۵ سوال ریاضی ۱
- ۲ سوال ساده
- ۱ سوال متوسط
- ۲ سوال سخت

۵ سوال ریاضی ۲
- ۲ سوال ساده
- ۱ سوال متوسط
- ۲ سوال سخت

۵ سوال معادلات
- ۲ سوال ساده
- ۲ سوال متوسط
- ۱ سوال سخت

مجموع:
- ۶ سوال ساده
- ۴ سوال متوسط
- ۵ سوال سخت

تهیه پاسخ تشریحی: ابراهیم شاه ابراهیمی (مدرس ریاضی)

طبق روند هر سال درس «ریاضی ۱و۲ و معادلات» در کنکور ارشد مکانیک نباید دنبال آزمون ساده باشیم و سخت بودن این درس اصلا دور از ذهن نیست و کاملا قابل پیش بینی بوده و هست.

مهم اینه که دانشجوی من در مرحله به این درک رسیده باشه که قرار نیست به همه سوالات پاسخ بده و قرار نیست حتی به نصف سوالات این درس هم پاسخ بده.

درس ریاضی، درس بسیار ترس آوریه و فقط کافیه به اندازه لازم سهم خودمونو ازش برداریم

پاسخگویی به ۶ سوال از ۱۵ سوال درس ریاضی (ریاضی مهندسی فاکتور گرفته شده) در آزمون ارشد ۱۴۰۱ برای یک دانشجو بسیار خوب ارزیابی می‌شود. [و درس تکمیلی گوش داده شود]

۳۱- اگر A مجموعه جواب‌های معادله $2\cos(1401\pi) = z^{1401} + \frac{1}{z^{1401}}$ باشد، آنگاه مجموعه $\left\{z+\frac{1}{z} : z\in A\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۷۰۱

۲) ۲۸۰۲

۳) ۷۰۰

۴) ۱۴۰۱

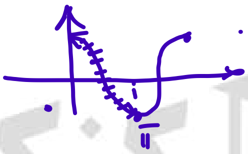
$$\cos 1401\pi = -1 \to z^{1401} + \frac{1}{z^{1401}} = -2 \xrightarrow{\times z^{1401}} z^{2802} + 2z^{1401} + 1 = 0$$

$$z^{1401} = x \to x^2+2x+1=0 \to (x+1)^2=0 \to x=-1 \to z^{1401} = -1 = e^{\pi i}$$

$$\to z = e^{(2k\pi+\pi)\frac{i}{1401}} = e^{(2k+1)\frac{\pi i}{1401}} \to \theta = (2k+1)\frac{\pi}{1401}$$

$z+\frac{1}{z} = e^{i\theta}+e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta \to$ تعداد اعضای بدون تکرار جایی رخ می‌دهد که تابع $\cos\theta$ یک به یک باشد.

یعنی بازه ۰ تا π



$$\to 0 < (2k+1)\frac{\pi}{1401} < \pi \to 0<2k+1<1401 \to -1<2k<1400 \to \boxed{-\frac{1}{2}<k<700}$$

$k=0,1,2,\dots,700 \to$ که این مجموعه 701 عضو دارد.

(اعداد مختلط - لنت)

ولی ایده کلی سوال عیناً در آزمون جامع دوم سال ۱۴۰۱ اومده بود :)

صورت سوال آزمون این بود:

اگر $z+\frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ آنگاه حاصل $z^n+\frac{1}{z^n}$ کدام است؟

۱) $2\cos n\alpha$

۲) $2^n\cos n\alpha$

۳) $2n\cos n\alpha$

۴) $2^n\cos\alpha$

۳۲- حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$ ، کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) -1 ۴) ۱

$= 1^\infty$ (ابهام) $\longrightarrow$ جواب $= e^{\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{\pi}{n}-1)n}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\pi^2}{2n^2}-1)n}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{\pi^2}{2n}}$

$= e^0 = \underline{1}$

(حد ساده)

۳۳- به‌ازای کدام بازه از مقادیر θ سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n \sin^{2n}\theta}{n}$ ، همگرای مطلق است؟

۱) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

۲) $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$

۳) $\boxed{\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right)}$

۴) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\cdot 2^n\cdot\frac{\sin^{2n}\theta}{n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}|2\sin^2\theta| \xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} <1$$

$$\rightarrow |2\sin^2\theta|<1 \rightarrow |\sin^2\theta|<\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow |\sin\theta|<\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

کافیه چک کنیم کدام بازه OK است.

$$\rightarrow -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$$

که تنها بازه‌ای که در شرط صدق می‌کنه $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ است.

(سری - ساده)

۳۴- ضریب $x^{۲۰}$ در سری مک‌لورن تابع $y=\sqrt{1+x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2^{20}}\frac{19!}{(10!)^2}$

۲) $\boxed{-\frac{1}{2^{19}}\frac{18!}{9!\times 10!}}$

۳) $\frac{1}{2^{19}}\frac{19!}{9!\times 10!}$

۴) $-\frac{1}{2^{19}}\frac{19!}{(10!)^2}$

سری - مک‌لورن
تست

یادآوری:

$$(1+u)^p = 1 + pu + \frac{p(p-1)}{2!}u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x^2}\ \begin{cases} u = x^2 \\ p = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}(x^2) + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2!}(x^2)^2 + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-9)}{10!}(x^2)^{10}$$

$$x^{10} \text{ ضریب } = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-8)(\frac{1}{2}-9)}{10!}$$

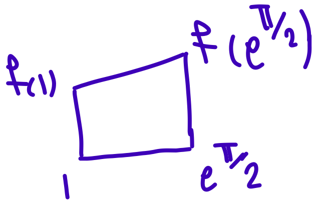
$$= \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(-\frac{11}{2})(-\frac{13}{2})(-\frac{15}{2})(-\frac{17}{2})}{10!}$$

$$= - \frac{\frac{1}{2^{10}}(1\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times15\times17)}{10!}$$

$$\times\frac{2\times4\times6\times8\times10\times12\times14\times16\times18}{\underbrace{2}_{1\times2}\times\underbrace{4}_{2\times2}\times\underbrace{6}_{3\times2}\times\underbrace{8}_{4\times2}\times\underbrace{10}_{5\times2}\times\underbrace{12}_{6\times2}\times\underbrace{14}_{7\times2}\times\underbrace{16}_{8\times2}\times\underbrace{18}_{9\times2}} = -\frac{18!}{2^{10}\times10!}\times\frac{1}{2^9\times9!} = -\frac{18!}{9!\times10!\times2^{19}}$$

۳۵- حاصل $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)dx$ ، کدام است؟

۱) $e^{\frac{\pi}{2}}-1$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $\boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}}$ ۴) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$



روش اول کلاً دیالوگس ازلوس

خیلی کم این روش در لوس می هست ، بار دیگر از همه خواهم که حتما تماشا بینش

$$\text{جواب} = \frac{f(1)+f(e^{\pi/2})}{2}\times(e^{\pi/2}-1)$$

$$= \frac{1+0}{2}(e^{\pi/2}-1) = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$$

روش دوم تغییر متغیر و حل تحلیلی

$$\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases} \rightarrow = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot \underset{e^t}{x}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^t \cos t\, dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$$

بچه های گلم یادتونه چقدر تاکید داشتم این مدل رو حفظ باشید

$$\boxed{\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{at}(a\cos bt + b\sin bt)}{a^2+b^2}}$$

(آسان ـ متوسط)

۳۶- فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه از محل تقاطع رویه‌های $x-y+2z=\frac{3}{8}$ ، $z=2x^2+2y^2$ به مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$
۲) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{3\sqrt{17}}{16}$

$L =$ هدف $+ \lambda($شرط ۱$) + \gamma($شرط ۲$)$

$= x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y+2z-\frac{3}{8})+\gamma(2x^2+2y^2-z)$

$L_x=0 \rightarrow 2x+\lambda+4x\gamma=0$

$L_y=0 \rightarrow 2y-\lambda+4y\gamma=0$

$L_z=0 \rightarrow 2z+2\lambda-\gamma=0$

حاصل دوتا: $2x+2y+4x\gamma+4y\gamma=0 \rightarrow 2(x+y)=-4\gamma(x+y)$

$\rightarrow \begin{cases} 2=-4\gamma \rightarrow \gamma=-\frac{1}{2} \\ x+y=0 \rightarrow y=-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x^2+2(-x)^2 \\ x-(-x)+2z=3/8 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 4x^2=z \\ x+z=3/16 \end{cases} \rightarrow 4x^2+x=3/16 \rightarrow 4x^2+x-3/16=0$

$\rightarrow x=\frac{-1\pm 2}{8} \begin{cases} x=-3/8 \xrightarrow{y=-x} y=3/8 \xrightarrow{z=4x^2} z=9/16 \\ x=1/8 \rightarrow y=-1/8 \rightarrow z=1/16 \end{cases}$

پس نقاط مورد نظر $(-\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{9}{16})$ و $(\frac{1}{8},-\frac{1}{8},\frac{1}{16})$ است.

فاصله $=\sqrt{(\frac{1}{8})^2+(-\frac{1}{8})^2+(\frac{1}{16})^2}=\sqrt{\frac{9}{256}}=\frac{3}{16}$

(توابع چند متغیره _ اکسترمم شرطی)

۳۷- مساحت رویهٔ حاصل از دوران بخشی از منحنی $(a>0)$ ؛ $r^2 = a^2\cos 2\theta$ که در ربع اول صفحه مختصات قرار دارد، حول محور yها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}\,\pi a^2$ ✓
۲) $2\sqrt{2}\,\pi a^2$
۳) πa^2
۴) $2\pi a^2$

مساحت رویه دوار $\longrightarrow$ $S = 2\pi \int x \, ds$

ds: دکارتی، پارامتری، قطبی $\longrightarrow ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2rr' = -2a^2 \sin 2\theta \xrightarrow{\text{توان ۲}} r^2 r'^2 = a^4 \sin^2 2\theta$

$\longrightarrow r'^2 = \dfrac{(a^2 \sin 2\theta)^2}{r^2} \longrightarrow ds = \sqrt{r^2 + \dfrac{(a^2\sin 2\theta)^2}{r^2}}\, d\theta$

$\longrightarrow ds = \sqrt{\dfrac{r^4 + (a^2 \sin 2\theta)^2}{r}}\, d\theta = \sqrt{\dfrac{(a^2\cos 2\theta)^2 + (a^2\sin 2\theta)^2}{r}}\, d\theta$

$\longrightarrow ds = \dfrac{a^2}{r}\, d\theta$ ث

$\xrightarrow{\text{مرز}} \cos 2\theta = 0 \longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ ربع اول

$\longrightarrow S' = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r\cos\theta) \cdot \dfrac{a^2}{r}\, d\theta$

$= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \, d\theta$

$= 2\pi a^2 \left(\sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = 2\pi a^2 \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$

(مساحت رویه دوار - قطبی - متوسط)

$= \boxed{\pi a^2 \sqrt{2}}$

۳۸- صفحهٔ مماس بر رویهٔ S به معادلهٔ $xy^2z^3 = 4$ در نقطهٔ $(1,2,1)$ کدام است؟

۱) $x+3y+z=8$

۲) $3x+y+3z=8$

۳) $\boxed{x+y+3z=6}$

۴) $3x+y+z=6$

$$f: xy^2z^3-4=0 \longrightarrow \vec{\nabla}f = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

$$\xrightarrow{(1,2,1)} \vec{\nabla}f = (4, 4, 12) \xrightarrow[\parallel]{\text{موازی}} (1,1,3)$$

$$\rightarrow 1(x-1)+1(y-2)+3(z-1)=0$$

$$\rightarrow x-1+y-2+3z-3=0$$

$$\rightarrow \boxed{x+y+3z=6}$$

(توابع چندمتغیره - گرادیان، خط و صفحه - ساده)

دانشجوی گرامی «دستگاه زیر» رو خوب یاد بگیرن

۳۹- حاصل $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\,dA$ که در آن R در ناحیه اول محصور به بیضی $x^2 - xy + y^2 = 2$ است، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ پاسخ درست

۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ پاسخ غلط ارائه شده کنکور!

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \to (1-\lambda)^2 = \frac{1}{4}$

$\to 1 - \lambda = \pm \frac{1}{2} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 = \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2)$ ★

$\to \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 = 2 \xrightarrow{\div 2} \boxed{\frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{4}v^2 = 1} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} u = 2A \\ v = \frac{2}{\sqrt{3}}B \end{cases}$

$\to \boxed{A^2 + B^2 = 1}$ کاملاً به سبک شاهکار! $\to du\,dv = \frac{4}{\sqrt{3}}\,dA\,dB$

$\to \iint (x^2 - xy + y^2)\,dA = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint 2(A^2 + B^2)\,dA\,dB$

$x^2 - xy + y^2 \overset{\star}{=} \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) = \frac{1}{2}(4A^2 + 4B^2) = 2(A^2 + B^2)$

ربع اول

$\xrightarrow{\text{قطبی}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$

$= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(2 \times \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} \times 2 = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

متاسفانه در کلید ارائه شده توسط سنجش پاسخ این سوال به اشتباه عدد $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ ذکر شده در حالیکه پاسخ صحیح

مقدار $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ یا همان $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ است.

(استدلال ۳ ترکیبی: تغییر متغیر - ترکیبی با مقادیر ویژه ماتریس - لنت)

۴۰- حاصل $\iint_S \operatorname{curl}(\vec{F}).\vec{n}\,d\sigma$ که در آن S رویه $x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲=۶\,;(z\geq ۰)$ و $\vec{n}$ بردار نرمال رویهٔ S است و $\vec{F}(x,y,z)=(xz-y^۳\cos z)\vec{i}+x^۳e^z\vec{j}+xyze^{x^۲+y^۲+z^۲}\vec{k}$ ، کدام است؟

۱) ۸π ۲) $\boxed{۲۴\pi}$ ۳) ۴π ۴) ۱۶π

$z=0 \rightarrow \vec{n}\,d\sigma=(0,0,1)\,dA \rightarrow$

دانشجوهام میدونن وقتی $z=a$ رو میدن دیگه کاری به قضیه استوکس نداریم و مستقیم میایم سراغ حل خود $\iint \operatorname{curl}F.\vec{n}\,ds$

$$\overrightarrow{\operatorname{curl}F}=(\underbrace{\alpha,\alpha}_{\text{نیازی به محاسبه ندارن}},\underbrace{3x^2+3y^2}_{z=0\ \text{هم واردکردیم}})$$

$$\rightarrow \iint \overrightarrow{\operatorname{curl}F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint(\alpha,\alpha,3x^2+3y^2).(0,0,1)\,dA$$

$$=\iint 3(x^2+y^2)\,dA \xrightarrow[\text{سایه رویه}]{x^2+y^2=4}$$

قطبی

$$=3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2.r\,dr\,d\theta$$

$$=3\times 2\pi\times \frac{r^4}{4}\Big|_0^2=3\times2\pi\times4=\boxed{24\pi}$$

(انتگرال سطح ـ استوکس ـ ساده)

۴۱- به‌ازای کدام مقدار مثبت a، شعاع همگرایی پاسخ سری معادلهٔ دیفرانسیل $(x^2+a^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ در اطراف نقطه $x=-\frac{3}{2}$ برابر $R=\frac{5}{2}$ خواهد بود؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۱   ۴) ۳

$$\xrightarrow[\div(x^2+a^2)]{\text{استاندارد سازی}} \quad y''+\frac{2x}{x^2+a^2}y'+\frac{4x^2}{x^2+a^2}y=0$$

$$\to x^2+a^2=0 \to x=\pm ai \to \left|-\frac{3}{2}-ai\right|=\frac{5}{2}$$

$$\to \sqrt{\frac{9}{4}+a^2}=\frac{5}{2} \to \frac{9}{4}+a^2=\frac{25}{4}$$

$$\to a^2=\frac{16}{4}=4$$

$$\to \boxed{a=2}$$

(حل معادله به کمک سری ـ شعاع همگرایی ساده)

۴۲- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $(x-y)^2 y' = 4$، کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right)+c$

۲) $y=\ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right)+c$

۳) $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right)+c$

۴) $\boxed{y=\ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right)+c}$

$$y'=\frac{4}{(x-y)^2} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} x-y=t \\ 1-y'=t' \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1-t'=\frac{4}{t^2}$$

$$\to t'=1-\frac{4}{t^2}=\frac{t^2-4}{t^2}$$

$$\to \frac{t^2}{t^2-4}dt=dx \xrightarrow{\int} \int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=x+C$$

$$\to \int dt+4\int\frac{dt}{t^2-4}=x+C$$

$$\to t+\mathrm{Ln}\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=x+C \xrightarrow{x-y=t}$$

$$\to x-y+\mathrm{Ln}\left|\frac{x-y-2}{x-y+2}\right|=x+C$$

$$\to y+C=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-y-2}{x-y+2}\right|$$

هرکجا دلش بخواد میتونه بره

(معادلات مرتبه اول - تفکیک پذیر - ساده)

۴۳- جواب معادلهٔ انتگرال $y'-3y-2\int_0^x y(t)\,dt = u_2(x)$ ، با شرط اولیه $y(0)=0$ ، کدام است؟ (u تابع پله است.)

۱) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{\frac{3t}{2}-3}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۲) $\boxed{\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{\frac{3t}{2}-3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)}$

۳) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{-\frac{3t}{2}+3}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۴) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{-\frac{3t}{2}+3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم :

$$\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}\left(\int_0^x y(t)\,dt\right) = \mathcal{L}(u_2(x))$$

$$\mathcal{L}(y) = F(s)$$

$$sF(s) - \cancel{f(0)} - 3F(s) - 2\frac{F(s)}{s} = e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\to F(s)\left(s-3-\frac{2}{s}\right) = \frac{e^{-2s}}{s} \xrightarrow{\times s} F(s)(s^2-3s-2) = e^{-2s}$$

$$\to F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2-3s-2} = \frac{e^{-2s}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}\right) \to$$

ابتدا e^{-2s} را در نظر نمی‌گیریم، لاپلاس معکوس عبارت باقی مانده را می‌یابیم حاصل را در $u_2(t)$ ضرب می‌کنیم و تمام t ها را به $t-2$ تبدیل می‌کنیم.

$$\to y = u_2(t)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}\right)\Bigg|_{t\to t-2}$$

$$\to y = u_2(t)\left[e^{\frac{3}{2}t}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}\right]\Bigg|_{t\to t-2}$$

(لاپلاس ـ متوسط)

۴۴- لاپلاس وارون تابع $F(s)=\dfrac{1}{2^s\sqrt{2s+1}}$ برای $t>\ln 2$ کدام گزینه است؟ (راهنمایی: $\Gamma(x)$ تابع گاما است و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$)

۱) $\dfrac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2\pi t}}$

۲) $\dfrac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2(t-\ln 2)}}$

۳) $\boxed{\dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}}$

۴) $\dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}$

$$\longrightarrow F(s)=\frac{1}{2^s\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{s+1/2}}=\frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{s+\frac{1}{2}}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y=\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{\text{انتقال}}\;\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2^s\cdot\sqrt{s}}\right)}_{\bigstar}$$

$$2^s=e^{\ln 2^s}=e^{s\ln 2}$$

$$\bigstar\longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\ln 2\cdot s}}{\sqrt{s}}\right)=e^{-\ln 2\cdot s}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

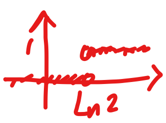
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}=$ باید حفظ باشیم

$$\bigstar\longrightarrow = u_{\ln 2}(t)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]\Bigg|_{t\to t-\ln 2}$$

$$= u_{\ln 2}(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}$$

(این درس معکوس سخت بسیار زیبا و جذاب است)

$$\xrightarrow{\text{جواب آخر}} = e^{-\frac{1}{2}t}\cdot u_{\ln 2}(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}\qquad \xrightarrow{\text{فرض سوال}} t>\ln 2$$



مفهوم تابع پله ی

$$=\boxed{\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}}$$

۴۵- جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+y'=4x\ln x$ که منحنی آن از نقطه $(1,1)$ عبور کرده و در نقطه $x=0$ مقدار مشتق تابع محدود است، کدام است؟

۱) $\boxed{x^2\ln\frac{x}{e}+2}$

۲) $\frac{1}{2}x^2\ln x+1$

۳) $x^2\ln x+1$

۴) $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{x}{e}+\frac{3}{2}$

روش اول کاهش مرتبه ←

(روش حل دوم کوشی اویلر)

$$\begin{cases} y'=t \\ y''=t' \end{cases}$$

$$\rightarrow xt'+t=4x\ln x \rightarrow t'+\frac{1}{x}t=4\ln x$$

مرتبه اول خطی

$$\text{عامل}: e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

$$\xrightarrow{\times x} xt'+t=4x\ln x \rightarrow (xt)'=4x\ln x \xrightarrow{\int} xt=4\underbrace{\int x\ln x\,dx}$$

جزء به جزء ← من به شخصه اول تغییر متغیر می‌دم و بعد روش جزء به جزء سریع

$$\begin{cases} \ln x=u \\ \frac{dx}{x}=du \end{cases} \rightarrow \int (u)(x^2)\,du = \int u\,e^{2u}\,du = \left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\right)e^{2u}$$

$x^2 \to e^{2u}$

$u \quad \frac{1}{2}e^{2u}$

$1 \quad \frac{1}{4}e^{2u}$

0

$$\rightarrow xt=4\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\right)x^2=(2\ln x-1)x^2+C_1$$

$$\rightarrow t=(2\ln x-1)x+C_1x^{-1} \xrightarrow[t=y']{\int} y=\int\left((2\ln x-1)x+C_1x^{-1}\right)dx$$

$$\rightarrow y=2\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\right)x^2-\frac{x^2}{2}+C_1\ln x+C_2$$

$$\xrightarrow{(1,1)} 1=2\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+0+C_2 \rightarrow C_2-1=1 \rightarrow \underline{C_2=2}$$

$$\rightarrow \boxed{y=x^2\ln x-x^2+C_1\ln x+2}$$

$$=C_1\ln x+x^2\underbrace{(\ln x-1)}_{\underbrace{\ln x-\ln e}_{\ln\frac{x}{e}}}+2$$

سوالات مرتبه ۲
(کوشی اویلر ناهمگن - متوسط)