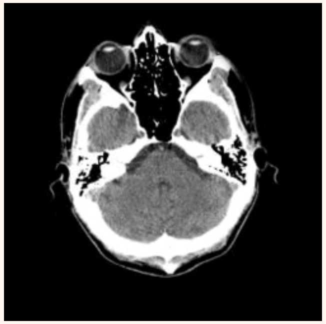
- Signals and Systems, Haykin & Van Veen

- برای این درس از منابع online مانند اسلایدهای MIT نیز استفاده شده است.

سیگنال چیست؟

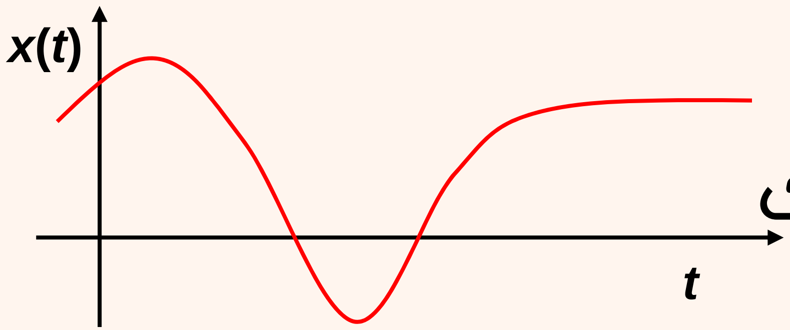
- سیگنال تابعی از متغیرهای مستقل حاوی اطلاعات در مورد یک پدیده‌ی فیزیکی است، مانند
  - سیگنال‌های الکتریکی: جریان و ولتاژ
  - سیگنال‌های صوتی: سیگنال صحبت که هم می‌تواند به صورت آنالوگ و یا دیجیتال باشد.
  - سیگنال‌های ویدئویی: میزان روشنایی پیکسل‌ها در یک فریم از ویدئو
  - سیگنال‌های زیستی: سیگنال‌های مغزی، سیگنال‌های قلب





سیگنال‌های پیوسته

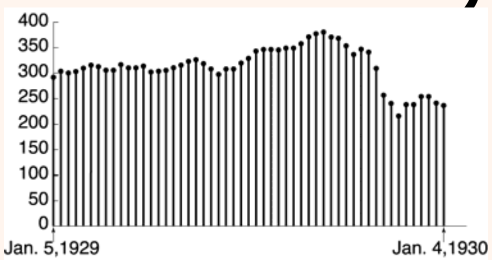
- این متغیرهای مستقل می‌توانند پیوسته و گسسته باشند.
- بیشتر سیگنال‌های فیزیکی از نوع «**پیوسته**» هستند:
  - سیگنال صوتی
  - سرعت
  - دما
  - میزان رطوبت
  - مسیر حرکت یک موشک



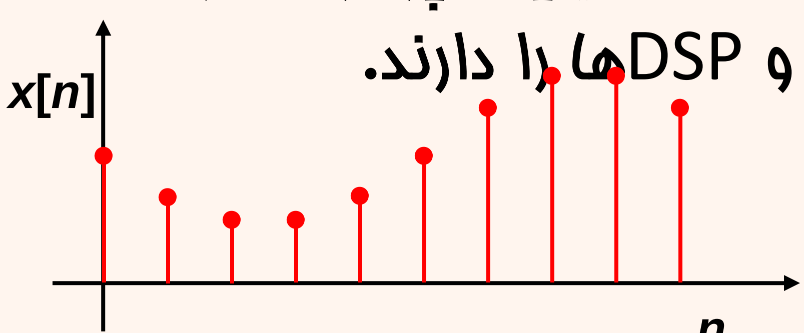
Discrete-Time (DT) signals:

سیگنال‌های گسسته

- برخی سیگنال‌ها ماهیتی گسسته دارند:
  - شاخص سهام در هر روز



- برخی با نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته به دست می‌آیند.
  - تصاویر دیجیتال
- چرا از سیگنال‌های گسسته استفاده می‌شود؟
  - این سیگنال‌ها قابلیت پردازش توسط کامپیوترهای پیشرفته و DSPها را دارند.

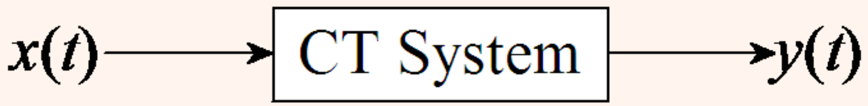


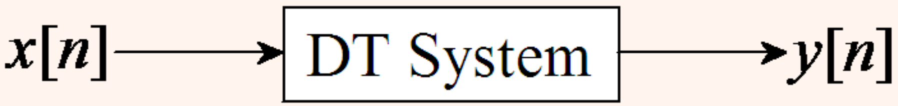
ابعاد سیگنال

- سیگنال‌های می‌توانند یک‌بعدی، دوبعدی، ... و n بعدی باشند.
  - سیگنال یک بعدی: سیگنال صوت
  - سیگنال دو بعدی: تصویر
- در این درس تمرکز ما بر روز سیگنال‌های یک‌بعدی است.
- این اصول برای استفاده در سیگنال‌های چند بعدی قابل تعمیم هستند.

سیستم

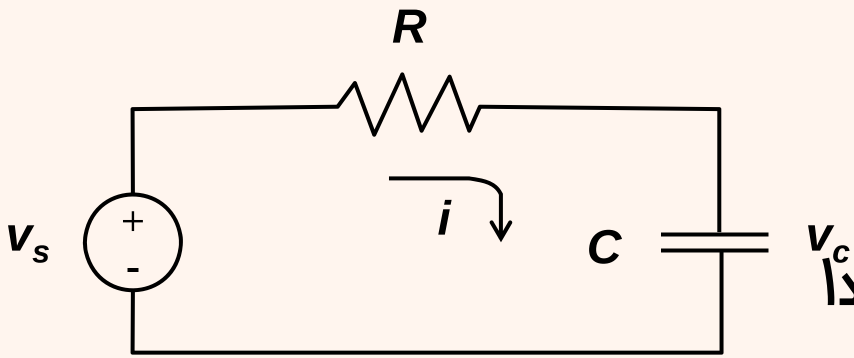
- یک سیستم، در پاسخ به یک سیگنال ورودی، یک سیگنال به عنوان خروجی دارد.
- مشخصات سیستم بر سیگنال خروجی اثر گذار است.

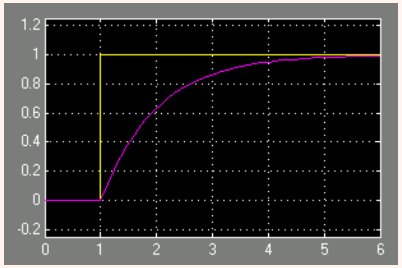




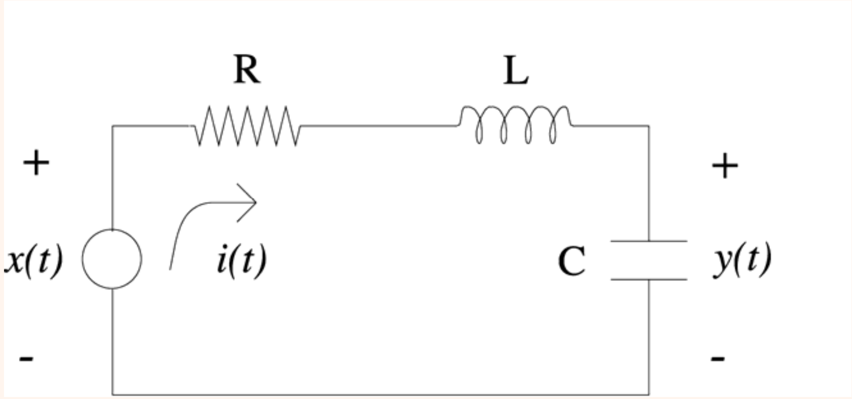
مثال‌های از سیستم

- مثال‌های متنوعی از سیستم می‌توان ارائه کرد.
  - یک مدار RCL
  - یک سیستم کنترلی
  - سیستم حذف نویز از صدا
  - سیستم حذف اکو از صدا
  - الگوریتم پیش‌بینی قیمت سهام
  - یک تشخیص دهنده‌ی لبه در تصاویر دیجیتال
  - یک بهبوددهنده‌ی کیفیت تصویر
  - یک فشرده‌ساز تصویر یا ویدئو





یک مدار RLC



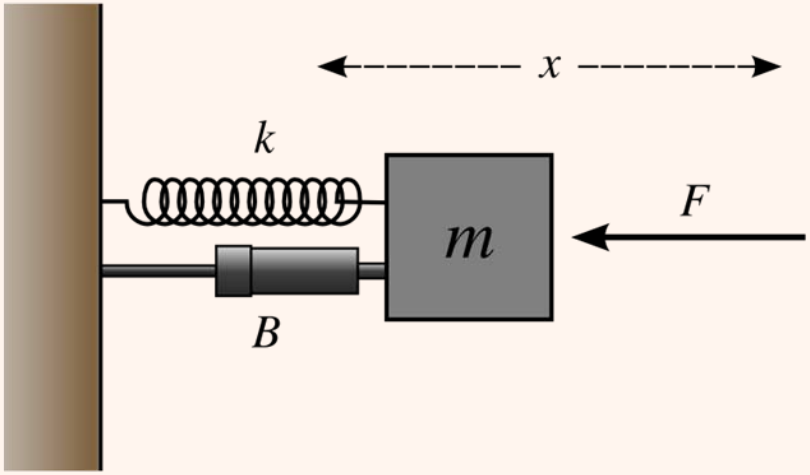
$$R\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

یک سیستم مکانیکی(جرم-فنر-میراگر)



$x(t)$ - applied force

K - spring constant

D - damping constant

$y(t)$ - displacement from rest

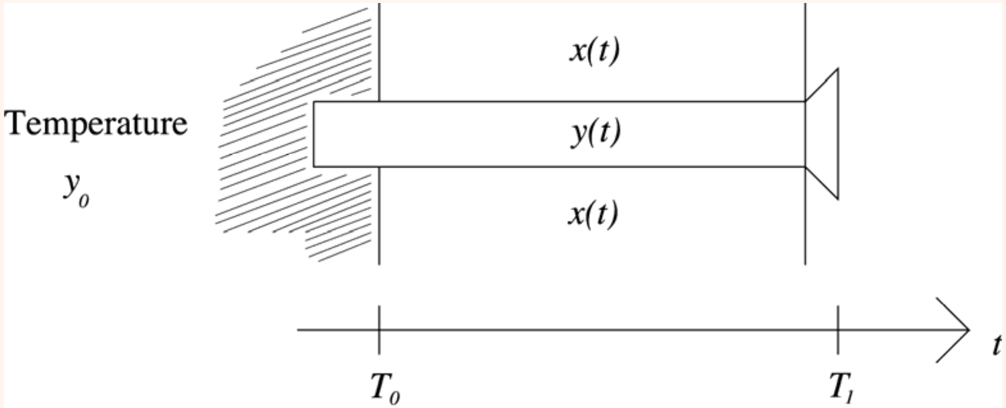
$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - \mathrm{K}y(t) - \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{K}y(t) = x(t)$$

یک سیستم فیزیکی کاملا متفاوت، دارای مدل ریاضی کاملا یکسانی است.

یک سیستم حرارتی



t = distance along rod

$y(t)$ = Fin temperature as function of position

$x(t)$ = Surrounding temperature along the fin

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= k[y(t)-x(t)] \\
y(T_0) &= y_0 \\
\frac{dy}{dt}(T_1) &= 0
\end{aligned}
$$

متغیر مستقل سیگنال می‌تواند چیزی جز زمان باشد، به عنوان نمونه مکان

یک سیستم آشکارساز لبه

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\ &= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\ &= \text{“Second difference”} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcl} (a) & x[n] = n & \Rightarrow & y[n] = 0 \\ (b) & x[n] = nu[n] & \Rightarrow & y[n] \end{array}$$

توان و انرژی سیگنال

- انرژی سیگنال زمان پیوسته:

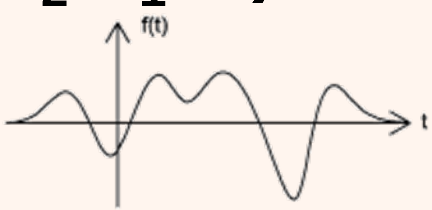
$$E = \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) \right|^2 dt$$

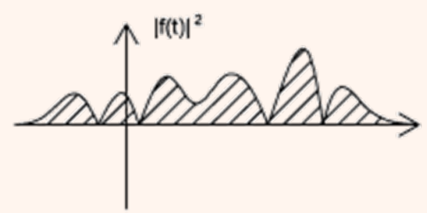
- انرژی سیگنال زمان گسسته:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x[n] \right|^2$$

- برای محاسبه‌ی توان، انرژی بر بازه‌ی زمانی تقسیم می‌شود.

$(t_2 - t_1)$ $\quad$ $(n_2 - n_1 + 1)$

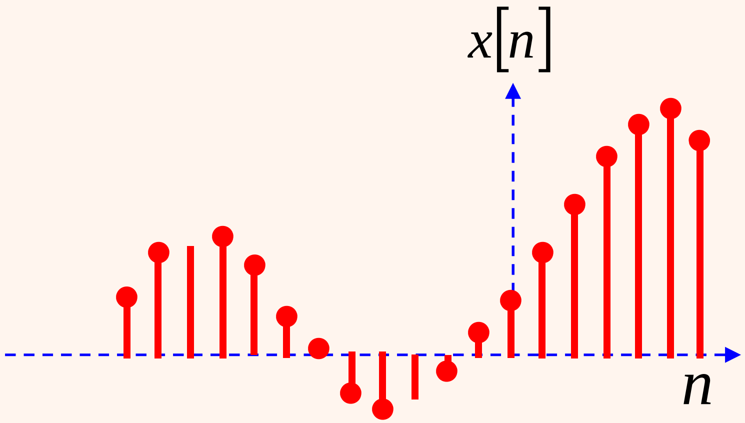


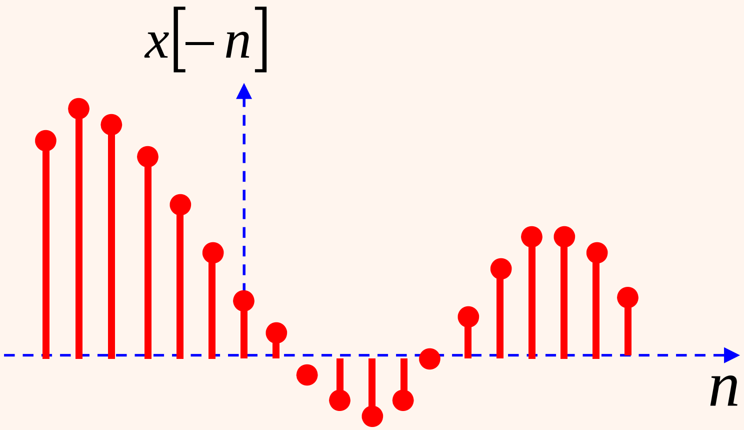


Time reversal

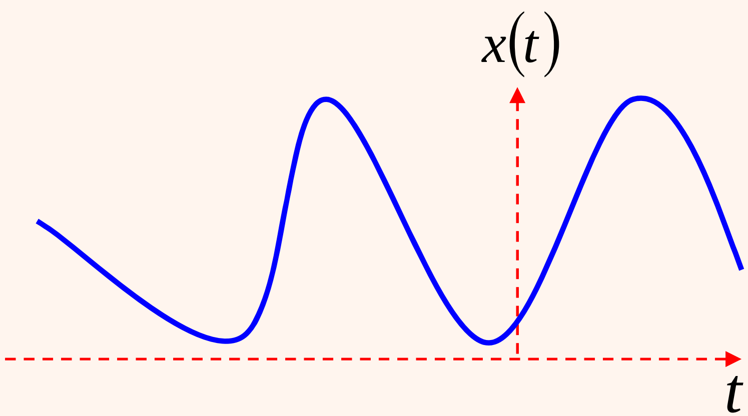
تبدیل سیگنال- قرینه‌سازی

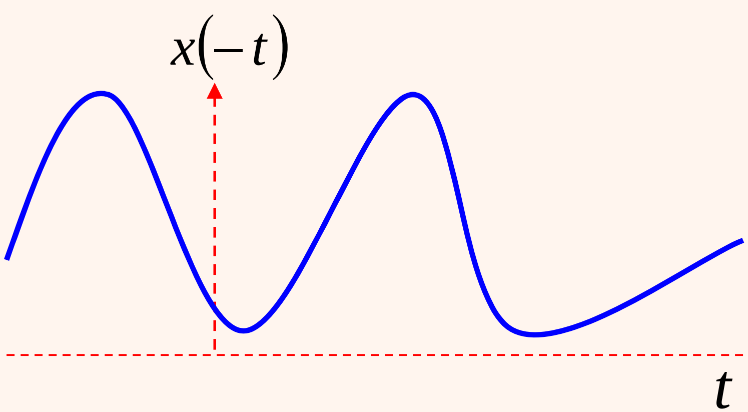
$x[n] \rightarrow x[-n]$





$x(t) \rightarrow x(-t)$

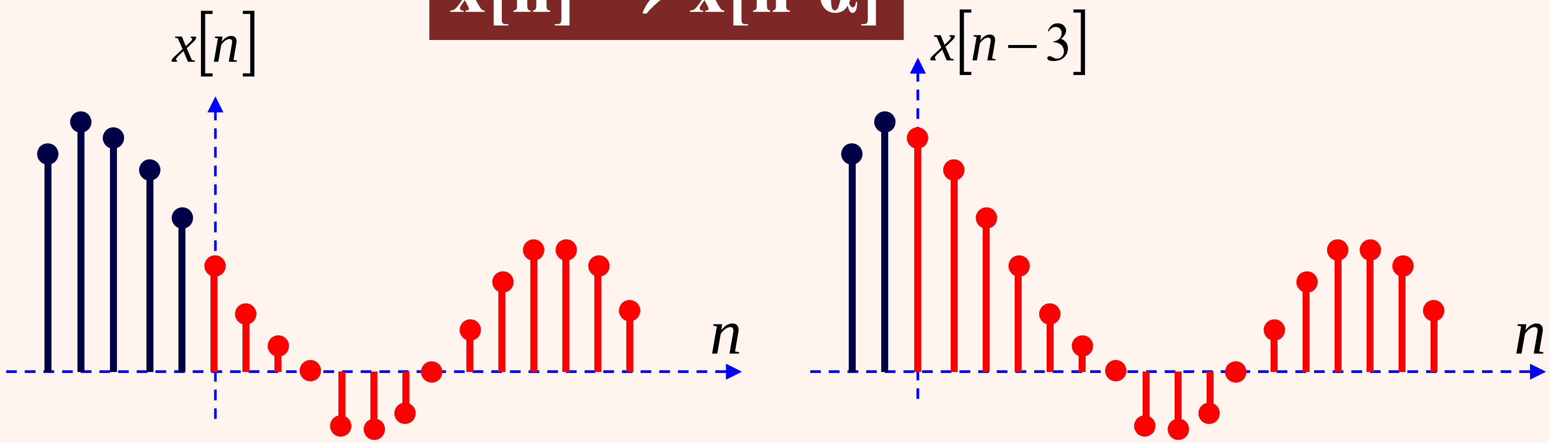




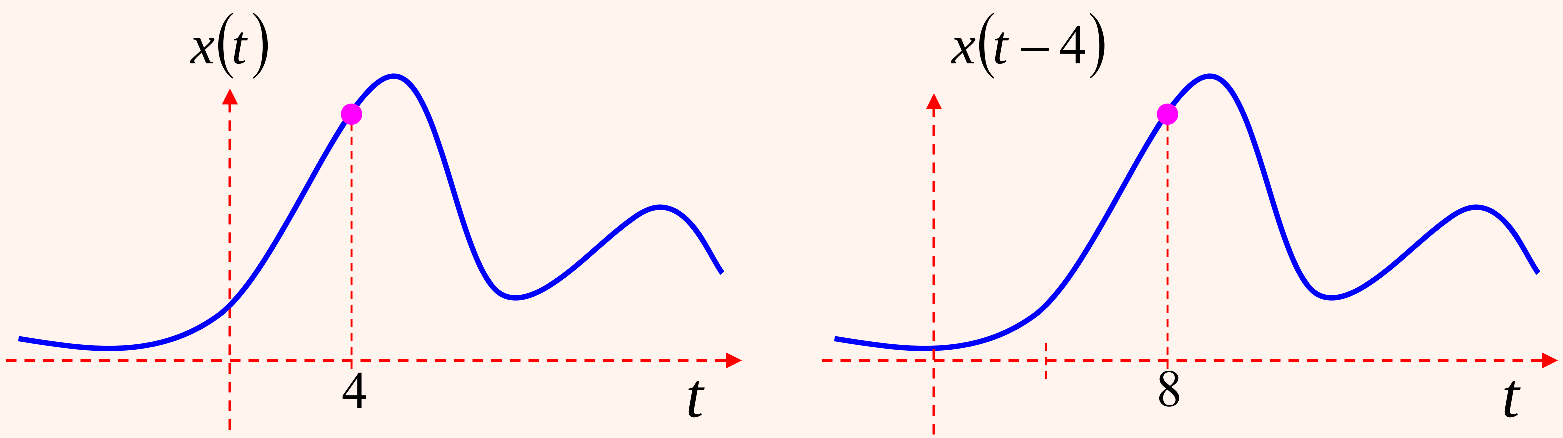
Time shift

تبدیل سیگنال- انتقال

$x[n] \rightarrow x[n-\alpha]$

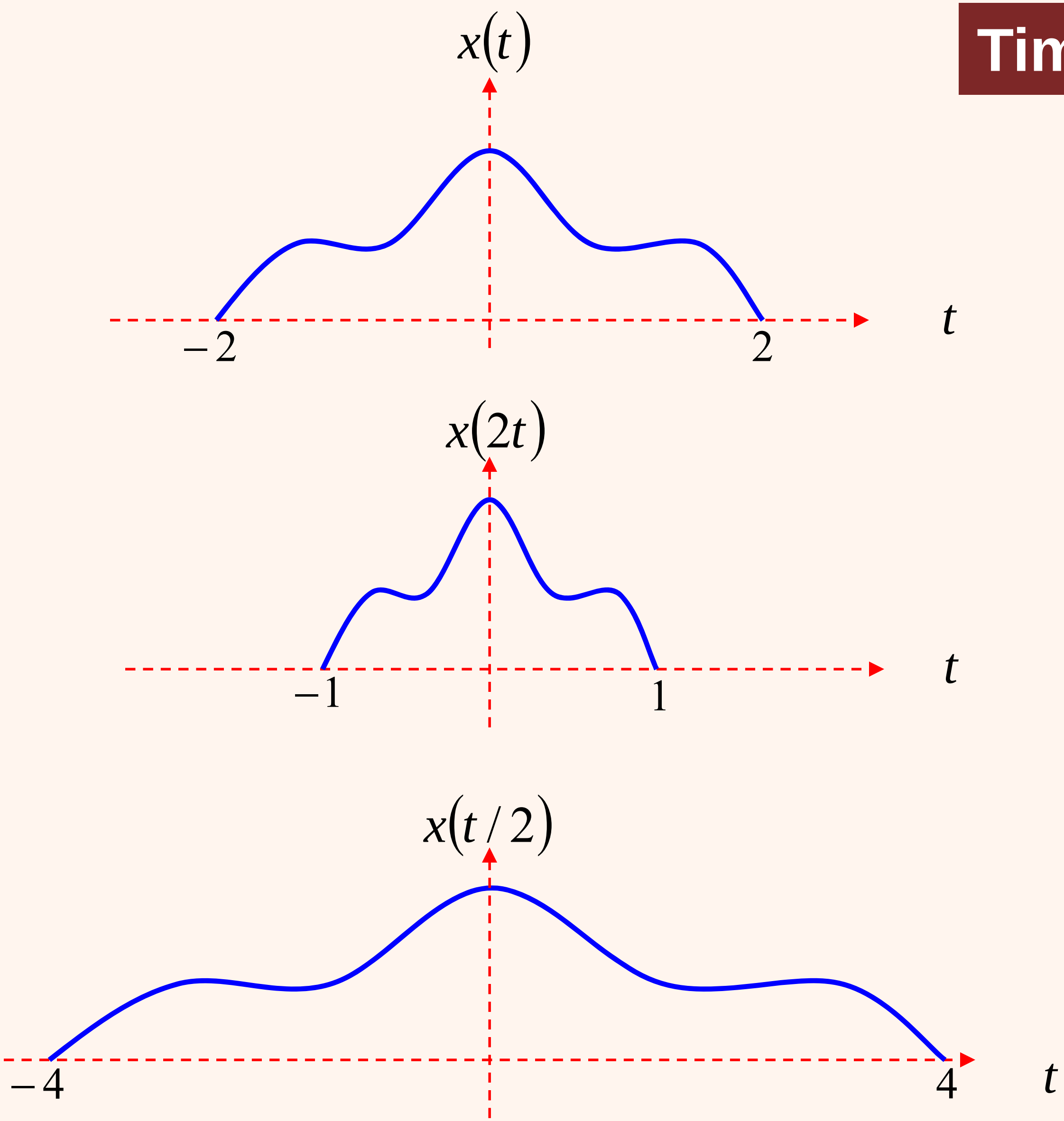


$x(t) \rightarrow x(t-\alpha)$

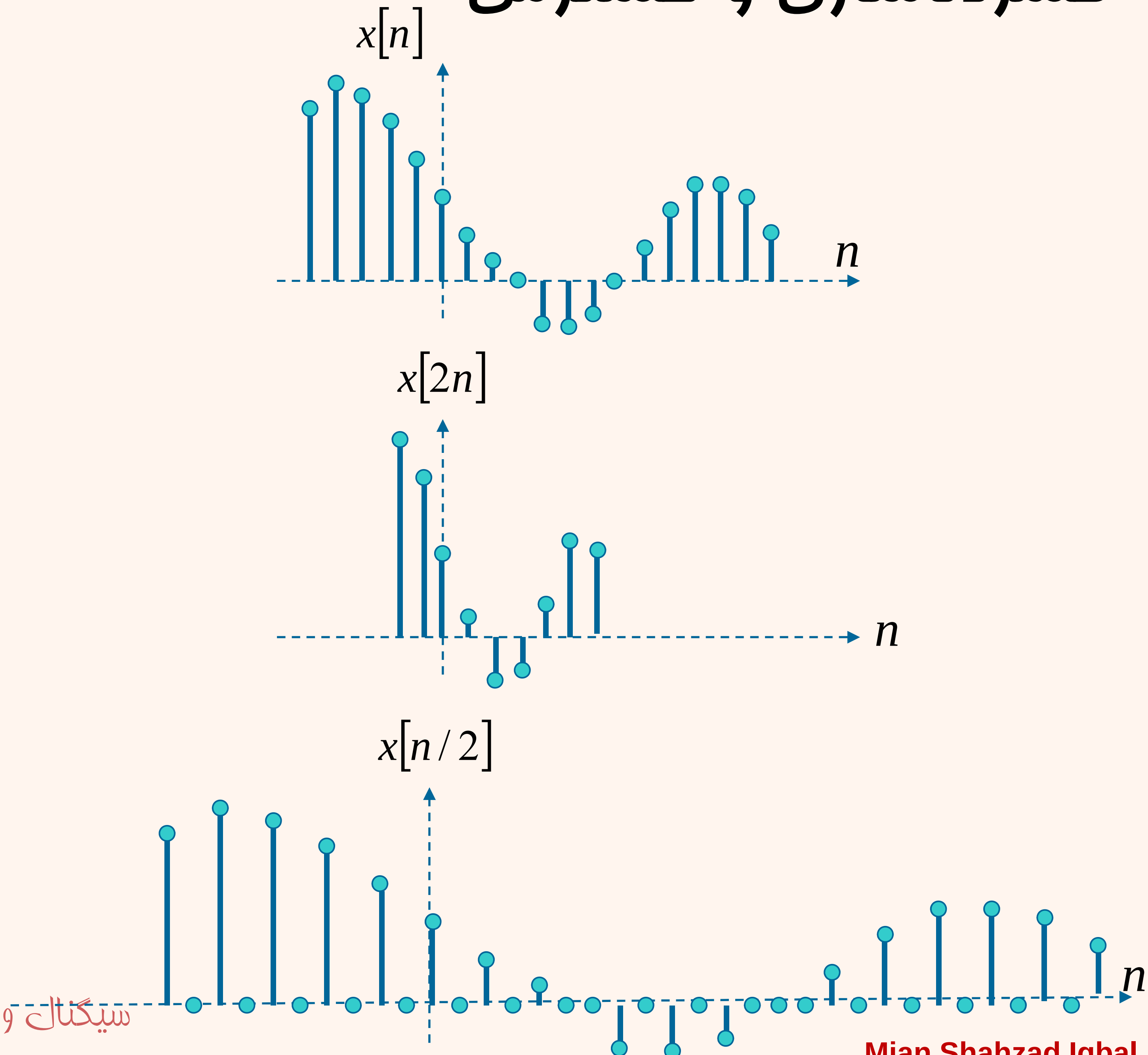


تبدیل سیگنال- فشرده‌سازی و گسترش

Time scaling

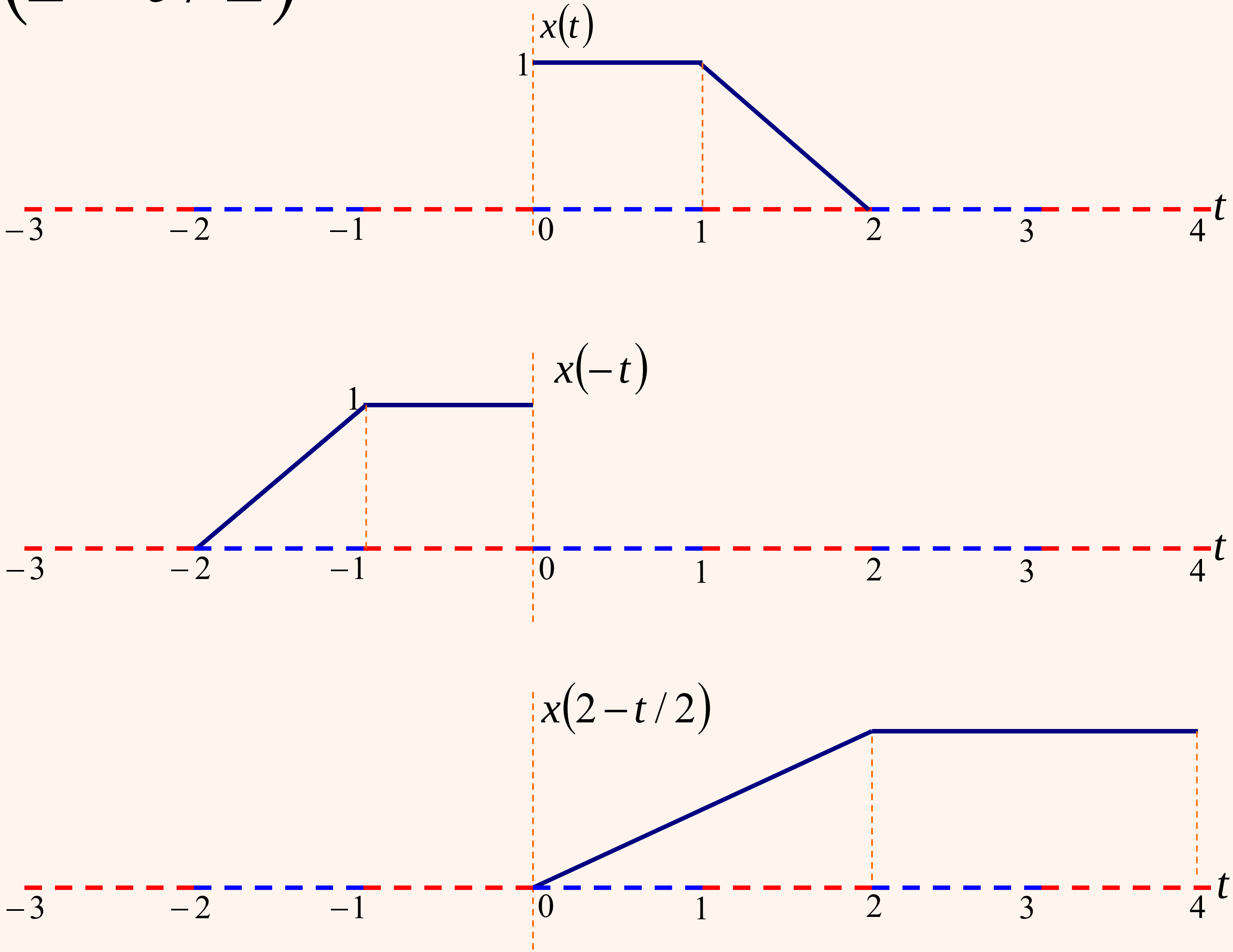


فشرده‌سازی و گسترش



مثال:

$$x(2-t/2)$$



ترکیب تبدیل‌ها

۲ ۱

$$y(t) = x(\alpha t+\beta)$$

- بررسی برخی نقاط خاص می‌توانید در یافتن تبدیل‌ها به ما کمک کنید:

$$y(-\beta/\alpha) = x(0) \qquad y(0) = x(\beta)$$

- از طرفی می‌توان این گونه استدلال کرد: در تغییر مقیاس به جای t، αt قرار می‌دهیم، در حالی که شیفت زمانی مقدار t را با $t-\beta$ جایگزین می‌کنیم، از این رو تغییر مقیاس اولویت دارد.

- به گونه‌ای دیگر نیز می‌توان استدلال کرد.

$$y(t_0) = x(\alpha t_0+\beta)=x(t_x)$$

$$t_0=(1/\alpha)(t_x-\beta) \qquad \alpha t_0+\beta=t_x$$

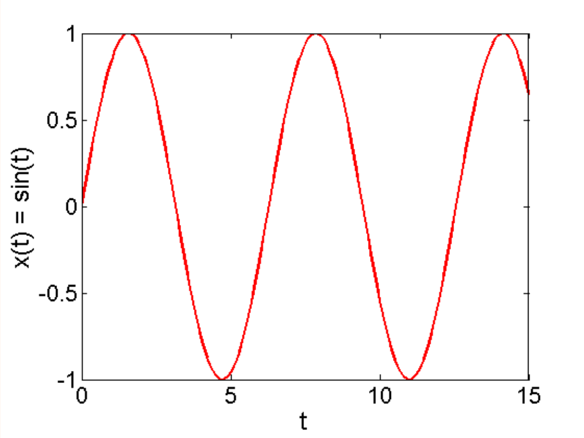
Periodic Signals

سیگنال‌های متناوب

- یکی از مهمترین دسته از سیگنال‌ها، سیگنال‌های متناوب هستند.

where T_0>0, for all t. $x(t) = x(t + T_0)$

where N_0>0, for all n. $x[n] = x[n + N_0]$



- مثال:

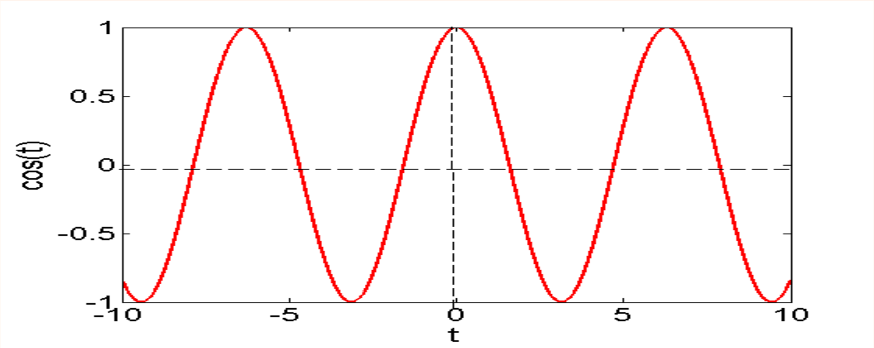
$\cos(t+2\pi) = \cos(t)$
$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$

Odd and Even Signals

سیگنال‌های زوج و فرد

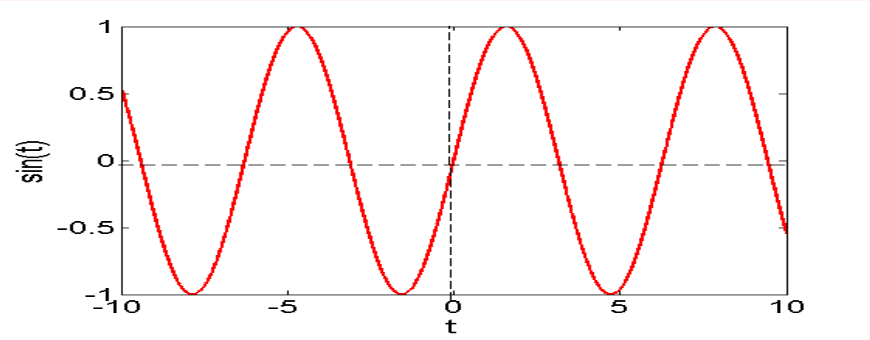
- سیگنالی زوج است که با معکوس خود برابر باشد.

$$x(-t) = x(t)$$



- سیگنالی فرد است که قرینه‌ی معکوسش باشد.

$$x(-t) = -x(t)$$



سیگنال‌های زوج و فرد (ادامه...)

- مثال:

- x(t) = cos(t)
- x(t) = sin(t)
- x(t) = c
- x(t) = t

- هر سیگنال را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال زوج ویک سیگنال فرد نوشت.

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$$

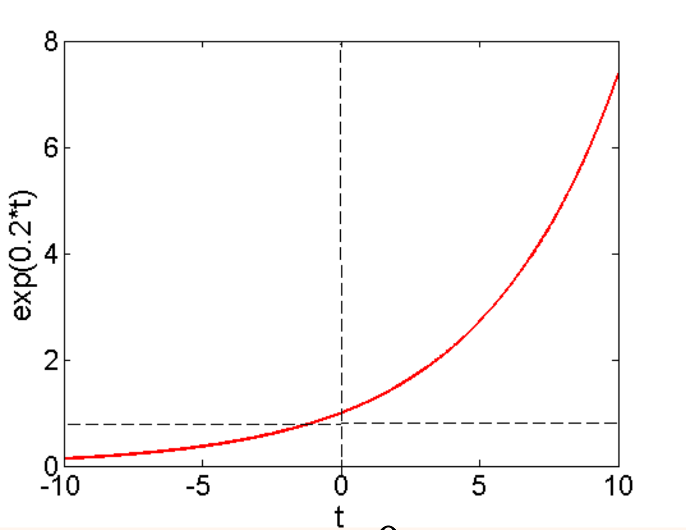
$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

معرفی سیگنال‌های پایه

سیگنال‌های نمایی

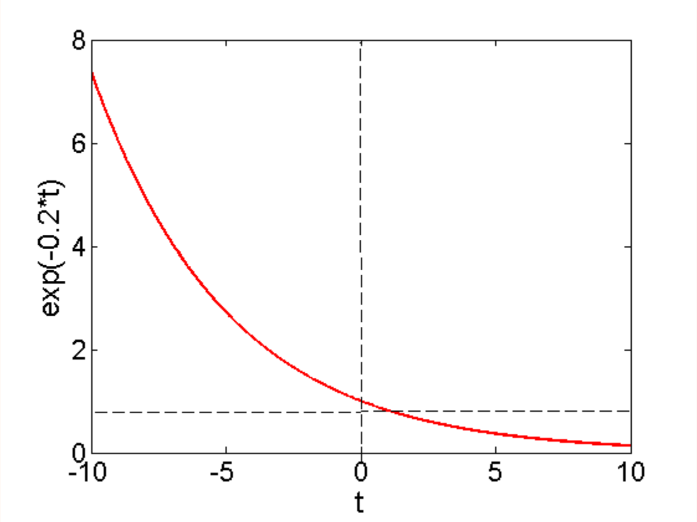
- در طبیعت بسیاری از سیگنال‌های بدین‌صورت هستند.

$$x(t) = Ce^{at}$$



$a > 0$

$C > 0$



$a < 0$

$C > 0$

سیگنال‌های نمایی و سینوسی

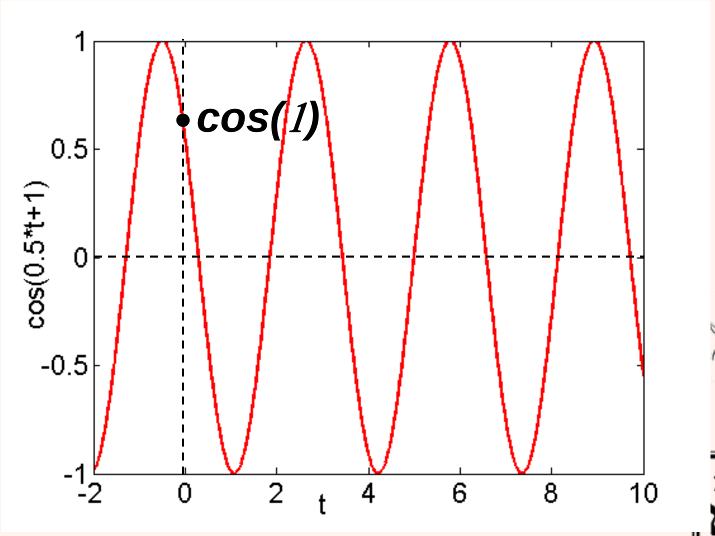
$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

Euler's relationship

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = \cos\omega_0 (t+T) + j\sin\omega_0 (t+T)$$
$$= \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t = e^{j\omega_0 t}$$

when $T=2\pi/\omega_0$

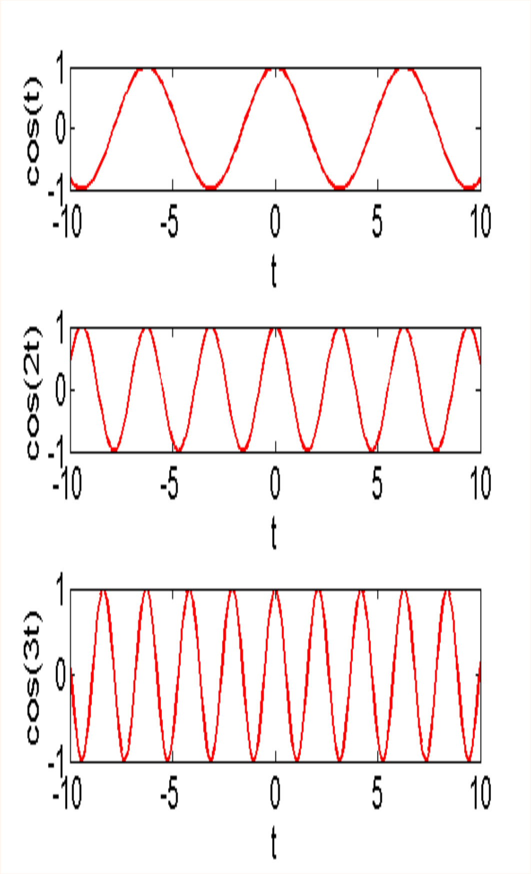


$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\Re\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)}\right)$$
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = A\Im\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)}\right)$$

$T_0 = 2\pi/\omega_0$
$= \pi$

هارمونیک

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



- در تحلیل سیگنال‌ها این دسته از توابع نقش مهمی ایفا می‌کنند.
- توابع فوق دارای یک دوره‌ی تناوب مشترک $2\pi/\omega_0$ هستند.

سیگنال‌های سینوسی گسسته

$$x[n] = e^{j\omega_o n}$$

$$e^{j\omega_o n} = \cos\omega_o n + j\sin\omega_o n$$

$$A\cos(\omega_o n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_o n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}$$

$$A\sin(\omega_o n + \phi) = \frac{A}{2j}e^{j\phi}e^{j\omega_o n} - \frac{A}{2j}e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}$$

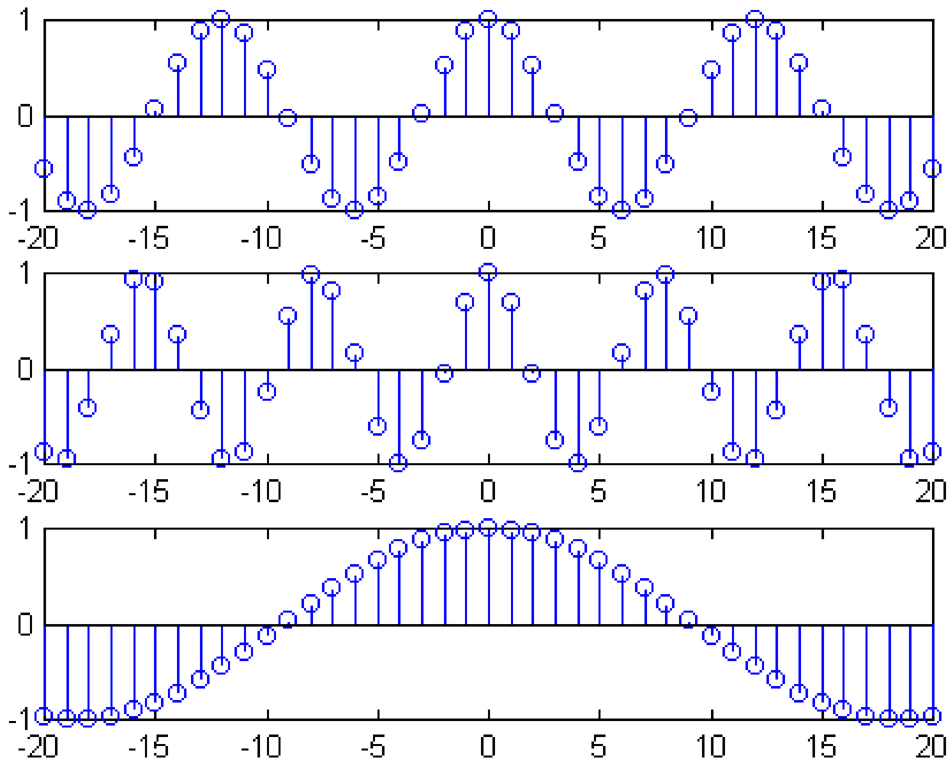
مثال

دوره‌ی تناوب سیگنال‌های زیر چیست؟

$$x[n] = \cos(2\pi n / 12)$$

$$x[n] = \cos(8\pi n / 31)$$

$$x[n] = \cos(n / 6)$$



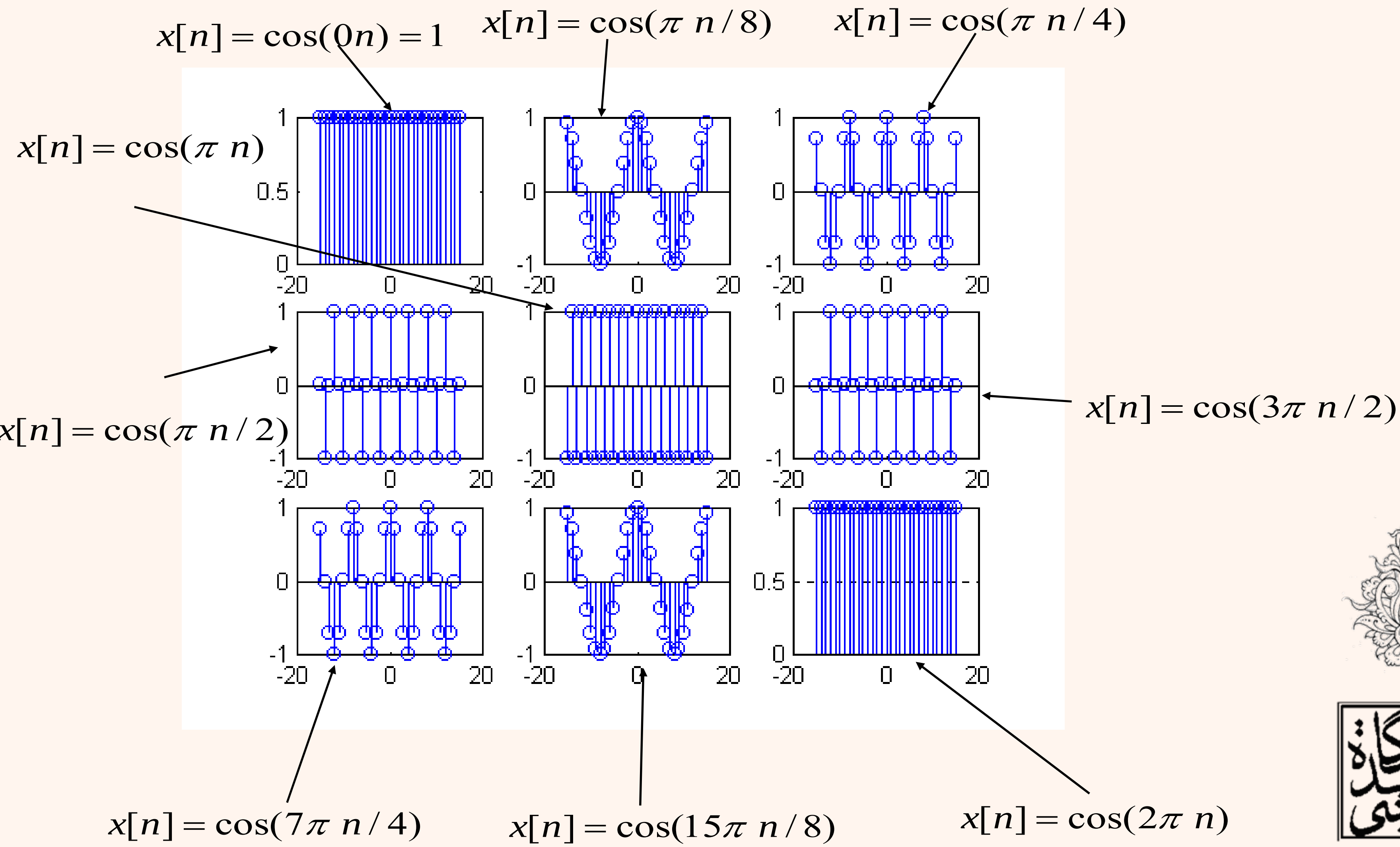
تناوب در سیگنال‌های گسسته‌ی سینوسی

- در سیگنال‌های سینوسی پیوسته $e^{j\omega_o t}$
  - هر چه مقدار ω_0 افزایش یابد، نرخ تغییرات بیشتر خواهد شد.
  - به ازای هر ω_0 سیگنال متناوب است.
- در سیگنال‌های سینوسی گسسته $e^{j\omega_o n}$

$$e^{j(\omega_o+2\pi)n}=e^{j2\pi n}e^{j\omega_o n}=e^{j\omega_o n}$$

- یعنی دو فرکانس ω_0 و $\omega_0+2\pi$ در عمل با هم برابر هستند!

تناوب در توابع گسسته‌ی سینوسی



تناوب در توابع گسسته‌ی سینوسی

$$e^{j\omega_o (n+N)} = e^{j\omega_o n}$$

$$e^{j\omega_o N} = 1$$

$$e^{j\omega_o (n+N)} = e^{j\omega_o n}$$

$$\omega_o N = 2\pi\, m$$

$$\frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

تناوب در توابع گسسته‌ی سینوسی

$x[n] = \cos(2\pi n / 12)$

periodic because $\omega_o = 2\pi / 12$,

$$\frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{12}$$

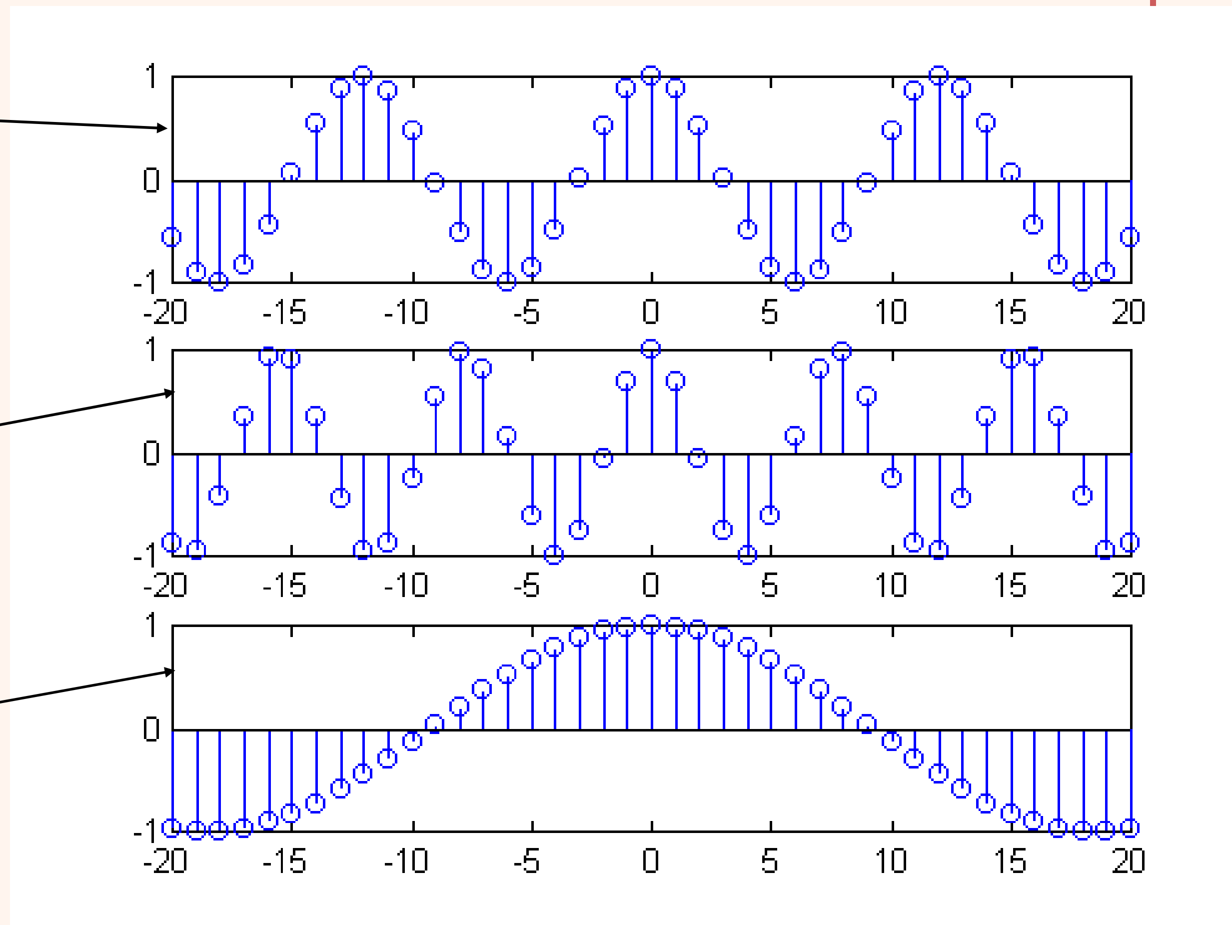
$x[n] = \cos(8\pi n / 31)$

periodic because $\omega_o = 8\pi / 31$, $\dfrac{\omega_o}{2\pi} = \dfrac{4}{31}$

$x[n] = \cos(n / 6)$

not periodic because $\omega_o = 1/6$,

$$\frac{\omega_o}{2\pi} \neq \text{rational number}$$



Harmonically related periodic exponential sequence

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \text{ for } k = 0, \pm 1, \ldots$$

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{jk}(2\pi/\mathrm{N})\mathrm{n}} e^{j2\pi n} = \phi_k[n]$$

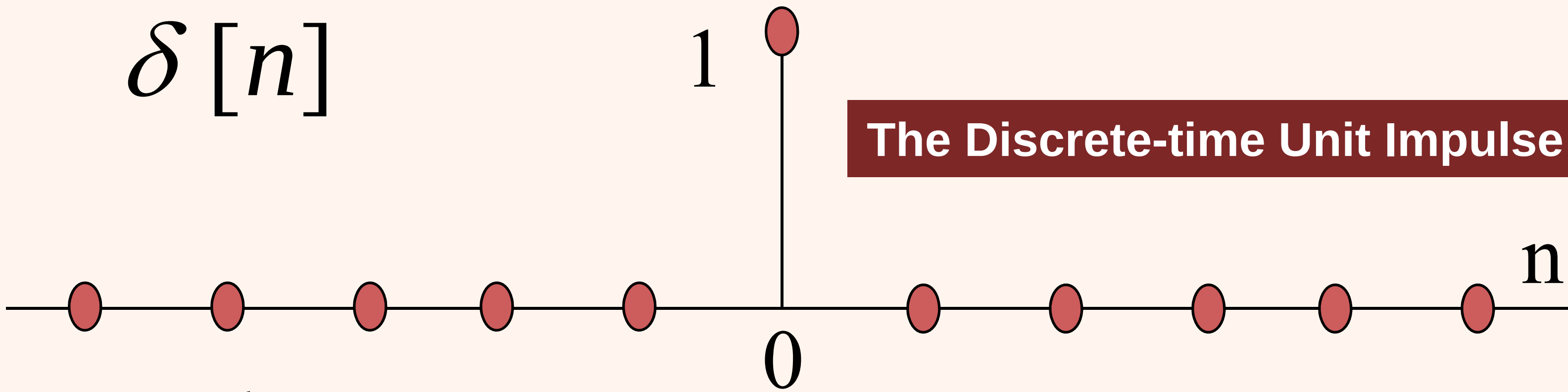
$$\phi_o[n] = 1, \phi_1[n] = e^{j2\pi n/N}, \phi_2[n] = e^{j4\pi n/N},$$

$$\ldots\ldots\phi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

سیگنال‌های زمان گسسته

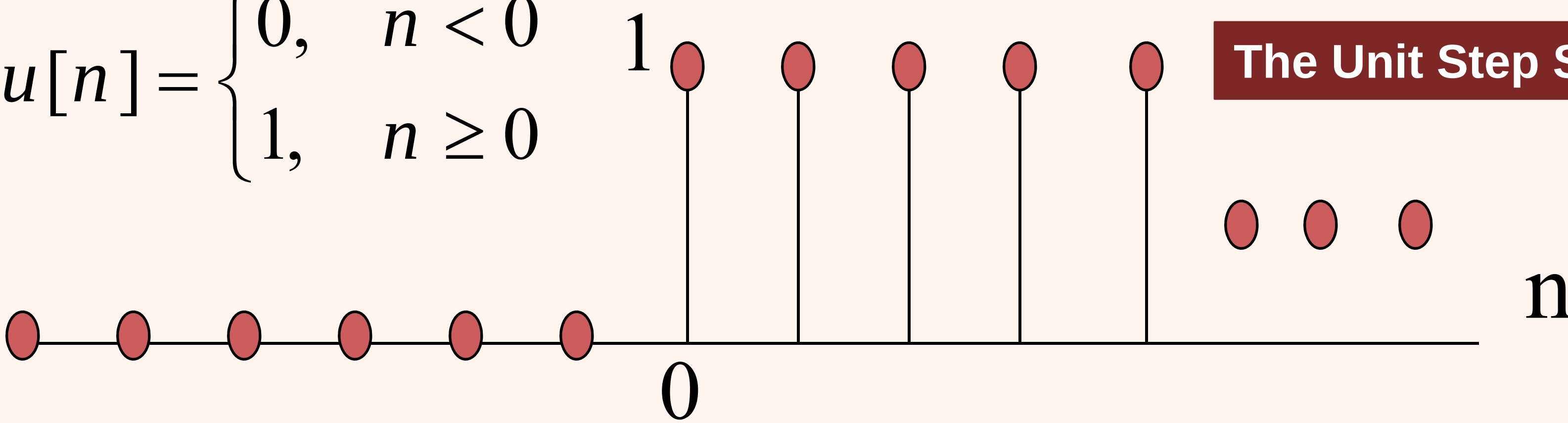
$\delta[n]$

The Discrete-time Unit Impulse Sequence



The Unit Step Sequence

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



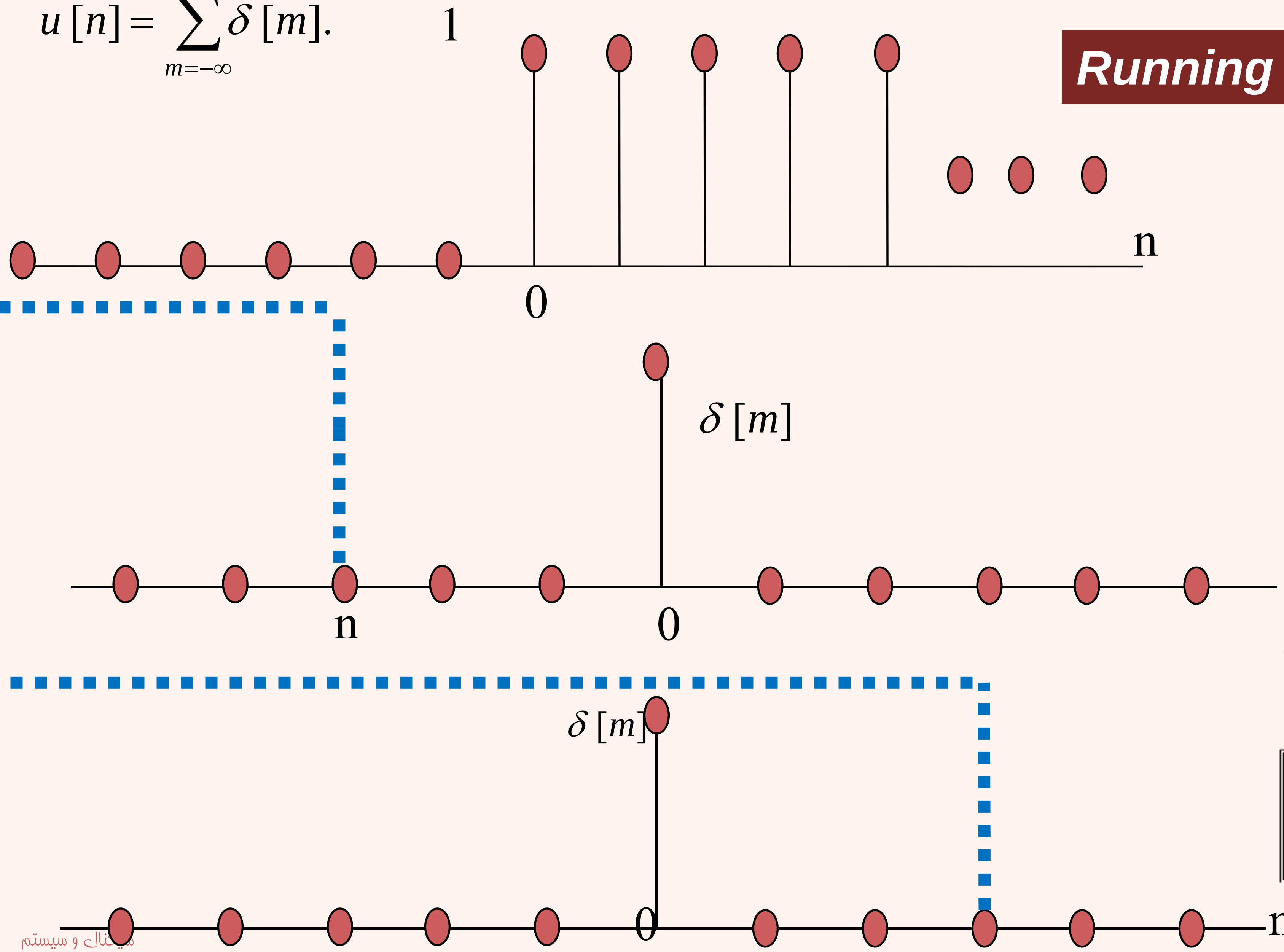
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m].$$

سیگنال‌های زمان گسسته

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m].$$

Running sum



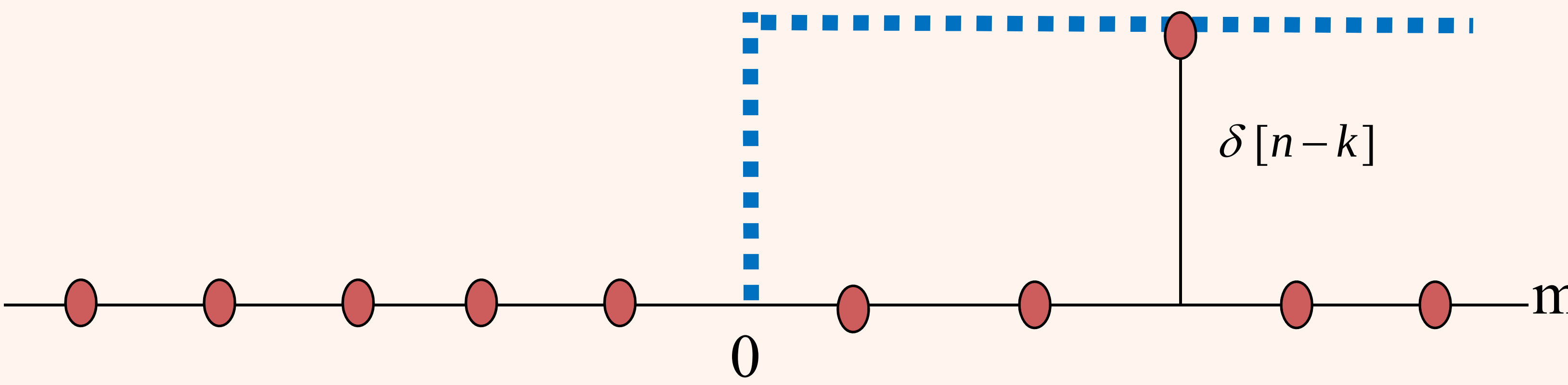
سیگنال‌های زمان گسسته

k = n-m,

m = n-k.

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k],$$

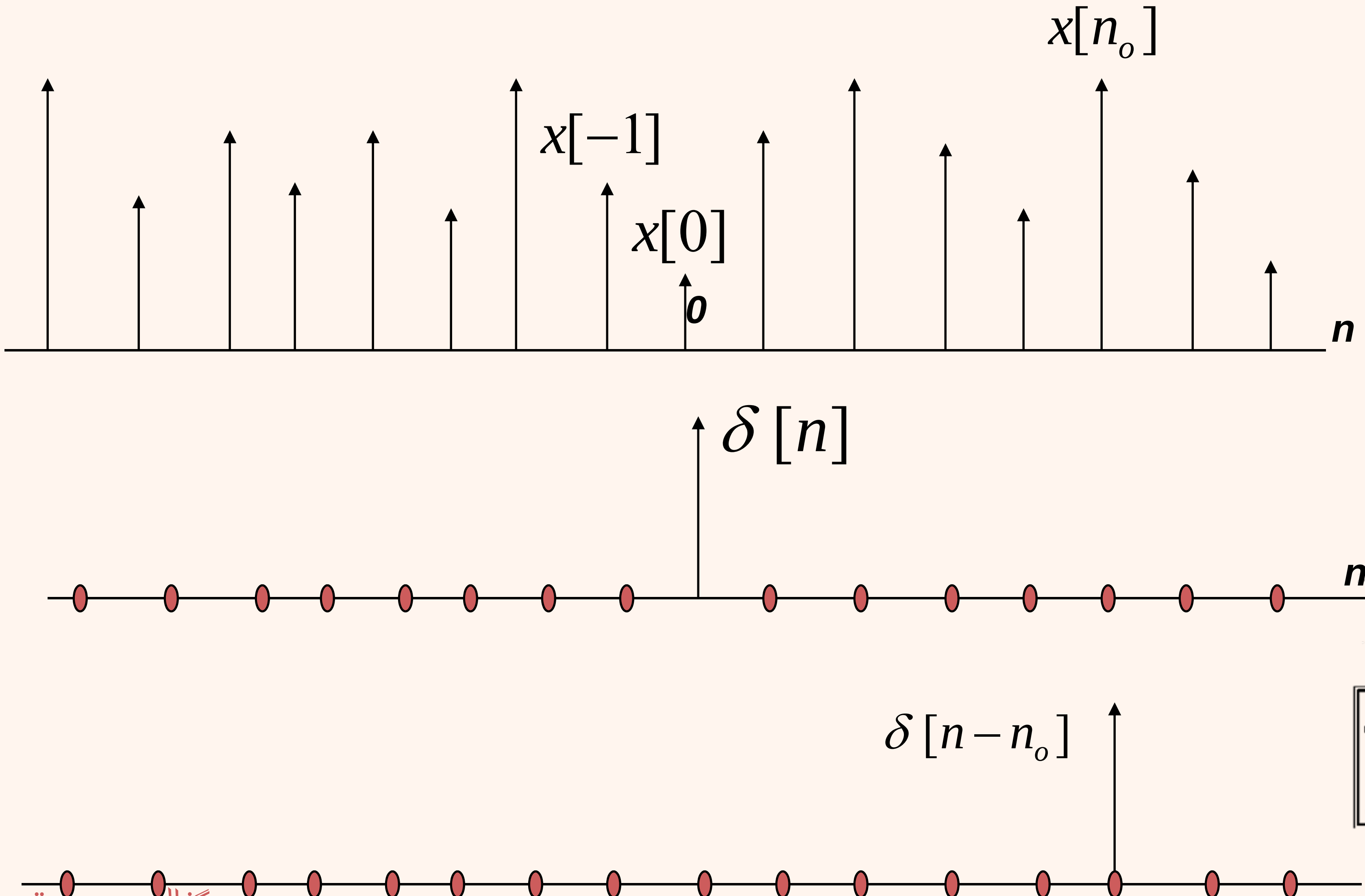
$$\text{or } u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$



غربال‌گری(نمونه‌برداری)

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

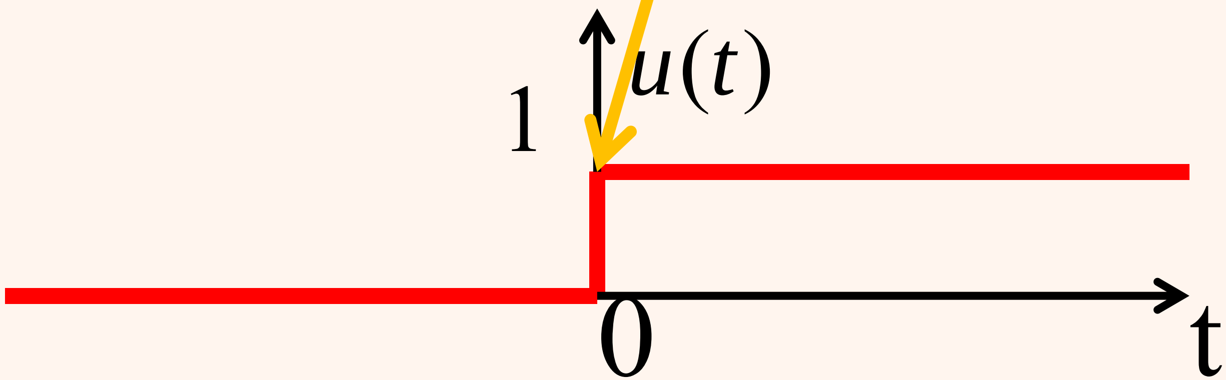
$$x[n]\delta[n - n_o] = x[n_o]\delta[n - n_o]$$



The Continuous-time Unit Step سیگنال پله واحد

در $t=0$ گسستگی وجود دارد

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



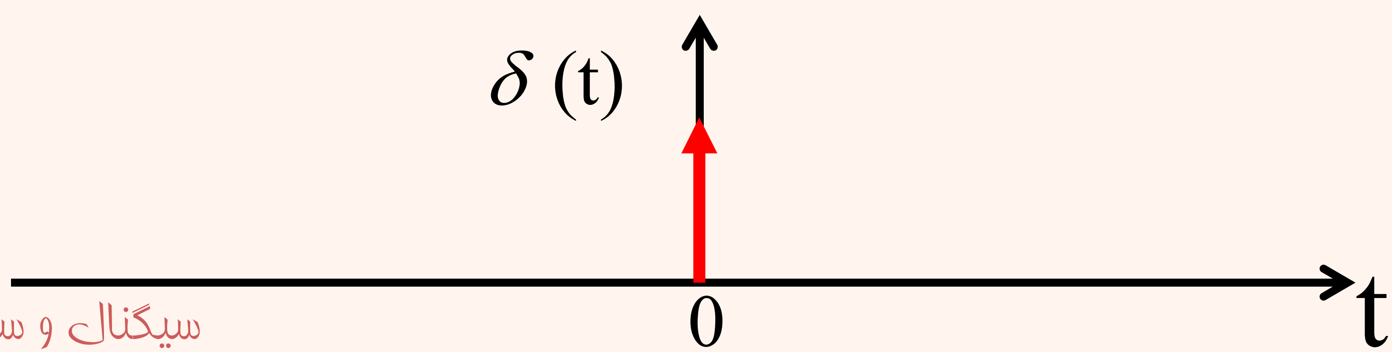
سیگنال ضربه واحد

The Continuous-time Unit Impulse Function

- یکی از تابع‌های پرکاربرد، سیگنال ضربه است که مرتبط با سیگنال پله است.

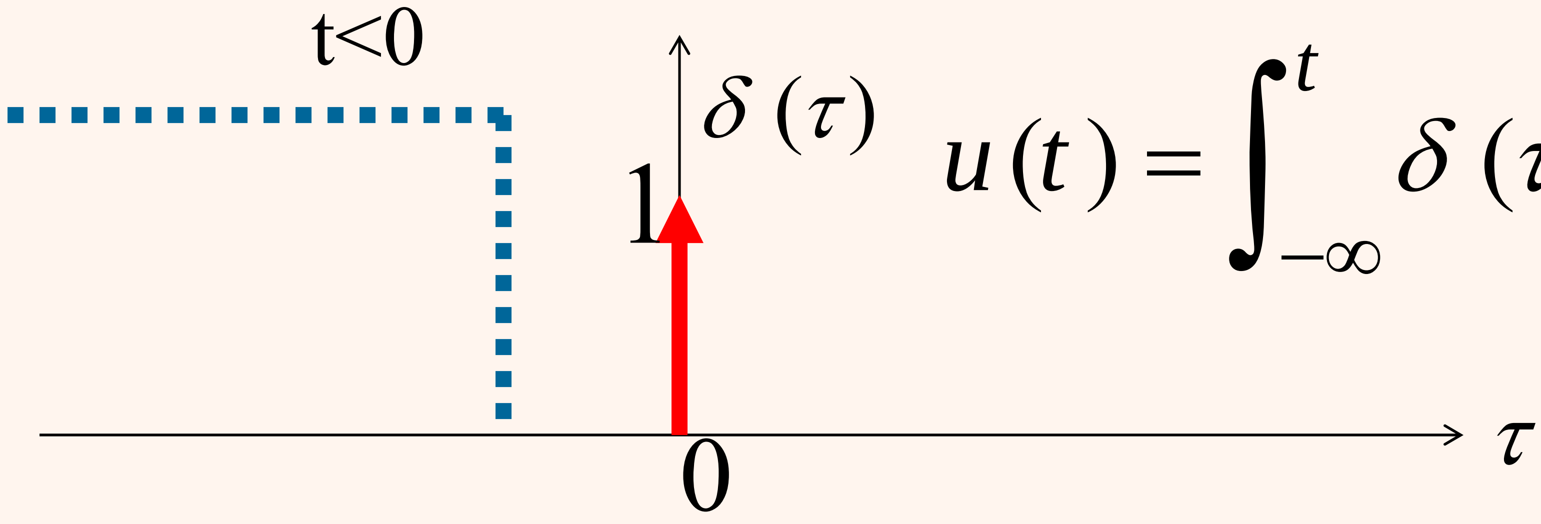
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad \delta(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0, & \mathrm{t} \neq 0, \\ 1(area), & \mathrm{t} = 0, \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

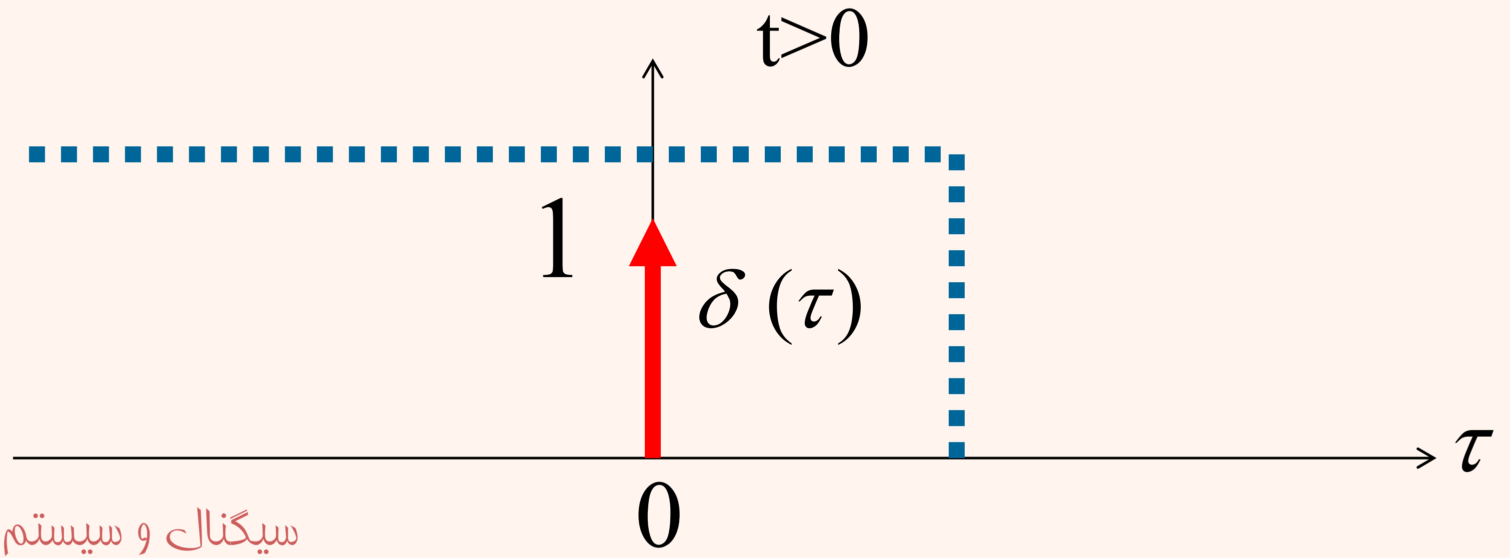


سیگنال ضربه واحد (ادامه...)

بازه‌ی انتگرال گیری



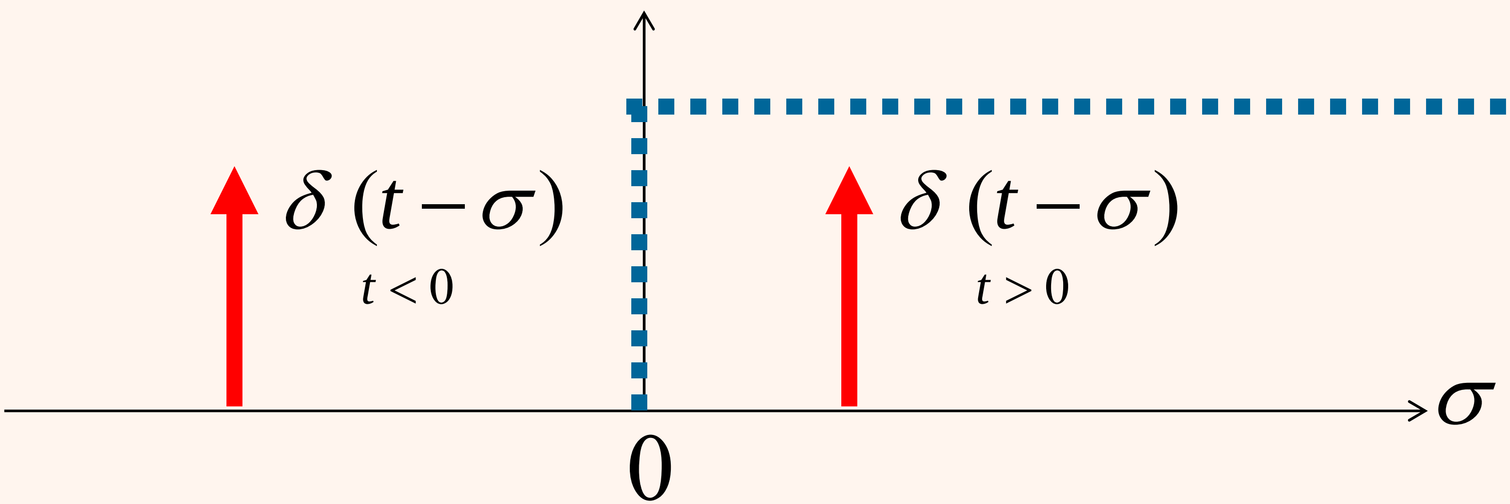
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$



سیگنال ضربه واحد (ادامه...)

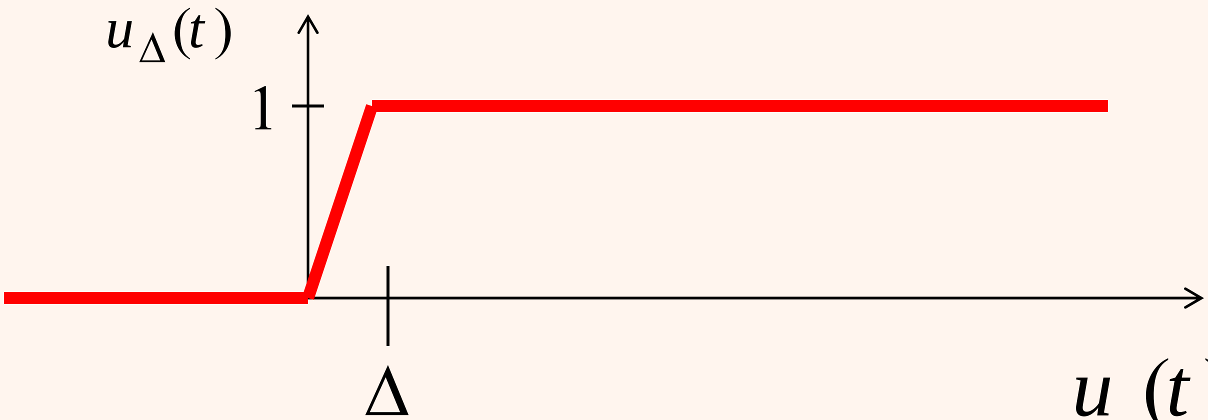
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-d\sigma),$$

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma$$



توابع پایه (ادامه...)

- برای درک بهتر می‌توان به گونه‌ای دیگر مساله را دید:

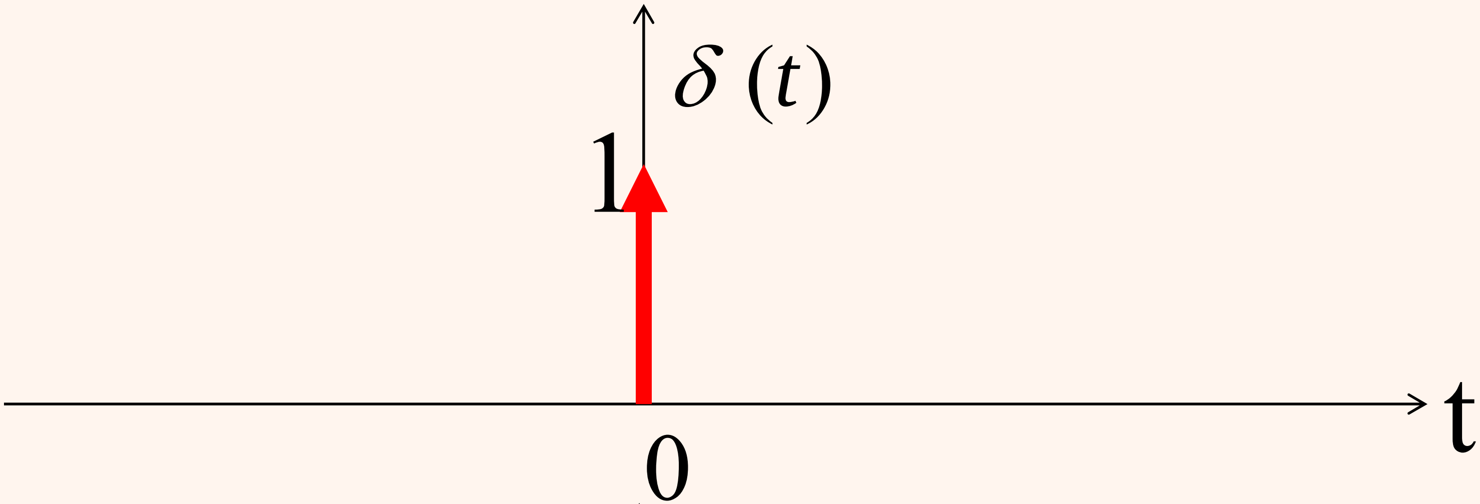


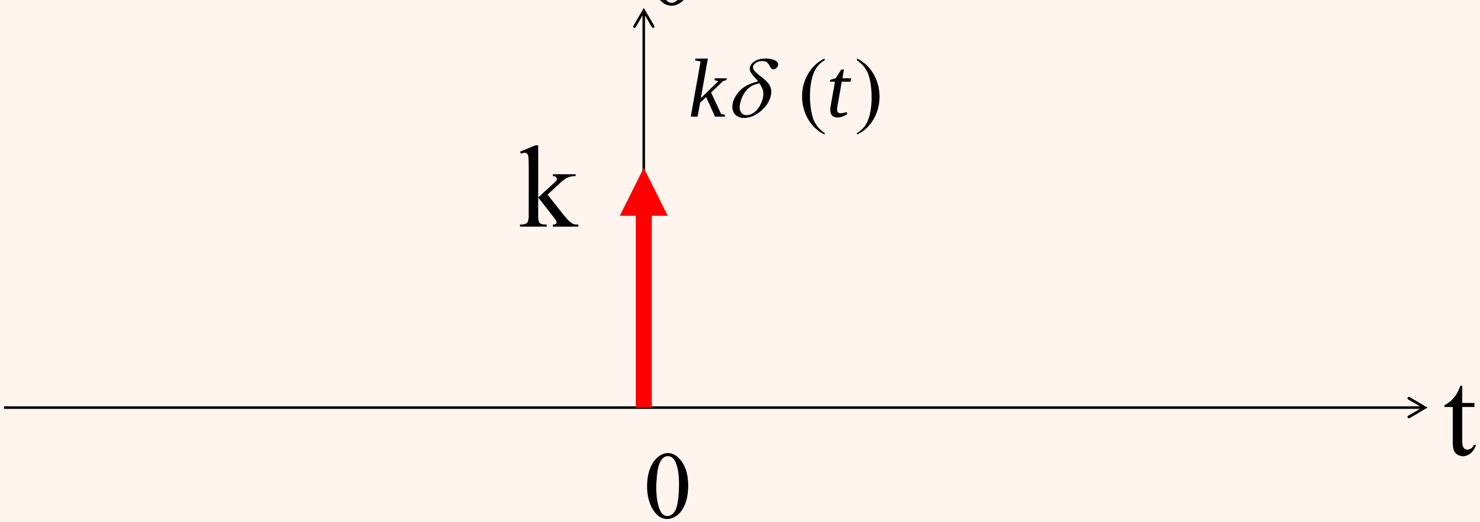
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}, \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Scaled impulse

تغییر مقیاس ضربه



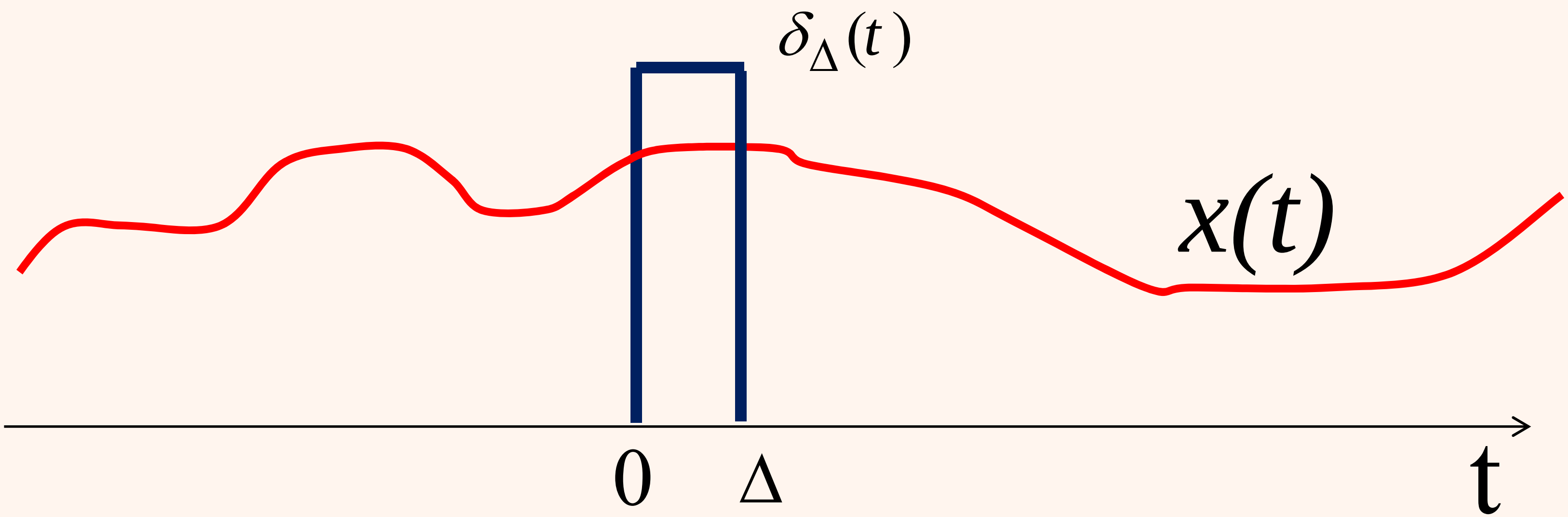


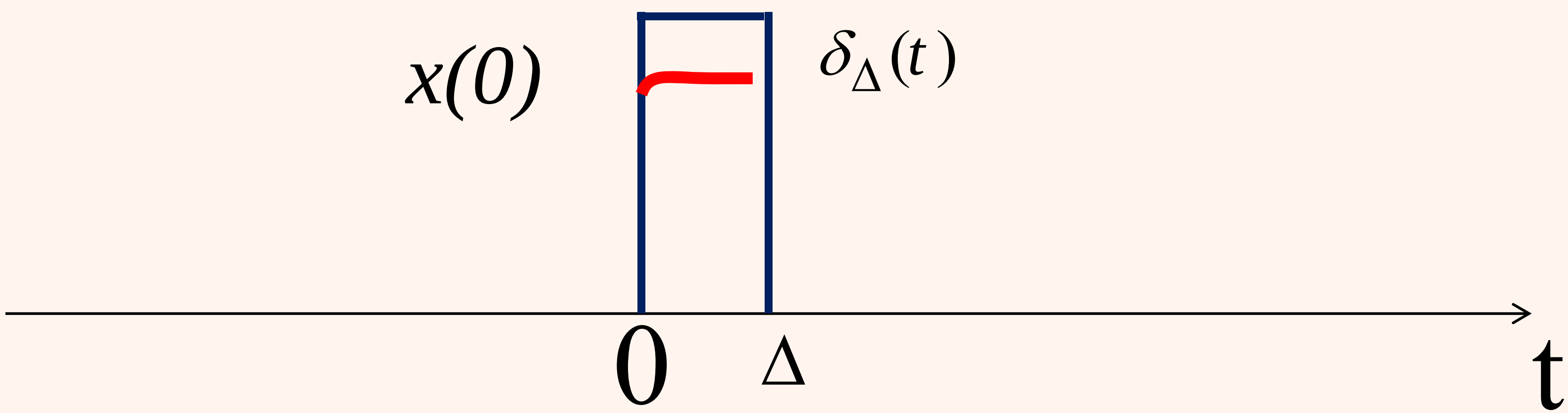
$$\int_{-\infty}^{t} k\,\delta(\tau)d\tau = ku(t)$$

ضربه (ادامه...)

- عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$





ضربه (ادامه...)

- اگر Δ به اندازه‌ی کافی کوچک در نظر گرفته شود:

$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

$$Since \;\; \delta(t) = \delta_{\Delta}(t) \text{ as } \Delta \rightarrow 0.$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- به صورت مشابه:

$$x(t)\delta(t\text{-}t_o) = x(t_o)\delta(t - t_o)$$

مثال

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

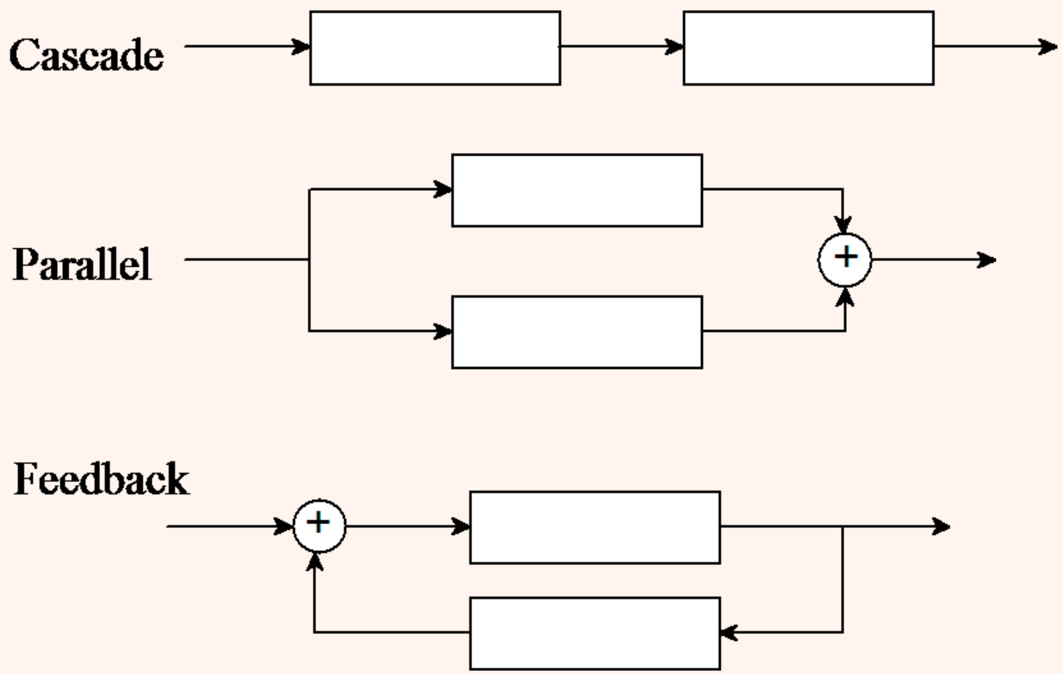
$$r(t)=\begin{cases} t, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t)$$

سیستم‌ها و خصوصیات آن

اتصال بین سیستم‌ها

- یکی از مباحث مهم، در واقع تحلیل اتصال سیستم‌های مختلف است.
- ساختن سیستم‌های پیچیده، با اتصال زیر سیستم‌های ساده‌تر



۱-سیستم باحافظه-بی‌حافظه

Systems without memory -with memory

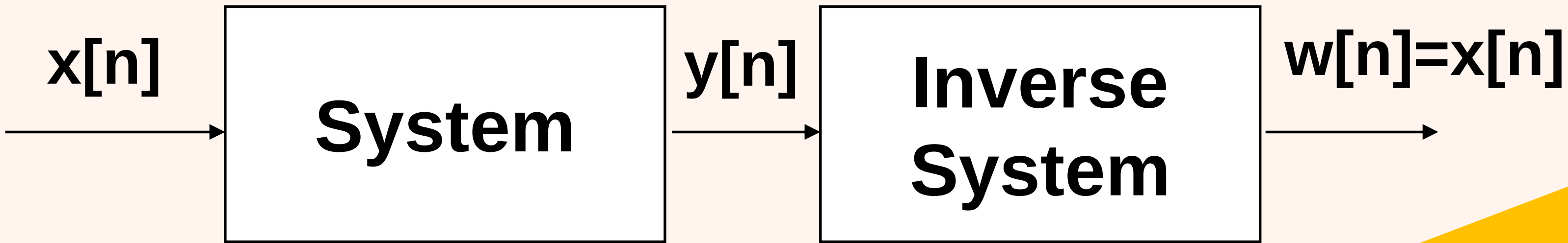
- سیستمی «بی‌حافظه» است که خروجی آن در هر زمان تنها به ورودی در آن زمان وابسته باشد.
  - مثال:
  - $y[n]=(2x[n]-x^2[n])^2$
  - مقاومت یک عنصر بدون حافظه است.
- سیستم «باحافظه» است که خروجی به زمانی جز زمان حاضر بستگی داشته باشد.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \qquad y[n]=x[n-1] \qquad y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$

Invertible System

۲-معکوس‌پذیری

- سیستمی «معکوس‌پذیر» است که هر ورودی خاص آن یک خروجی خاص تولید کند.
  - $y(t)=2x(t)$ سیستم اصلی
  - $w(t)=y(t)/2$ سیستم معکوس



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

نوبت شما

آیا سیستم روبرو معکوس‌پذیر است؟

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n], \qquad y[n]=y[n-1]+x[n], x[n]=y[n]-y[n-1]$$

$$w[n]=x[n]=y[n]-y[n-1]$$

سیستم معکوس

CAUSALITY

۳-سیستم‌های عِلّی

- سیستمی «عِلّی» (causal) است که خروجی آن به ورودی‌های زمان گذشته تاکنون بستگی دارد، در واقع سیستم غیرعلی به نوعی ورودی‌های آینده را پیش‌بینی می‌کند.
- تمام سیستم‌های فیزیکی، علی هستند. چون زمان به سمت جلو حرکت می‌کند.

non-anticipative

- تصور کنید، یک سیستم پیش‌بینی قیمت سکه، که به داده‌های روزهای آینده وابسته باشد!
- چنین مفهومی در مورد سیگنال‌های مکانی مطرح نمی‌شود، همچنین در مورد سیگنال‌های ذخیره شده مطرح نمی‌شود. به عنوان مثال در پردازش تصویر، علیت اهمیت ندارد، چرا که متغیر مستقل سیگنال از جنس زمان نیست.

سیستم‌های علی- تعریف ریاضی

- یک سیستم‌ ($x(t) \rightarrow y(t)$) علی است، اگر

when	$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$	$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
and	$x_1(t) = x_2(t)$	for all $t \leq t_o$
Then	$y_1(t) = y_2(t)$	for all $t \leq t_o$

چنین سیستمی از قانون علیت تبعیت می‌کند

مثال

کدام یک از سیستم‌های زیر علی هستند؟

$$y(t) = x^2(t-1)$$

$$y(t) = x(t+1)$$

$$y[n] = x[-n]$$

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

Stability

۴-پایداری

- سیستمی «پایدار» است که پاسخ آن به یک ورودی محدود واگرا نباشد.
- به عبارت دیگر ورودی محدود منجر به خروجی محدود می‌شود.

BIBO(Bounded Input, Bounded Output)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

۵-سیستم‌های تغییرناپذیر بازمان

TIME-INVARIANCE (TI)

- یک سیستم «تغییرناپذیر با زمان» است، چنان‌چه عملکرد آن وابسته به زمان نباشد. پاسخ سیستم به ورودی یکسان مستقل از زمان خروجی ثابتی باشد.
- یک سیستم زمان گسسته ($x[n] \rightarrow y[n]$) تغییرناپذیر با زمان است،

If $\quad x[n] \rightarrow y[n]$

then $\quad x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$.

- برای زمان پیوسته

If $\quad x(t) \rightarrow y(t) \quad$ then

$x(t-t_o) \rightarrow y(t-t_o)$.

مثال

$$y(t) = x^2(t+1)$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

$$y(t) = \sin\left[x(t)\right]$$

$$y[n] = nx[n]$$

مثال

نوبت شما

- خوب، نوبت شماست!
- اگر ورودی یک سیستم TI متناوب باشد، خروجی چه فرمی خواهد داشت؟

$$\mathbf{x(t+T) = x(t)}\ ,$$

$$\mathbf{x(t) \rightarrow y(t)}$$

$$\mathbf{TI,}\quad \mathbf{x(t+T) \rightarrow y(t+T)}$$

$$y(t) = y(t+T)$$

۶-سیستم‌های خطی و غیرخطی

LINEAR AND NONLINEAR SYSTEMS

- بسیاری از سیستم‌های عملکردی غیرخطی دارند، مانند برخی المان‌های مدار (دیود، ترانزیستور) سیستم‌های اقتصادی و دینامیک هواپیما
- با این وجود تمرکز ما بر روی «سیستم‌ها خطی» است.
  - بیشتر سیستم‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، خطی هستند. (در مدارهای الکتریکی مقاومت، خازن و سلف)
  - پیش‌بینی عملکرد سیستم‌های غیرخطی ساده‌تر است.
  - برای تحلیل برخی سیستم‌های غیرخطی، در محدوده‌ای خطی‌سازی انجام می‌شود.(عملکرد سیستم در این محدوده خطی در نظر گرفته می‌شود.)

سیستم‌های خطی

- یک سیستم خطی است در صورتی که دارای خاصیت superposition باشد:
  - (جمع‌پذیری و همگن بودن)

If $\quad x_1(t) \to y_1(t) \quad$ and $\quad x_2(t) \to y_2(t)$

then $\quad ax_1(t) + bx_2(t) \;\to\; ay_1(t) + by_2(t)$

$y[n] = x^2[n]$ Nonlinear, TI, Causal

$y(t) = x(2t)$ Linear, <u>not</u> TI, Noncausal

خصوصیات سیستم‌های خطی

- Superposition

If $\quad x_k[n] \rightarrow y_k[n]$

Then $\quad \sum_k a_k x_k[n] \rightarrow \sum_k a_k y_k[n]$

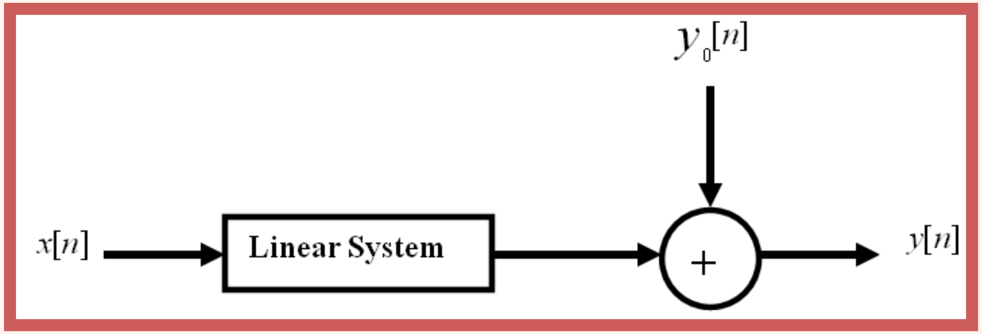
در یک سیستم خطی پاسخ ورودی صفر همواره صفر خواهد بود

$$0 = 0 \times x[n] \rightarrow 0 \times y[n] = 0$$

Incrementally linear system

- آیا سیستم زیر خطی است؟

$$y[n] = 2x[n] + 3$$



در این سیستم پاسخ به تغییرات خطی خواهد بود

خصوصیات سیستم‌های خطی (ادامه...)

- یک سیستم خطی، علی است، اگر و تنها اگر

$$x(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \rightarrow y(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \ \ (*).$$

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

- در بیشترین بخش ترم، روی چنین سیستم‌هایی متمرکز خواهیم شد.
  - از لحاظ کاربردی اهمیت بیشتری دارند.
  - برای تحلیل چنین سیستم‌هایی ابزارهایی قدرتمندی وجود دارد.
- در صورت دانستن پاسخ چنین سیستم‌هایی به برخی ورودی‌ها، می‌توان پاسخ سیستم برای بسیاری از ورودی‌ها را دانست.