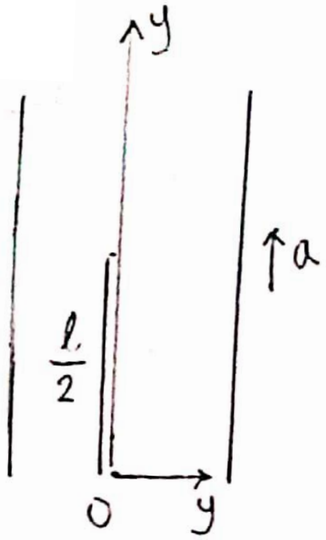
مسئله ۱



آ) در مدتی که ذره بین صفحه‌های خازن از محور x عبور می‌کند حداکثر زمانی است که امکان برخورد ذره با صفحه‌ها وجود دارد. پس

$$\frac{l}{2}=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_{max}=\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ب) میدان در جهت x- است:

$$m a_x=-qE$$

$$m a_x=-q\frac{V(t)}{d} \Rightarrow a_x=-\frac{qV(t)}{md}$$

پ)

$$v_x(t)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x(t)=A+B\omega\cos\omega t$$

$$a_x(t)=\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x(t)=-B\omega^2\sin\omega t$$

بنابراین $-\frac{q}{md}V_0\sin\omega t=-B\omega^2\sin\omega t$ درنتیجه

$$B=\frac{qV_0}{m\omega^2 d}$$

در لحظه $t=0$ ، $v_x(0)=0$ است. پس

$A+B\omega=0$ و

$$A=\frac{-qV_0}{m\omega d} \Rightarrow x=\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

ت) برای این که ذره به خازن برخورد نکند باید $x(t=t_{max})>-\frac{d}{2}$.

$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t_{max}+\frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right)>-\frac{d}{2}$. از آنجایی که $t_{max}\gg\frac{1}{\omega}$ است

پس باید $\frac{qV_0}{m\omega d}t_{max}<\frac{d}{2}$ و $\frac{2qV_0t_{max}}{md^2}<\omega$

ولذا

$$\omega_{min}=\frac{2qV_0}{md^2}\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ث) باید $\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t_{max} + \frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right) > -\frac{d}{2}$

این بار $\omega t_{max} \ll 1$ است. در نتیجه

$$\sin\omega t_{max} \approx \omega t_{max} - \frac{1}{6}(\omega t_{max})^3$$

بنابراین

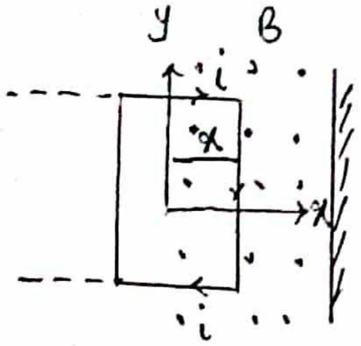
$$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(\frac{1}{6}\omega^2 t_{max}^3\right) < \frac{d}{2}$$

$$\omega < \frac{3md^2}{qV_0 t_{max}^3}$$

$$\omega_{max} = \frac{3md^2}{qV_0}\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

مسئله ۲

۳)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = xWB$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vWB}{R}$$

$$F = -iWB$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2}{R}v \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2v}{mR}$$

ب) اما سرعت لحظه‌ای $v(t)$ و مکان لحظه‌ای ضلع CD یعنی $x(t)$ با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای به هم مربوط‌اند

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

بنابراین

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{W^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\frac{dv}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

یعنی باید $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = \frac{-W^2B^2}{mR}$ باشد. پس

$$v(x) = \frac{-W^2B^2}{mR}x + \lambda$$

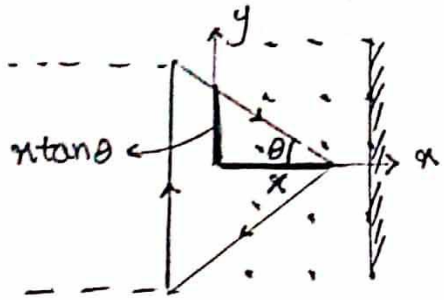
به ازای $x = 0$ باید $v(0) = v_0$ باشد پس $\lambda = v_0$.

$$v(x) = v_0 - \frac{W^2B^2}{mR}x$$

پ) $x = \frac{mRv_0}{2W^2B^2}$

ت) باید به ازای $x = h$ ، $v(h) = 0$ $\Leftarrow$ $v_{0\,max} = \frac{W^2B^2}{mR}h$

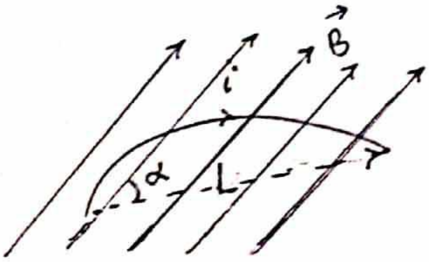
ب)



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(x)(2x\tan\theta)B$$

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{2xBv\tan\theta}{R}$$



در یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیروی وارد بر یک سیم خمیده مطابق شکل، $F = iLB\sin\alpha$ است.

بنابراین برای مثلث فوق $F = -i(2x\tan\theta)B$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{mR}$$

ج) مانند قسمت ب): $a = v\dfrac{dv}{dx}$ بنابراین

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = v_0$$

$$v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 + v_0$$

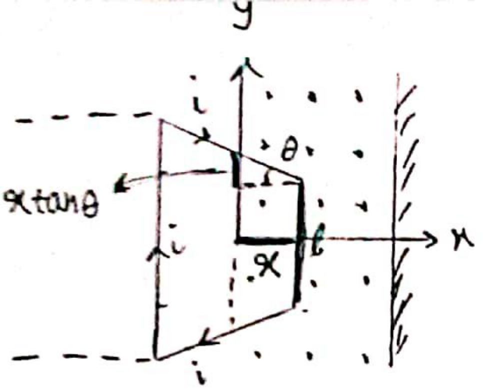
د)

$$x = \left(\frac{3\, mRv_0}{8\, B^2\tan^2\theta}\right)^{1/3}$$

ه) باید به ازای $x = h$، $v(h) = 0$ باشد $\Leftarrow$

$$v_{0\,max} = \frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}h^3$$

ج)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = [\ell + (\ell + 2x\tan\theta)]\frac{x}{2}B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = (\ell + 2x\tan\theta)\frac{vB}{R}$$

$$F = -i(\ell + 2x\tan\theta)B$$

$$m\frac{dv}{dt} = -(\ell + 2x\tan\theta)^2\frac{vB^2}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{(\ell + 2x\tan\theta)^2B^2v}{mR}$$

د)

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{(\ell + 2x\tan\theta)^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}$$

$$\beta = -2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}$$

$$\gamma = \frac{-B^2\ell^2}{mR}$$

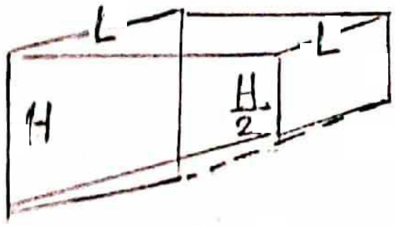
$$\lambda = v_0$$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 - 2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}x^2 + -\frac{B^2\ell^2}{mR}x + v_0$$

ز) به ازای $x = h$ باید $v(h) = 0$ باشد

$$v_{0\,max} = \frac{B^2}{mR}\left(\frac{4}{3}\tan^2\theta\, h^3 + 2\tan\theta\, \ell h^2 + \ell^2 h\right)$$

مسئله ۳



$$Av = A'v'$$

الف) چگالی هوا را ثابت فرض کرده‌ایم، بنابراین

$$Av = A'v' \Rightarrow LHv = L\frac{H}{2}v'$$

بنابراین $v' = 2v$

ب) $\Delta P = \rho g y$

که y فاصله عمودی بین بالا و پایین لایه هوا است. مطابق شکل ۱:

$$y \simeq 10\,(7\,cm) = 70\,cm \Rightarrow \Delta P = (1\ kg/m^3)(10\ m/s^2)(0.7\ m)$$

$$\Delta P = 7\ Pa$$

پ) با صرف‌نظر از جمله $\rho g y$،

$$\Delta P_{BC} = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v'^2$$

$$= -\frac{3}{2}\rho v^2 = \frac{-3}{2}(1\ kg/m^3)(60\ m/s)^2$$

$$\Delta P_{BC} = -5400\ Pa$$

ت)

$$F_1 = \frac{2}{3}|\Delta P_{BC}|\,(lw)\,2$$

$$= \frac{2}{3}(5400\ Pa)(40\ m^2)\times 2$$

$$F_1 = 288000\ N$$

ث)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v = \rho(2lh)v = (1\ kg/m^3)(40\ m)(2\ m)(60\ m/s)$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4800\ kg/s$$

ج)

$$F_2 = \frac{\text{تغییر تکانه هوا}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\, v \sin\theta}{\Delta t} = (4800\ kg/s)(60\ m/s)(0.25)$$

$$F_2 = 72000\ N$$

چ)

$$F_1 + F_2 = mg \Rightarrow m = 36000\ kg$$

ح)

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\rho' v_m^2\right)(2lw) + \rho' v_m^2 (2lh)\sin\theta = mg$$

$$\rho' = \frac{mg}{v_m^2(2l)(w + h\sin\theta)} = \frac{360\,000}{(200)^2(40)(2 + 2(0.25))}$$

$$\rho' = 0.09\ kg/m^3$$

مسئله ٤

آ)

$$V = V_0 + Ay$$

$$P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma} \Rightarrow P = P_0 \left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

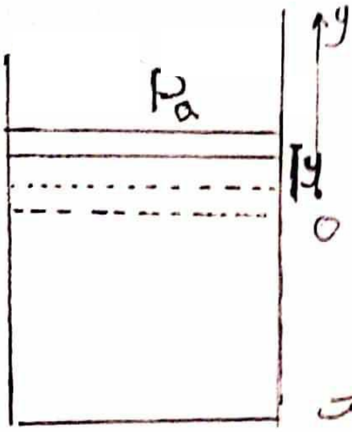
$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{و} \quad PV = nRT \Rightarrow T = T_0 \frac{PV}{P_0 V_0}$$

$$T = T_0 \left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{1-\gamma}$$

ب) $\left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma A y}{V_0}$ که برای y ها کوچک درست است. بنابراین

$$P - P_0 \approx -\frac{\gamma A P_0}{V_0} y$$

پ) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است. نیرو وارد بر پیستون $F_y = PA - mg - P_a A$ است که P_a فشار هوای بیرون است.



در حالت تعادل پیستون $P_0 A - mg - P_a A = 0$ است

بنابراین

$$F_y = PA - P_0 A = m a_y$$

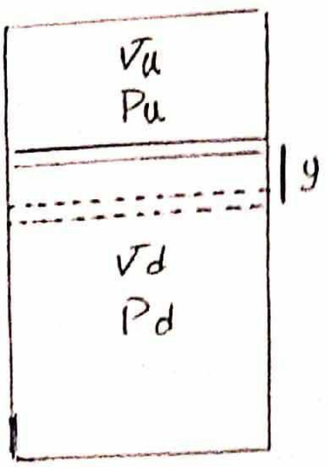
$$m a_y = -\frac{\gamma A^2 P_0}{V_0} y$$

این معادله شبیه معادله حرکت یک جرم و فنر به ثابت $k = \frac{\gamma A^2 P_0}{V_0}$ است. بنابراین

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2 P_0}{m V_0}}$$

ت) $\frac{1}{2} k y_0^2 + \frac{1}{2} m (0)^2 = \frac{1}{2} k (0)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow k = \frac{m v_0^2}{y_0^2}$

ث) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است.



بالایی $V_u = V_1 - Ay$

پایینی $V_d = V_2 + Ay$

$$P_u V_u^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} \quad \text{و} \quad P_d V_d^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

$$P_u = P_1\left(1-\frac{Ay}{V_1}\right)^{-\gamma} \approx P_1\left(1+\frac{A\gamma y}{V_1}\right)$$

$$P_d = P_2\left(1+\frac{Ay}{V_2}\right)^{-\gamma} \approx P_2\left(1-\frac{A\gamma y}{V_2}\right)$$

$$F_y = P_d A - P_u A - mg$$

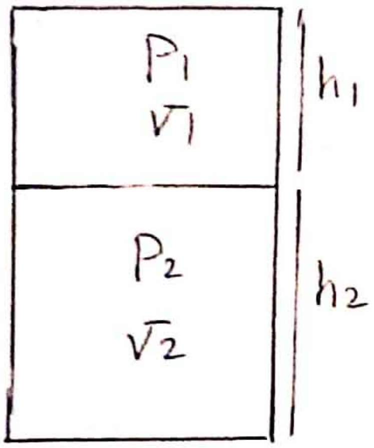
$$ma_y = P_2 A - \frac{P_2 \gamma A^2}{V_2} y - P_1 A - \frac{P_1 \gamma A^2}{V_1} y - mg$$

در حالت تعادل $P_2 A - P_1 A - mg = 0$ است ولذا

$$ma_y = -\gamma A^2\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2}{m}\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)}$$

ه)



$$P_1 = (13600\ \mathrm{Kg/m^3})(10\ \mathrm{m/s^2})(0.72\ \mathrm{m})$$

$$P_1 = 97920\ \mathrm{Pa}$$

در حالت تعادل پیستون $P_2 A - P_1 A - mg = 0$

در نتیجه

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$= 97920\ \mathrm{Pa} + \frac{2.88}{4\times10^{-4}}\ \mathrm{Pa}$$

$$P_2 = 105120\ \mathrm{Pa}$$

$$P_1 V_1 = n_1 RT \qquad V_1 = Ah_1 \qquad , \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

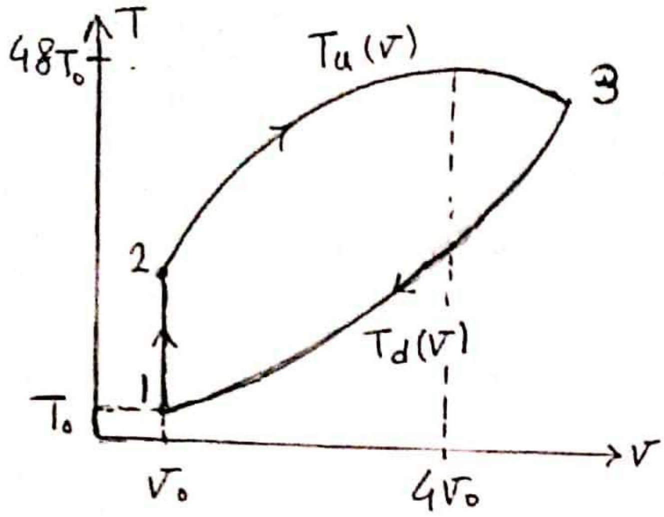
$$P_2 V_2 = n_2 RT \qquad V_2 = Ah_2$$

از تقسیم دو معادله حالت:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{P_1} = \frac{105120}{2(97920)} = \frac{73}{136}$$

از طرفی $h_1 + h_2 = 209\ \mathrm{cm}$ ، بنابراین

$$h_1 = 73\ \mathrm{cm} \quad \text{و} \quad h_2 = 136\ \mathrm{cm}$$



مسئله ۵

آ) $T_d(V) = cV^2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c = \frac{T_0}{V_0^2}} \quad \text{و} \quad T_0 = cV_0^2$$

نقطه $(4V_0, 48T_0)$ بیشینه منحنی

$T_u(V) = aV + bV^2$ است ، درنتیجه

$$\left.\frac{dT_u}{dV}\right|_{(4V_0, 48T_0)} = 0 \Rightarrow \qquad a + 2b(4V_0) = 0 \Rightarrow \boxed{a = -8bV_0}$$

و نیز $\boxed{48T_0 = a(4V_0) + b(4V_0)^2}$

از دو معادله بالا

$$T_d(V) = T_0 \frac{V^2}{V_0^2} \quad \text{و} \quad T_u(V) = 3T_0\left(\frac{8V}{V_0} - \frac{V^2}{V_0^2}\right)$$

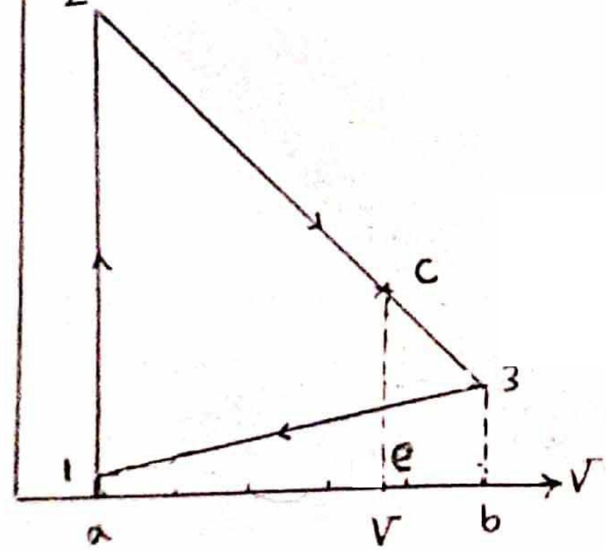
ب) $PV = nRT$

$$(V, P, T)$$
$$\Downarrow$$

نقطه ۱: $\left(V_0, \frac{nRT_0}{V_0}, T_0\right)$

نقطه ۲: $\left(V_0, \frac{21nRT_0}{V_0}, 21T_0\right)$

نقطه ۳: $\left(6V_0, \frac{6nRT_0}{V_0}, 36T_0\right) \Leftarrow T_u(V) = T_d(V)$



پ) نمودار P-V چرخه

$$P_u V = nRT_u \Rightarrow P_u = \frac{3nRT_0}{V_0}\left(8 - \frac{V}{V_0}\right)$$

$$P_d V = nRT_d \Rightarrow P_d = \frac{nRT_0}{V_0}\frac{V}{V_0}$$

$$W_{1\to 2}=0$$

$$W_{2\to 3}=-(a23b \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=-(P_2+P_3)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right)=-\frac{27nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right)=-\frac{135}{2}nRT_0$$

$$W_{3\to 1}=(a13b \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=(P_1+P_3)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right)=\frac{7nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right)=\frac{35}{2}nRT_0$$

ت)

$$W_{\text{چرخه}}=W_{1\to 2}+W_{2\to 3}+W_{3\to 1}=-50nRT_0$$

ث) قانون اول ترمودینامیک:

$$Q_{1\to 2}=U(2)-U(1)-W_{1\to 2}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_2-\frac{3}{2}nRT_1-W_{1\to 2}=30nRT_0$$

$$Q_{2\to 3}=U(3)-U(2)-W_{2\to 3}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_3-\frac{3}{2}nRT_2-W_{2\to 3}=90nRT_0$$

$$Q_{3\to 1}=U(1)-U(3)-W_{3\to 1}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_1-\frac{3}{2}nRT_3-W_{3\to 1}=-70nRT_0$$

ج) گرمای داده شده به چرخه $120nRT_0$ نیست، بلکه:

برای نقطه دلخواهی مانند c به حجم V، فشار $P_u(V)$ و دمای $T_u(V)$

$Q_{2\to c}$ را به دست می‌آوریم:

$$W_{2\to c}=-(a2ce \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=-(P_2+P_c)\left(\frac{V_d-V_a}{2}\right)$$

$$=-\left(\frac{21nRT_0}{V_0}+\frac{3nRT_0}{V_0}\left(8-\frac{V}{V_0}\right)\right)\frac{1}{2}(V-V_0)$$

$$U(c)-U(2)=\frac{3}{2}nRT_u(V)-\frac{3}{2}nRT_2$$

$$U(c)-U(2)=\frac{3}{2}nR\,3T_0\left(\frac{8V}{V_0}-\frac{V^2}{V_0^2}\right)-\frac{3}{2}nR(21T_0)$$

در نتیجه

$$Q_{2\to c}=U(c)-U(2)-W_{2\to c}$$

$$=-6nRT_0\left(\frac{V^2}{V_0^2}-10\frac{V}{V_0}+9\right)$$

$$\frac{dQ_{2\to c}}{dV}=0 \Rightarrow V=5V_0$$

یعنی در فرآیند $2\to 3$ در بخش $2\to c$ گرما به چرخه داده می‌شود و در بخش $3\to c$ از آن گرفته می‌شود

$$Q_{2\to c}\Big|_{V=5V_0}=96\,nRT_0$$

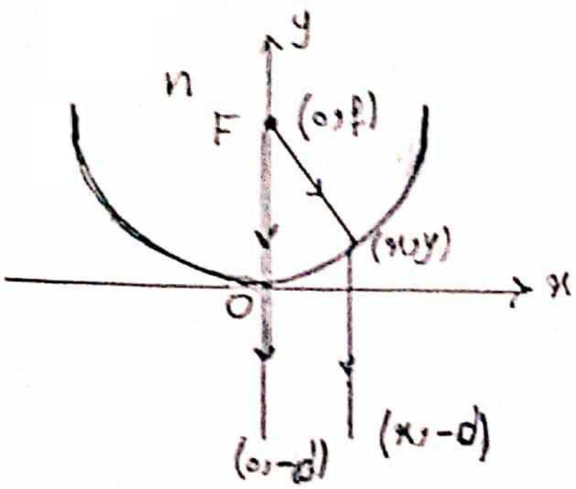
گرمای داده شده به چرخه $96nRT_0+30nRT_0$ ، یعنی $126nRT_0$ است.

د)

$$\text{بازده چرخه}=\frac{|W_{کل}|}{\text{گرمای داده شده به چرخه}}$$

$$=\frac{50\,nRT_0}{126\,nRT_0}=\frac{25}{63}$$

مسئله ۶



آ)

$$\Delta t = \frac{n}{c}\sqrt{x^2+(y-a)^2} + \frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

ب) برای این که پرتوها هنگام خروج از مرز موازی باشند باید همزمان به صفحه‌ی دلخواهی مانند $y=-d$ برسند، یعنی مثلاً

$$\Delta t_{(0,f)\to(x,y)\to(x,-d)} = \Delta t_{(0,f)\to(0,0)\to(0,-d)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(f-y)^2} + \frac{1}{c}(y+d) = \frac{n}{c}f + \frac{1}{c}d$$

$$\Downarrow$$

$$n^2\left(x^2+(f-y)^2\right) = (nf-y)^2$$

$$(n^2-1)y^2 - 2nf(n-1)y + n^2x^2 = 0$$

$$y = \frac{n}{n^2-1}\left(f(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2f^2-(n^2-1)x^2}\right)$$

علامت − قابل قبول است چون منحنی باید از $(0,0)$ بگذرد. پس

$$y = \frac{nf}{n+1}\left(1-\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}}\right)$$

پ) باید زیر رادیکال همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی

$$1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{n-1}{n+1}f^2$$

$$x \leq \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f \Rightarrow x_{max} = R \equiv \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f$$

ت) برای $\frac{x}{f} \ll 1$

$$\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}$$

در نتیجه

$$y \approx \frac{nf}{n+1}\left(1-1+\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}\right)$$

$$y \approx \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{f}$$

ث) می خواهیم

$$\Delta t_{(0,a)\to(x,y)\to(0,-b)} = \Delta t_{(0,a)\to(0,0)\to(0,-b)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2} = \frac{n}{c}a+\frac{1}{c}b$$

$$n\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+y^2+b^2+2by} = na+b$$

داریم $y \approx \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{f}$ که $\frac{x}{f} \ll 1$

$$n\sqrt{x^2+a^2-\frac{n}{n-1}\frac{x^2 a}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} +$$

$$\sqrt{x^2+b^2+\frac{n}{n-1}\frac{x^2 b}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} = na+b$$

از جمله $\frac{x^4}{f^4}$ در مقابل $\frac{x^2}{f^2}$ صرفنظر می کنیم و در نتیجه

$$na\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}}+b\sqrt{1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}} \approx na+b$$

اما $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1+\frac{\epsilon}{2}$ اگر $|\epsilon| \ll 1$ ، بنابراین

$$na\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}\right)\right)+b\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}\right)\right) \approx na+b$$

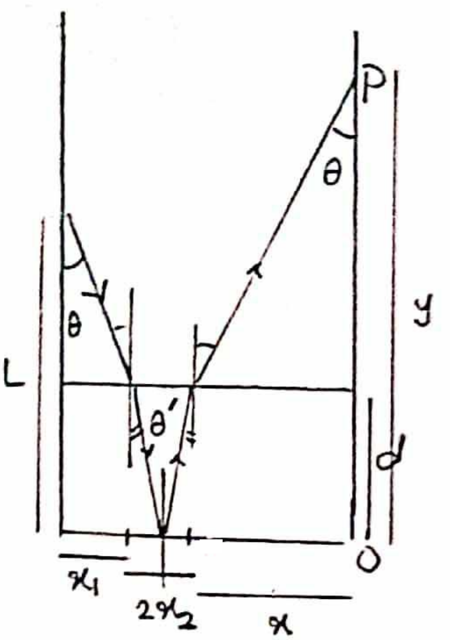
$$\Downarrow$$

پس از ساده کردن:

$$\frac{n}{a}+\frac{1}{b} = \frac{n}{f}$$

مسئله ۷

در بازه زمانی $0 < t < L/v_0$



الف) در لحظه t ، $d = v_0 t$ است

مطابق شکل : $OP = y$ و $y = d + x\cot\theta$

که $x_1 + 2x_2 + x = 2R$

و $x_1 = (L-d)\tan\theta$

$x_2 = d\tan\theta'$

و طبق قانون اسنل $\sin\theta = n\sin\theta'$

$$1+\cot^2\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta'} \Rightarrow \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

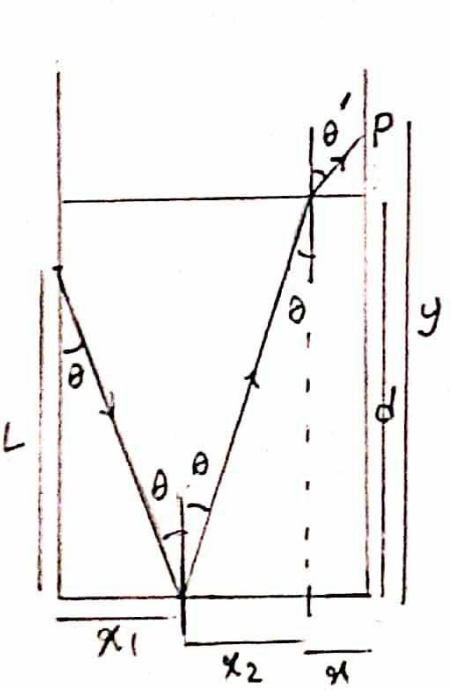
$$y = d + \left(2R - (L-d)\tan\theta - 2d\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)\cot\theta$$

$$y = 2d - L + 2R\cot\theta - 2d\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$y(t) = 2R\cot\theta - L + 2v_0 t\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$

ب)

$$v(t) = 2v_0\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$



پ) در لحظه t که $\frac{L}{v_0} < t < t_0$ ، $d = v_0 t$

است و $y = d + x\cot\theta'$

که $x_1 + x_2 + x = 2R$

$x_1 = L\tan\theta$

$x_2 = d\tan\theta$

و طبق قانون اسنل $n\sin\theta = \sin\theta'$

t_0 زمانی است که $x = 0$ می‌شود.

$$1+\cot^2\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta'} \Rightarrow \cot\theta' = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta}$$

$$y = d + (2R - L\tan\theta - d\tan\theta)\cot\theta'$$

$$y = (2R - L\tan\theta)\cot\theta' + d(1-\tan\theta\cot\theta')$$

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

این جواب برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$ درست است که $x(t)\Big|_{t=t_0} = 0$

$$2R - L\tan\theta - v_0 t_0 \tan\theta = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{v_0}(2R\cot\theta - L)$$

برای $t > t_0$ نقطهٔ P روی دیوارهٔ استوانه جابجا نمی‌شود و

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t_0\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

$$y(t) = 2R\cot\theta - L$$

ت) برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

$$v(t) = v_0\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

و برای $t > t_0$: $v(t) = 0$

ث) برای $0 < t < 200s$

برحسب cm: $y(t) = (2(1.73)-1)24.0 + 2(0.120)t\left(1-\frac{1.73}{2(1.20)}\right)$

$$y(t) = (59.0 + 0.067\,t)\ \text{cm}$$

برحسب $\frac{cm}{s}$: $v(t) = 2(0.120)\left(1-\frac{1.73}{2(1.20)}\right) = 0.067\ m/s$

$$t_0 = \frac{1}{0.12}\left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 492\,s$$

برای $200s < t < 492s$

$$y(t) = \left(2 - \frac{1.73}{3}\right) 24.0 \frac{\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(0.5)} + 0.120\,t\left(1 - \frac{2\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(1.73)}\right)$$

به ازای $|\epsilon| < 1$ $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$ بنابراین $\sqrt{1-0.4225} \approx 0.789$

$$y(t) \approx 41.5 + 0.036t$$

بین 38 تا 42 قبول است

بین 0.033 تا 0.039 قبول است.

برای $492s < t < 600s$

$$y(t) = \left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 59.0\ cm$$

$$v(t) = 0$$

ج)

$y_{max} = 59.0 + 0.067(200) = 72.4\ cm$ ، $v_{max} = 0.067\ cm/s$

بنابراین:

برای $0 < t < 200s$: $59.0\,cm < y < 72.4\,cm$ و $0.8 < \frac{y}{y_{max}} < 1$

برای $200s < t < 492s$: $48.7\,cm < y < 59.0\,cm$ و $0.7 < \frac{y}{y_{max}} < 0.8$

بین 44 تا 50 قبول است

بین 54 تا 61 قبول است.

بین 0.60 تا 0.70 قبول است

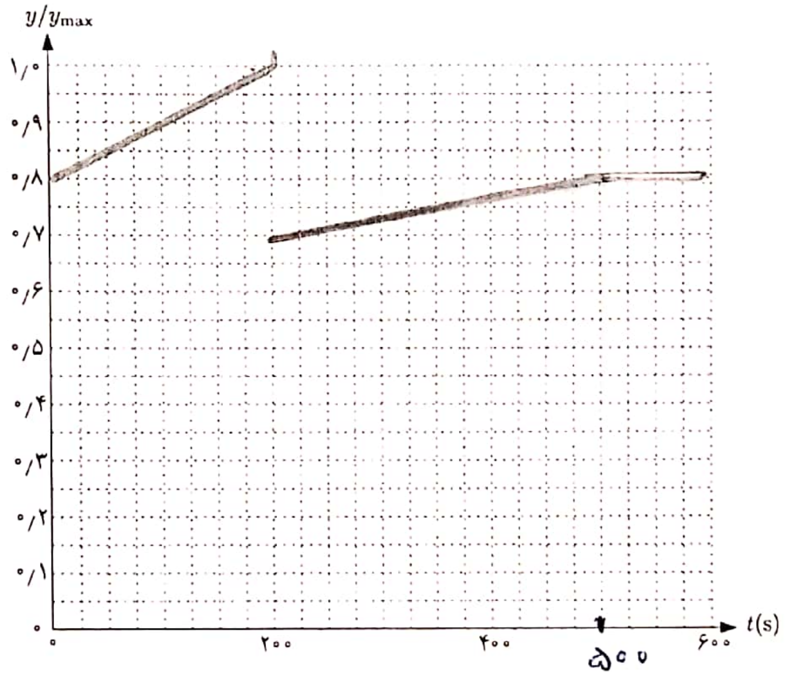
بین 0.75 تا 0.85 قبول است

برای $0 < t < 200$ $\frac{v}{v_{max}} = 1$

برای $200s < t < 492s$ $\frac{v}{v_{max}} \approx 0.54$

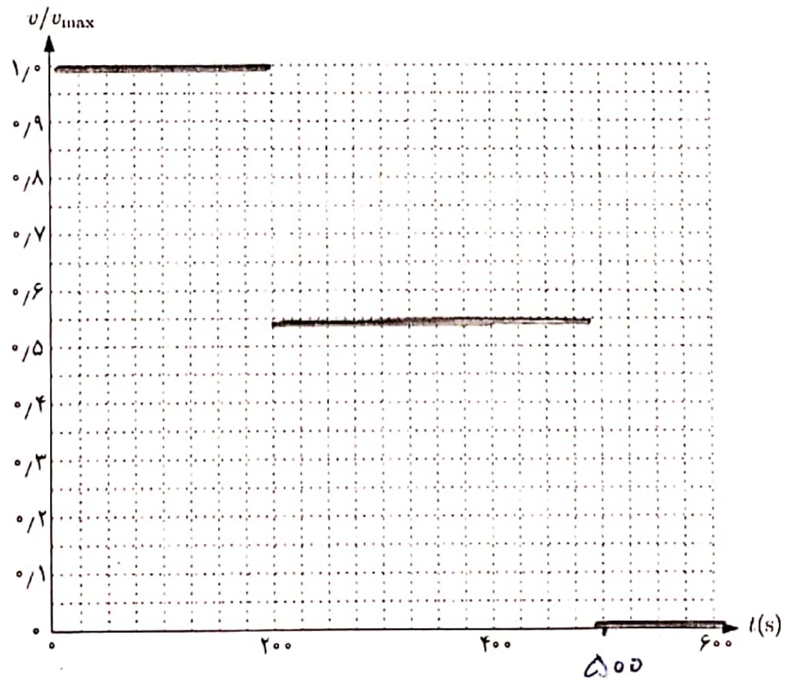
بین 0.5 تا 0.6 قبول است

$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ 0.8 < \dfrac{y}{y_{max}} < 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ 0.7 < \dfrac{y}{y_{max}} < 0.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{y}{y_{max}} = 0.8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} \approx 0.54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 0 \end{cases}$$