



دانشگاه صنعتی شاهرود
شهر شاهرود
۱۳۰۷
دانشگاه ریاضی

بسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

نام و نام خانوادگی:

۲۲ دی ۱۴۰۳

شماره دانشجویی:

۱. انتگرال های زیر را محاسبه نمایید. (هر مورد ۱/۵ نمره)

(الف) $\int 3^x \cos x \, dx$ (ب) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx$ (ج) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

۲. فقط به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید. (۱/۵ نمره)

(الف) آستروئید به معادله پارامتری $\begin{cases} x = 2 \sin^2 t \\ y = 2 \cos^2 t \end{cases}$ (و یا معادله دکارتی $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$) را در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محدود به آن را محاسبه نمایید.

(ب) ناحیه واقع بین نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$ و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۳. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید. (۱/۵ نمره)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x} \, dx$$

۴. حد زیر را محاسبه کنید. (۱/۵ نمره)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n+1} + \dots + \sqrt[n]{n+(n-1)}}{\sqrt[n]{n^n}}$$

۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید. (۱/۵ نمره)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2}$$

۶. شعاع و بازه همگرایی سری توانی زیر را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^2} (x-4)^n$$

موفق باشید



دانشگاه صنعتی خوارزمی

پایانترم ریاضی عمومی ۱ (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال ۱-الف) **جزء جز - خود ارجام**

تقسیم
انتگرال

$$\int 3^x \cos x \, dx$$

$$3^x \ln 3 \quad \sin x$$

$$3^x (\ln 3)^2 \quad -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = 3^x \sin x + 3^x \ln 3 \cos x - (\ln 3)^2 \int 3^x \cos x \, dx$$

$$\rightarrow (1 + (\ln 3)^2) I = 3^x (\sin x + \ln 3 \cos x)$$

$$I = \frac{3^x}{(\ln 3)^2 + 1} (\sin x + \ln 3 \cos x) + C$$

(سطح سوال : سخت)



دانشگاه سندھ خواہ نصیر الدین ٹی وی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراہیم شاہ ابراہیمی

پاسخ سوال ۱-ب)

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

روش ۱ $\times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} = \int \frac{\sin x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx$

$$= \int \frac{\sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec x \cdot \tan x dx - \int \tan^2 x dx$$

$$= \sec x - \int (\tan^2 x + 1) dx$$

$$= \sec x - \tan x + x + C$$

Ebimath

روش دوم $\rightarrow I = \int \frac{\sin x + 1 - 1}{\sin x + 1} dx = \int dx - \int \frac{dx}{\sin x + 1}$

$t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow II = \int \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\rightarrow II = \int \frac{2dt}{2t+t^2+1} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-2}{t+1} = \frac{-2}{\tan \frac{x}{2} + 1}$$

$$\rightarrow I = x + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C$$

(سطح سوال: سخت)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال ۱-ج)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{تغییر متغیر} \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{t^2}{1+t} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t+1} dt$$

$$= 4 \int \frac{t^5 + 1 - 1}{t+1} dt$$

$$= 4 \left[\int \left(\frac{t^5 + 1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \right]$$

$$(t^5 + 1) = (t+1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)$$

$$= 4 \left[\int (t^4 - t^3 + t^2 - t + 1) dt - \ln|t+1| \right]$$

$$= 4 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right] + C$$

$$t = \sqrt[4]{x}$$

(سطح سوال: متوسط)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال ۲-ب)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} \quad \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{حجم دورا حول } x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx \quad \times \frac{e^x}{e^x}$$
$$= \pi \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$= \pi \ln |e^x+1| \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\ln(e+1) - \ln 2 \right) = \pi \ln \left(\frac{e+1}{2} \right)$$

(سطح سوال: متوسط)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال (۳)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x} dx$$

روش اول $\frac{\sin x}{e^x} < \frac{1}{e^x}$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

طبق آزمون مقایسه چون $\frac{\sin x}{e^x} < \frac{1}{e^x}$ و $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx$ همگراست پس $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x} dx$ هم همگراست.

روش دوم $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

از آنجا باز هم خود را جا \leftarrow

$$\begin{array}{l} e^{-x} \sin x dx \\ -e^{-x} \rightarrow -\cos x \\ e^{-x} \rightarrow -\sin x \end{array}$$

$$\rightarrow I = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\rightarrow 2I = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$\rightarrow I = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2}$$

پس همگراست.

(سطح سوال: باروش اول ساده و باروش دوم نخت)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال (۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \dots + \sqrt[3]{n+(n-1)}}{\sqrt[3]{n^4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt[3]{n+i}}{n \sqrt[3]{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{n+i}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{1 + \frac{i}{n}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$$

$$= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1)$$

(سطح سوال : سخت)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال (۵)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} \quad \text{⊕ و منفی است. } 1 < x < \infty$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x \ln(x+1)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x^3} < 0$$

تابع نزولی است.

از جدول استرال

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx \quad \text{جزء جز}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+1)}{x} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$
$$= 0 + \ln 2 + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\rightarrow I = \ln 2 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^{\infty}$$

$$= \ln 2 + \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \underline{\underline{2 \ln 2}}$$

استرال متناظر با سری هارمونیک است پس سری نیز همگرا است.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی (زمستان ۱۴۰۳)
ابراهیم شاه ابراهیمی

پاسخ سوال (۶)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (x-4)^n$$

از مبنای ریشه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left| \frac{e^n}{n^3} (x-4)^n \right|} = e|x-4|$$

تقریب

$$e|x-4| < 1 \rightarrow |x-4| < \frac{1}{e} \rightarrow R = \frac{1}{e}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{e} < x-4 < \frac{1}{e} \rightarrow \underline{4 - \frac{1}{e} < x < 4 + \frac{1}{e}}$$

$$x = 4 - \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0 \\ f(x) = \frac{1}{x^3} \end{array} \right.$$

طبق آزمون سری متناوب همگراست (مطلق)

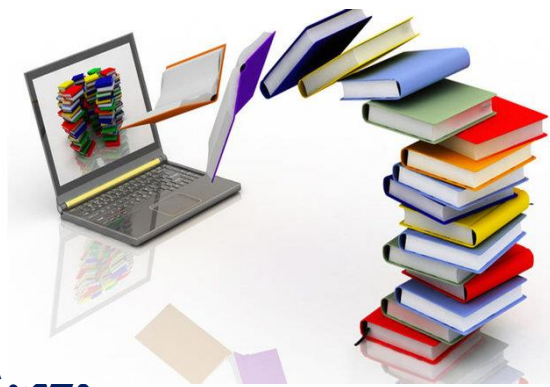
$$x = 4 + \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad p = 3 > 1$$

طبق آزمون سری p همگراست.

$$\rightarrow x \in \left[4 - \frac{1}{e}, 4 + \frac{1}{e} \right], R = \frac{1}{e}$$



محصولات آموزشی مبثی ریاضی عمومی ۱:

لینک خرید فیلم مبثی " حد "

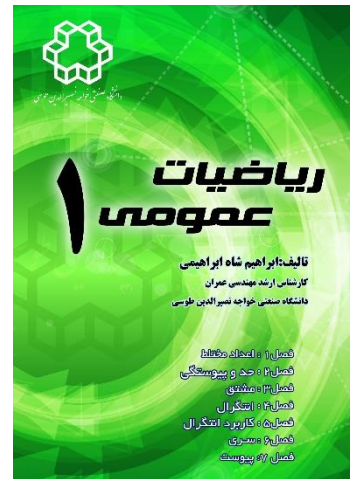
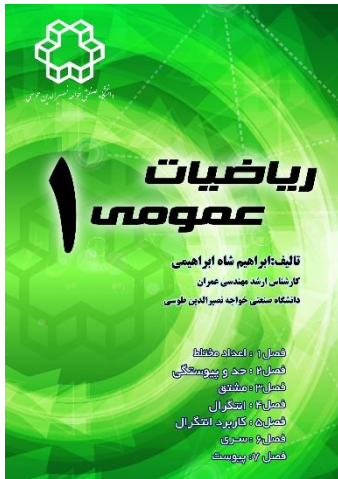
لینک خرید فیلم مبثی " مشتق "

لینک خرید فیلم مبثی " اعداد مختلط "

لینک خرید فیلم مبثی " انتگرال "

لینک خرید فیلم مبثی " کاربرد انتگرال "

لینک خرید فیلم مبثی " سری "



محصولات آموزشی مبثی ریاضی عمومی ۲:

لینک خرید فیلم مبثی " توابع برداری و رویه ها "

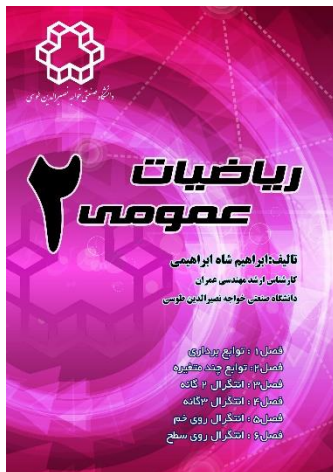
لینک خرید فیلم مبثی " توابع چندمتغیره "

لینک خرید فیلم مبثی " انتگرال دوگانه "

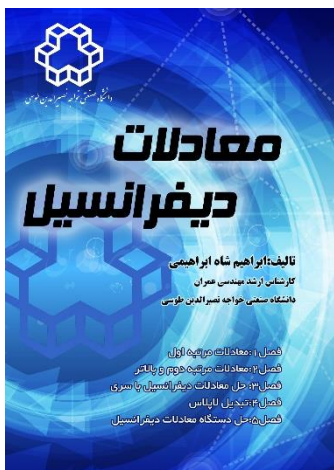
لینک خرید فیلم مبثی " انتگرال سه گانه "

لینک خرید فیلم مبثی " انتگرال روی خم "

لینک خرید فیلم مبثی " انتگرال روی سطح "



محصولات آموزشی مبحثی معادلات دیفرانسیل :



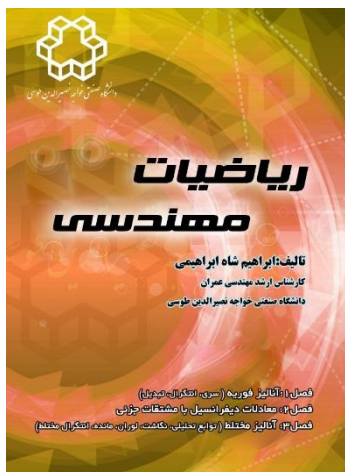
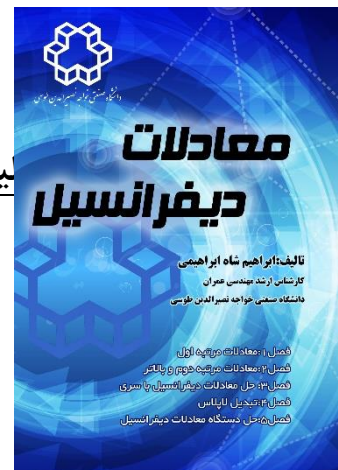
لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات مرتبه اول "

لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات مرتبه دوم و بالاتر "

لینک خرید فیلم مبحثی " سری "

لینک خرید فیلم مبحثی " لاپلاس "

لینک خرید فیلم مبحثی " حل دستگاه "

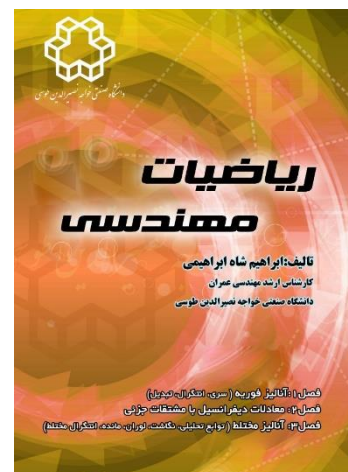


محصولات آموزشی مبحثی ریاضیات مهندسی :

لینک خرید فیلم مبحثی " آنالیز فوریه "

لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات PDE "

لینک خرید فیلم مبحثی " آنالیز مختلط "



پک کامل محصولات آموزشی:

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " ریاضی عمومی ۱ "

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " ریاضی عمومی ۲ "

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " معادلات دیفرانسیل "