☑ درک شهودی

انسان برای شناخت و درک آنچه که در پیرامون اوست از شهودش کمک می گیرد و با تجربه ی خود پدیده ها را توصیف می کند ولی واضح است که این شناخت علاوه بر اینکه متکی بر استدلال نیست دارای ابهام و خطا است. پس انسان برای رسیدن به آگاهی صحیح وکامل نیاز به ابزار های قویتر دیگری مانند استدلال جهت رسیدن به حقایق وکشف روابط دارد.درک شهودی به ما کمک می کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدسهای جالب و بهتری برای اثبات احکام مختلف بزنیم ولی این حدس ها قابل اعتماد نیستند و برای اطمینان از قطعی بودن این حدس ها باید استدلال کرد.

مثلاً مردم در گذشته های دور باور دارند که زمین مسطح است وگرد بودن آن را قبول نداشتند زیرا با شهود آنها مطابقت نداشت.

***

☑ استدلال تمثیلی (قیاسی)

گاهی انسان برای توصیف پدیده ها از تمثیل کمک می گیرد.منظور از تمثیل یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است. این مشابهت در زمینه شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات های ریاضی کمک می کند.

***

☑ انواع استدلال

عمل ارائه ی دلیل برای اثبات یک گزاره را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱- استدلال استقرایی

استدلالی است که بر اساس تعداد محدودی مشاهده (حالت) ما را به نتیجه ی کلی می رساند.

مثال ۱) ادعا شده است که عبارت $P(x) = x^{۲} + x + ۴۱$ به ازای x های طبیعی اعداد اول بیشتر از ۴۱ را نتیجه می دهد. صحت این ادعا را به روش استقرایی بررسی کنید.

حل: با مشاهده ی حالت های زیر نتیجه می گیریم که عبارت داده شده به ازای هر x طبیعی یکی از اعداد اول بیشتر از ۴۱ را نتیجه می دهد.

نتیجه	$P(x)$	x	
عدد اول	$P(۱) = (۱)^{۲} + ۱ + ۴۱ = ۴۳$	۱	حالت اول
عدد اول	$P(۲) = (۲)^{۲} + ۲ + ۴۱ = ۴۷$	۲	حالت دوم
عدد اول	$P(۳) = (۳)^{۲} + ۳ + ۴۱ = ۵۳$	۳	حالت سوم
عدد اول	$P(۴) = (۴)^{۲} + ۴ + ۴۱ = ۶۱$	۴	حالت چهارم
....	....	....	....

توجه: در جدول فوق تمام حالت ها بررسی نشده اند،پس این نتیجه قطعی نبوده و لذا نتیجه ی بدست آمده احتمالی است. در واقع با ادامه ی جدول وقتی $x = ۴۱$ در نظر گرفته شود $P(x)$ برابر۱۷۶۳ می شود که بر ۴۱ بخش پذیر بوده و عدد اول نیست پس نتیجه ی فوق نادرست است.

مثال ۲) ادعا شده است که مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی ابتدا از یک، مربع کامل است. صحت این ادعا را به روش استقرایی بررسی کنید.

حل: با مشاهده ی حالت های زیر نتیجه می گیریم که مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی ابتدا از یک، مربع کامل است.

نتیجه	حالت
مربع کامل	$۱ = ۱$
مربع کامل	$۱ + ۳ = ۴$
مربع کامل	$۱ + ۳ + ۵ = ۹$
مربع کامل	$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶$
....	....

توجه کنید که در الگوی فوق تمام حالات ها بررسی نشده اند، لذا برای اطمینان قطعی از این نتیجه نیاز به ابزار قوی تری مانند استدلال استنتاجی یا اصل استقرای ریاضی وجود دارد که بعداً توضیح داده می شوند.

***

۲- استدلال استنتاجی

استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده ما را به یک نتیجه گیری کلی می رساند.

مثال: ادعا شده است که مجموع هر دو عدد فرد،یک عدد زوج است. صحت این ادعا را به روش استنتاجی بررسی کنید.

حل: قرار می دهیم

فرد $y = ۲k_۱ + ۱ \ , \ \ k_۱ \in Z$

فرد $y = ۲k_۲ + ۱ \ , \ \ k_۲ \in Z$

حال داریم

$$x + y = (۲k_۱ + ۱) + (۲k_۲ + ۱) = ۲k_۱ + ۲k_۲ + ۲ = ۲(\underbrace{k_۱ + k_۲ + ۱}_{k}) = ۲k$$

یعنی حاصل همواره عدد زوج است.

تمرین: هریک از گزاره های زیر را به روش استنتاجی ثابت کنید.

۱) ثابت کنید که مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج همواره یک عدد فرد است.

۲) ثابت کنید که مجموع هر دو عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

۳) ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

۴) ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد فرد همواره یک عدد فرد است.

۵) ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد فرد و یک عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

نتیجه : حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، همواره زوج است.

۶) ثابت کنید که اگر هفت برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم،حاصل همواره عددی فرد است.

۷) ثابت کنید که مربع هر عدد فرد همواره فرد است.

۸) ثابت کنید که مربع هر عدد زوج همواره زوج است.

۹) ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

حل: کافی است ثابت کنیم که حاصل ضرب هم بر۲ وهم بر ۳ بخش پذیر است.

قرار می دهیم. $p = x.y.z = k(k+1)(k+2)$

بررسی بخش پذیری بر۲

- ✓ اگر k زوج باشد پس p بر ۲ بخش پذیر است.
- ✓ اگر k فرد باشد لذا $k+1$ زوج است پس p نیز بر ۲ بخش پذیر می باشد.

بررسی بخش پذیری بر ۳

- ✓ اگر k مضرب ۳ باشد پس p بر ۳ بخش پذیر است.
- ✓ اگر k مضرب ۳ نباشد لذا $k+1$ یا $k+2$ مضرب ۳ است پس p نیز بر۳ بخش پذیر می باشد.

۱۰) ثابت کنید که مجموع دو زاویه حاده همیشه کمتر از ۱۸۰ درجه است.

۱۱) اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، ثابت کنید که $m^2 - n^2$ بر ۸ بخش پذیر است.

حل :

$$m^{۲} - n^{۲} = (۲a+۱)^{۲} - (۲b+۱)^{۲} = (۴a^{۲} + ۴a + ۱) - (۴b^{۲} + ۴b + ۱)$$
$$= (۴a^{۲} + ۴a) - (۴b^{۲} + ۴b) = ۴\underbrace{a(a+۱)}_{۲p} - ۴\underbrace{b(b+۱)}_{۲q} = ۸p - ۸q = ۸(p-q) = ۸r$$

۱۲) تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزءاست.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

***

☑ مثال نقض

مثال نقض (استثنا)مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال:گزاره ی « توان دوم هر عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.» یک گزاره ی نادرست است،زیرا توان دوم عدد یک برابر یک است واز آن بزرگتر نیست. در اینجا عدد «۱»یک مثال نقض برای رد درستی این گزاره محسوب می شود.

تمرین: برای رد درستی گزاره های زیر یک مثال نقض بیاورید.

الف) حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

ب) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

ج) برای هر دو عدد حقیقی ومثبت y و x همواره داریم. $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

د) برای هر دو عدد حقیقی y و x همواره داریم. $[x+y] = [x] + [y]$

تذکر:

۱- برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که این استدلال باید از نوع استنتاجی و متکی بر یک حقیقت یا اصل می باشد.

۲- برای رد درستی یک گزاره ارائه ی یک مثال نقض کافی است.

***

☑ قضیه

قضیه گزاره ی کلی است که همواره درست می باشد.

مانند:

۱- در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دوضلع دیگر برابر است.

۲- برای هر زاویه ی x همواره $\sin^{۲} x+\cos^{۲} x=۱$ است.

۳- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت y و x همواره $\frac{x+y}{۲}\geq\sqrt{xy}$ است.

۴- مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۵- برای هر دو مجموعه ی B و A همواره $A-B=A\bigcap B'$

واضح است که هر قضیه یک <u>*جمله ی شرطی*</u> است لذا دارای دو قسمت اصلی می باشد.

فرض: آن قسمت از قضیه است که درستی آن را قبول داریم.

حکم: آن قسمت از گزاره است که درستی آن را ثابت می کنیم.

پس هر قضیه دارای الگویی به شکل زیر است.

اگر $\underbrace{\overset{p}{\text{..........................}}}_{\text{فرض}}$ آنگاه $\underbrace{\overset{q}{\text{..........................}}}_{\text{حکم}}$.

$$p\Rightarrow q$$

مثال:

قضیه: حاصل جمع هر دو عدد گویا یک عدد گویا است.

به سادگی می توان این قضیه را به صورت شرطی به شکل زیر نوشت وفرض وحکم آن را تعیین کرد.

« اگر y و x دو عدد گویا باشند،آنگاه $x+y$ نیز گویا است.»

فرض: $x, y\in Q$

حکم: $(x+y)\in Q$

توجه داشته باشید که هرعدد را که بتوان آنرا به شکل یک کسر که صورت ومخرج آن عدد صحیح بوده ومخرج آن ناصفر باشد را عدد گویا (منُطق) می نامند. به عبارت دیگر هر عدد به شکل $x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq ۰$ یک عدد گویا است.

اگر عددی گویا نباشد،آن را گنگ (اصم) می نامند.

تمرین : قضیه ی فوق را ثابت کنید.

اثبات: قرار می دهیم.

گویا $x \to x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq ۰$

گویا $y \to y = \frac{c}{d}, c, d \in Z, d \neq ۰$

لذا :

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

حال نشان می دهیم که حاصل جمع جمع شرایط عدد گویا را دارد.

$\begin{cases} a \in Z, d \in Z \to ad \in Z \\ b \in Z, c \in Z \to bc \in Z \end{cases} \to (ad + bc) \in Z$ صورت عدد صحیح است.

$\{ b \in Z, d \in Z \to bd \in Z$ مخرج عدد صحیح است.

$\{ b \neq ۰, d \neq ۰ \to bd \neq ۰$ مخرج غیر صفر است.

پس $x + y$ یک عدد گویا است.

***

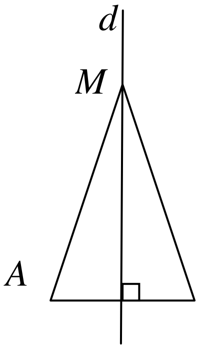
☑ قضیه ی عکس

اگر جای فرض وحکم قضیه ای را جابجا کنیم یک گزاره ی شرطی جدیدی بدست می آید که آن را عکس قضیه می گویند.

اگر عکس قضیه ای درست باشد،آنرا قضیه ی عکس می نامند. $q \Rightarrow p$

مثال:

قضیه: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد از دو سـر آن پاره خط به یک فاصله است.



فرض: $M \in d$

حکم : $AM = BM$

عکس قضیه: هر نقطه که از دو سر پاره خطی به یک فاصـله باشـد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

فرض: $AM = BM$

حکم: $M \in d$

توجه داشته باشید که در مثال فوق عکس قضیه، درست است و لذا یک قضیه است ولی ممکـن اسـت عکـس قـضیه ، درسـت (قضیه) نباشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: عکس قضیه ی ***«اگر y و x دو عدد گویا باشند، آنگاه $x + y$ نیز گویا است.»*** درست نیست و لذا یک قـضیه نمی باشد.

«اگر $x + y$ گویا باشد،آنگاه y و x نیز هر دو گویا هستند.»

تمرین: دلیل نادرستی گزاره ی فوق را بنویسید.

حل: عدد صفر که گویا است را می توان به صورت مجموعی از دو عدد گنگ ولی قرینه مانند $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ نوشت.

***

☑ قضیه ی دو شرطی

هرگاه عکس یک قضیه خود نیز یک قضیه باشد،از ترکیب این دو قضیه می توان یک قضیه ی جدیـد موسـوم بـه قـضیه ی دو شرطی بدست آورد. $p \Leftrightarrow q$

هر قضیه دو شرطی دارای یکی از الگو های زیر است.

- ✓ اگر p آنگاه q و برعکس.
- ✓ p اگر و فقط اگر q.

- ✓ p شرط لازم و کافی برای q است.

مثال:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. $p \Rightarrow q$

قضیه ی عکس: اگردریک مثلث مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

$$q \Rightarrow p$$

قضیه ی دو شرطی: که به سه شکل بیان می شود.

- ✓ اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس
- ✓ مثلث قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع وتر آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.
- ✓ شرط لازم وکافی برای قائم الزاویه بودن مثلث آن است که مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

$$p \Leftrightarrow q$$

تذکر: برای اثبات یک قضیه ی دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ باید قضیه ی $p \Rightarrow q$ و عکس آن یعنی $q \Rightarrow p$ را ثابت کنیم.

***

☑ ویژگی عکس نقیض یک قضیه

اگر فرض وحکم قضیه ای را جابجا ونقیض[1] کنیم،گزاره ی حاصل همواره یک گزاره ی درست خواهد بود. این گزاره را قضیه ی عکس نقیض می نامند.

[1] . با تغییر ارزش یگ گزاره ،گزاره ی نقیض بدست می آید، یعنی نقیض یک گزاره ی درست یک گزاره ی نادرست است و نقیض یک گزاره ی نادرست یک گزاره ی درست است. برای تعیین گزاره ی نقیض کافی است که فعل گزاره را از حالت مثبت به حالت منفی و برعکس تغییرکنیم.

مثال:

گزاره: $\sqrt{۲}$ یک عدد گویا است. (نادرست) p

نقیض گزاره: $\sqrt{۲}$ یک عدد گویا نیست. (درست) $\neg p$

مثال:

گزاره: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست. (نادرست)

نقیض گزاره: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. (درست)

مثال:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. $p \Rightarrow q$

قضیه ی عکس نقیض: اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه نیست.

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

توجه کنید که یک قضیه و عکس نقیض آن معادل هستند یعنی اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن است.

***

☑ اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات قضیه ها بهتر است که حکم قضیه را به کمک عملیات درست تغییر داده تا به یک رابطه ی بدیهی ویا فرض قضیه برسیم.سپس برای تکمیل اثبات باید نشان داد که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند،در غیر این صورت درستی اثبات تأیید نمی شود.

این روش اثبات که به اثبات بازگشتی موسوم است، بیشتر در مورد نا مساوی ها ی عددی رایج است.

مثال: ثابت کنید که میانگین حسابی دو عدد حقیقی و مثبت بیشتر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.

یعنی اگر y و x دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$

حل: اثبات به روش بازگشتی

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$
$$\leftrightarrow x+y \geq ۲\sqrt{xy}$$
$$\longleftrightarrow (x+y)^۲ \geq (۲\sqrt{xy})^۲$$
$$\leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴xy$$
$$\leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ - ۴xy \geq ۰$$
$$\leftrightarrow x^۲ - ۲xy + y^۲ \geq ۰$$

$\leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$. بدیهی است

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

تمرین: ثابت کنید که مجموع هر عدد گویای مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

یعنی اگر $a,b>0$ آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

تمرین: اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $x^2+y^2\geq 2(x+y-1)$

تمرین: اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $y^2+1\geq 2x(y-x+1)$

تمرین: اگر z و y و x سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$

راهنمایی : ابتدا دو طرف را در ۲ ضرب کنید.

حل : اثبات به روش بازگشتی

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$$
$$\xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz$$
$$\leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2\geq 0$$
$$\leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

تمرین: اگر b و a دو عدد حقیقی باشند و $a+b>0$، ثابت کنید. $\frac{a^3+b^3}{a+b}\geq ab$

حل : اثبات به روش بازگشتی

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}\geq ab$$
$$\leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq ab$$
$$\leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0$$
$$\leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

☑ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

اگر یک گزاره ی شرطی دارای دو یا چند نتیجه باشد و از بین این چند نتیجه فقط یکی از آنها مورد نظر باشد، در این صورت نشان می دهیم که تمام نتیجه گیری ها بجز آن نتیجه درست نمی باشند. این شیوه ی استدلال که یک نوع استدلال استنتاجی است را اثبات غیر مستقیم می نامند.

در اثبات یک قضیه به روش غیر مستقیم نشان می دهیم که خلاف حکم درست نیست. بنا بر این در استفاده از این روش گام های زیر را داریم.

گام۱) فرض می کنیم که خلاف حکم درست است.

گام۲) نشان می دهیم که این فرض حقایق پذیرفته شده ی قبلی یا فرض قضیه را نقض می کند.

گام۳) حال که به تناقض رسیده ایم، معلوم می شود که حکم درست است نه خلاف آن

مثال: با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر n عدد صحیح و $n^۲$ فرد باشد،آنگاه n نیز فرد است.

حل:

فرض: $n^۲$ فرد

حکم : n فرد

فرض کنیم که n فرد نباشد پس زوج است.

$$n=۲k, k\in Z \to n^۲=(۲k)^۲=۴k^۲=۲(۲k^۲)=۲k'$$

یعنی $n^۲$ زوج است و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر m عدد صحیح و $m^۲$ زوج باشد،آنگاه m نیز زوج است.

تمرین: اگر n عدد صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضرب ۳ است.

حل: گیریم که n مضرب ۳ نباشد. پس

$$n=۳k+۱ \to n^۲=(۳k+۱)^۲ \to n^۲=۹k^۲+۶k+۱ \to n^۲=۳(۳k^۲+۲k)+۱ \to n^۲\neq ۳k'$$
$$n=۳k+۲ \to n^۲=(۳k+۲)^۲ \to n^۲=۹k^۲+۱۲k+۴ \to n^۲=۳(۳k^۲+۴k+۱)+۱$$
$$\to n^۲\neq ۳k'$$

یعنی $n^{۲}$ مضرب ۳ نیست واین خلاف فرض می باشد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تعریف: دو عدد طبیعی را نسبت به هم اول (متباین)گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها برابر یک باشد. مانند دو عدد ۳ و ۵ یا دو عدد ۱۲ و ۱۷

تعریف: کسر $\frac{p}{q}$ را تحویل ناپذیر (ساده نشدنی) گویند، هرگاه صورت ومخرج آن نسبت به هم اول باشند. مانند کسر $\frac{۳}{۵}$

توجه کنید که:

۱- در هر کسر تحویل ناپذیر عامل مشترکی غیر از یک بین صورت ومخرج آن وجود ندارد.

۲- هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد پس گویا است و می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\rightarrow(\sqrt{۲})^{۲}=(\frac{a}{b})^{۲}\rightarrow ۲=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\rightarrow a^{۲}=۲b^{۲}$$

یعنی $a^{۲}$ زوج است .پس a نیز زوج است قرار می دهیم $a=۲k$.

$$\Rightarrow(۲k)^{۲}=۲b^{۲}\rightarrow ۴k^{۲}=۲b^{۲}\rightarrow ۲k^{۲}=b^{۲}$$

یعنی $b^{۲}$ هم زوج است.پس b نیز زوج است.درنتیجه صورت و مخرج کسر $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ بر ۲ بخش پذیرند و این با تحویل ناپذیر بودن آن تناقض دارد.لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۵}$ یک عدد گنگ است.

توجه : در برخی موارد اثبات گنگ بودن یک عدد را به شکل ساده تری مانند نمونه های زیر انجام می گیرد.

تمرین: نشان دهید که $۲\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $۲\sqrt{۳}$ گویا است .پس می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$۲\sqrt{۳}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\rightarrow \sqrt{۳}=\frac{a}{۲b}$$

یعنی $\sqrt{۳}$ را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت و این با گنگ بودن $\sqrt{۳}$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۵۰}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۲}+۱$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۱+\sqrt{۵}}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گویا است. پس می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\sqrt{۲}-\sqrt{۳}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\rightarrow \sqrt{۲}b-\sqrt{۳}b=a\rightarrow \sqrt{۲}b=a+\sqrt{۳}b$$

$$\rightarrow (\sqrt{۲}b)^{۲}=(a+\sqrt{۳}b)^{۲}\rightarrow ۲b^{۲}=a^{۲}+۲\sqrt{۳}ab+۳b^{۲}\rightarrow ۲b^{۲}-۳b^{۲}-a^{۲}=۲\sqrt{۳}ab$$

$$\rightarrow -b^{۲}-a^{۲}=۲\sqrt{۳}ab\rightarrow \sqrt{۳}=\frac{-b^{۲}-a^{۲}}{۲ab}$$

یعنی $\sqrt{۳}$ را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت و این با گنگ بودن $\sqrt{۳}$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

نتیجه : اگر b عددی گنگ و a عدد گویای غیر صفر باشند. در این صورت اعداد $a+b$ و $a-b$ و $a.b$ و $\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b}$ گنگ هستند.

☑ دو اصل مهم در ریاضیات

۱- اصل استقرای ریاضی

در فرایند استدلال استقرایی با جمع آوری مشاهدات به طور تجربی می توان ادعا هایی را نشان داد ولی نمی توان در حالت کلی آنها را قبول کرد.برای اثبات ادعا های خود به یک ابزار دقیق و قوی تری یعنی اصل استقرای ریاضی نیازمندیم. این اصل به صورت زیر است.

اصل استقرای ریاضی

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره ی عدد طبیعی n باشد.اگر $P(۱)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای $k \geq ۱$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

مثال: به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

« مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی ابتدا از یک مربع کامل است.»

یعنی: $$P(n): ۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$$

حل:

$P(۱)$ درست است. $P(۱): ۱=۱^۲$

فرض استقرا $P(k): ۱+۳+۵+...+(۲k-۱)=k^۲$

حکم استقرا $P(k+۱): ۱+۳+۵+...+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

طرف اول حکم $\underbrace{۱+۳+۵+...+(۲k-۱)}_{k^۲}+(۲k+۱)=k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

تمرین: به کمک اصل استقرای ریاضی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

الف) $۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$

ب) $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

تمرین: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که

الف) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

ج) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$

د) $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

تمرین: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

تمرین: مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=$$

حدس: $=\frac{n}{n+1}$

تمرین : با استفاده از اصل استقرای ریاضی ، ثابت کنید که رابطه ی زیر برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

تمرین: ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی n عبارت 8^n-1 بر ۷ بخش پذیر است.

حل:

$p(n):8^n-1=7m,m\in N$

$p(1):8^1-1=7(1)$ $\quad$ $p(1)$ درست است.

$p(k):8^k-1=7r,r\in N$ فرض استقرا

$p(k+1):8^{k+1}-1=7t,t\in N$ حکم استقرا

اثبات: دو طرف فرض استقرا را در عدد ۸ ضرب می کنیم.

$$۸\times(۸^k-۱)=۸\times(۷r)\to ۸^{k+۱}-۸=۷\times(۸r)\xrightarrow{+۷}۸^{k+۱}-۸+۷=۷\times(۸r)+۷$$
$$\to ۸^{k+۱}-۱=۷\times(\underbrace{۸r+۱}_{t})\to ۸^{k+۱}-۱=۷t$$

تمرین: به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی nعبارت $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش پذیر است.

تمرین: با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n عبارت $۴^n+۱۵n-۱$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$p(n):۴^n+۱۵n-۱=۹m,m\in N$$

$p(۱):۴^۱+۱۵\times۱-۱=۹\times۲$ $\qquad$ $p(۱)$ درست است.

$p(k):۴^k+۱۵k-۱=۹r,r\in N$ $\qquad$ فرض استقرا

$p(k+۱):۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹t,t\in N$ $\qquad$ حکم استقرا

اثبات: بنا بر فرض استقرا داریم.

$$۴^k+۱۵k-۱=۹r\xrightarrow{\times۴}۴\times(۴^k+۱۵k-۱)=۴\times(۹r)\to ۴^{k+۱}+۶۰k-۴=۹(۴r)$$
$$\to ۴^{k+۱}+۱۵k+۴۵k+۱۵-۱-۱۸=۹(۴r)\to ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹(۴r)-۴۵k+۱۸$$
$$\to ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹(\underbrace{۴r-۵k+۲}_{t})\to ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹t$$

تمرین : اگر $a\ge -۱$ و $n\in N$ ،آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی نامساوی[۲] زیر را ثابت کنید.

$$(۱+a)^n\ge ۱+na$$

حل:

$$p(n):(۱+a)^n\ge ۱+na$$

$p(۱):(۱+a)^۱\ge ۱+۱(a)$ $\qquad$ $p(۱)$ درست است.

$p(k):(۱+a)^k\ge ۱+ka$ $\qquad$ فرض استقرا

$p(k+۱):(۱+a)^{k+۱}\ge ۱+(k+۱)a$ $\qquad$ حکم استقرا

[2] . این نامساوی به نامساوی برنولی معروف است.

اثبات:

اگر $a=-۱$ در این صورت $[۱+(-۱)]^{k+۱}\geq ۱+(k+۱)(-۱)\rightarrow ۰\geq -k\rightarrow ۰\leq k$ که چون $k\in N$ حکم استقرا بدیهی است

اگر $a>-۱$ در این صورت $۱+a>۰$.

حال دو طرف فرض استقرا را در $۱+a$ ضرب می کنیم.

$$(۱+a)^k\geq ۱+ka\rightarrow (۱+a)(۱+a)^k\geq (۱+a)(۱+ka)\rightarrow (۱+a)^{k+۱}\geq (۱+a)(۱+ka)\ *$$

از طرفی داریم.

$$\overset{\text{بدیهی}}{ka^۲\geq ۰}\xrightarrow{+(۱+ka+a)}۱+ka+a+ka^۲\geq ۱+ka+a\rightarrow ۱+a+ka+ka^۲\geq ۱+ka+a$$
$$(۱+a)+ka(۱+a)\geq ۱+(k+۱)a\rightarrow (۱+a)(۱+ka)\geq ۱+(k+۱)a\ *$$

با مقایسه ی دو نتیجه ستاره دار حکم استقرا ثابت است. یعنی $(۱+a)^{k+۱}\geq ۱+(k+۱)a$

***

توجه کنید که گاهی لازم است مرحله ی اول استقرا از یک عدد طبیعی بیشتر از یک[۳] آغاز شود. در این صورت برای اثبات احکام از اصل استقرای تعمیم یافته کمک می گیریم.

اصل استقرای تعمیم یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره ی عدد طبیعی n باشد.اگر $P(m)$ برای $m>۱$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k\geq m$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n\geq m$ نیز درست است.

تمرین: ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی $n\geq ۷$ رابطه ی $n!>۳^n$ همواره بر قرار است.

$P(n):n!>۳^n$

حل:

$p(۷)$ درست است. $P(۷):۷!>۳^۷\rightarrow ۵۰۴۰>۲۱۸۷$

$P(k):k!>۳^k$ فرض استقرا

$P(k+۱):(k+۱)!>۳^{(k+۱)}$ حکم استقرا

---

۲. این عدد را پایه ی استقرا می نامند.

حال دو طرف فرض را در $k+۱$ ضرب می کنیم.

$$k!>۳^k \xrightarrow{\times(k+۱)} (k+۱)k!>(k+۱)۳^k \rightarrow (k+۱)!>(k+۱)۳^k \ *$$

از طرفی داریم:

$$k\geq ۷ \rightarrow k+۱>۷ \rightarrow (k+۱)>۳ \xrightarrow{\times ۳^k} (k+۱)۳^k>۳\times ۳^k \rightarrow (k+۱)۳^k>۳^{k+۱} \ *$$

و با مقایسه ی نتایج ستاره دار واضح است که $(k+۱)!>۳^{(k+۱)}$

توجه:

۱ : برای هر سه عدد حقیقی c و b و a اگر $b>c$ و $a>b$ آنگاه $a>c$.

۲ : برای هر عدد طبیعی k همواره داریم $(k+۱)\times k!=(k+۱)!$

....

تمرین: حکم زیر را در نظر بگیرید.

$$۲^n<n!$$

الف : پایه‌ی استقرا را تعیین کنید.(مرحله ای که استقرا از آن شروع می شود.)

ب : به کمک اصل استقرای ریاضی این حکم را اثبات کنید.

تمرین: با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

الف) تعداد قطر های هر n ضلعی محدب برابر $D(n)=\frac{n(n-۳)}{۲}$است.

ب) مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $S(n)=(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

توجه:

$(k-۱)$ + تعداد قطر های k ضلعی = تعداد قطر های $k+۱$ ضلعی

یعنی : $D(k+۱)=D(k)+(k-۱)$

۱۸۰+ مجموع زاویه های k ضلعی = مجموع زاویه های $k+۱$ ضلعی

یعنی $S(k+۱)=S(k)+۱۸۰$

....

۲- اصل لانه کبوتری (اصل حجره ها)

یکی دیگر از اصول مهم در ریاضیات که در حل بسیاری از مسائل کار برد دارد اصل لانه کبوتری یا اصل دیریکله است.این اصل به صورت زیر است.

> اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد.در صورتی که تعداد کبوتر ها بیش از تعداد لانه ها باشد($m > n$) در این صورت حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که حاوی بیش از یک کبوتر است.

تمرین: ۸ نفر در یک میهمانی شرکت کرده اند،ثابت کنید که حد اقل ۲ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر میهمانان را به منزله ی کبوتر و روز های هفته را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۷ < ۸ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

۸ | ۷
۷ | ۱
۱

۱+۱=۲

تمرین: از ۱۸ نفردانش آموز یک کلاس ثابت کنید که حد اقل ۳ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر دانش آموزان را به منزله ی کبوتر و روز های هفته را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۷ < ۱۸ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

۱۸ | ۷
۱۴ | ۲
۴

۲+۱=۳

تمرین: از ۴۰۰ دانش آموز یک مدرسه،حداقل چند نفر در یک ماه سال متولد شده اند؟چرا؟

حل: می دانیم که هر سال۱۲ماه است، اگر دانش آموزان را به منزله ی کبوتر و ماه ها ی سال را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۱۲ < ۴۰۰ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳۴ نفر در یک ماه سال متولد شده اند.

۴۰۰ | ۱۲
۳۹۶ | ۳۳
۴

۳۳+۱=۳۴

تمرین: ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۶ تقسیم کنیم،حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی مانده ی یکسان خواهند بود.

حل: اعضای مجموعه ی S را به منزله ی کبوتر واعضای مجموعه ی باقی مانده های تقسیم بر۶ را لانه فرض می کنیم. چون $۶ < ۷$ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل دو عضو از مجموعه ی S دارای باقی مانده ی برابر خواهند بود.

$$\begin{array}{r|l} ۷ & ۶ \\ \hline \underline{۶} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

توجه: مجموعه ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۶ می شود.

$$\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$$

تمرین: ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه ی ۹ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۴ تقسیم کنیم،دست کم سه عضو از این مجموعه دارای باقی مانده ی یکسان خواهند بود.

تمرین: نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه ی $S = \{۱,۲,۳,...,۹\}$ که دارای ۶ عضو باشد،حداقل دو عضو داردکه مجموع آنها برابر ۱۰ است.

حل: هر یک از مجموعه های $\{۴,۶\}$و $\{۳,۷\}$و $\{۲,۸\}$و $\{۱,۹\}$ (مجموع هر دو عضوآنها برابر۱۰ است.) را به منزله ی لانه و هر یک از اعضاء زیر مجموعه های ۶ عضوی را کبوتر فرض می کنیم.چون $۴ < ۶$ پس طبق اصل لانه کبوتری ومطابق تقسیم مقابل حداقل ۲ عضو از مجموعه ی ۶ عضوی مجموع هر دوی آنها برابر۱۰ است.

$$\begin{array}{r|l} ۶ & ۴ \\ \hline \underline{۴} & ۱ \\ ۲ & \end{array}$$

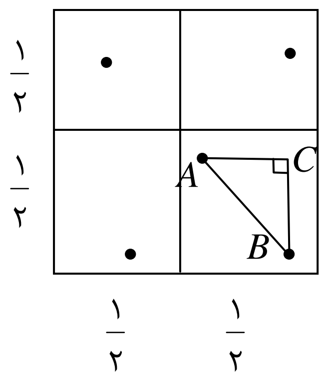
۱+۱=۲

تمرین: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع یک سانتی متر مفروض هستند،ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

حل: اگر مربع را به چهار مربع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم و این چهار مربع را لانه و ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم ، چون $۴ < ۵$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مربع کوچک قرار می گیرند.حال طبق رابطه ی فیثاغورس داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۵ & ۴ \\ \hline \underline{۴} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲



$$\begin{cases} AB^{۲} = AC^{۲} + BC^{۲} \\ AC < \frac{۱}{۲} \to AC^{۲} < \frac{۱}{۴} \\ BC < \frac{۱}{۲} \to BC^{۲} < \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\therefore \to AC^{۲} + BC^{۲} < \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \to AB^{۲} < \frac{۱}{۲} \to AB < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

تمرین: پنج نقطه داخل مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۲ قرار دارند.ثابت کنید دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از یک است.

تمرین: ده نقطه داخل یک مربع به ضلع ۳ قرار دارند، ثابت کنید که دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

تمرین: هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و۶ متر انتخاب می کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.

تمرین: در یک کلاس حد اقل ۶ نفر در یک روز هفته متولد شده اند،کمترین تعداد دانش آموزان این کلاس را تعیین کنید.

حل: هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از روز های هفته را لانه فرض می کنیم.با توجه به اصل لانه کبوتر ی و با توجه به تقسیم زیر حداقل تعداد دانش آموزان این کلاس ۳۶ نفر است.

$$\begin{array}{r|l} x & ۷ \\ \hline \underline{۳۵} & ۵ \\ ۱ & \end{array}$$

$$۶-۱=۵$$

$$x=(۷\times ۵)+۱=۳۶$$

تمرین: به تعداد ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهر های تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

حل: روش اول:

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته های ورزشی را لانه فرض می کنیم. چون ($۳<۵۰$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۱۷ نفر هم رشته هستند.

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۳ \\ \hline \underline{۴۸} & ۱۶ \\ ۲ & ۱۶+۱=۱۷ \end{array}$$

حال هر یک از ۱۷ ورزشکار هم رشته را کبوتر و هر یک از شهر ها را لانه فرض می کنیم. چون ($۴<۱۷$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل۵ نفر از ورزشکاران هم رشته، همشهری هستند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۷ & ۴ \\ \hline \underline{۱۶} & ۴ \\ ۱ & ۴+۱=۵ \end{array}$$

روش دوم:

۵۰	۱۲
۴۸	۴
۲	۴+۱=۵

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته – شهر های موجود ($۱۲ = ۴ \times ۳$) را لانه فرض می کنیم.چون ($۱۲ < ۵۰$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

....

تمرین : در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند.آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف اول نام و حرف اول نام خانوادگی آن ها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا ؟

....

تمرین: با استفاده از برهان خلف اصل لانه کبوتری را اثبات کنید.

حل: هرگاه m کبوتر و n لانه داشته باشیم بطوری که $m > n$ و در همه ی لانه ها کمتر از ۲ کبوتر وجود خواهد داشت.اگر تعداد کبوتر ها در هر لانه کمتر از ۲ باشد،مجموع کل کبوتر های جا شده در لانه ها کمتر یا مساوی n می گردد،یعنی $m \leq n$ واین با فرض $m > n$ متناقض است.

....

تذکر:

۱ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m > n$ با توجه به اصل لانه کبوتری می توان گفت که دست کم یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\left[\frac{m}{n}\right] + ۱$ کبوتر قرار می گیرد[۴].

۲ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m > n$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از $\left[\frac{m-۱}{n}\right]$ کبوتر قرار می گیرد.

***

۳ – منظور از نماد $[x]$ همان جزء صحیح x است.