

مثلثات

ساده کردن عبارت مثلثاتی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{\sin^2 20^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ} = ?$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: 🤔

ابتدا به نکته زیر توجه شود.

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad \text{💡} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

مخرج مشترک تمام کسرها تعیین می شود. در نتیجه کسر مورد مسئله تبدیل به کسر زیر می گردد.

$$\frac{\sin^2 20^\circ \sin^2 40^\circ + \cos^2 10^\circ \sin^2 40^\circ + \cos^2 10^\circ \sin^2 20^\circ}{\cos^2 10^\circ \sin^2 20^\circ \sin^2 40^\circ}$$

هر کدام از ضرب‌ها طبق نکته ارائه شده به جمع تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{1}{4} \left((\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)^2 + (\sin 50^\circ + \sin 30^\circ)^2 + (\sin 30^\circ + \sin 10^\circ)^2 \right)}{\frac{1}{4} \cos^2 10^\circ (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)^2} \\
 &= \frac{(\cos 20^\circ - \frac{1}{2})^2 + (\sin 50^\circ + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} + \sin 10^\circ)^2}{\cos^2 10^\circ (\cos 20^\circ - \frac{1}{2})^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{4} + \cos^2 20^\circ - \cos 20^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin 50^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin 10^\circ}{(\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ)^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1+\cos 40^\circ}{2} - \cos 20^\circ + \frac{1-\cos 100^\circ}{2} + \sin 50^\circ + \frac{1-\cos 20^\circ}{2} + \sin 10^\circ}{\left(\frac{1}{2} (\cos 10^\circ - \cos 30^\circ) - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \right)^2} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} + \frac{1}{2} (\cos 40^\circ - 2 \cos 20^\circ - \cos 100^\circ + 2 \sin 50^\circ - \cos 20^\circ + 2 \sin 10^\circ)}{\left(-\frac{1}{2} \cos 30^\circ \right)^2} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} + \frac{1}{2} (3 \cos 40^\circ - 3 \cos 20^\circ + 3 \sin 10^\circ)}{\left(-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} + \frac{3}{2} (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ + \sin 10^\circ)}{\frac{3}{16}}
 \end{aligned}$$

مقدار عبارت $\cos 40^\circ - \cos 20^\circ + \sin 10^\circ$ برابر با صفر است به دلیل زیر:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{💡}$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ + \sin 10^\circ = -2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ + \sin 10^\circ = 0$$

پس کسر داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{1}{\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{\sin^2 20^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{16}} = 12$$

اهمیت آن چیزهایی که با رسیدن به
اهدافتان بدست می‌آورید کمتر است
از آن کسی با رسیدن به اهدافتان، بدان
تبدیل شده‌اید.

Zig Ziglar



AvaEducation16.blog.ir



@AvaEducation16



@AvaEducation16



AvaEducation16@gmail.com