مهندس مجید زارع

مروری بر مثلثات

Trigonometry

مقدمه :

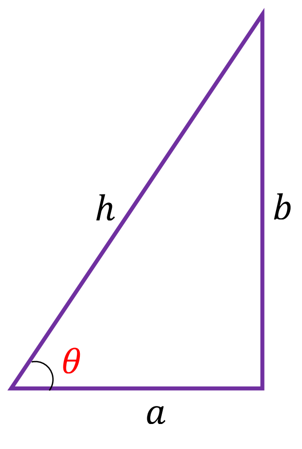
مثلثات یکی از شاخه‌های ریاضیات است که روابط میان طول اضلاع و زاویه‌های مثلث را مطالعه می‌کند. نخستین کاربرد مثلثات در مطالعات اخترشناسی بوده‌است. اکنون مثلثات کاربردهای زیادی در ریاضیات محض و کاربردی دارد.

بعضی از روش‌های بنیادی تحلیل، مانند تبدیل فوریه و معادلات موج، از توابع مثلثاتی برای توصیف رفتار تناوبی موجود در بسیاری از فرایندهای فیزیکی استفاده می‌کنند.

ساده‌ترین کاربرد مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه است. هر شکل هندسی دیگری را نیز می‌توان به مجموعه‌ای از مثلث‌های قائم‌الزاویه تبدیل کرد. شکل خاصی از مثلثات، مثلثات کروی است که برای مطالعه مثلثات روی سطوح کروی و منحنی به کار می‌رود.

تعریف توابع مثلثاتی با استفاده از مثلث قائم الزاویه :

برای تعریف توابع مثلثاتی از یک مثلث قائم الزاویه استفاده می کنیم به عنوان مثال می خواهیم این توابع را برای زاویه θ در شکل روبرو تعریف کنیم . همچنین می دانیم وتر ضلعی است که روبروی زاویه قائم قرار دارد که بلندترین ضلع مثلث نیز می باشد و با h نشان داده شده است .



توابع مثلثاتی برای زاویه‌های تند به صورت زیر تعریف می شوند :

سینوس (sines) **:**

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{h}$$

کسینوس (cosines) **:**

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{h}$$

تانژانت (tangent) **:**

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{a}$$

کتانژانت (cotangent) **:**

$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{a}{b}$$

سکانت (secant) **:**

$$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{h}{a}$$

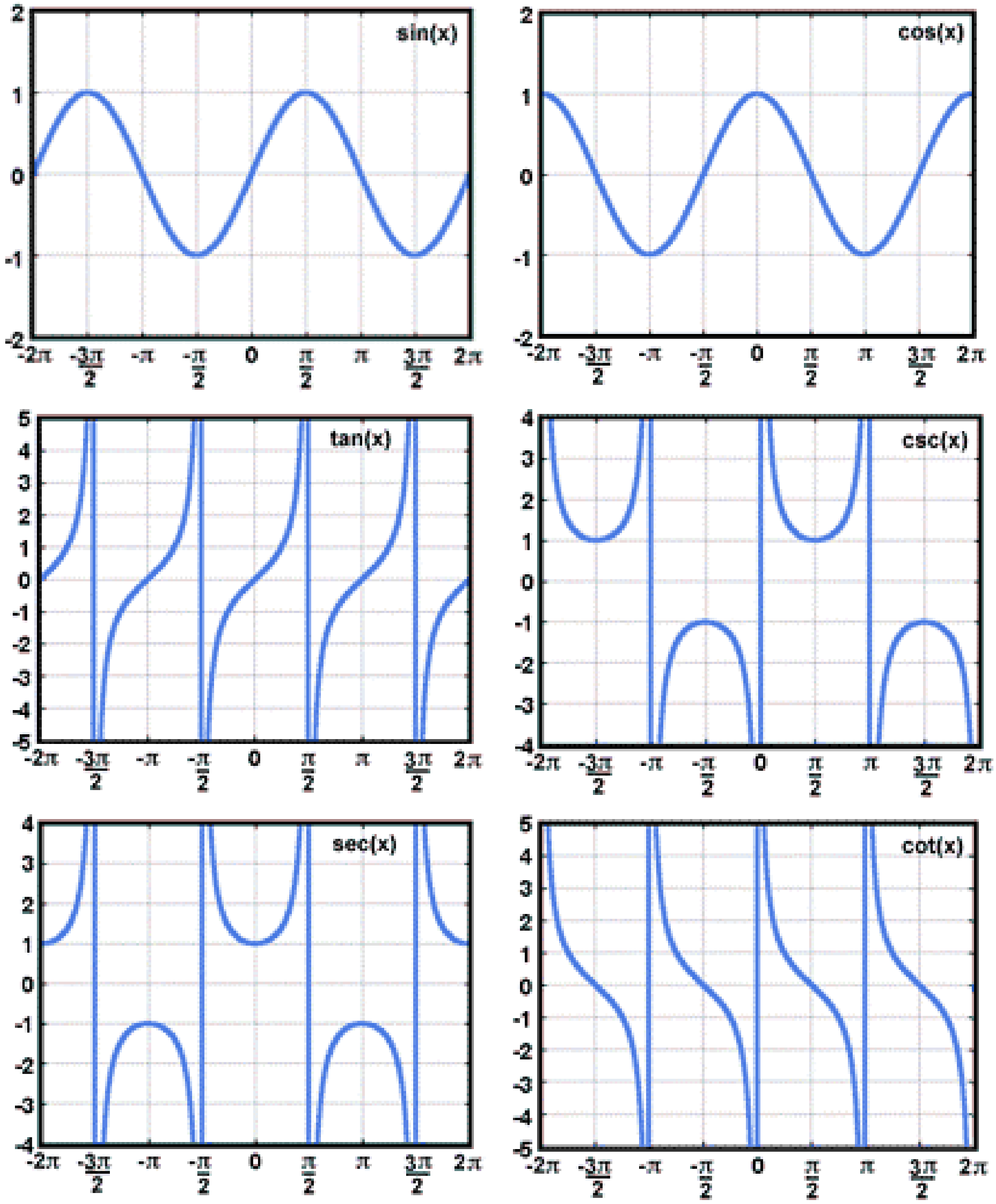
کسکانت (cosecant) **:**

$$\csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{h}{b}$$

از روابط فوق می توان نتیجه گرفت :

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$


sin(x)
cos(x)
tan(x)
csc(x)
sec(x)
cot(x)
-2π -3π/2 -π -π/2 0 π/2 π 3π/2 2π

یکاهای زاویه :

یکاهای گوناگونی برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که پراستفاده ترین آن‌ها رادیان و درجه است.

درجه : یکایی است که از گذشته دور مورد استفاده قرار گرفته‌است. مقدار این یکا با تقسیم‌بندی یک دایره به 360 قسمت مساوی به دست می‌آید. به بیان دیگر، یک درجه برابر با زاویه روبرو به کمانی است که اندازه آن، $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد.

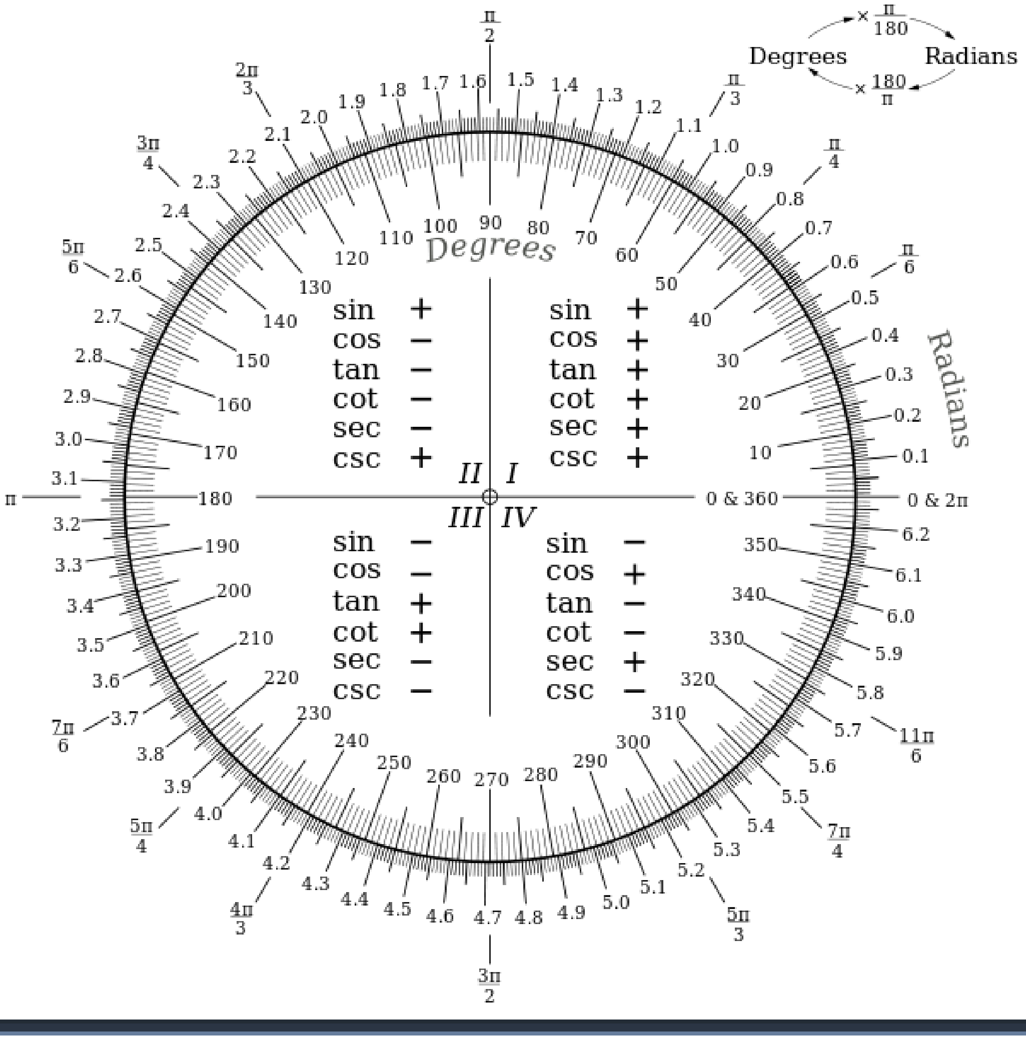
رادیان : یکای مورد استفاده در محاسبات مربوط به مثلثات است. یک رادیان برابر با زاویه روبرو به کمانی است که طول آن برابر با طول شعاع دایره متناظر باشد. طبق این تعریف، یک دایره کامل برابر 2π رادیان (6.2832 رادیان) است.

گراد : یک دایره کامل 400 گراد است. به بیان دیگر، گراد یک صدم ربع دایره است. کاربرد عمده گراد در محاسبات نقشه‌برداری است.

دور: یک دور معادل یک دایره کامل و برابر با 360 درجه یا 2π رادیان است.

از رابطه زیرمی توان مقادیر رادیان و درجه را به هم تبدیل کرد :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

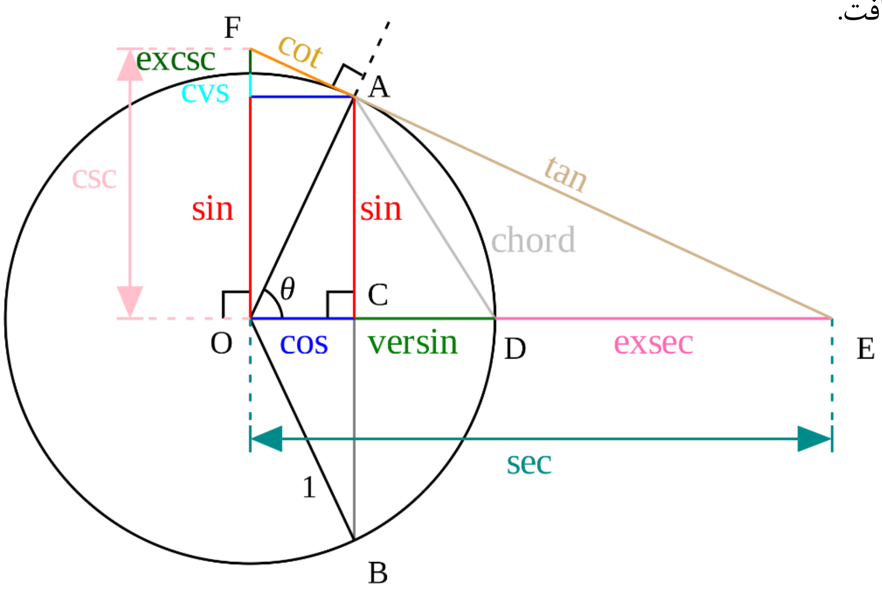


تعریف دایره مثلثاتی :

دایره ای به شعاع 1 و به مرکز مبدا مختصات ، که در آن جهت ساعتگرد جهت منفی و جهت پادساعتگرد جهت مثبت است ، در دایره مثلثاتی محور عمودی محور سینوس ها و محور افقی محور کسینوس ها می باشند .

تعریف توابع مثلثاتی با استفاده از دایره مثلثاتی :

برای زاویه‌های بزرگتر از 90 درجه می‌توان از مفهوم دایره مثلثاتی بهره گرفت. در دایره مثلثاتی، هر زاویه‌ای از 0 تا 360 درجه را می‌توان رسم کرد و توابع مثلثاتی آن را به دست آورد. همان گونه که در شکل زیر دیده می‌شود، توابع مثلثاتی برای زوایای بزرگتر از 90درجه را می‌توان به صورت تابعی از زاویه‌های کوچکتر از 90 درجه، یافت.



OA وتر مثلث بوده و از آنجا که شعاع دایره مثلثاتی برابر یک می باشد ، $OA = 1$ خواهد بود .

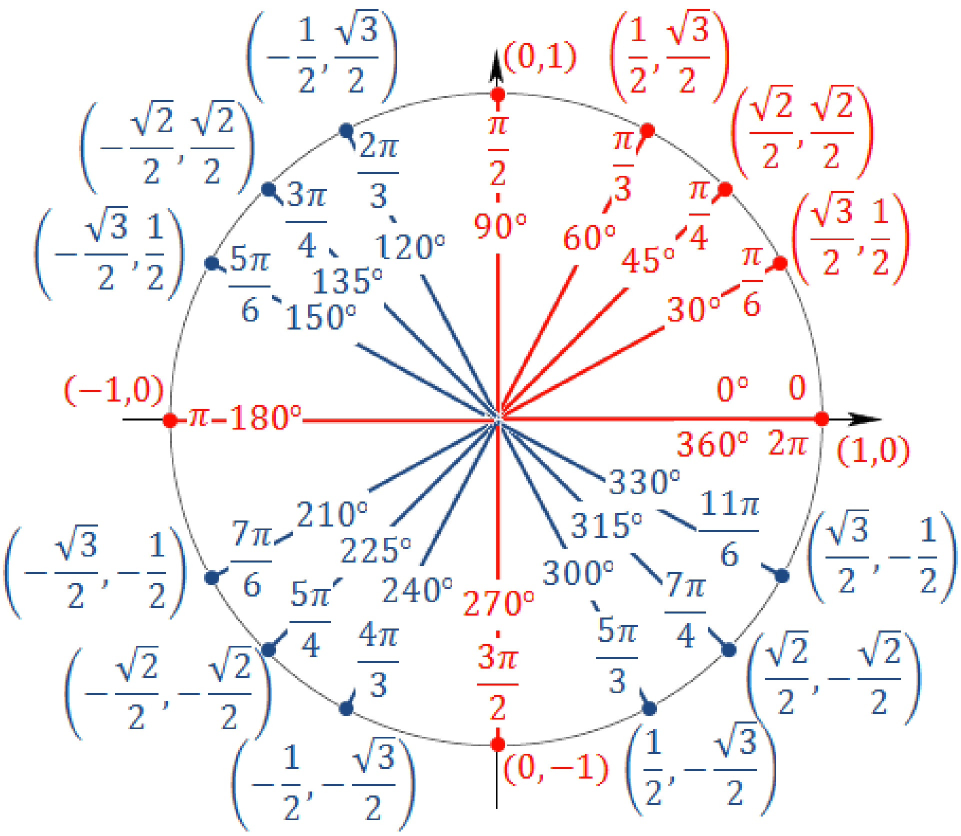
با توجه به شکل خواهیم داشت :

$$\sin\theta = \frac{AC}{OA} = AC \qquad \cos\theta = \frac{OC}{OA} = OC$$

همانگونه که مشاهده می شود ، مقادیر سینوس روی محور y ها، مقادیر کسینوس روی محور x ها نگاشت می شود .

مقدار توابع مثلثاتی برخی زوایای معروف :

θ	$0°$	$30°$	$37°$	$45°$	$53°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	0.6018	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.7986	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.7986	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.6018	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.7536	1	1.3270	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1.3270	1	0.7536	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	∞



روابط مربوط به کمان ها :

ربع چهارم
نسبت های مثلثاتی $-\theta$ بر حسب θ

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
$\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$

ربع چهارم
نسبت های مثلثاتی $2\pi-\theta$ بر حسب θ

$\sin(2\pi-\theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(2\pi-\theta) = \cos(\theta)$
$\tan(2\pi-\theta) = -\tan(\theta)$
$\cot(2\pi-\theta) = -\cot(\theta)$

ربع چهارم
نسبت های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$ بر حسب θ

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = -\cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin(\theta)$
$\tan\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp -\cot(\theta)$

ربع اول
نسبت های مثلثاتی $2\pi + \theta$ بر حسب θ

$\sin(2\pi + \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta)$
$\tan(2\pi + \theta) = \tan(\theta)$
$\cot(2\pi + \theta) = \cot(\theta)$

ربع دوم
نسبت های مثلثاتی $\pi - \theta$ بر حسب θ

$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$
$\cot(\pi - \theta) = -\cot(\theta)$

ربع دوم
نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} + \theta$ بر حسب θ

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot(\theta)$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan(\theta)$

ربع سوم
نسبت های مثلثاتی $\pi + \theta$ بر حسب θ

$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$
$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$
$\cot(\pi + \theta) = \cot(\theta)$

ربع اول
نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} - \theta$ بر حسب θ

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot(\theta)$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan(\theta)$

اتحادهای مثلثاتی :

قضیه فیثاغورس :

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Longrightarrow \begin{cases}\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}\end{cases}$$

جمع و تفاضل دو زاویه :

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)\mp1}{\cot(\alpha)\pm\cot(\beta)}$$

زاویه دو برابر :

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cot(2\theta)=\frac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}$$

زاویه سه برابر :

$$\sin(3\theta)=-\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$$

$$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\cot(3\theta)=\frac{3\cot\theta-\cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta}$$

نصف کمان :

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}$$

تبدیل ضرب به جمع :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{-1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

تبدیل جمع به ضرب :

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

جمع سینوس و کسینوس یک زاویه :

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

سایر اتحادهای پرکاربرد :

$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$

$$\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$$

$$\tan^{-1}\alpha \pm \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}$$

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

$$\frac{1}{cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$\frac{1}{sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$$

لحظه ای درنگ !

نیکوس کازانتزاکیس (نویسنده زوربای یونانی) تعریف می کند که در کودکی, پیله ابریشمی را روی درختی می یابد, درست زمانی که پروانه خود را آماده می کند تا از پیله خارج شود کمی منتظر می ماند, اما سرانجام – چون خروج پروانه طول میکشد– تصمیم میگیرد به این فرایند شتاب ببخشد.

با حرارت دهانش پیله را گرم می کند تا اینکه پروانه خروج خود را آغاز می کند. اما بال هایش هنوز بسته هستند و کمی بعد می میرد.

کازانتزاکیس میگوید:

بلوغی صبورانه با یاری خورشید لازم بود,

اما من انتظار کشیدن نمی دانستم..... .

آن جنازه کوچک تا به امروز, یکی از سنگین ترین بارها بر روی وجدانم بوده اما همان جنازه باعث شد بفهمم که یک گناه کبیره واقعی وجود دارد:

"فشار آوردن بر قوانین بزرگ کیهان"

بردباری لازم است و نیز انتظار زمان موعود را کشیدن, و با اعتماد راهی را دنبال کردن که خداوند برای ما برگزیده است....

برگرفته از کتاب دومین مکتوب اثر پائولوکوئیلو