اصل استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی، یکی از اصول مهمی است که در مورد اعداد طبیعی از آن استفاده می کنیم. منظور ما در این درس از مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ است. البته معمولاً ۰ را هم به این مجموعه اضافه می کنند. در مورد مباحث این درس این وضعیت تفاوت عمده‌ای ایجاد نمی کند.

① اصل استقرای ریاضی:

فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد که دو ادعای زیر در مورد آن برقرارند:

۱) $P(1)$ درست است

۲) به ازای هر عدد طبیعی k، اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+1)$ نیز درست است.

در اینصورت، به ازای هر عدد طبیعی n، $P(n)$ درست است.

② **مثال**: ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل: $n=1$: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ که برقرار است.

$n=k+1$:

$$\overbrace{1+2+\dots+k}+k+1 = \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

③ **مثال**:

$$1+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: $n=1$؛

$$1 = \frac{1}{6}\,1\,(1+1)(2+1)$$

$n=k+1$:

$$1+2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left[2k^2+7k+6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

④ **نکته**: نقطه شروع استقرا را می توان عوض کرد.

⑤ مثال . به ازای هر $n \geq 5$ ، داریم $2^n > n^2$

حل : $n = 5$: $2^5 = 32$ $5^2 = 25$

$n = k+1$

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2 \times k^2 = (k+1)^2 + \underbrace{(k-1)^2 - 2}_{>0} > (k+1)^2$$

⑥ نکته . استقرای ریاضی به شکل زیر هم معتبر است و آن را استقرای قوی ریاضی می‌نامیم .

فرض کنید دو خاصیت زیر در مورد حکم $P(n)$ برقرار باشند :

1) $P(1)$ درست است

2) از درستی $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ نتیجه می‌شود .

در این صورت ، به ازای هر n داریم $P(n)$ درست است .

⑦ تذکر . در اصل استقرای قوی ریاضی هم می‌توان پایه را عوض کرد .

⑧ مثال . به ازای هر $n \geq 2$ ، n را می‌توان به حاصلضرب اعداد اول تجزیه کرد .

حل : $n = 2$: واضح است .

$n = k+1$: فرض می‌کنیم که حکم به ازای هر عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی k برقرار باشد . اگر $k+1$ اول باشد ، که حکم برقرار است . در غیر اینصورت m و l موجودند به طوری که $k+1 = m \cdot l$ جائیکه $1 < m, l < k+1$. بنا به فرض استقراء ، m و l را می‌توان بصورت حاصلضرب اعداد اول نوشت ، پس $k+1$ را نیز می‌توان نوشت .

⑨ تعریف‌های استقرایی (بازگشتی)

فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد . اگر دو شرط زیر برقرار باشد ، آنگاه به ازای هر n ، a_n کاملاً معین است :

① a_1 داده شده است .

② a_{n+1} برحسب a_n داده شده است .

⑩ **مثال**. دنبالهٔ $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 5a_n + 2 \end{cases}$ یک دنبالهٔ خوش تعریف است (به ازای هر n، a_n مقدار یکتایی دارد)

⑪ **مثال**. فرض کنید به ازای هر n، مفهوم تالی n، $S(n)$، معلوم باشد. در این صورت می‌توان جمع و ضرب و توان اعداد طبیعی را به شکل زیر تعریف کرد:

به ازای هر n:

$$\begin{cases} m+1 = S(n) \\ m+S(n) = S(m+n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\cdot 1 = m \\ m\cdot S(n) = m\cdot n + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^1 = m \\ m^{n+1} = m^n \cdot m \end{cases}$$

⑫ **مثال**. تعریفِ $C(n,r)$ با بازگشت روی n

$$\begin{cases} C(0,0)=1 \quad \text{و} \quad C(0,r)=0 \quad \text{به ازای هر } r\neq 0 \\ C(n,r) = C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \end{cases}$$

⑬ **تمرین**. به ازای هر $0 \leq r \leq n$ داریم

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

⑭ **تمرین**. <u>قضیه دوجمله‌ای</u>. به ازای اعداد حقیقی x, y و عدد طبیعی n داریم

$$(x+y)^n = C(n,0)\,x^n + C(n,1)\,x^{n-1}y + \cdots + C(n,r)\,x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)\,y^n$$

تذکر. می‌توان ثابت کرد که اصل استقرای ریاضی، همهٔ شکل‌های دیگر گفته شده از این اصل همچنین موجه بودن تعاریفِ بازگشتی را اثبات می‌کند.

مفاهیم مقدماتی وجود و مجموعه‌ها

تذکر ① مفهوم مجموعه را بطور شهودی داده شده فرض می‌کنیم. در درس های پیشرفته‌تر، مفهوم مجموعه به کمک ارائه اصولی در مورد آن، معرفی می‌شود.

② بعداً خواهیم دید که مفهوم مجموعه جهانی که شامل همهٔ مجموعه‌ها باشد به تناقض منجر می‌شود و پذیرفتنی نیست. اما برای سهولت بحث در این درس فرض می‌شود که مجموعه‌ای چون U وجود دارد که آنرا مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و شامل همهٔ مجموعه‌های مورد بحث ما است.

③ از خلاصه نویسی های منطقی تا آنجا که ممکن باشد (ولی نه بیشتر!) استفاده خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنید A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند.

۱) $A \subseteq B$ هرگاه به ازای هر x (در U) اگر $x \in A$، آنگاه $x \in B$

$$\forall x \quad (x \in A \rightarrow x \in B)$$

۲) $A = B$ هرگاه به ازای هر x، $x \in A$ اگر و تنها اگر $x \in B$

قضیه. ① $A=B$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

② اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$

تعریف. $\emptyset$ (مجموعهٔ تهی) مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد: $\forall x \quad x \notin \emptyset$

قضیه. $\emptyset \subseteq A$ به ازای هر مجموعهٔ A.

اثبات: به ازای هر x، $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ به انتفای مقدم درست است.

تذکر. مجموعه‌ها را به شیوه های مختلف می‌توان ارائه کرد، مثلاً

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\{1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 3\}$$

تذکر. مجموعهٔ $\emptyset$ فاقد هر عضو و مجموعهٔ $\{\{\emptyset\}\}$ دارای یک عضو است.

تعریف (مجموعه توانی) . به ازای هر مجموعه A ، مجموعه توانی A که با $P(A)$ نشان می دهیم مجموعه ای است که متشکل از همه زیر مجموعه های A

$$P(A)=\{B: B\subseteq A\}$$

تعریف (اجتماع واشتراک وتفاضل مجموعه ها)

$$A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}$$

$$A-B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$$

خواص مقدماتی اجتماع واشتراک وتفاضل در بخش های ۳ و ۴ کتاب آمده اند.

تمرین .

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$$

حل . به ازای هر x داریم

$$x\in (A\cup B)-(A\cap B)\equiv$$

$$x\in(A\cup B)\wedge x\notin(A\cap B)\equiv$$

$$(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\equiv$$

$$[(x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin A]\vee[(x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin B]\equiv$$

$$[\underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}_{C}\vee(x\in B\wedge x\notin A)]\vee[(x\in A\wedge x\notin B)\vee\underbrace{(x\in B\wedge x\notin B)}_{C}]\equiv$$

$$(x\in B\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\equiv$$

$$x\in(B-A)\vee x\in(A-B)\equiv$$

$$x\in(A-B)\cup(B-A)$$

تمرین . درستی یا نادرستی احکام زیر را در حالت کلی بررسی کنید .

① $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

② $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

خلاصه حل . ① نادرست است ، زیرا اگر $X\subseteq A\cup B$ باشد ، لزومی ندارد که $X\subseteq A$ یا $X\subseteq B$
برای مثال ، قرار دهید $A=\{1,2\}$ و $B=\{2,3\}$. در اینصورت $\{1,3\}\in P(A\cup B)$ ولی $\{1,3\}\notin P(A)\cup P(B)$ (توجه کنید که $\supseteq$ برقرار است)

② درست است ، به ازای هر مجموعه X $\quad X\subseteq A\cap B \Leftrightarrow X\subseteq A\wedge X\subseteq B$