بسم الله الرحمن الرحیم

تکالیف معادله دیفرانسیل و انتگرال

المپیاد فیزیک

سال سوم

تحویل ۱۳۹۴/۵/۱۹

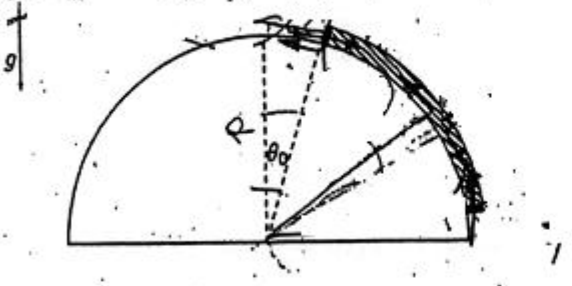
پ.ن.۱ حتما سوالات را تمیز بنویسید.

پ.ن.۲ جواب آخرها تون را در فضای مجازی به اشتراک بگذارید.(سر کلاس نمی رسیم همه‌ی سوالات را حل کنیم، حد اکثر یکیش را)

پ.ن.۳ حتما تا حد امکان(مرگ) جواب اخر را ساده کنید.

پ.ن.۴ *Practice Makes Perfect*:)

مسئله‌ی ۲) طنابی به جرم m و جرم بر واحد طول λ را روی نیم‌کره‌ای به شعاع R قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی طناب با سطح نیم‌کره μ است.



جواب‌های خود را حتماً در جعبه‌های مربوطه‌ی پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) مطابق شکل ابتدای طناب در زاویه‌ی θ_0 قرار دارد. فرض کنید طناب در آستانه‌ی لغزیدن است. معادله‌ای برای $T(\theta)$ کشش نخ در زاویه‌ی θ به دست آورید. این معادله را به صورت زیر بنویسید

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + C_0 T(\theta) = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta$$

ثابت‌های C_0، C_1، و C_2 را بر حسب g، R، λ، و μ به دست آورید.

b) جواب معادله‌ی بالا را به صورت

$$T(\theta) = A_0 e^{-C_0\theta} + A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta$$

بگیرید. ثابت‌های A_0، A_1، و A_2 را بر حسب g، R، λ، μ، و θ_0 به دست آورید.

c) جوابی که در بند قبل به دست آورده‌اید را به شکل

$$T(\theta) = e^{-C_0\theta}[f(\theta) - f(\theta_0)]$$

در آورید. $f(\theta)$ چیست؟

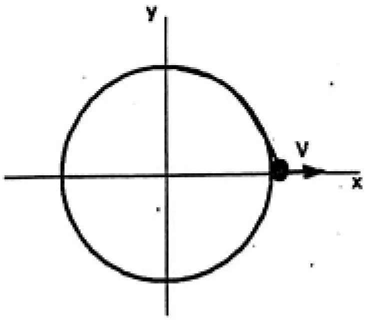
d) بیشینه‌ی $f(\theta)$ در چه زاویه‌ای است؟ این زاویه را α بنامید.

e) به ازای چه شرطی روی θ_0، برای هیچ مقداری از طول طناب، l، طناب روی نیم‌کره ساکن نمی‌ماند؟

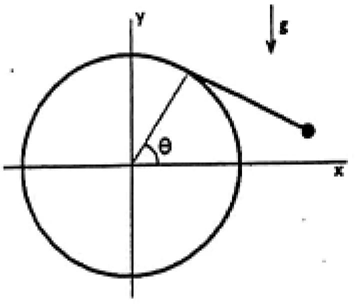
f) از این پس فرض کنید $\theta_0 = 0$. به ازای چه مقادیری از ضریب اصطکاک μ، طنابی که انتهایش در $\theta = \pi/2$ است می‌تواند ساکن بماند؟ کافی است معادله‌ای برای μ به دست آورید.

g) فرض کنید شرط بند قبل برقرار است. طناب بلندتری را در نظر می‌گیریم که بخشی از آن آویزان است. بیشینه طول بخش آویزان h بر حسب g، R، λ، μ، و θ_0 چه‌قدر باشد که طناب ساکن بماند؟

۹ـ ریسمانی به دورِ استوانه ی ثابتی به شعاعِ R چندین بار پیچیده شده است . جرم m به سرِ ریسمان متصل است. در لحظه ی اول وضعیت مطابقِ شکلِ ۱ است . در این لحظه به جرمِ m سرعتِ افقی بزرگِ v به سمتِ راست داده می شود. در کلِ مسئله فرض کنید سرعت آن قدر زیاد است که ریسمان شل نمی شود.



شکل ۱



شکل ۲

الف) در لحظه اي که نقطه ی جدا شدنِ ریسمان از استوانه با افق زاویه ی Θ می سازد، x و y جرم m را بر حسبِ Θ بیابید.

ب) در این لحظه مشتقِ اول و دومِ زمانی x و y را بر حسبِ Θ و مشتقاتِ زمانی آن بیابید.

پ) معادلاتِ نیرو را برای جسم در راستای افقی و عمودی بنویسید.

ت) با استفاده از قسمت های قبل معادله ی دیفرانسیلی برای Θ به دست آورید و مشتقِ زمانی Θ را به صورتِ تابعی از Θ بیابید.

ث) با استفاده از معادله ی قسمتِ قبل و با فرضِ بزرگ بودنِ سرعت، Θ را بر حسبِ زمان تا اولین مرتبه ی ناصفرِ $\frac{gR}{v^2}$ به دست آورید.

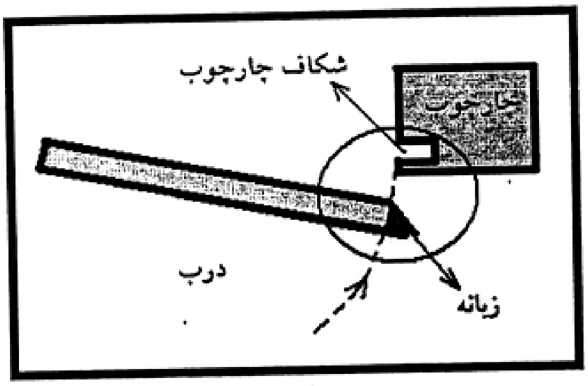
راه نمایی:

پاسخِ معادله ی دیفرانسیلی به شکل $\frac{dy}{dx} + p(x)\ y = q(x)$ برابر است با:

$$\frac{1}{\mu(x)}\left[\ \int \mu(x).\ q(x).\, dx \quad + \quad C\ \right]$$

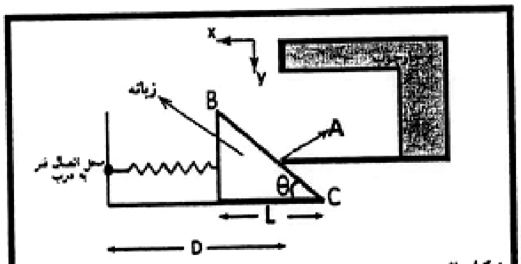
که در آن C ثابت است و از شرایطِ اولیه تعیین می شود و $\mu(x)$ برابر است با: $\exp\left(\int p(x).\, dx\right)$

۲) در این مسئله می‌خواهیم فرایند باز و بسته شدن درب ورودی ساختمان را مطابق شکل ۱ بررسی کنیم. زبانه‌ی درب را می‌توان یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی معلوم θ و طول L مطابق شکل ۲ در نظر گرفت. فنری به طول کشیده‌نشده‌ی D و ثابت K به آن متصل است. توجه کنید نمای شکل‌ها از بالاست.



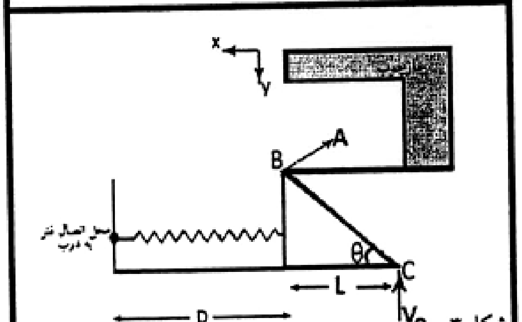
شکل ۱

شکل ۲ قسمتی از شکل ۱ را که با دایره مشخص شده است در مقیاس بزرگ‌تر نشان می‌دهد.

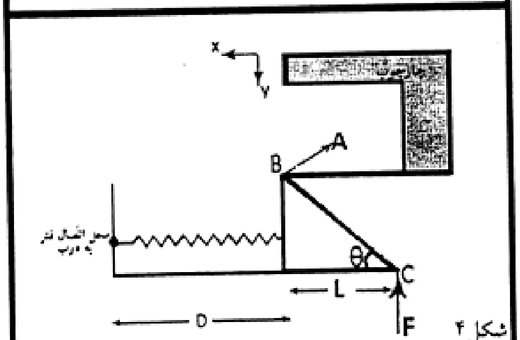


شکل ۲

در عمل چون زبانه به انتهای درب وصل است هنگام باز و بسته شدن روی مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند که شعاعش برابر عرضِ درب است، ولی اینجا فقط لحظه‌ی جفت شدن و باز شدن درب را در نظر می‌گیریم، طوری که در همه‌ی شکل‌ها می‌توان همیشه دو ضلع چپ و پایین زبانه را به ترتیب عمودی و افقی گرفت، یعنی از دوران صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل ۳



شکل ۴

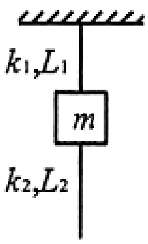
وقتی نقطه‌ی A با سطح زبانه تماس پیدا می‌کند ضریب اصطکاک جنبشی بین آنها را μ می‌گیریم. فاصله‌ی

افقی نقطه‌ی A از محل اتصال فنر D است.

چون زبانه به درب متصل است، در معادلات نیرو در راستای فنر (یعنی در راستای x) جرم زبانه را m و در معادلات نیرو در راستای عمود بر فنر (یعنی در راستای Y) جرم معادل سیستم زبانه-درب را M بگیرید. تنها نیروی عمودی که به سیستم زبانه-درب وارد می‌شود از نقطه‌ی A و تنها نیروهای افقی که به زبانه وارد می‌شود از طرف نقطه‌ی A و فنر است، و فنر فقط در راستای خودش می‌تواند نیرو وارد کند.

الف) درب مطابق شکل ۳ با سرعت V_0 رها می‌شود، V_0 را طوری بیابید که درب بسته شود (یعنی با فشرده شدن فنر نقطه‌ی C به نقطه‌ی A برسد).

ب) فرض کنید مطابق شکل ۴، درب اصطلاحاً "روی‌هم" است، یعنی نقاط A و B با هم در تماس اند و سیستم در حال سکون است. اگر نیروی ثابت F به صورت عمودی به سیستم زبانه-درب وارد شود، حداقل F را بیابید که بتواند درب را ببندد.



۴۷) مطابق شکل وزنه‌ای به جرم m از ریسمانی آویزان است و ریسمان دیگری به انتهای آن وزنه متصل است. ضرایب سختی ریسمانها k_1 و k_2 و طـول کـشیده نشده‌ی آنها L_1 و L_2 می‌باشد. تغییر مکان وزنه نسبت به حالت تعادل خود را x و مکان انتهای ریسمان دوم نسبت به حالت تعـادل سیـستم را y بنامیـد. (جهـت مثبت را رو به پایین می‌گیریم.) جرم ریسمانها قابل چشم‌پوشی است.

الف) فرض کنید انتهای ریسمان دوم را با معادله‌ی $y(t)$ حرکت دهـیم. معادلـه‌ی دیفرانـسیلی بنویسید که تغییرات x برحسب زمان را نشان دهد.

ب) از اینجا به بعد دو ریسمان را مشابه فرض کنید ($k_1 = k_2 = k$ و $L_1 = L_2 = L$). فـرض کنید حرکت انتهای ریسمان دوم از زمان صفر آغاز شود و با شتاب ثابت a باشد. $x(t)$ را به دست آورید.

راهنمایی: جواب معادلاتی از نوع $\ddot{X} + \Omega^2 X = Y$ که در آن Y یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n مـی‌باشـد، $X = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \tilde{Y}$ بـوده کـه در آن $\tilde{Y}$ هـم یـک چنـد جملـه‌ای از درجه‌ی n است. ضرایب موجود در $\tilde{Y}$ از اینجا به دست می‌آید که X در معادله صدق کنـد و A و B از شرایط اولیه معلوم می‌شود.

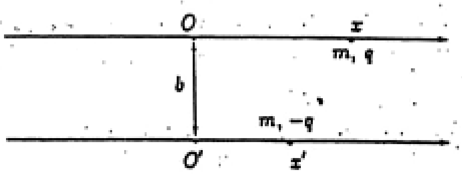
پ) مقدار کشیدگی دو ریسمان را به دست آورید.

ت) اگر کشیدگی هر یک از دو ریسمان از l بیشتر شود، آن ریسمان پاره می‌شود. با فرض اینکه این اتفاق در زمان بسیار کوتاهی رخ دهد، مقدار کشیدگی هر یـک از دو ریـسمان را برحـسب t بسط دهید و تنها اولین جمله‌ی غیر صفر (نسبت به $t = 0$) را به دست آورید.

ث) با استفاده از جواب قسمت (ت) بـه ازای چـه مقـادیری از a ریـسمان اول و بـه ازای چـه مقادیری از a ریسمان دوم پاره می‌شود؟

۴ـ دو جسم با جرم‌ها ی ـ برابر m و بارها ی ـ q و $-q$ مقیّد اند که رو ی ـ دو میله ی ـ موازی حرکت کنند. فاصله ی ـ دو میله b است. مکان ـ ذرّه‌ها را با x و x' مشخّص می‌کنیم. مبداها ی ـ O و O' در شکل مشخّص شده است. پاره‌خط ـ OO' بر هر دو محور عمود است. به جسمی که رو ی ـ محور ـ Ox حرکت می‌کند نیرو ی ـ f وارد می‌شود.

جواب ـ نهایی ی ـ هر قسمت را، حتماً، فقط در جعبه‌ها ی ـ مشخّص شده بنویسید.



a) معادله‌ها ی ـ دیفرانسیل ـ حرکت، یعنی معادله‌ها ی ـ قانون ـ دوّم نیوتن را برا ی ـ متغیّرها ی ـ $X := \frac{1}{2}(x + x')$ و $u := x - x'$ بنویسید.

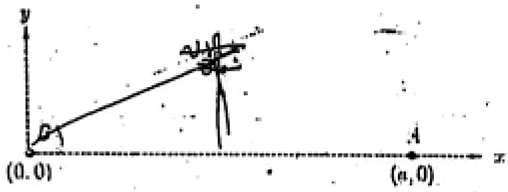
b) برا ی ـ $f = 0$ یک جواب ـ معادله‌ها این است که X ثابت و u صفر باشد. بس‌آمد ـ نوسان‌ها ی ـ کوچک ـ u را ω می‌نامیم. ω را بیابید.

c) اکنون فرض کنید f ثابت باشد، و ضمناً $f \ll mb\omega^2$ باشد. معادله ی ـ u را برا ی ـ q ی ـ بسیار بزرگ (یعنی ω ی ـ بسیار بزرگ) تا نخستین مرتبه در u بنویسید.

d) نیرو ی ـ f در $t = 0$ روشن می‌شود و از آن پس ثابت می‌ماند. با شرط ـ $u(0) = 0$ و $\dot{u}(0) = 0$، $u(t)$ را به دست آورید.

سوال انتگرال از جلسه ی قبل

۱۵/ ۲- خلبانی سعی می‌کند هواپیمای خود را از فرودگاه شهر A به فرودگاه شهر B که به فاصله‌ی a در غرب آن قرار دارد، برساند. تندی هواپیما در هوای ساکن مقدار ثابت v است. اگر باد با تندی ثابت w از جنوب به شمال بوزد و خلبان در هر لحظه سر هواپیما را به سوی فرودگاه شهر B قرار دهد:



آ) بردار سرعت هواپیما را در نقطه‌ی دلخواهی از مسیر مانند (x,y) در دستگاه مختصات دکارتی $y-x$ بر حسب v، w، x و y بنویسید.

ب) نسبت $\frac{dy}{dx}$ را به دست آورید.

پ) جواب قسمت قبل را بر حسب x و u $(u=\frac{y}{x})$ و دیفرانسیل‌های آن‌ها بنویسید.

ت) معادله‌ی مسیر، y بر حسب x را به دست آورید.

ث) به ازای $w/v=1$، $w/v=0.5$ و $w/v=2$ شکل تقریبی مسیر را رسم کنید.

در صورت نیاز:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u+\sqrt{1+u^2})+C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$$