تمرینات مروری فصل ۳

۱)

$$f(x)=x^3+5x+4$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+5(x+h)+4-x^3-5x-4}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3h^2x+h^3+5h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}3x^2+3hx+h^2+5 \qquad f'(x)=3x^2+5$$

۲) مشتق در نقطه a $\quad f(x)=\dfrac{4-x}{3+x}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{4-x}{3+x}-\dfrac{4-a}{3+a}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{7(a-x)}{(3+x)(3+a)}}{(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-7}{(3+x)(3+a)}=\frac{-7}{(3+a)^2} \qquad f'(x)=\frac{-7}{(3+x)^2}$$

۳)

$$f(x)=\sqrt{3-5x} \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3-5a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-5}{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3-5a}}$$

$$=\frac{-5}{2\sqrt{3-5a}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-5}{2\sqrt{3-5x}}$$

۴)

$$f(x)=x\sin x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cosh+\cos x\sinh)-x\sin x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x\cosh+x\cos x\sinh+h\sin x\cosh+h\cos x\sinh-x\sinh}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x+xh\cos x+h\sin x+2h\cos x-x\sin x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}x\cos x+\sin x+h\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=x\cos x+\sin x$$

۵)

$$y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$$

$$y'=-\sin 2x(\sec^2 x)\cos(\sin x)+(-\sin 2x\sin(\sin 2x))\sin(\sec^2 x)$$

$$y'=2\sin x\cdot\cos(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)-2\sin x\cdot\sin(\sin 2x)\cdot\sin(\cos^2 x)$$

$$y'=(\cos^2 x)'\cos(\cos^2 x)\times\cos(\sin^2 x)-(\sin^2 x)'\sin(\sin 2x)$$

$$y'=-\sin 2x(\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)+\sin(\sin^2 x)\sin(\cos^2 x))$$

۶)

$$y=\sin\left[\cos^2(\tan^2 x)\right]$$

$$y'=\left[2(1+\tan^2 x)\tan x\right]2\left[(-\sin x)(\cos x)\right]\cos\left[\cos^2(\tan^2 x)\right]$$

$$y'=\left[4(1+\tan^2 x)\tan x(-\sin x)(\cos x)\right]\cos\left[\cos^2(\tan^2 x)\right]$$

۷)

$$y'=Arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{(1+x^2)(2\sqrt{\frac{x}{1+x}})}+\frac{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x-\sqrt{x}})(1+x-\sqrt{x})}$$

۸)

$$y' = \sin 2x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x))$$

(۹

$$y' = \frac{\frac{2\sin 2x}{1-\sin 2x}}{1+(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})^2}$$

(۱۰

$$y' = f(\frac{1-x^2}{1+x^2}) - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \quad f'(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

(۱۱

$$y' = \frac{2x\cos x^2}{\sqrt{1-\sin^4 x^2}} - \frac{+2x\cos x^2}{\sqrt{1-\cos^2 x^2}}$$

(۱۲

$$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}$$
$$y = \sqrt{x+y} \Rightarrow y^2 = x+y$$
$$\Rightarrow y^2 - y - x = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2y-1}$$
$$2yy' - y' - 1 = 0 \quad y'(2y-1) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y-1}$$

راه حل دوم

$$y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{6}} + \cdots + x^{\frac{1}{2n}}$$
$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad x^{\frac{-2n-1}{2n}}$$

$a > b \geq 0$ (۱۳

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}(1+\tan^2\frac{x}{2})}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}$$

(۱۴

$$y' = -\sin\omega t + \frac{\sin\omega t}{\cos^2\omega t}\cos(\cos\omega t + \sec\omega t)$$

راه حل دوم

$$y = \sin(\cos\omega t + \sec\omega t) \Rightarrow \sin u = u'\cos u$$
$$y' = (\cos\omega t + \sec\omega t)'\cos(\cos\omega t + \sec\omega t)$$

$$y' = \omega(-\sin\omega t + \frac{\sin\omega t}{\cos\omega t})\cos(\cos\omega t + \sec\omega t)$$

(۱۵

$$x = Arc\sin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$y = Arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$y'_t = -\frac{1}{1+t^2} \quad x'_t = \frac{1}{1+t^2}$$
$$\frac{-x't}{yt} = 1 \quad y' = \frac{1}{1+t^2}$$

(۱۶

$$y' = \frac{\frac{-4x^2 Arc\cos(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}}{Arc(\cos^2(x^2))^2}$$

راه حل دوم $y = \frac{1}{Arc\cos^2 x^2} \rightarrow$

$$y' = \frac{-2x\times\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}\times Arc\cos x^2}{Arc\cos^4 x^2}$$

(۱۷

$$y' = 1 - \frac{1}{|x|\sqrt{x^2}} + (1+\cot^2 x)\cdot(\cot^2(\cos x+\cot x))$$

(۱۸

$$y' = 2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x) - \frac{6x\sin^2 x^2\cos^2 x}{\sin x^2}$$

(۱۹

$$y' = \frac{(x^2-1)(\frac{1}{x^2}) - 2xArc\cos(\frac{1}{m})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$
$$\times\frac{Arc\cos(\frac{1}{m})^{\frac{m-1}{m}}}{(x^2-1)}$$

(۲۰

$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{2x^2}}$$

۲۱)

$$y' = ma(ax+b)^{m-1} \times (Arc\cos\sqrt{x})^{x} + (ax+b)^{m}(-b) \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}(Arc\sin\sqrt{x})^{-x-1}$$

۲۲)

$$y' = -\frac{15x^{4}}{|13x^{5}|\sqrt{-1+9x^{10}}} \qquad |x|>1$$

۲۳)

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}\cos$$

۲۴)

$$f'(x) = 2x(g(x)) + x^{2}g'(x)$$

۲۵)

$$f(x) = g(x^{2}) \Rightarrow f'(x) = 2xg'(x^{2})$$

۲۶)

$$f(x) = [g(x)]^{2} \Rightarrow f'(x) = 2g'(x)g(x)$$

۲۷)

$$f(x) = x^{a}g(x^{b})$$

$$f'(x) = ax^{a-1}g(x^{b}) + x^{a} \times b \times x^{b-1} \times g'(x^{b})$$

۲۸)

$$f(x) = g(g(x))$$

$$f'(x) = g'(x)g'(g(x))$$

۲۹)

$$f(x) = g(\tan\sqrt{x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^{2}\sqrt{x})g'(\tan\sqrt{x})$$

۳۰)

$$h'(x) = \frac{g'(x)f^{2}(x) + f'(x)g^{2}(x)}{(f(x)+g(x))^{2}}$$

۳۱)

$$h'(x) = \frac{\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}}{2\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}}$$

۳۲)

$$h'(x) = \overline{4\cos 4x \cdot g'\sin 4x \cdot f'(g(\sin(4x)))}$$

۳۳)

$$y' = \frac{(1+\sin x)\sin(x-\cos x)}{\cos^{2}(x-\cos x)}$$

۳۴)

$$y' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}}{1+(x+\sqrt{x^{2}+1})^{2}}$$

۳۵)

$$f(x) = \sin(Arc(\sin x))$$

$$g(x) = Arc\sin(\sin x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\cdot\cos(Arc\sin x)$$

$$g' = \frac{\cos x}{|\cos x|} \qquad f' \neq g'$$

۳۶)

$$f'(\tan x) = \frac{1}{2}\tan 2x$$

$$y = f(\sin x) \Rightarrow y' = \cos x f'(\sin x)$$

$$y' = \frac{\cos x\sin x}{\cos^{2}x} = \tan x$$

۳۷)

$$f'(x) = \frac{\frac{4x}{(1+x^{2})^{2}}}{\sqrt{1-(\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}})}}$$

۳۸)

$$y = \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^{2}}} \qquad (1-x^{2})y' - xy = 1$$

$$y' = \frac{1+\frac{xArc\sin x}{\sqrt{1-x^{2}}}}{1-x^{2}} \Rightarrow$$

$$1+\frac{xArc\sin x}{\sqrt{1-x^{2}}} - \frac{xArc\sin x}{\sqrt{1-x^{2}}} = 1$$

۳۹)

$$f(x) = x^{3} + x - 2 \qquad f\Big|_{0}^{1} \qquad f^{-1}\Big|_{1}^{0}$$

$$f'(x) = 3x^{2} + 1 \qquad f'(1) = 4$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{4} \qquad y-1=\frac{1}{4}x$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+1$$

(۴۰

$$g(x)=\sqrt{9-x^2} \qquad h(x)=f(g(x))$$
$$g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \begin{cases} g'(0)=0 \\ g(0)=3 \end{cases}$$
$$h'(x)=g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow h'(0)=0\times f'(3)=0$$

(۴۱

$$g(x)=\begin{cases} -1-2x & -x>-1 \\ x^2 & -1\le x\le 1 \\ x & x>1 \end{cases}$$
$$g'(x)=\begin{cases} -2 & x<-1 \\ 2x & -1\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

(۴۲

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
$$\underset{x\ge 0}{f'(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin x}{x}}{x} \Rightarrow \underset{x<0}{\lim_{x\to 0}} = \frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$
پس $f'(0)^- = f(0)^+$ مشتق‌پذیر است.

(۴۳

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\dfrac{\sin}{x}-\sin\dfrac{1}{x} \\ f'(0)=1 \end{cases}$$

(۴۴

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x^h & x>0 \end{cases}$$
$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ nx^{n-1} & x>0 \end{cases}$$
شرط لازم مشتق‌پذیری به پیوستگی است $n>0$

$n>1 \leftarrow$ به ازای این مقدار تابع مشتق‌پذیر است.

(۴۵

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x\,Arc\tan\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases}$$
$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ Arc\tan\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x(1+\frac{1}{x^2})} & x\neq 0 \end{cases}$$
$f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

(۴۶

الف) $f(x)=\begin{cases} x\sin x & x\ge 0 \\ x\sin x & x<0 \end{cases} \Rightarrow$

$$f'(x)\begin{cases} \sin x+x\cos x \\ -\sin x-x\cos x \end{cases}$$
پس مشتق‌پذیر است $f'(0)^- = f'(0)^+ = f'(0)=0$

ب) $x\sin x \Rightarrow f'(x)=\sin x+x\cos x$

پس مشتق‌پذیر است $f'(0)^- = f'(0)^+ = f'(0)=3$

ج) $y=\sqrt[3]{x}(1-\cos x)$

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(1-\cos x)+\sin x\sqrt[3]{x}$$
پس مشتق‌پذیر است $f'(0)^+ = f'(0)^- = f'(0)$

(۴۷

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

$$\frac{xf(x_1)-x_1f(x)}{x-x_1}=f(x)-xf'(x)$$

$$x_1f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{x_1f(x)-x_1f(x_1)}{x-x_1}$$

$$f'(x_1)=\lim\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

$$f(x_1)=x_1f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}f(x_1)-\frac{x_1f(x)-x_1f(x_1)}{x-x_1}$$

$$f(x_1)-x_1\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right)=\frac{xf(x_1)-x_1f(x)}{x-x_1}$$

پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده کردن به عبارت خواسته شده می‌رسیم.

۴۸)

$$g(x)=\left|x^2-4\right|-\left|x^2-9\right|$$

$$g(x)=\begin{cases}5 & x<-3 \\ & x>3 \\ -5 & -2<x<2 \\ & -3<x<-3 \\ 2x^2-13 & 3<x<2\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}0 & x>+3 \\ & x<-3 \\ 0 & -2<x<2 \\ & -3<x<-2 \\ 4x & 3<x<2\end{cases}$$

۴۹)

$$f(x)=\left|x^2-6\right|+\left|x+8\right|$$

$$h(x)=\left|x^2-6\left|x\right|+\varepsilon\right|$$

تابع زوج $\left\{\left|x^2-6x+\delta\right|\ \ x>0\right.$

۵۰) ریشه داخل قدرمطلق است و تابع مشتق‌پذیر نیست زیرا این نقاط زاویه‌دار هستند و تابع پیوسته نیست.

۵۱)

$$y=\left|x-1\right|+\left|x+2\right|$$

در همه نقاط به جزء ۲- و ۱

۵۲)

$$x^3+y^3=1$$

$$3x^2+3y^2y'=0\Rightarrow y'=\frac{-x^2}{y^2}$$

$$6x+6yy'+3y^2y''\Rightarrow$$

$$y''=\frac{-6(x+yy'^2)}{3y^2}=\frac{2}{y^2}\left(x+\frac{x^2}{x^3}\right)$$

۵۳)

$$x^2+6xy+y^2=8$$

$$2x+6y+6xy'+2yy'=0$$

$$y'=-\frac{(x+36)}{3x+y}$$

$$2+6y'+6y''x+2y'+2yy''=0$$

با جایگذاری y'', y' بدست می‌آید.

۵۴)

$$y=\begin{cases}\sin x & x<\pi \\ mx+b & x\ge\pi\end{cases}$$

$$m\pi+b=0\Rightarrow \begin{matrix} b=-m\pi \\ m=\dfrac{-b}{\pi}\end{matrix}$$

$$y'=\begin{cases}\cos x & x<\pi \\ m & x\ge\pi\end{cases}$$

$$m=-1 \qquad b=+\pi$$

۵۵)

$$f(x)=\left|x\right|$$

$$f(x)=\sqrt{x^2}=\left|x\right|$$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\left|x\right|}$$

$$D_f=R-\{0\}$$

۵۶)

$$f(x)=|x|$$
$$g(x)=-|x|$$
$$(f+g)(x)=|x|-|x|=0$$

مشتق این تابع در تمام نقاط صفر است

۵۷)

$$f(x)=(x-1)[x] \quad [0,2]$$
$$f'(1)^-=0 \qquad f'(1)^+=1$$
$f'(1)=$ وجود ندارد

۵۸)

$$y=(x-a)[x] \qquad y'=[x]$$
$$f'(a)^-=a-1$$
$$f'(a)^+=a$$
$$f'(a)^-+1=f'(a)^+$$

۵۹)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x) \;\; f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$
$$f'(0)^+=\lim\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-0}{x}=+\infty$$
$$f'(0)^-=\lim\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{0}=+\infty$$

ب)

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=0$$

۶۰)

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}$$
$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$f(g(x_0))'=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}\times g(x_0)$$

پس این تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۶۱)

$$f(b)\cdot f(a+b)=f(a)$$

۶۳)

الف) $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$
$$(h(fg))=(fg)'h+h'(fg)$$
$$(fg)'=f'g+g'(f)$$
$$\Rightarrow (h(fg))'=f'gh+g'fh+g'fh'$$

ب) با استفاده از فرمول مشتق قابل حل است.

۶۴)

$$x_{mAB}=\frac{x}{2}$$
$$xy=c \qquad y=\frac{c}{x}$$
$$y'=\frac{-c}{x^2} \quad \leftarrow \text{شیب}$$
$$y_{mAB}=\frac{y}{2}$$
$$y-\frac{c}{x_0}=\frac{-c}{x_0^2}(x-x_0)$$
$$\Rightarrow y=\frac{c}{x_0}\left(\frac{-x}{x_0}+2\right)$$
$$A\left|\begin{matrix}2x_0\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\ \frac{2c}{x_0}\end{matrix}\right.$$
$$x_{mAB}=x_0 \qquad y_{mAB}=\frac{c}{x} \qquad M_{AB}\left|\begin{matrix}x_0\\ \frac{c}{x_0}\end{matrix}\right.$$

۶۵)

$$F=\frac{f}{g}$$
$$F'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$
$$f=Fg\rightarrow f'=F'g+g'F$$

۶۶) ممکن است درست باشد زیرا پیوستگی شرط لازم مشتق‌پذیری می‌باشد. مانند $y=|x|$ که در صفر پیوسته است اما مشتق ندارد.

۶۷) درست است از فرمول مشتق‌پذیری استفاده شده

۶۸) غلط است

۶۹) غلط است

۷۰) غلط است

$$\frac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \frac{f'(x)}{۲\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow \text{زیرا} = \frac{f'(\sqrt{x})}{۲\sqrt{f(x)}}$$

پس درست نیست

۷۱)

$$\frac{d}{dx}\left| x^۲ + x \right| = \frac{۲x+۱}{\left| x^۲ + x \right|}$$

$$\text{زیرا} = \frac{(۲x+۱)(x^۲+x)}{\left| x^۲ + x \right|}$$

غلط است

۷۲) درست است

۷۳)

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a) - f(a-\Delta x) - f(a)}{۲\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(a)\right]}{\Delta x} + \frac{f(a\Delta x) + f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

درست است

۷۴)

$$y = ۳x + ۸x^۲ - x^۳ \qquad y' = ۳ + ۱۶x - ۳x^۲$$

$$y'(۱۰) = -۱۳۷ \qquad y(۱۰) = -۱۷۰ \qquad y(۱۸) = -۳۳$$

$$\text{تعداد قاب‌های رنگ کرده} = \frac{-۳۳ + ۱۷۰}{۱} = ۱۳۷$$

۷۵)

الف) $y = \left| x^۲ - ۹ \right| \qquad x = \pm ۳$

$$y' = \begin{cases} ۲x & x > ۳ \text{ یا } x < -۳ \\ -۲x & -۳ < x < ۳ \\ ۰ & x = -۳,۳ \end{cases}$$

در همه مقادیر به جزء $x = ۱, -۳$ مشتق‌پذیر است

۷۶)

$$dv = ۸\frac{m^۳}{\min} \qquad r = ۲ \qquad dr = ?$$

$$v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow dv = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ dr$$

$$\Rightarrow ۸ - ۴\pi ۴ dr$$

$$dv = \frac{۱}{۲\pi}$$

۷۷)

$$pv - c = ۰$$

$$\frac{dv}{dp} = \frac{-p}{v} \Rightarrow \frac{۳}{dp} = \frac{-۳۰۰۰}{۵}$$

$$\Rightarrow dp = \frac{-۱}{۲۰۰}$$

۷۸)

$$pv^{\frac{۱}{۴}} - c = ۰ \qquad \frac{dv}{dp} = \frac{-p}{v^{\frac{۱}{۴}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{۸} = \frac{-۴۰}{v^{\frac{۱}{۴}}} \Rightarrow \frac{dv}{۸} = \frac{۱۶۰۰}{c}$$

$$dv = \frac{-۱۲۸۰۰}{c} \text{ در حال کاهش}$$

$$۴۰\sqrt[۴]{v} = c \Rightarrow \sqrt[۴]{v} = \frac{c}{۴۰}$$

$$\Rightarrow v = (\frac{c}{۴۰})^۴$$

۷۹)

$$T = ۰/۱(۴۰۰ - ۴۰t + t^۲)$$

$$T = ۴۰ - ۴t + ۰/۱t^۲$$

$$T' = -۴ + ۰/۲t$$

الف) $T(۵) = ۲۲/۵ \qquad T(۶) = ۱۹/۶$

$$T(۶) - T(۵) = ۲/۹$$

$$T = ۰/۱(۴۰۰ - ۴۰t + t^۲) \qquad ۰ \le t \le ۲$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(۶) - T(۵)}{۶-۵} = -۲/۹$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{dT}{dt} = ۰/۱(-۴۰ + ۲t) \rightarrow$$

$$y\,\big|(-۴۰ + ۱۰) = -۳$$

۸۲)

$$۲r = h \rightarrow ۳ = \frac{h}{۲}, v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{\pi}{۱۲} h^{۳}$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{۳}{۱۲}\pi h^{۲}, h = ۱۰ \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{۱}{۴}\pi (۱۰)^{۲} = ۲۵\pi$$

۸۴)

الف) $v = \pi r^{۲} \frac{h}{۳}$

$$dv = \pi \frac{r^{۳}}{۳} dx$$

ب) $h = \cot ons$ ثابت

$$v = \pi r^{۲} \frac{h}{۳} \Rightarrow dv = \frac{h\pi}{۳}(۲rdr) \quad dv = \frac{۲}{۳} h \pi r dr$$

۸۷)

$$F(x) = [g(x)]^{r} [h(x)]^{s}$$
$$g(x) = j(x) \cdot i(x)$$
$$f'(x) = v[g(x)]^{r-۱}[g(x)] \times [h(x)]^{s}$$
$$+ [g(x)]^{r} \times S[h(x)]^{s-۱}[h(x)]$$

۹۳)

$$h = fog \rightarrow h' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'og \cdot g(x),$$

$$h'' = (h')' = (f'og \cdot g(x))' =$$
$$g'(x) \cdot f'og + g(x) \cdot (f'og)'$$

۹۴)

$$f(x) = \sqrt{۲ + \cos x}, f'(x) = \frac{-\sin x}{۲\sqrt{۲ - \cos x}},$$

$$f'' = \frac{-\cos x(۲ \times \sqrt{۲ + \cos x}) + \sin x \times \frac{-۲\sin x}{۲\sqrt{۲ + \cos x}}}{(۲\sqrt{۲ + \cos x})^{۲}}$$

$$f''(\pi) = \frac{۱}{۲}$$

۹۶)

$$d = \frac{۱}{l} \times \frac{dl}{dt} \quad dt = \frac{dl}{l\alpha} \quad v = l^{۳} \quad dv = ۳l^{۲} dl$$

$$\beta = \frac{۱}{v} \times \frac{dv}{dt} \qquad \beta = \frac{۱}{v}(\frac{dv}{dl} l\alpha) \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{dv}{v} \times \frac{l}{dl} \times \alpha \Rightarrow \beta = \frac{۳l^{۲}}{l^{۳}} \times l \times \alpha \Rightarrow \beta = ۳\alpha$$

۹۷)

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} & x < ۱ \\ ax^{۲} + b + c & x \geq ۱ \end{cases} \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} & x < ۱ \\ ۲ax + b & x \geq ۱ \end{cases} \quad (۲)$$

$$f''(x) = \begin{cases} ۶x & x < ۱ \\ ۲a & x \geq ۱ \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{matrix} ۱ : a + b + c = ۱ \\ ۲ : ۳ = ۲a + b \\ ۳ : ۲a = ۶ \end{matrix}$$

$$a = ۳ \Rightarrow b = -۳ \quad c = ۱$$