

$\frac{r-1}{I}$ روش تکرار: $I_n = \int_0^a (a^r - x^r)^n dx$

$n=1 \rightarrow \begin{cases} I_n = I_1 = \int_0^a (a^r - x^r)^1 dx = a^r x - \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_0^a = \frac{r}{r+1} a^{r+1} \\ I_{n-1} = I_0 = \int_0^a (a^r - x^r)^0 dx = \int_0^a dx = x \Big|_0^a = a \end{cases}$

در این روش باید فرض کنیم واحد گرد را در گردنه صاف کرد بعد به $n=2$ می‌رویم و در این آن روش تکرار است.

صورتی که $\frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r a^r \times 1}{1+r} a \rightarrow \frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r a^r}{r+1} \cdot a \rightarrow \frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r}{r+1} a^{r+1} \checkmark$

صورتی که $\frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r a^{r+1}}{1+r} \cdot a \rightarrow \frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r a}{r+1} a \rightarrow \frac{r}{r+1} a^{r+1} = \frac{r}{r+1} a^{r+1}$

$\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$

$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$

Heavy Side

تجزیه کسرها: درست آوردن B:

در کسر اصلی $x=0 \rightarrow$

در کسر اصلی: $\frac{0+5}{(-1)(1)} = \frac{5}{-1} = -5$

در کسر بعد از تطبیق $x=0$: $\frac{r}{-1} + \frac{B}{1} + \frac{-1}{1} = B - r$

حالا: $B - r = -5$

$\Rightarrow B = -2$

$2 = r \ln|x-1| - r \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

$= r \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + C$

درست آوردن A: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow A: \frac{3x+5}{(x+1)^2} = \frac{r+5}{r^2} = \frac{A}{r} = r \rightarrow A=r$

درست آوردن C: $(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \rightarrow \frac{3x+5}{(x-1)} = \frac{-3+5}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow C=-1$

نمونه Heavy Side: برای درست آوردن صورت کسرها وقتی که خنج آنجا عامل تجزیه دهیم یا توانی که آن باشد، نمطا آن کسرها که بتوان آن عامل را داشتیم، کافست خنج کسرها را که اصلی حذف کرد، در همان خنج را بیا که طه تجزیه صاف کردیم. بعد حاصل از این کسرها است که خنج مربوط خواهد بود.

$$\int \frac{\delta x + 3}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx \quad (x-1)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \frac{\delta(1)+3}{1^2+2(1)+5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\Delta < 0$ غیقات

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} \right) dx \quad \frac{x^2+2x+5 + Ax^2+Bx - Ax - B}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

$$\begin{aligned} 2 \Rightarrow (1+A)x^2 + (2+B-A)x + 5-B &= 0 \\ 1+A=0 &\rightarrow A=-1 \\ 2+B-A=0 &\rightarrow B=-2 \\ 5-B=3 &\rightarrow B=2 \end{aligned}$$

در کسر اصلی ضریب x^2 صفر است
در کسر اصلی ضریب x ۵ است

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x+2}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \ln|x-1| - \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{2}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \ln|x-1| - \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2+4} dx + 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx + 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln((x+1)^2+4) + 3 * \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x+1}{2} + C$$

آنکه اشیای ناسره

حاصل آنکه اشیای ناسره را در صورت وجود است

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$2 \Rightarrow I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$= 2 \operatorname{Arctg} t \Big|_0^{+\infty}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$$

$$e^{-x} = t \rightarrow e^x \cdot dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{t}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

هر دو لایه! لایه پایین آنکه لایه است ناسره و لایه بالاست

پس از هر دو لایه

$$\frac{23}{I} \quad 1) I = \int_0^1 \ln x \, dx$$

انتگرال، انتگرال می‌گردد، انتگرال

$$\frac{\ln x}{\ln 0}$$

Log، Arc، انتگرال، انتگرال

$$\ln x \quad dx$$

$$\frac{1}{x} \quad x$$

$$I = \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = (\ln x - x) \Big|_0^1 = (1 - 1) - (\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 0)$$

$$I = -1 - 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim = 0 \cdot \infty \rightarrow 0$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \text{Arc Sin} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$= -\text{Arc Cos} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

انتگرال، انتگرال، انتگرال

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \text{Arc Sin} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ Arc Sin, Arc Cos}$$

$$y = \text{Arc Sin } x \rightarrow R = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{3\pi}{2} = \text{Arc Sin}(-1)$$

$$y = \text{Arc Sin } x \rightarrow R = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \text{Arc Cos } x \rightarrow R = (0, \pi)$$

بردار ArcCos, Arccos از بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ است

$x=3$ انتگرال را می‌گیرد
درست می‌باشد

$$f) I = \int_1^x \frac{dx}{x-3} =$$

$$\int_1^x \frac{dx}{x-3} + \int_3^x \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| \Big|_1^x + \ln|x-3| \Big|_3^x$$

$$= (\ln|x-3| - \ln|1-3|) + (\ln|x-3| - \ln|3-3|)$$

$x \rightarrow 3^-$

∞

I و $\frac{1}{x}$ است

نمونه اوقات مشخص می‌کند و در این روش حاصل انتگرال را می‌خواهیم

مستند m را می‌توانیم به دست آوریم و انتگرال را می‌توانیم به دست آوریم

$$I = \int_1^x \frac{dx}{x(\ln x)^{k-3m}}$$

$$\ln x = t$$

$$\frac{1}{x} dx = dt$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 1: t \rightarrow 0 \\ x = x: t = \ln x \end{cases}$$

$$\frac{1}{\ln t} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty$$

$$I = \int_0^{\ln x} \frac{dt}{t^{k-3m}}$$

درست می‌باشد
درست می‌باشد

$$\int_0^{\ln x} \frac{dx}{x^p} \text{ به ازای } p < 1 \text{ می‌گردد}$$

$$k-3m < 1$$

$$\Rightarrow m > 1$$

درست می‌باشد

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{r} x^r}{x^{rm}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^r}{r!} + \frac{x^r}{r!}\right) - \frac{1}{r} x^r}{x^{rm}} dx = \frac{-1}{r!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^r}{x^{rm}} dx = \frac{-1}{r!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{rm-r}}$$

$$rm-r < 1$$

$$\Rightarrow m < \frac{r}{2}$$

کدام انتگرال را می توانیم محاسبه کنیم؟

$$\frac{f(x)}{I}$$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^0 - 2x^3 + 7x}{x^4 + e^{-x} + x^4} dx$$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^0}{x^4} dx$$

این انتگرال را می توانیم محاسبه کنیم

$$= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

$$P = 4 > 1$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^P} \quad P > 1 \text{ محاسبه می شود}$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^{-x} - 2 - 3x}{x^4} dx = \int_0^1 \frac{(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!}) + (1 - x + \frac{x^2}{2!}) - 2 - 3x}{x^4} dx$$

$$= \frac{0}{4} \int_0^1 \frac{x^2}{x^4} dx = \frac{0}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

و اما

$$P = 1 < 1$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}} \quad \text{Imp}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$$

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}} + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}$$

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}} + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}$$

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$$

$$P = \frac{1}{2} < 1$$

$$P = \frac{3}{2} > 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}$$

$$1) \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$$2) \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$3) \int_0^1 f(x) dx \quad \sqrt{f(x)} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^1 \frac{x-m}{\ln x} dx \quad \text{ساده } m \text{ کدام باشد تا انتگرال زیر محاسب شود؟} \quad \frac{47}{I}$$

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

$$\begin{cases} \ln 0 \rightarrow \infty \\ \ln 1 = 0 \rightarrow \text{منفج} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-m}{\ln x} = \frac{-m}{-\infty} = 0$$

$$x \rightarrow 0$$

چون $x \rightarrow 0$ در انتگرال تابع منفی

انتگرال را ∞ نمی‌دهد حتماً به ازای آن انتگرال محاسب شود

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-m}{\ln x} = \frac{1-m}{0} = \infty \rightarrow \text{عکس این مطلب صحیح نیست}$$

برای آنکه حاصل حد ∞ نشود (اصولاً) باید $m=1$ باشد

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

تا در ادامه ببینیم:

* هرگاه عددی علت ناسره بودن یک

انتگرال باشد (مثلاً ریشه منجم باشد)

اگر تابع داخل انتگرال به ازای آن عدد

بسیما صحت نشود، انتگرال حتماً محاسب

خواهد بود ولی عکس این مطلب صحیح نیست

خدا امیدوارم این نکته در درسی انتگرال به ازای $m=1$ محاسب خواهد بود

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx \quad (\alpha > 0) \quad \text{توابع گاما و بتا} \quad \beta, \Gamma$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

نشانه‌های تابع گاما: $\sqrt{\pi}$ یا فاکتوریل در مرتبه‌ها وجود دارد

$$1) \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$$

$$2) \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

$$3) \sqrt{\pi}$$

$$4) 2\sqrt{\pi}$$

$$x = e^{-t} \quad \leftarrow \ln x = -t \quad \leftarrow -\ln x = t$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} dx = dt$$

$$\Rightarrow dx = -e^{-t} \cdot dt$$

چون $x \rightarrow 0$:

تابع آبدیسی کنیم

توانش صحیح نیست

نشانه‌های تابع گاما: $\sqrt{\pi}$ یا فاکتوریل در مرتبه‌ها

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 : t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 1 : t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-t} \cdot dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{t}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{I} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^0 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \cdot \cos^{2n-1} x dx = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{2 \Gamma(m+n)} \quad \begin{matrix} 2m-1=7, & 2n-1=0 \\ \downarrow & \downarrow \\ m=\frac{7}{2} & n=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

نکته ۳۹

$$2 \rightarrow I = \frac{\Gamma(\frac{7}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2 \Gamma(\frac{7}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2 \Gamma(4)} = \frac{\frac{15}{8} \pi}{2 \times 3!} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(1) = 1$$

* استفاده از جدول گامای برای تسهیل

$$I = \int_0^{\infty} e^{-st} (t^5 - t^3) dt = L(t^5 - t^3) \Big|_{s=2} = \frac{5!}{s^6} - \frac{3!}{s^4} \Big|_{s=2}$$

$$= \frac{5!}{2^6} - \frac{3!}{2^4} = \frac{15}{8} - \frac{3}{4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$L(x f(x)) = - \frac{d}{ds} F(s)$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t \sin^2 t dt = L(t \sin^2 t) \Big|_{s=1}$$

$$L(f(x)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$$L(\sin^2 t) = L\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right) = \frac{1}{2} L(1 - \cos 2t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right)$$

$$2 \rightarrow L(t \sin^2 t) \Big|_{s=1} = - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) \right)' \Big|_{s=1} = - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{s^2} - \frac{1 \times (s^2 + 4) - s \cdot 2s}{(s^2 + 4)^2} \right) \Big|_{s=1}$$

$$= - \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{4}{10} \right) = - \frac{1}{2} \times - \frac{14}{10} = \frac{7}{10}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx = L\left(\frac{\sin x}{x}\right) \Big|_{s=\lambda} = L\left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) \Big|_{s=\lambda}$$

$$L(\sin x) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \equiv \text{Arc Cotg } 1 \equiv \text{Arctg } \frac{1}{1}$$

$$2 \rightarrow I = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{1} \text{Arctg } \frac{s}{1} \Big|_{\lambda}^{+\infty} = \text{Arctg }^{+\infty} - \text{Arctg } \lambda = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } \lambda$$

$$\frac{\pi}{4} - \text{Arctg } x = \text{Arc Cotg } x = \text{Arctg } \frac{1}{x} = \text{Arctg } x$$

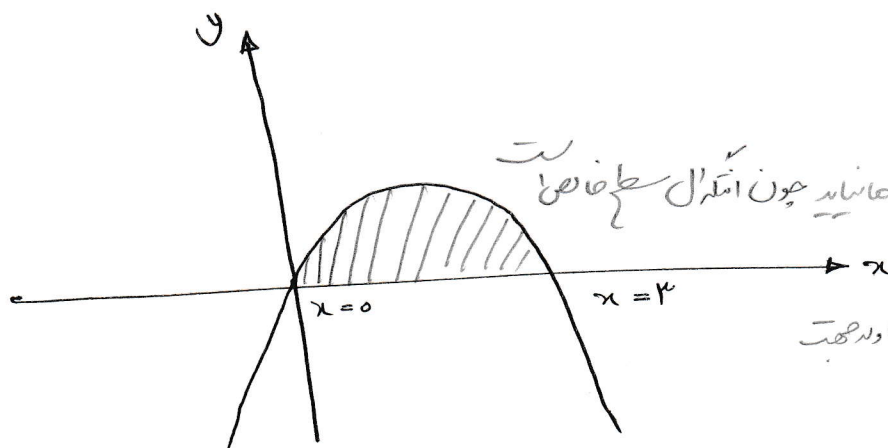
$\frac{x}{1}$

چون که انتگرال مثبت است و ۱ از عرضی ممکن است باشد پس برابر است

حد مجموعاریتانی

$$I = \int_a^b (3x - x^2) dx$$

ماکزیمم مقدار حاصل انتگرال زیر را بدست آورده



انتگرال منفی ماکزیمم است که زیر محصور میماند چون انتگرال سطح خاصی است

انتگرال سطح خاصی که زیر محصور میماند و ما در حد

منفی محصور میماند

$$\begin{aligned} \max I \rightarrow \int_0^3 (3x - x^2) dx &= 3 \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) - (0 - 0) \\ &= \frac{27}{2} = \frac{4}{2} \end{aligned}$$

۱+۴+۳

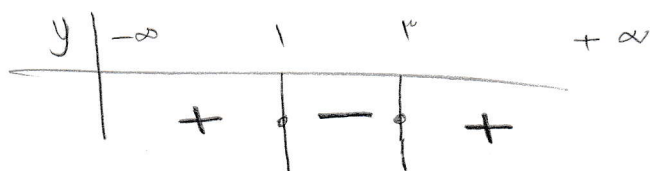
$$x = y^2 + 4y$$

$$x = 2y^2 + 3$$

فاصلت محصور شده به سمتی های منفی و ۲ و ۴ ی برابر است آورده
چون خاصیت گفته شده مطمئن می شویم

$$I = \int_2^4 |2y^2 + 3 - y^2 - 4y| dy = \int_2^4 |y^2 - 4y + 3| dy$$

چون مساحت خاصیت گفته شده مطلق
در زیر تابع انتگرال قرار می دهیم



$$I = \int_2^3 (-y^2 + 4y - 3) dy + \int_3^4 (y^2 - 4y + 3) dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + 2y^2 - 3y \Big|_2^3 \right) + \left(\frac{y^3}{3} - 2y^2 + 3y \Big|_3^4 \right)$$

۴۹
I طول قوس منحنی $f(x) = \int_1^x \sqrt{\cos t} dt$ ، از شرط $\bar{x} = 0$ ، $x = \pi$ ، $\bar{y} = 1$ ، $y = x^2$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (1 \cdot \sqrt{\cos x} - 0 \cdot 1)^2} dx$$

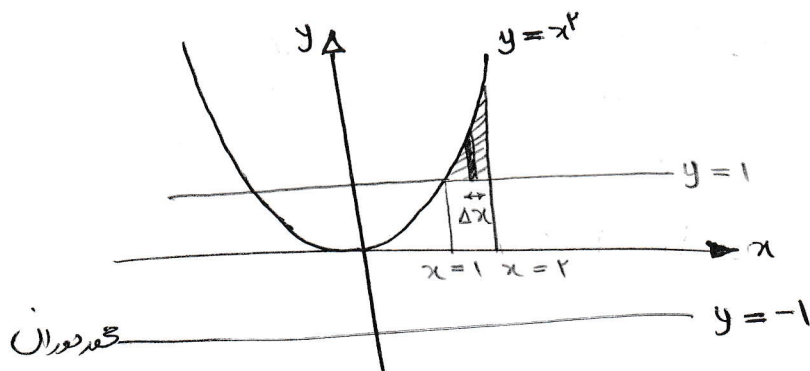
$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx \quad 0 < x < \pi$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = 2\sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0)$$

$$= 2\sqrt{2} (1 - 0) = 2\sqrt{2}$$

طول منحنی $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

چگونه ضریب از دوران را مستقیماً به دست می آوریم؟ $y = x^2$ ، $y = 1$ ، $x = 1$ ، $x = 2$ حول خط



$y = -1$ ، $y = 1$ ، $y = x^2$

$\Delta x = dx$

$dV = \pi (R^2 - r^2) dx$

↑
نیمه دایره
↓
محور دوران

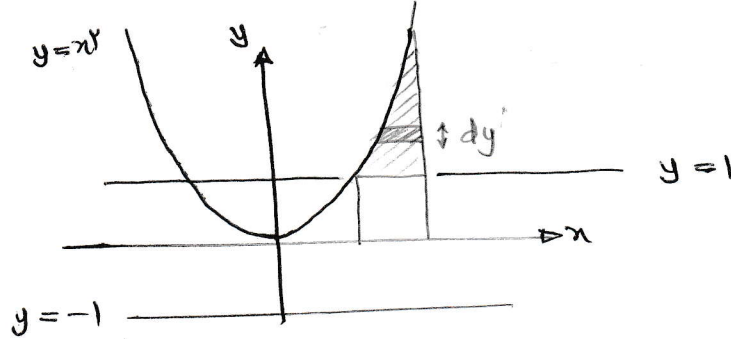
↑
نیمه دایره
↓
محور دوران

2. $V = \int dV = \int_1^2 \pi (1 + x^2 + x^4 - 1) dx = \pi \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x \right) \Big|_1^2$

$= \pi \left(\left(\frac{17}{5} + \frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \pi \left(\frac{14}{5} + \frac{5}{3} - 1 \right)$

$= \pi \times \frac{70 + 95 - 30}{30} = \frac{135\pi}{30}$

حال اگر این را به این صورت بنویسیم



$dV =$ پوسته استوانه ای

$dV = 2\pi R \cdot h \cdot dR$

$dV = 2\pi (1+y)(2-\sqrt{y}) dy$

$V = \int dV = \int_1^4 2\pi (2-\sqrt{y} + 2y - y\sqrt{y}) dy = 2\pi \left(2y - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + y^2 - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^4$

$= 2\pi \left((8 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{64}{5}) - (2 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{5}) \right)$

$= 2\pi \left(21 - \frac{16}{3} - \frac{64}{5} \right) = 2\pi \cdot \frac{21 \cdot 15 - 70 - 112}{15} = \frac{118\pi}{15}$

$\int_0^1 f(x) dx = \lim \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}))$

حاصل جمع ریاضی

۱) $\lim \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$

حاصل حد زیر را بدست آورید ؟

$= \lim \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})} + \dots + \frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}$

$= \lim \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$

* اگر به شما به میزان $\frac{1}{n}$ باشد
مجموع ریاضی است

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

۲) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tan^{-1} \left(\frac{x_i - 1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\tan^{-1} \frac{1}{x_n} + \tan^{-1} \frac{2}{x_n} + \tan^{-1} \frac{3}{x_n} + \dots + \tan^{-1} \frac{x_n-1}{x_n} \right)$

$\frac{3}{x_n} - \frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n}$ است ریاضی

$= \int_0^1 \tan^{-1} x dx = \int_0^1 \text{Arctg} x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

51

1) $a_n = \left\{ \frac{5^n}{n!} \right\}$

تفاوتی در دنباله های زیر بررسی کنید

جستار حاصل است و به طریقی که بتوانیم آنرا بسازیم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^n \times 5 \times n!}{5^n \times (n+1) \times n!} = \frac{5}{n+1} \rightarrow \text{غیر متناهی است}$$

if $n \geq 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{n+1} < 1 \rightarrow$ ابتدا نزولی

if $n \geq 1 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{n+1} \leq 1 \rightarrow$ نزولی

2) $a_n = \left\{ \cos \frac{\pi}{n} \right\}$

$a'_n = - \frac{0 \times n - 1 \times \pi}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$

$a'_n = \frac{\pi}{n^2} \sin \frac{\pi}{n} \quad n > 1$

$a'_n > 0 \rightarrow$ ابتدا صعودی

$n > 1 \rightarrow \frac{\pi}{n}$ حاصل

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\pi}{n} \in \text{حاصل}$
 $n > 1$

$n=1 \xrightarrow{\text{اولی}} a_1 = \cos \pi = -1$

$n=2 \xrightarrow{\text{دوم}} a_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

اولاً صعودی

کدام یابشی، کدام بالا، کوچکترین جمله، بزرگترین جمله در دنباله های زیر را بسط آورید

$a_n = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+25} \right\}$

$a'_n = 0 \rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}} \times (n+25) - 1 \times \sqrt{n}}{(n+25)^2} = 0$

$\frac{n+25}{2\sqrt{n}} - \sqrt{n} = 0 \rightarrow n+25 = 2n \rightarrow n=25$

$n=1 \rightarrow a_n = \frac{1}{26}$

ندارد $\rightarrow$ کوچکترین جمله $= 0$ $\rightarrow$ کدام یابشی

$n \rightarrow +\infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+25} = 0$

$\frac{1}{10} \rightarrow$ بزرگترین جمله $= \frac{1}{10}$ $\rightarrow$ کدام بالا

$n=25 \rightarrow a_n = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

والا جواب کوچکترین جمله صفر بود

کوچکترین جمله نداریم $\rightarrow$ صفر را از مضارب حذف کردیم و در ادامه

$$1) a_n = \{ 2n^2 - 21n + 8 \}$$

$$a'_n = 0 \rightarrow 4n - 21 = 0 \rightarrow n = \frac{21}{4} \quad \text{چون عدد طبیعی نیست} \rightarrow \text{غیر قابل تقسیم}$$

$$n=1 \rightarrow a_n = -14$$

$$n=5 < n = \frac{21}{4} < n=7$$

$$n \rightarrow +\infty : \lim 2n^2 - 21n + 8 = +\infty$$

عدد طبیعی قبل و بعد آن بررسی می شود

$$n=5 \rightarrow a_n = -50$$

$$n=7 \rightarrow a_n = -49$$

$$\text{کدام بزرگترین} = -50$$

کدام بزرگتر

$$\text{کوچکترین جمله} = -50$$

کوچکترین جمله ندارد

گزارش دنباله های زیر را بررسی کنید

$$a_n = \left\{ \left[\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + (-1)^n} \right] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + (-1)^n} \right]$$

$$I) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 - 1} \right] = [1^+] = 1$$

دنباله ها را

$$II) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n^2 + 1} \right] = [1^-] = 0$$

$$a_n = \left\{ \left[\frac{3n^2 + 1}{n^2 + 3} \right] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3n^2 + 1}{n^2 + 3} \right] = [3^-] = 3 \rightarrow \text{گزارش ۱۲}$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3(n^2 + \frac{1}{3})}{n^2 + 3} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 * \frac{n^2 + \frac{1}{3}}{n^2 + 3} \right] = [3 * 1^-]$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\delta \Psi}{I} \quad a_n = \left\{ \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{r}{n} \right) \left(1 + \frac{r}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{r}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\rightarrow \ln I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{r}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{r}{n} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x) dx = j$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\omega} & & d'x \\ \ln(1+x) & \xrightarrow{+} & \\ \frac{1}{x+1} & \xrightarrow{-} & x \end{array}$$

$$j = x \ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx$$

$$= x \ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) \Big|_0^1$$

$$= (\ln 2 - 1 + \ln 2) - (0 - 0 + 0)$$

$$\ln I = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \underline{x \ln 2 - 1}$$

$$\rightarrow \ln I = x \ln 2 - 1 \rightarrow I = e^{x \ln 2 - 1} \rightarrow I = \frac{e^{x \ln 2}}{e} = \frac{4}{e}$$

$\frac{\delta x}{I}$ نام سری شرط لازم برای همگرایی را می باشد.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$$

* شرط لازم برای آنکه سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

همگرا باشد، آن است که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ برابر صفر باشد.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n^2}{4n^3 + 8n} * \sin \frac{1}{n^2}$$

نی توان را جمع به واکرائی فعلاً اظهار نظر کرد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n^2}{4n^3 + 8n} * \sin \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4n^3} * \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4n^5} = 0$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

شرط لازم برای همگرایی را ندارد

$n \rightarrow +\infty$

$n \rightarrow \infty$

تعریف عدد e

سری واگرات

اگر سری زیر همگرا به 0 باشد، حاصل حد $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{an-1}}{\delta a_{n+1}}$ بدست آید.

$n \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n - 3}{3a_{n+1}} \xrightarrow{\text{همگرا به 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{3a_{n+1}} = 0$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2a_n - 3 = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

$n \rightarrow +\infty$

چون درجه صورت و جمع برابر است پس درجه حاصل عدد صفر می شود که حد صفر می شود.

$$\Rightarrow I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 * \frac{3}{2} - 1}{8 * \frac{3}{2} + 1} = \frac{5}{17} = \frac{10}{17}$$

سری های زیر را محاسبه کنید

88
I

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow[\text{دارا}]{\substack{\text{سری مرجع} \\ p=1 \neq 1}}$$

$$\ln n < n \rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \rightarrow \text{دارا} \text{ نیست}$$

در آزمون مقایسه حدی از این فرمول استفاده نمی شود *

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\text{عدد}}{(\log_a n)^m} \Rightarrow \text{سری واگرا است}$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5n}{n^4 + n^2} \xrightarrow[\text{درجه خارج}]{\substack{\text{درجه حد} \\ 3}}$$

کدام سری همگراست:

$$1) \text{دارا} \quad 1 \neq 1 = 4 - 3 = 1 \quad \text{درجه حد} - \text{درجه خارج}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt{n^2 - 5n + 1}}{5n^2 \sqrt{n^3 + 2n - 1}}$$

$$3) \text{دارا} \quad 1 \neq \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{درجه حد} - \text{درجه خارج}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt{n^3 + 1}}{5n^2 \sqrt{n^2 + 7n}}$$

$$2) \text{همگرا نیست} \rightarrow 1 > \frac{13}{12} = \frac{11}{4} - \frac{5}{3} = \text{درجه حد} - \text{درجه خارج}$$

$$4) \text{دارا} \text{ نیست} \rightarrow 1 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{5}{4} = \text{درجه حد} - \text{درجه خارج}$$

* تعیین وضعیت همگرایی با آزمون کوچی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1} * n!}{r^n * n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{r^{n+1} * n!}{r^n * n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{r^{n+1}} * \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{r^n} * \sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 * r * \frac{n}{e}}{r * n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n}{r e n} = \frac{r}{r e} < 1$$

همگرایی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_{n+1}}{r_n} \right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{r_{n+1}}{r_n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{r_{n+1}}{r_n} \right)^n = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{r_{n+1}}{r_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{r_{n+1}} \right)^n = e^{\frac{1 \times 1}{r}} = e^{\frac{1}{r}} = \sqrt{e} > 1$$

وگرنه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

در آزمون کوچی $L=1$ شود این آزمون بی نتیجه است

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}} * \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 * 1} = 1$$

$$1 = n = n = n = n$$

نفرولی می باشد

$-\sqrt{n}$

* در آزمون انتگرال سری مورد نظر برای جملات مثبت و منفی می باشد

$$(e^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{n} * e^{\sqrt{n}}}$$

در آزمون انتگرال (بزرگترین n که کم شود)

آزمون کوچی نیست خود

آزمون انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \rightarrow dx = 2t \cdot dt$$

در انتگرال با سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، سری مورد نظر همگرا است

$$\rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x \rightarrow +\infty \rightarrow t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\frac{\delta v}{I} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = -2e^{-t} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= -2(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} - e^{-1}) = -2(0 - \frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$$

کلا: $\frac{2}{e}$ کی طرف سے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^3 + 7n^2 + 8n + 1)}{n^2 - 7n + 3}$$

نقطہ: اگر خستہ کی از حد حد ای یا نامہ نامہ از حد لوسی

$$\xrightarrow{\text{اجماع کی طرف سے}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n^3}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \log n}{n^2} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$P = 2 > 1 \rightarrow \text{کلا}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$\ln(1+A) \approx A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots$$

$A \rightarrow 0$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{(\frac{1}{n})^2}{2} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\xrightarrow{\text{کلا}} P = 2 > 1$$

کلا

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow$$

آزین لایب نیت: $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ کلا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$$

اولاً: a_n حانزولی باشند: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

ثانیاً: حد عام عمومی صفر باشد یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\xrightarrow{\text{کلا}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \rightarrow \text{کلا}$$

دون عامل تادرج کلا

کی سادب هم از است

و احتیاج به امتحان شرط لایب نیت نداریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * \frac{\ln n}{n} \rightarrow \text{مجموعه شرط}$$

از آزمون غیر لایبنتیز و آرای میسیم
از لایبنتیز به همگانی میسیم

در این حالت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ سری دوج $\rightarrow$ $p=1 \neq 1$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} &\xrightarrow{H} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ a_n' = \frac{\frac{1}{n} * n - 1 * \ln n}{n^2} &\rightarrow a_n' = \frac{1 - \ln n}{n^2} \text{ if } n > e \rightarrow a_n' < 0 \end{aligned} \right.$$

لایبنتیز

برای $n > e$ نزولی است. $\rightarrow$ شرط لایبنتیز را دارد. $\rightarrow$ همگانی (مجموعه شرط)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * \frac{2n+3}{5n-1} \rightarrow \text{مجموعه شرط}$$

در این حالت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n-1}$ سری دوج $\rightarrow$ $\frac{2}{5} \neq 0$

در این حالت $\frac{2n+3}{5n-1} \rightarrow \frac{2}{5} \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n-1} = \frac{2}{5} \neq 0$$

لایبنتیز

و اگر $\rightarrow$ شرط لایبنتیز را ندارد

معین بازه همگانی سری های نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(3x-5)^n}{2n+1} \right|} < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3x-5|}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1$$

فاصله همگانی سری های نامتناهی
در این حالت $\frac{|3x-5|}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1$
در این حالت $\frac{|3x-5|}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1$
در این حالت $\frac{|3x-5|}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1$

$$\rightarrow \frac{|3x-5|}{1} < 1 \rightarrow |3x-5| < 1 \rightarrow -1 < 3x-5 < 1$$

$$\rightarrow 4 < 3x < 6 \rightarrow \frac{4}{3} < x < 2$$

$$\frac{\partial 9}{I} \text{ I) } x = \frac{r}{r} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r^{n+1}} \rightarrow \text{مطلوب}$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right.$$

$$a_n = \frac{1}{r^{n+1}} \Rightarrow a'_n = \frac{-r}{(r^{n+1})^2} < 0 \quad \xrightarrow{\text{در حد است بینهایت و در حد 0}}$$

$$\text{II) } x = r \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{مطلوب}$$

$$P=1 \text{ : } r < 1$$

$$\text{مطلوب: } \left[\frac{r}{r}, r \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1} \times (r^n - d) \times n^n}{r^n \times n! \times x^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{r^n \times r \times (r^n - d) \times n^n}{r^n \times n! \times x^n} \right|} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{r^n} \times \sqrt[n]{r^{n-1}} \times \sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{r^n} \times \sqrt[n]{n!} \times \sqrt[n]{|x|^n}} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r \times 1 \times n}{r \times \frac{n}{e} \times |x|} < 1$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\text{مطلوب: } r < 1 \text{ و } r > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r e n}{r^n |x|} < 1$$

$$\frac{r e}{r |x|} < 1 \rightarrow \frac{r |x|}{r e} > 1$$

$$r |x| > r e \rightarrow |x| = \frac{r e}{r}$$

$$\begin{cases} x < -\frac{r e}{r} \\ x > \frac{r e}{r} \end{cases}$$

$$\text{مطلوب: } \infty \rightarrow \text{طول نامتناهی} = \infty$$

$$\text{مطلوب: } \frac{r e |x|}{r} < 1 \rightarrow |x| < \frac{r}{r e} \rightarrow \frac{-r}{r e} < x < \frac{r}{r e}$$

$$\text{مطلوب: } \frac{\frac{r}{r e} - \frac{-r}{r e}}{r} = \frac{r}{r e}$$

ضریب $x^3 \leftarrow$ ضریب z^3 در همان a_3 در $a_3(z-z_0)^3$ در تیلور
و $a_3 z^3$ در بسط مکملوان است

مثال: ضریب x^3 در بسط مکملوان تابع $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ را به دست آورید

$$a_3 = \frac{y^{(3)}(0)}{3!}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2} (2x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = -x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''' = -1(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} (2x)(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \times (-x)$$

بسط تیلور یک تابع حول $z_0 = 0$ را
بسط مکملوان آن تابع گویند

ضرایب بسط تیلور از رابطه زیر به دست می آید

$$\rightarrow a_3 = \frac{-1+0}{3!} = -\frac{1}{6}$$

ضرایب بسط مکملوان

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

مثال: ضریب x^4 در بسط مکملوان تابع $y = (3x^2 + x - 2) \ln(1+2x)$ را به دست آورید

صداقت تابع است (در جدول) در بسط مکملوان آن تابع را از حفظ هستیم

$$y = (3x^2 + x - 2) \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \dots \right)$$

$$y = (3x^2 + x - 2) \left(2x - \frac{2x^2}{1} + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + \dots \right)$$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $-7x^4$ $\frac{8}{3}x^4$ $8x^4$

$$\rightarrow y = \dots + (-7x^4 + \frac{8}{3}x^4 + 8x^4) + \dots$$

$$\rightarrow y = \dots + \frac{14}{3}x^4 + \dots$$

$$\rightarrow \text{ضریب } x^4: \frac{14}{3}$$

$\frac{11}{I}$

$$f''(0) = ? , \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2x + 2}{x^2} : x \neq 0 \\ \frac{13}{2} : x = 0 \end{cases}$$

* استفاده از بسط تیلور برای محاسبه $f''(0)$ یا
 $f''(0)$ محاسبه از طریق ضرایب

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \Rightarrow f''(0) = a_2 \times 2!$$

از طرف دیگر مشتق می‌گیریم

$$a_2 = \text{ضریب } x^2$$

$$f(x) = \frac{(1 + 2x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{16x^3}{3!} + \frac{128x^4}{4!} + \dots) + (1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots) - 2x}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{\frac{13}{2}x^2 - \frac{16}{2}x^3 + \frac{128}{24}x^4 + \dots}{x^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{13}{2} - \frac{16}{2}x + \frac{128}{24}x^2 + \dots$$

$$\rightarrow f''(0) = a_2 \times 2! = \frac{128}{24} \times 2! = \frac{128}{12}$$

$$* \text{ بسط تیلور؟ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{n!}$$

سوال: حاصل سری

$$1) (x+x^2)e^x \quad 2) (x-x^2)e^x \quad 3) (2x+3x^2)e^x \quad 4) (2x-3x^2)e^x$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\text{مشتق}} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} x e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$$

اینجا از طرفین ضرب در x می‌کنیم
 پس بعد از مشتق می‌گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} e^x + x e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } x} x e^x + x^2 e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{n!}$$

$$\rightarrow (x+x^2)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{n!}$$

حل: حاصل سری زیر را بدست آورید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+8}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{x=1} e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{n!} + \frac{8}{n!} = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 8 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + 8 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

I

تغییر

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Rightarrow e-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Rightarrow e-2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow I = 3(e-1) + 8(e-2) = (11e-13)$$

$$\text{حاصل} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

حاصل

$$1) \frac{1}{7} \quad 2) \frac{1}{2} \quad 3) \frac{1}{24} \quad 4) \frac{1}{120}$$

سری هندسی یا قاعده اعداد

رای هندسی بودن باید سری مضاعف باشد و آنجا که پس از قاعده اعداد می بینیم

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{3!} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

if $\sum_{n=k}^{\infty} (x^n)$ $\left. \begin{array}{l} \text{سری هندسی} \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{6^{n-1}}$$

حل:

چون ضابطه نمایی است از سری هندسی حل می شود

$$\frac{7r}{I} \rightarrow \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1^n \times 7^n}{7 \times 7} + \frac{(-1)^n}{6 \times 7} = \sum_{n=r}^{\infty} 18 \times \left(\frac{3}{6}\right)^n + \sum_{n=r}^{\infty} 6 \left(\frac{-1}{6}\right)^n$$

$$= 18 \sum_{n=r}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 \sum_{n=r}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

برای $n=k$ می‌باشد: t_1 : مرتبه اول

در عدد t_1 : $q =$ مرتبه

$$\text{مجموع سری هندسی} = \frac{t_1}{1-q}$$

$$\rightarrow 18 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r}{1 - \frac{1}{2}} + 6 \times \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^r}{1 - \frac{-1}{6}}$$

نتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} x^{n+m}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^{n-m}$$

سطح حاصل از دوران نمودار تابع $\sqrt{x}$ حول محور x ها و از نقطه $\frac{1}{\sqrt{x}}$ $x=0$ تا $x=2$ کدام است؟

$$1) S_x = 2\pi \int_c y ds$$

نقطه $\frac{1}{\sqrt{x}}$: $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} dx$

$$S_x = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x+\frac{1}{4}} dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \dots$$

۲) مساحت رویه ای (تقریباً) لوله از دوران قسمتی از دایره $r=1+\cos\theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات حول محور x تشکیل می شود.

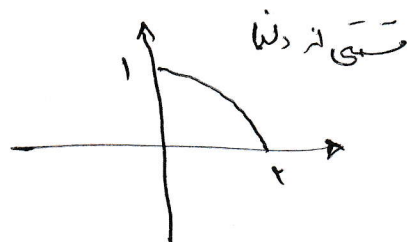
$$2) S_x = 2\pi \int_c y ds$$

نقطه $\frac{1}{\sqrt{x}}$: $ds = \sqrt{r^2+r'^2} d\theta = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta$

$$= \sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta} d\theta = \sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$S_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta) \sin\theta \sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta$$



$$= 2\sqrt{2} \pi \cdot \frac{-1}{2} (1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

۳) مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $\begin{cases} x = \sqrt{3}(t - \sin t) \\ y = \sqrt{3}(1 - \cos t) \end{cases}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

حول محور x کدام است؟

$$S_x = 2\pi \int_c y ds$$

نقطه $\frac{1}{\sqrt{x}}$: $ds = \sqrt{x'^2+y'^2} dt = \sqrt{(\sqrt{3}(1-\cos t))^2 + (\sqrt{3}\sin t)^2} dt$

$$\frac{70}{I} = \sqrt{r^2(1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t)} dt = \sqrt{r^2(1-\cos t)} dt$$

$$S_x = r\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)} \cdot \sqrt{r^2(1-\cos t)} dt = r\sqrt{r}\pi \int_0^{2\pi} (r\cos^2 \frac{t}{r}) \sqrt{r\cos^2 \frac{t}{r}} dt$$

$$= r\sqrt{r}\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{r} \cdot |\cos \frac{t}{r}| dt$$

$$= r\sqrt{r}\pi \int_0^{2\pi} (r\sin^2 \frac{t}{r}) \sqrt{r\sin^2 \frac{t}{r}} dt = r\sqrt{r}\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{r} |\sin \frac{t}{r}| dt$$

$$= r\sqrt{r}\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{r} dt \right\} = \dots$$

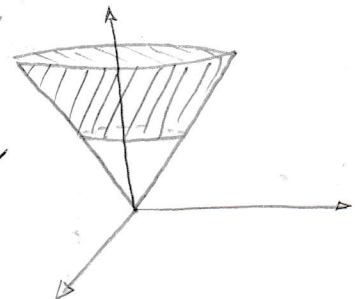
۴) برای مخروط: $z = a\sqrt{x^2+y^2}$

مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$

که بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$

و $x^2+y^2=4$ قرار دارد، برابر کدام یک از مقادیر است؟

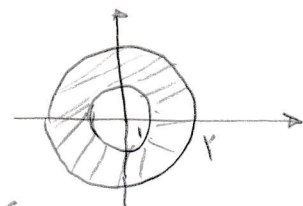
مساحت، $ds = \sqrt{1+a^2} dx dy$



بنابراین: $S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1+(1)^2} dx dy$

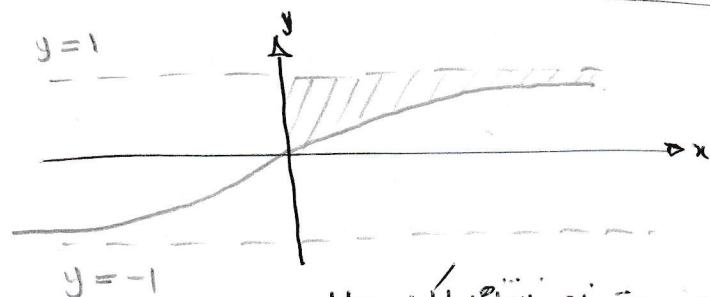
$$= \sqrt{2} (D \text{ مساحت})$$

$$= \sqrt{2} (\pi(2)^2 - \pi(1)^2) = \dots$$



تصویر سطح در نقطه "ی" صفحه xy

۵) $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



۵) مساحت ناحیه ناشی از کد در ربع اول و

بین خم $y = \tanh x$ و خط $y=1$ واقع است

برابر است با؟

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$= \int_0^{+\infty} (1 - \tanh x) dx = (x - \ln(\cosh x)) \Big|_0^{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\cosh x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln e^x - \ln 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x - \ln 2) = \ln 2$$

2 $\Rightarrow S = \ln 2$

7) $0 \leq t \leq 1, \begin{cases} x = t + t^r \\ y = t - t^r \end{cases}$

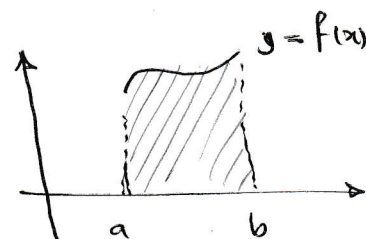
(7) مساحت محصوره منحنی
که در زیر است ؟

$$x = t^r + t \rightarrow x' = 1 + rt$$

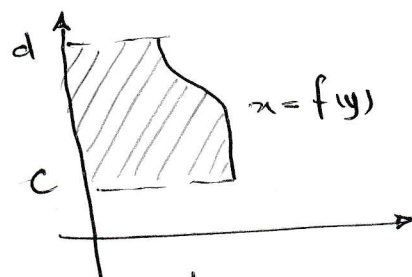
$$x' > 0 : 0 < t < 1 \quad \text{در } t=0$$

$$y = t - t^r \rightarrow y' = 1 - rt$$

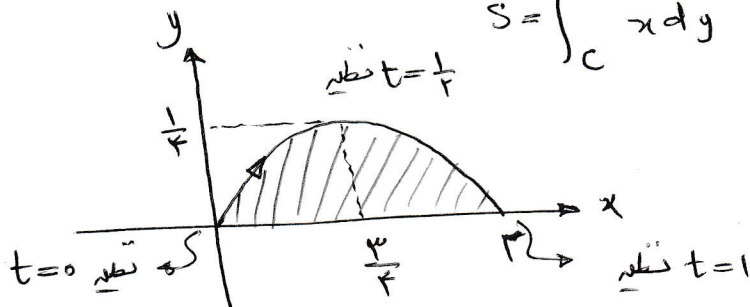
t	0	$\frac{1}{r}$	1
y'		+	-
y		$\nearrow$	$\searrow$



$$S = \int_a^b y dx$$



$$S = \int_c^d x dy$$



$$S = \int y dx = \int_0^1 (t - t^r) d(t + t^r) = \int_0^1 (t - t^r)(1 + rt) dt$$

$$= \int_0^1 (t + rt^r - t^r - rt^r) dt = \left(\frac{t^r}{r} + \frac{rt^{r+1}}{r+1} - \frac{t^r}{r} - \frac{rt^{r+1}}{r+1} \right) \Big|_0^1 = \dots$$

$$\frac{7V}{I}$$

$$V) \quad \begin{cases} y = x^r \\ y = rx^r \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^r \\ -x = ry^r \end{cases}$$

(7) سمت راست (منفی) محصور می‌شود
 $x = ry^r, x = y^r, y = rx^r, y = x^r$
 موردی باشد؟

تغییر متغیر

$$\begin{cases} u = y/x^r \\ v = x/y^r \end{cases} (*)$$

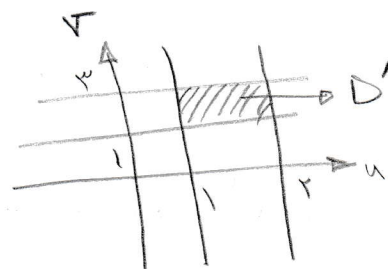
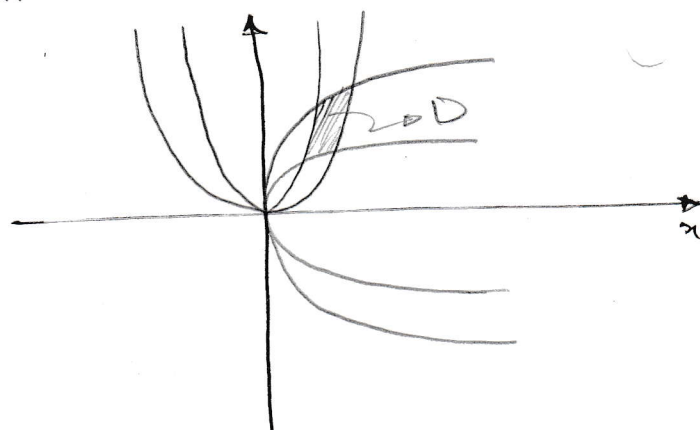
$$\rightarrow x^r = \frac{y}{u}, y^r = \frac{x}{v}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-ry}{x^r} & \frac{1}{x^r} \\ \frac{1}{y^r} & \frac{-rx}{y^r} \end{vmatrix}}$$

$$J = \frac{1}{\frac{r}{x^r y^r} - \frac{1}{x^r y^r}} = \frac{x^r y^r}{r} = \frac{\frac{y}{u} \times \frac{x}{v}}{r} = \frac{xy}{r u v} = \frac{1}{r u v}$$

$$2 \rightarrow J = \frac{1}{r u^r v^r}$$

$$(*) \rightarrow uv = \frac{1}{xy} \rightarrow J = \frac{1}{r u^r v^r}$$



$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{1}{r u^r v^r} \right| du dv$$

$$= \int_{v=1}^r \int_{u=1}^r \frac{1}{r} \frac{1}{u^r} \cdot \frac{1}{v^r} du dv$$

$$= \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^r \cdot \left(-\frac{1}{v} \right) \Big|_1^r$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{-1}{r} \cdot \frac{-r}{r} = \frac{1}{r}$$

کروی صفتی که دیواره ای با ارتفاع متغیر h داریم مساحت حاصله چیست؟

$$\int_C h \cdot ds$$

(اگر طول موثر)

سوال) مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ که زیر صفحه $Z = \frac{x}{3} + 2$ و بالای صفحه $Z = 0$ قرار دارد کدام است؟
(MBA)

11) حذف یک سطر سطح معین است که کروی صفتی $x^2 + y^2 = 1$ باشد، ارتفاع هر نقطه از رابطه

$$Z_2 - Z_1 = \left(\frac{x}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{x}{3} + 2$$

پایه

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \rightarrow ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = dt$$

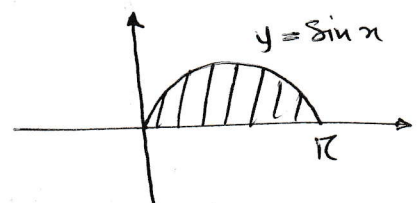
پایه:

$$S = \int_C h \cdot ds = \int_{t=0}^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{3} + 2 \right) dt = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

$\frac{x}{3} + 2$

محاسبه حجم، سطح معین ۱۰
۱) سطح معین $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ ، محور x ،
محور y که دوران می کند حجم حاصل کدام است؟

$$1) V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx$$



$\xrightarrow{+}$	اندازه
x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$\rightarrow V_y = 2\pi \left\{ -x \cos x + \sin x \right\} \Big|_0^{\pi} = \dots$$

$$\frac{Y}{I}$$

$y = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sin x}$

مقویٰ ہے

misal : $\sin x = u \rightarrow \cos x \, dx = du$

١٣) انصاف محدود به معنی $y = x^2$ و خطوط $x = 2$, $y = 1$, $y = -3$ را حول خط $y = -3$

۲)

از دوران
که بیان

$y = x^2$
 $y = 1$
 $x = 1$
 $x = 2$
 $y = -x^3$

$R_0 = (x^2 + 3)$ { باقي } $\rightarrow$

$$dV = \pi(R_o^r - R_i^r) t \rightarrow V = \int_1^r \pi((x^r + r)^r - (r)^r) dx$$

از دوران این حول $-3 = \lambda$ یک بسته استوارانه ای پیدا می آید

$$dV = 4\pi R^2 H t$$

$$V = \int_1^r r \pi (y+r) (r-\sqrt{y}) dy$$

$t = dy$ صحیح ہے

$$\frac{71}{I} \quad \frac{4}{10})$$

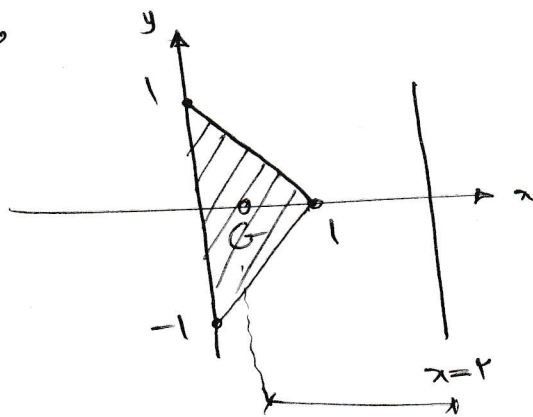
مرکز سطح مثلث مرکز ثقلی میانه است

۱۴ حجم حاصل از دوران مثلث Δ راس B و مشخصات $(0,0)$

و $(-1,0)$ حول خط $x=2$ برابر کدام است؟ G مرکز سطح مثلث

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{مساحت مثلث} : \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

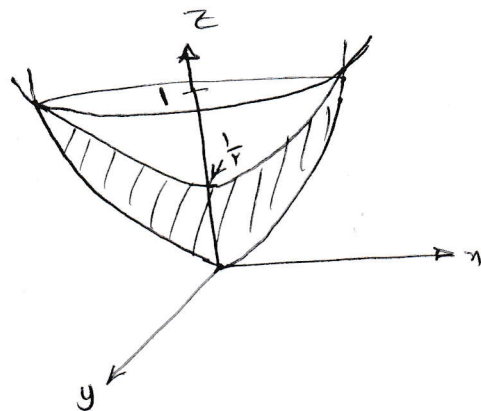


۱۵ محیط دایره طی 90° توسط مرکز سطح $\times$ (مساحت دوران شده) : طبق قضیه پلانیسم

$$= (1) \left(2\pi \left(2 - \frac{1}{3} \right) \right) = \dots$$

۱۵ حجم محصور به مخروط و کره است؟

$$5) \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2z = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{منابع}} 2z = z + 1 \rightarrow \underline{z = 1}$$



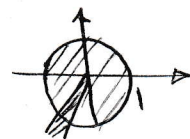
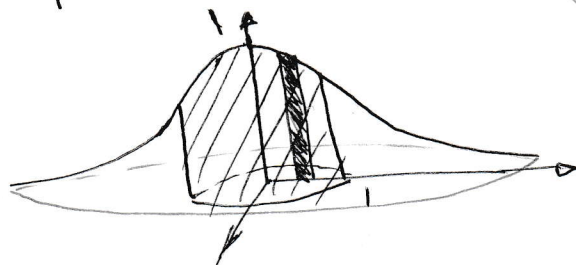
۶ حجم داخل استوانه قطبی $z = \frac{1}{r}$: $\frac{1}{r}$ داخل سیمی $z = \frac{1}{r}$

$$\bar{V} = \frac{1}{r} \left(\pi(1)^2(1) - \pi(1)^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \dots$$

۶ حجم محصور بین $z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ و $z = 1$ در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ برای $z > 0$ است

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \xrightarrow{\text{استوانه ای}} z = \frac{1}{r^2 + 1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{\text{استوانه ای}} r = 1$$



$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{\frac{1}{r^2+1}} r \cdot dz \cdot dr \cdot d\theta = 2\pi \int_0^1 r \cdot z \Big|_0^{\frac{1}{r^2+1}} dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{r^2+1} dr = \pi \ln(r^2+1) \Big|_0^1 = \pi \ln 2$$

7/10

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ z=0 \end{cases}$$

تقاطع $x+2y=4$

72
I

17) حجم جسم محدود به سطح

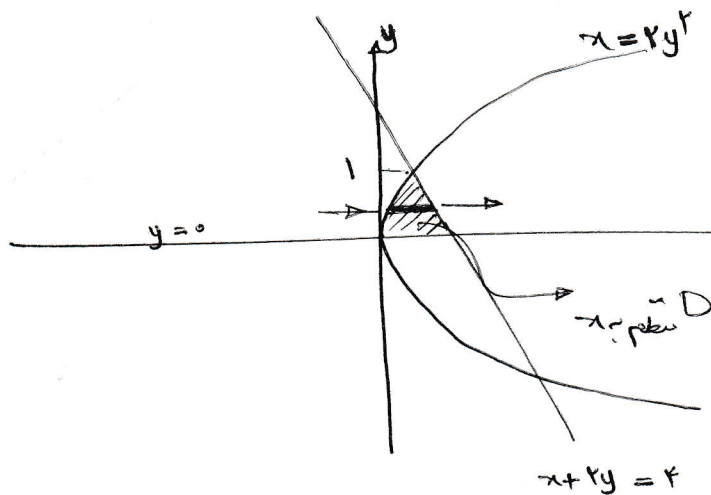
$x=2y^2$, $y=0$, $z=0$

$x+2y+z=4$ را محاسبه کنید

(حجم واقع در $\frac{1}{8}$ اول مد نظر است)

تصویر حجم محدود به سطح

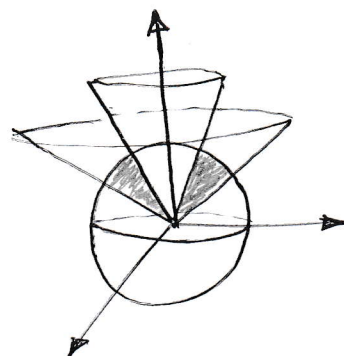
xy



$$V = \int_{y=0}^1 \int_{x=2y^2}^{4-2y} \int_{z=0}^{4-x-2y} dz dx dy = \dots$$

18) حجم ناحیه محدود به کره $\rho=a$ و مخروطهای $\varphi = \frac{\pi}{3}$ و $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

در این صورت $V = \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$



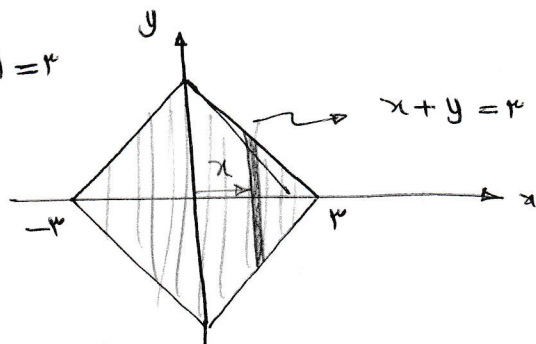
19) حجم جسی که قاعده آن ربع $|x|+|y|=3$ بوده و مقطع عرضی عمود بر محور x ها با سطح جسم یک نیم دایره باشد کدام است؟

9
ص 10

$|x|+|y|=3$

نیم دایره ساخته شده از ربعی از مستطیلی متجاوز (عمود بر صفحه xy)

در این سطح قرار است:

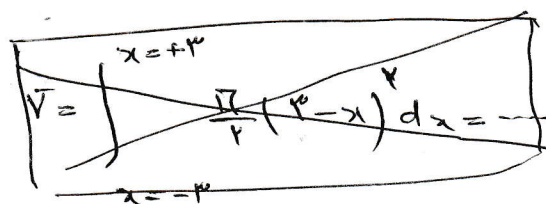


$R=3-x$

مساحت نیم دایره: $\frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{2} (3-x)^2$

نیم دایره: $dV = \frac{\pi}{2} (3-x)^2 dx$

مساحت
مساحت نیم دایره



$V = \int_{x=0}^3 \frac{\pi}{2} (3-x)^2 dx = \dots$

صحت سنجی، حساب مشتق

$$\frac{1}{x} \text{ (در } x=0 \text{)} : f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

الف) برای تابع f با دامنه R داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$f(x_1 + x_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{1 - f(x_1)f(x_2)}$$

به ازای هر x_1, x_2 در دامنه تابع،
آنگاه مشتق تابع $f(x)$ کدام است؟

در فرض صحت

$$\frac{f(x) + f(\Delta x)}{1 - f(x)f(\Delta x)} - f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) - f(x) + f(x) \cdot f(\Delta x)}{(1 - f(x) \cdot f(\Delta x)) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)(1 + f(x))}{\Delta x(1 - f(x)f(\Delta x))}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)f(\Delta x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

$$\text{بنابراین: } f'(x) = 1 \cdot \frac{1 + f(x)}{1 - f(x) \cdot 0} = 1 + f(x)$$

۲) زاویه بین مساحتار دو منحنی، معادلات

$$x^3 - x^2y - x + 2y = 0$$

$$x^3 - dy^3 + 2x + y = 0$$

در محاسبه مختصات کدام است؟

(MBA)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{3x^2 - 2xy - 1}{-x^2 + 2}$$

$$x^3 - dy^3 + 2x + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{3x^2 + 2}{-3dy^2 + 1}$$

$$\text{مشتق اول: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} = m_1$$

$$\text{مشتق دوم: } \frac{dy}{dx} = -2 = m_2$$

$$\rightarrow m_1 m_2 = -1 \rightarrow$$

زاویه بین دو منحنی در

$$\frac{\pi}{2}$$

$$۳) \text{ طبق ماسه زنجیری } \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(\sqrt{4-u} + u \cdot \frac{-1}{2\sqrt{4-u}} \right) (3x^2 + 2) \quad \frac{y}{I}$$

$$(MBA) \text{ : } u=3 \text{ سبب } \frac{dx}{dt} \text{ مقدار } t = u\sqrt{4-u}, u = x^3 + 2x \text{ (سوال اول)}$$

$$\text{برای } u=3 \text{ : } 3 = x^3 + 2x \rightarrow x=1 \text{ جواب}$$

$$x^3 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \text{جواب}$$

$$2 \rightarrow \frac{dt}{dx} = \left(\sqrt{4-3} + 3 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{4-3}} \right) (3(1)^2 + 2) = \left(1 - \frac{3}{2} \right) (5) = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

↓
در روز برداری (نسبت)
معلوم از این دو

$$\frac{\partial t}{\partial x} \neq \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^{-1} \quad \frac{\partial t}{\partial x} \neq \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^{-1}$$

$$۴) I = d^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} (dy)^2$$

$$\text{برای : } Z = \frac{x-2y}{xy} = \frac{1}{y} - \frac{2}{x} \quad \text{(۴) در تابع دو متغیری } Z = \frac{x-2y}{xy} \text{ دینامیک مرتبه دوم}$$

Z در نقطه (۱, ۲) صورت

$$\begin{cases} Z_x = \frac{2}{x^2} \\ Z_y = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_{xx} = -\frac{4}{x^3} \\ Z_{xy} = 0 \\ Z_{yy} = \frac{2}{y^3} \end{cases}$$

$$[dx \ dy] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

نشان داده شده است، تعیین ماتریس A کدام است؟
(MBA)

$$\begin{cases} Z_{xx} = -4 \\ Z_{xy} = 0 \\ Z_{yy} = \frac{2}{y^3} \end{cases}$$

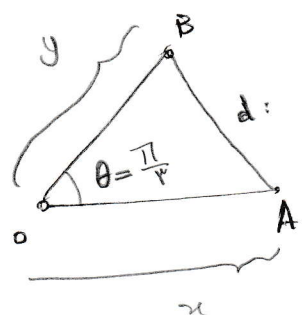
در نقطه (۱, ۲) (برای)

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{xy} & Z_{yy} \end{bmatrix}$$

$$d^2 Z = (dx \ dy) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{xy} & Z_{yy} \end{pmatrix}$$



۱۵ دو قطی A و B بر روی دو خط که با هم زاویه ۷۵ درجه می سازند
در حال دور شدن از نقطه O می باشند، سرعت دو قطی A و B
به ترتیب ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت است. در لحظه ای که فاصله
دو قطی A و B از نقطه O به ترتیب ۸ و ۷ کیلومتر باشند، فاصله بین دو قطی
با چه سرعتی تغییر می کند؟

داریم: $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$ (*)

دری: $y = 30, x = 20, \theta = \frac{\pi}{4}$

$d^2 = (7)^2 + (8)^2 - 2(7)(8) \cos \frac{\pi}{4} = 49 + 64 - 56\sqrt{2} = 52 \rightarrow d = \sqrt{52}$

* $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta = x^2 + y^2 - xy \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$

$2dd' = 2xx' + 2yy' - (x'y + xy')$

در لحظه مورد نظر داریم: $2\sqrt{52} d' = 2(7)(20) + 2(8)(30) - ((20)(8) + 7 \times 30)$

$d' = \dots$

۷) طبق تعریف انتگرال: $\frac{d}{dt} \int_0^t e^{(t-\tau)^2} d\tau = \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (e^{(t-\tau)^2}) d\tau + 1 \cdot e^{(t-t)^2}$

$= \int_0^t 2(t-\tau) \cdot e^{(t-\tau)^2} \cdot d\tau + 1 = -e^{(t-\tau)^2} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + 1$

۷) مقدار مشتق انتگرال
را حساب کنید $\frac{d}{dt} \int_0^t e^{(t-\tau)^2} d\tau$

$= -\left\{ e^{(t-t)^2} - e^{(t-0)^2} \right\} + 1 = -(1 - e^{t^2}) + 1 = e^{t^2}$

۷) فرض کنیم $f(-1) = -1\sqrt{3+(-1)^2} = -2$

برای محاسبه $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)}$ اگر $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ آنگاه مقدار $(f^{-1})'(-2)$ را بیابیم

پس $f'(x) = \sqrt{3+x^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} \rightarrow f'(-1) = \sqrt{3+1} + \frac{1}{\sqrt{3+1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$$(f^{-1})'(-r) = \frac{1}{\frac{0}{r}} = \frac{r}{0}$$

$\frac{r}{0}$

$$\frac{1}{r}) \quad f(x, y) = (\underbrace{xe^y + \cos r\pi y}_P, \underbrace{x^r}_Q, \underbrace{x - e^y}_R)$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy = e^y \cdot dx + (xe^y - r\pi \sin r\pi y) dy$$

$$dQ = rx dx + 0 dy$$

$$dR = 1 dx - e^y dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1, y=0 \\ dx = \frac{r}{100}, dy = \frac{1}{100} \end{cases}$$

$$f(x, y) = (xe^y + \cos r\pi y, x^r, x - e^y) \quad \text{أو (MBA) مقدار تقريبي } f(1, 0.2, 0.01)$$

$$dP = (1) \left(\frac{r}{100} \right) + (1) \left(\frac{1}{100} \right) = \frac{r}{100}$$

$$dQ = (r) \left(\frac{r}{100} \right) + 0 = \frac{r^2}{100}$$

$$dR = \left(\frac{r}{100} \right) - (1) \left(\frac{1}{100} \right) = \frac{r}{100} - \frac{1}{100}$$

$$\begin{cases} P=r \\ Q=1 \\ R=0 \end{cases}$$

$$\text{نحوه: } f(1, 0.2, 0.01) = \left(r + \frac{r}{100}, 1 + \frac{r^2}{100}, 0 + \frac{1}{100} \right) = (r, 0.2, 1, 0.2, 0.01)$$

مبحث چهارم: مثلث متساوی الساقین در تابع دایره

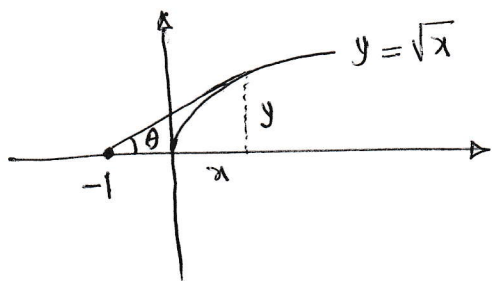
$$\frac{y}{x}$$

$$1) \quad \tan \theta = \frac{y}{x+1} = \frac{y}{y^2+1}$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق به y}} \frac{d\theta}{dy} (1 + \tan^2 \theta) = \frac{y^2 + 1 - 2y^2}{(y^2 + 1)^2} = \frac{1 - y^2}{(y^2 + 1)^2}$$

۱) بیشترین مقدار زاویه θ در شکل مقابل کدام است؟



برای یافتن مقدار بیشینه θ داریم:

$$\frac{d\theta}{dy} = 0 \rightarrow 1 - y^2 = 0 \rightarrow y = 1$$

در این نقطه:

$$\tan \theta = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_{\max} = \arctan \frac{1}{2}$$

۲) معادله منحنی دایره قطبی $\rightarrow (r^2)^{\frac{3}{2}} = 9r^2 \cos \theta \sin \theta \rightarrow r = 9 \cos \theta \sin \theta$

پس: $x = r \cos \theta \rightarrow x = 9 \cos^2 \theta \sin \theta$

برای یافتن بیشترین مقدار x داریم: $\frac{dx}{d\theta} = 0 \rightarrow 9(-2 \cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta) = 0$

$$\cos \theta (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 0 \rightarrow \cot^2 \theta = 2 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 9xy$$

۱۲) معادله منحنی دایره قطبی

بیشترین مقدار x کدام است؟ (MBA)

Imp

دایره: $x = 0 \rightarrow \cos \theta = 0$

دایره: $\cot^2 \theta = 2 \rightarrow \cot \theta = \pm \sqrt{2}$

$$1 + \cot^2 \theta = 2 \rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

بزرگترین مقدار x در این نقطه است:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

۳)

۳) معادله صفحه ای که محدوده ترتیب در طولهای a, b, c قطع کند ضلعی است

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

۱۰ Imp) صفحه ای از نقطه $A(2, 3, 4)$ گذشته، حجم محصورین آن صفحات مختصات میسر است. این حجم کدام است؟

البته حجم ناحیه محصوره به این صفحه و سه صفحه مختصات برابر است:

$$V = \frac{1}{6} abc$$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} = 1 : \text{ می طلبیم } A(2, 3, 4)$$

۴) مساحت اینم وقتی جمع سه مستطیل $2 \times 3 \times 4$ است، ضرب اینها وقتی $\max$ می شود که آنها هم برابر باشند

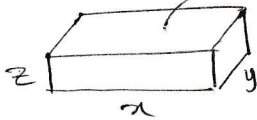
$$\text{نه اینها} \quad \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} = 1 \quad \text{دریم:}$$

$$\text{Max} \left(\frac{2}{a} * \frac{3}{b} * \frac{4}{c} \right) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3}$$

$$\text{Max} \left(\frac{1}{abc} \right) = \frac{1}{2 * 3 * 4} \quad \text{min}(abc) = 2 * 3 * 4$$

$$\text{min } V = \frac{2 * 3 * 4}{6} = \dots$$

۴)



۴) فضای به شکل مکعب مستطیل با حجم ۲۵۶ واحد مکعب مورد نیاز است. ارتفاع هر ضلع چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق بندی آن به حداقل برسد (MBA)

حرف: min کردن سطح کل حوض: فرض $V = 256$ می باشد

$$\text{از فرض } xyz = 256$$

$$\text{سطح کل حوض: } S = 2xz + 2zy + xy$$

$$\text{از فرض } z = \frac{256}{xy} \rightarrow S = \frac{512}{y} + \frac{512}{x} + xy$$

$$\begin{cases} -\frac{512}{x^2} + y = 0 \rightarrow x^2 y = 512 \\ -\frac{512}{y^2} + x = 0 \rightarrow x y^2 = 512 \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y$$

$$x^2 \cdot x = 1 \rightarrow x = 1 = y$$

$$Z = \frac{202}{1 \times 1} = 2$$

د) $x^2 + y^2 = 1$ به صورت دایره $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ اگر a, b اعداد ثابت باشند، تابع $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ (مقدار) $x^2 + y^2 = 1$ (مقدار) $f(x, y)$ به کمک تغییر متغیر تابع بیان است

$$f(t) = \frac{\cos t}{a} + \frac{\sin t}{b}$$

$$\rightarrow \max f = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}} \stackrel{a, b > 0}{=} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

۷) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1 + x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2 y^2 = 2x^4 + 2y^4 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2 y^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y + 4x^2 y \end{cases}$$

۷) برای تابع $f(x, y) = x^4 + y^4 + (1 - x^2 - y^2)^2$ نقطه $(0, 0)$ در چه نوعی است؟

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

که یعنی گریه f نقطه است $\leftarrow$ یک نقطه بحرانی است

$$\begin{cases} f_{xx} = 4x^2 - 4 + 4y^2 : A \\ f_{xy} = 4xy : B \\ f_{yy} = 4y^2 - 4 + 4x^2 : C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \\ C = -4 \end{cases} \rightarrow \Delta = B^2 - AC = 0^2 - (-4)(-4) = -16 < 0$$

در $(0, 0)$ داریم $-4 = A < 0$

$\Delta < 0$ $\rightarrow$ نقطه Max محلی است

پس در نقطه $(0, 0)$ نقطه Max محلی است

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)$$

$$\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x)$$

۱) از جابجایی: دوجه خط اول یک لول

۱) مطلق است تقریب در نزدیکی تابع

$$f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$$

در نزدیکی نقطه $x=0$

* از جابجایی توجه می شویم لول

اول بسط یک لول در مورد نظرات

۱) $f'(x) = \sec x \rightarrow f''(x) = \sec x \tan x$

$$f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$$

نادره: $f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$

$$= 0 + \frac{1}{1!} x^1 + \frac{0}{2!} x^2 + \dots \rightarrow \text{تقریب اول در نزدیکی}$$

۲) فرض می‌کنیم: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\frac{\pi^2}{6}$ فرض می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

۲) فرض می‌کنیم: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ جمع سری

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (سری)

۱۳) با توجه به $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ سری $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$ که از هم جدا است؟

۴)

دو سری ای همگراست با هم جدا میشن یا نه؟ به عدد دیگری که سری دوم همگراست

(همگرا می شود)

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

سری های متناوبی که همگرا می شوند و از هم جدا می شوند

* سری های متناوبی که همگرا می شوند و از هم جدا می شوند

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

مثال ۱:

$$\begin{cases} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ \frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - 0 - \frac{1}{32} + \dots \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \rightarrow \text{گزینه (۲)}$$

۴) تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ به صورت سری توانی می توان نوشت؟

سری هندسی $\rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3}}$

صورتی $(x-1)^n$ ضریب جمله n ام $(x-1)^n$ در این سری کدام است؟ (MBA)

گزینه (۱)

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$$

فرض ضابطه $\left| \frac{x-1}{3} \right| < 1 \rightarrow -3 < x-1 < 3 \rightarrow -2 < x < 4$

۵) مجموع سری $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$ کدام است؟

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$I = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \right)$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1 \times 2}{2}} + \frac{1}{\frac{2 \times 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3 \times 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

$$n \rightarrow \infty$$

7) مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟

7) $\text{پرو: } (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

بنابراین: $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ ← تلفیق اعضا

تلفیق اعضا:

$$I = \frac{1}{n^2} \Big|_{n=1} - \frac{1}{(n+1)^2} \Big|_{n=\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$\sum_{n=p}^q (a_n - a_{n+1}) = a_p - a_{q+1}$$

v) $f(x) = \sin(x - x^2)$

این تابع را می توان به صورت $\sin(x - x^2)$ نوشت

$$= \sin x \cdot \cos x^2 - \cos x \sin x^2$$

$$= \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right\} \left\{ 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \dots \right\} - \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right\} \left\{ (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} - \dots \right\}$$

7) چند جمله ای یک توان از درجه 5 تابع $\sin(x - x^2)$ کدام جمله است؟

ضرب x^0 : $-\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!}$

ضرب x^4 : $\frac{1}{2!}$

از روی جوابها می بینیم ضرب کدام جمله ضرایب x^5 است $\left(-\frac{59}{120} = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} \right)$ است

8) ضریب x در بسط یک توان تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را بیابید؟

خوب تابع در نقطه 0 تعریف نشده است
وقتی می گویند ضریب x در بسط یک توان یعنی ضریب x^1 یا مستقیماً اول تابع در نقطه $x=0$ (مقدار) $f'(0)$

یعنی e در نظر بگیرید: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \dots$

ضریب x در بسط یک توان (را به) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right\}$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} - \dots \xrightarrow{x=0}$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{1}{2} \rightarrow f'(0) = -\frac{e}{2}$$

۹) از تابع $\frac{\sin x}{x} = \frac{2399}{2400}$ مقدار x کدام نسبت به x را بیان است؟ (تقریبی)

۹) $\frac{2399}{2400} \rightarrow 1$

تقریبی: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ وقتی $x \rightarrow 0$ صوابی توان نوشت

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{2399}{2400} \rightarrow \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} = \frac{2399}{2400}$$

$$1 - \frac{x^2}{6} = \frac{2399}{2400} \rightarrow \frac{1}{2400} = \frac{x^2}{6} \rightarrow x^2 = \frac{1}{400} \Rightarrow x = \frac{1}{20} \quad (\text{تقریباً})$$

۱۰) $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot x^{2n}$
 (۱) مجموع سری $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$ را برای $|x| < 1$ بیابید (مستقیم)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \quad \text{برای } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \xrightarrow{\times x} \frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot x^{2n} \rightarrow \text{گزینه (۲) درست است}$$

۱۱) $f(x) = 1 - x \ln(1-x) - \cos x$ در محاسبات بیابید مختصات به کدام صورت است؟ (ریاضی)
 مقدار تابع $f(x)$ را برای $x \rightarrow 0$ بیابید

وقتی: $x \rightarrow 0$

$$f(x) = 1 - x \left\{ -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) \right\} - \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right\}$$

$$= \frac{3}{2} x^2 + \dots$$

نماینده تابع $f(x)$ نزدیک $x=0$ مطابق $\frac{3}{2} x^2$ است
 وقتی $x \rightarrow 0$ مقدار تابع هم از کوچکترین درجه از x است

۱۲) اگر $a > 1$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a+(-1)^n)^n \cdot x^n$ (بیست)

نوع جمله‌ای سری

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(a+(-1)^n)^n \cdot x^n|} < 1$$

شرط کافی همگرا (شرط لازم)

اگر n زوج باشد، شرط همگرا می‌طلب

$$|(a+1)x| < 1 \xrightarrow{a>1} |x| < \frac{1}{a+1}$$

اگر n فرد باشد، شرط همگرا می‌طلب

$$|(a-1)x| < 1 \xrightarrow{a>1} |x| < \frac{1}{a-1}$$

در نظر

$$\min\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a-1}\right) = \frac{1}{a+1}$$

پس شرط همگرا می‌شود

نوع همگرا می‌شود:

$$|x| < \frac{1}{a+1} \rightarrow R = \frac{1}{a+1}$$

۱۱۳ فرض کنید S_n به ترتیب مجموع و مجموع جزئی n ام سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ باشد و $E = \frac{1}{2^{10}}$ به ازای چه مقدار n رابطه $|S_n - S| < \frac{1}{2^{10}}$ برقرار است؟

$$|S_n - S| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

سری هندسی با جمله اول

$$\frac{1}{2^{n+1}} \text{ و قدر نسبت } \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

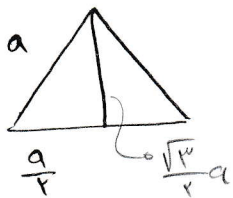
پس برای خواسته ما کافیست

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{10}} \rightarrow 2^n > 2^{10} \rightarrow \underline{n > 10}$$

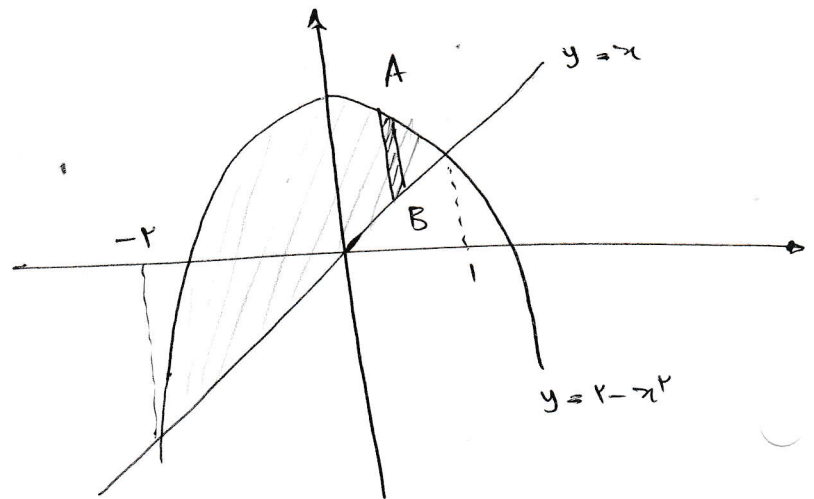
شکل از صحنه حجمها: $y = x$, $y = 2 - x^2$ می باشد، متقاطع هر صحنه را در محور x حساب
 — قاعده صحنه را به خط عمود بر محور x

خط صحنه که مثلث متساوی الاضلاع است مجموع صحنه را بدین

مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع
 a دارای مساحت زیر است



$$S = \frac{\sqrt{3} a^2}{4}$$



طول آن صحنه: $y_A - y_B = (2 - x^2) - (x) = 2 - x^2 - x$

مثلث متساوی الاضلاع را در صفحه کاغذ روی امان نشان داده تصور کن

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (2 - x^2 - x)^2$$

آن حجمی ساخته می شود که این مثلث با ضخامت dx و ضلع آن

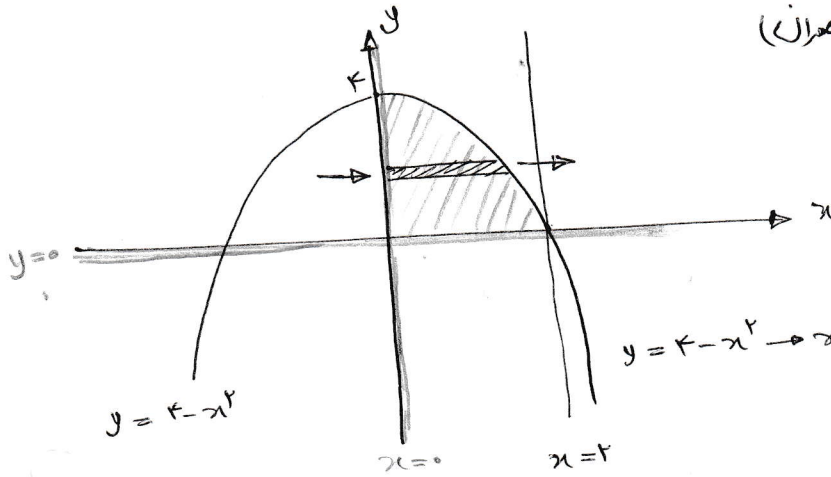
$$dV = A \cdot dx = \frac{\sqrt{3}}{4} (2 - x^2 - x)^2 dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-2}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (2 - x^2 - x)^2 dx$$

۱)

از اینجا که امکان جداسازی متغیرها نیست، باید از روش دیگری استفاده کرد. (راه حل)

۱) مقدار انتگرال $\int_0^2 \int_0^{2-x^2} \frac{x e^{xy}}{x-y} dy dx$ را بیابید. (محل)



$$y = 2 - x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2-y}$$

$$I = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{2-y}} \frac{x \cdot e^{xy}}{x-y} dx dy = \int_0^2 \frac{e^{xy}}{x-y} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{e^{xy}}{x-y} \cdot \frac{2-y}{2} dy = \frac{1}{2} e^{xy} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

۲) $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{2u+v}{3} \\ x = u - \frac{2u+v}{3} = \frac{u-v}{3} \end{cases}$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}$$

$$y=0 \rightarrow 2u+v=0$$

$$y=1-x \rightarrow x+y=1 \rightarrow u=1$$

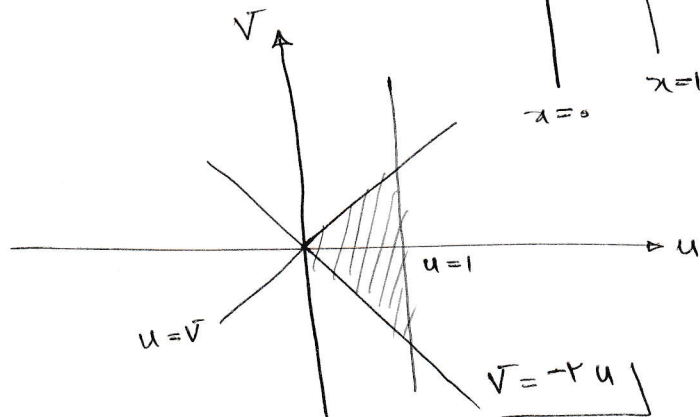
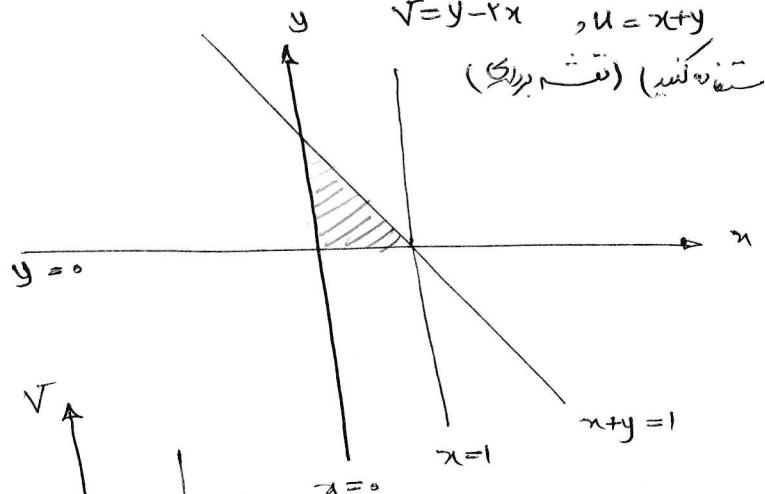
$$x=0 \rightarrow u-v=0$$

$$x=1 \rightarrow u-v=2$$

۳) مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx$ را بیابید. (راه حل)

(راه حل: می توانیم از تغییر متغیرها استفاده کنیم) (نقشه)

$v = y - 2x$, $u = x + y$
استفاده کنیم (نقشه)



$\frac{\Delta V}{I}$

نقطه

$$I = \iiint_{D'} \sqrt{u} \cdot \sqrt{v} \cdot \left| \frac{1}{r} \right| du \cdot dv = \int_0^1 \int_{-u}^u \sqrt{v} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{r} \cdot dv \cdot du = \dots$$

۳) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 3y^2$

از نقطه A به نقطه B در مسیر مستقیم

نقطه A: $(0,0)$ نقطه B: $(1,1)$

برای $x = xe^{x-1}$ داریم

در انتهای مسیر مستقیم

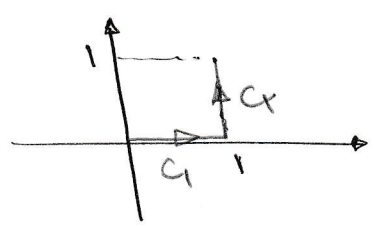
مسیر: $\int_{AB} (3x^2y + 4xy^2 + y^3) dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2) dy$

تابع پتانسیل u را داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + 4xy^2 + y^3 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \end{cases} \rightarrow u = x^3y + x^2y^2 + xy^3 + C$$

$I = u \Big|_{\text{نقطه ابتدایی}} - u \Big|_{\text{نقطه انتهایی}} = u(1,1) - u(0,0) = \dots$

چون شکل مستطیل داریم می‌توانیم آن را در دو قسمت C_1 و C_2 تقسیم کنیم



$C_1: y=0 \rightarrow dy=0$

$C_2: x=1 \rightarrow dx=0$

بنابراین: $I = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

$$I = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_0^1 (1 + 2y + 3y^2) dy = \dots$$

۴) $C: \frac{x-1}{1-0} = \frac{y-2}{2-1} = \frac{z-1}{1-(-1)} = t$

بنابراین: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases}$

نقطه $(1,2,1)$ و $(0,3,-1)$

بنابراین: $I = \int_{t=-1}^{t=1} ((t+2)(dt) + (2t+1)(dt) - (t+1)(2dt)) = \dots$

۱۴ هرگاه C پاره خطی از نقطه $(1,2,1)$ به $(0,3,-1)$ باشد حاصل $\int_C (y dx + z dy - x dz)$ را بیابید

د) محلی پارامتری

$\frac{\Delta \Delta}{I}$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta = \sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

طول منحنی $0 \leq \theta \leq \pi$ و
 $\vec{r}(\theta) = (\theta - \sin\theta)i + (1 - \cos\theta)j$

$$L = \int_c ds = \int_0^\pi 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2 \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \dots$$

ن) طول منحنی

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{r} - \frac{1}{rx^2}\right)^2} dx$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r} + \frac{1}{rx^2} - \frac{1}{r}} dx = \sqrt{\left(\frac{x^2}{r} + \frac{1}{rx^2}\right)^2} dx = \left(\frac{x^2}{r} + \frac{1}{rx^2}\right) dx$$

ناتمام:

$$L = \int_c ds = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{r} + \frac{1}{rx^2}\right) dx$$

طول منحنی

$$y = \frac{x^2}{r} + \frac{1}{rx^2}$$

از $x=1$ تا $x=2$ برابر است:

و)

محکم منحنی C در فضای سه بعدی ds را بدست آوریم

$$\begin{cases} x=y \\ x^2 + y^2 + z^2 = r \end{cases} \xrightarrow{\text{مقاطع}} \underbrace{x^2 + z^2 = r}_{\text{منحنی}} \xrightarrow{\text{پارامتری}} \begin{cases} x = \sqrt{r} \cos t = y \\ z = \sqrt{r} \sin t \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{r \sin^2 t + r \cos^2 t + r} dt = r dt$$

ناتمام:

$$I = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{r} \cos t + \sqrt{r} \cos t + \sqrt{r} \sin t) \cdot r dt = \dots$$

ص) حاصل $\int_c (x+y+z) ds$ که آن C کل مخروط منحنی $y=x$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

نقطه ششم اول با جهت از نقطه $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ به نقطه $(0, 0, 2)$ می باشد که جهت؟ (بسیاری)

i) $\text{div}(\vec{\nabla} u) = 0 \rightarrow \text{لاپلاسین} = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (ضوابط جسم)

اگر تابع $\phi(t)$ دارای مشتق مرتبه دوم باشد
 $u = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ ،
 رطوری تعیین کنند که $\text{div}(\nabla u) = 0$ (کافیست)

داریم: $u = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \phi'(x^2 + y^2 + z^2)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cdot \phi'(x^2 + y^2 + z^2) + 2x \cdot 2x \cdot \phi''(x^2 + y^2 + z^2)$
 $= 2 \phi'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 \phi''(x^2 + y^2 + z^2)$
 $= 2 \phi' + 4x^2 \phi''$

بنابراین: $\rightarrow (2\phi' + 4x^2\phi'') + (2\phi' + 4y^2\phi'') + (2\phi' + 4z^2\phi'') = 0$

$6\phi' + 4(x^2 + y^2 + z^2)\phi'' = 0$

$6\phi'(t) + 4t\phi''(t) = 0 \rightarrow 7\phi'(t) = -4t \cdot \phi''(t) \rightarrow \frac{\phi''(t)}{\phi'(t)} = \frac{-3}{2t} \rightarrow$

$\ln \phi'(t) = -\frac{3}{2} \ln t + \ln C \rightarrow \phi'(t) = Ct^{-\frac{3}{2}}$

۲) $F: x^2 + y^2 = 5 \rightarrow \vec{\nabla} F = 2xi + 2yj + 0k$

$\vec{\nabla} F(2, -1, -2) = 4i - 2j : \vec{N}_1$ زناں رویه اول

$G: z - xy \rightarrow \vec{\nabla} G = -yi - xj + 1k$

$\vec{\nabla} G(2, -1, -2) = i - 2j + k : \vec{N}_2$

۲) صفحه قائم بر سطحی (C) فصل شود استوانه
 $x^2 + y^2 = 5$ رویه $Z = xy$ در نقطه $(2, -1, -2)$
 محورهای ابراکدام طول قطع می کنند؟
 زناں رویه دوم (MBA)

$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2i - 4j - 7k \equiv (1, 2, 3)$

زناں صفحه قائم بر سطحی در نقطه مورد بحث

من محال صفت
 سران نظم

$1(x-2) + 2(y+1) + 3(z+2) = 0 \rightarrow x = y = z = 0 \rightarrow$ بیشترین
 جایی که سطح صفر خواهد شد
 آنها را قطع می کنند

هدف اینست که مشخص کنیم، مشتق سونی f در نقطه $(-1, 1)$ در کدام جهت علامت منفی دارد.

$$\vec{\nabla} f = (3x^2 + 2xy)i + (x^2 + 2y)j$$

$$\vec{\nabla} f(-1, 1) = i + 3j$$

$$(i + 3j) \cdot \frac{-i + j}{\sqrt{2}} = \frac{-1 + 3}{\sqrt{2}} > 0$$

گزینه ۱۱

$$(i + 3j) \cdot \frac{i - j}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 3}{\sqrt{2}} < 0 \rightarrow \text{گزینه صحیح}$$

مشتق سونی f در جهت ۱۲

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 - 1 \quad \text{در نقطه } (-1, 1) \quad \text{در کدام جهت علامت منفی دارد؟ (تکلیف)}$$