گاما، شماره ی ِ ۱۳، زمستان ِ ۱۳۸۵

استوانه ای بلند شناور بر سطح ِ یک مایع [1]

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

X1-041 (2006/11/17)

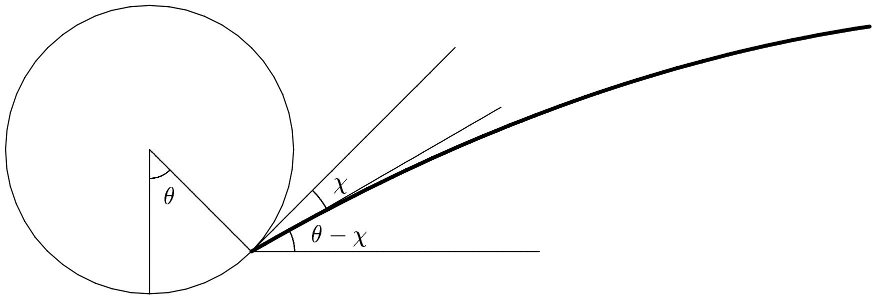
تعادل ِ یک استوانه یِ بلند بررسی می‌شود که رو یِ سطح ِ یک مایع شناور است.

1 مقدمه

یک استوانه یِ بلند را در نظر بگیرید که رو یِ سطح ِ یک مایع در حالت ِ تعادل است. به خاطر ِ این استوانه سطح ِ مایع افقی نمی‌ماند بل که به پایین (یا بالا) خم می‌شود. معادله یِ سطح ِ مایع از تعادل ِ نیروها یِ فشار (درون ِ مایع و بیرون ِ آن)، و کشش ِ سطحی به دست می‌آید. البته این معادله یک معادله یِ دیفرانسیل است که مشخصات ِ استوانه و برهم‌کنش ِ آن با مایع شرط ِ مرزی یِ آن را می‌دهد. تعادل ِ استوانه هم با نیرو یِ ناشی از فشار ِ جَو، نیرو یِ وارد بر استوانه از سو یِ مایع، و وزن ِ استوانه است. از طرف ِ مایع دو نیرو به این استوانه وارد می‌شود، یک ی نیرو یِ ناشی از فشار ِ مایع، و یک ی هم نیرو یِ ناشی از کشش ِ سطحی. (این‌ها در واقع نیروها یِ وارد بر استوانه و یک لایه یِ نازک ِ مایع ِ چسبیده به آن اند.) سرانجام، چسبنده‌گی یِ استوانه با مایع زاویه یِ سطح ِ آزاد ِ مایع با سطح ِ استوانه در محل ِ برخورد ِ این دوسطح با هم را تعیین می‌کند، که این هم در نیرو یِ وارد بر استوانه از مایع به خاطر ِ کشش ِ سطحی وارد می‌شود.

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-041.pdf



شکل ـ 1 هندسه یِ مسئله. خم ـ کلفت مقطع ـ سطح ـ آزاد ـ مایع، و دایره مقطع ـ استوانه است.

چون استوانه بلند است، مسئله عملاً دوبُعدی است. بخش ی از استوانه با زاویه یِ (2θ)، تر می‌شود. زاویه یِ سطح ـ آزاد ـ مایع با استوانه در مرز ـ ناحیه یِ ترشده χ است، که از این رابطه به دست می‌آید.

$$\cos\chi = 1 - \frac{\gamma}{\tau}. \tag{1}$$

γ چسبنده‌گی یِ استوانه با مایع، و τ کشش ـ سطحی یِ مایع است. برا یِ به‌دست‌آوردن ـ این رابطه، کافی است نیروها یِ مماسی یِ وارد بر واحد ـ طول ـ بخش ـ باریک ی از سطح ـ مایع را که شامل ـ مرز ـ ترشده‌گی یِ استوانه است بنویسیم. خواهیم داشت

$$\tau = \tau\ \cos\chi + \gamma, \tag{2}$$

که به (1) می‌رسد. این تنهاجا یی است که چسبنده‌گی وارد می‌شود، و البته خواهیم دید همین پارامتر ـ χ اثر ـ مهم ی در تعادل ـ استوانه دارد.

2 معادله یِ سطح ـ مایع

محور ـ x را افقی و عمود بر محور ـ استوانه، و محور ـ y را عمودی می‌گیریم، چنان که شتاب ـ گرانش

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{y}}, \tag{3}$$

که g ثابت ی مثبت است. سطح ـِ مایع با رابطه یِ y بر حسب ـِ x مشخص می‌شود. یک بردار ـِ مماس بر این سطح هست که بر محور ـِ استوانه عمود است. $\hat{\mathbf{t}}$ را همین بردار می‌گیریم که یکه شده و مئلفه یِ آن در جهت ـِ x مثبت است. بردار ـِ یکه یِ عمود بر سطح ـِ مایع و با مئلفه یِ مثبت در جهت ـِ y را هم با $\hat{\mathbf{n}}$ نمایش می‌دهیم. بخش ـِ کوچک ی از سطح ـِ مایع بین ـِ x و $x+\mathrm{d}x$ را در نظر می‌گیریم. نیروها یی که به این بخش وارد می‌شوند نیروها یِ ناشی از فشار ـِ درون و بیرون ـِ مایع، و نیروها یِ ناشی از کشش ـِ سطحی اند. معادله یِ تعادل می‌شود

$$\tau\,\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}+(P-P_0)\,\mathrm{d}s\,\hat{\mathbf{n}}=0, \tag{4}$$

که P_0 فشار ـِ جَو و P فشار ـِ درون ـِ مایع درست زیر ـِ سطح ـِ مایع است. $\mathrm{d}s$ طول ـِ خم ـِ $y(x)$ در این بخش از سطح ـِ مایع است:

$$\mathrm{d}s^2:=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2. \tag{5}$$

داریم

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}=\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}\phi, \tag{6}$$

که ϕ زاویه یِ خم ـِ $y(x)$ با محور ـِ x است. از این‌جا،

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=P_0-P. \tag{7}$$

داریم

$$P=P_0-\rho\,g\,y, \tag{8}$$

که ρ چگالی یِ مایع است و مبدئ ـِ y را چنان گرفته ایم که دور از استوانه (که سطح ـِ مایع افقی می‌شود) سطح ـِ مایع در $y=0$ باشد. به این ترتیب،

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=\rho\,g\,y. \tag{9}$$

با استفاده از

$$\mathrm{d}y=\sin\phi\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

رابطه یِ (9) می‌شود

$$\tau\,\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=\rho\,g\,y\,\mathrm{d}y, \tag{11}$$

که می‌شود از آن انتگرال گرفت و رسید به

$$\tau\,(1-\cos\phi) = \frac{1}{2}\,\rho\,g\,y^2. \tag{12}$$

باز هم از این استفاده شده که $y=0$ متناظر با $\phi=0$ است. برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ خود ـِ y، باید از (13) جذر بگیریم. برا یِ این کار توجه می‌کنیم که اگر $\pi > \phi > 0$، آن‌گاه مقدار ـِ y کم‌تر از مقدار ـِ y در x ها یِ بزرگ ـِ مثبت است. پس y منفی است. اگر $0 > \phi > -\pi$، آن‌گاه مقدار ـِ y بیش‌تر از مقدار ـِ y در x ها یِ بزرگ ـِ مثبت است. پس y مثبت است. (البته این برا یِ آن بخش از سطح ـِ مایع درست است که x ها یِ بزرگ ـِ مثبت را در بر دارد. برا یِ بخش ـِ دیگر که شامل ـِ x ها یِ بزرگ ـِ منفی است، نتایج برعکس است. در ادامه یِ کار، همه یِ نتایج را برا یِ بخش ـِ شامل ـِ x ها یِ بزرگ ـِ مثبت به دست می‌آوریم.)

به این ترتیب، جذر ـِ معادله یِ (12) می‌شود

$$y = -2\sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g}}\,\sin\frac{\phi}{2}. \tag{13}$$

3 تعادل ـِ استوانه

شعاع ـِ استوانه را با R نشان می‌دهیم. هر نقطه یِ ترشده یِ استوانه را با پارامتر ـِ ψ مشخص می‌کنیم، که ψ زاویه یِ صفحه یِ واصل ـِ این نقطه به محور ـِ استوانه، با صفحه یِ عمودی است. داریم

$$-\,\theta \le \psi \le \theta. \tag{14}$$

در مرز ـِ ترشده‌گی، زاویه یِ سطح ـِ آزاد ـِ مایع با افق $(\theta-\chi)$ است. از این‌جا

$$\tilde y(\theta) = -2\sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g}}\,\sin\frac{\theta-\chi}{2}, \tag{15}$$

که $\tilde y(\psi)$ ارتفاع ـِ نقطه ای از بخش ـِ ترشده یِ استوانه متناظر با پارامتر ـِ ψ است. داریم

$$\tilde y(\psi) = \tilde y(\theta) + R\,(\cos\theta - \cos\psi). \tag{16}$$

$\mathbf{f}_0$ (نیرو یِ وارد بر واحد ـِ طول ـِ استوانه ناشی از فشار ـِ جَو) می‌شود

$$\mathbf{f}_0 = \hat{\mathbf{y}}\,(-2\,P_0\,R\,\sin\theta). \tag{17}$$

$\mathbf{f}_P$ (نیرو یِ وارد بر واحد ـِ طول ـِ استوانه ناشی از فشار ـِ مایع) می‌شود

$$\mathbf{f}_P = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\theta}^{\theta} R\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\; P(\psi),$$

$$= 2\,\hat{\mathbf{y}} \int_{0}^{\theta} R\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\;\{P_0 - \rho\,g\,[\tilde{y}(\theta) + R\,(\cos\theta - \cos\psi)]\}. \tag{18}$$

$\mathbf{f}_\tau$ (نیرو یِ وارد بر واحد ِ طول ِ استوانه ناشی از کشش ِ سطحی یِ مایع) می‌شود

$$\mathbf{f}_\tau = \hat{\mathbf{y}}\,[2\,\tau\sin(\theta - \chi)]. \tag{19}$$

سرانجام، $\mathbf{w}$ (وزن ِ واحد ِ طول ِ استوانه) می‌شود

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{y}}\,(-\pi\,R^2\,\rho_{\mathrm{s}}\,g), \tag{20}$$

که ρ_{s} چگالی یِ استوانه است.

شرط ِ تعادل صفربودن ِ مجوع ِ این چهارنیرو است. این شرط می‌شود

$$\begin{aligned} 0 = {} & (-2\,P_0\,R\,\sin\theta) + [2\,P_0\,R\,\sin\theta - (2\,\rho\,g\,R\,\sin\theta)\,\tilde{y}(\theta) + \rho\,g\,R^2\,(\theta - \sin\theta\,\cos\theta)] \\ & + [2\,\tau\,\sin(\theta - \chi)] + [-\pi\,R^2\,\rho_{\mathrm{s}}\,g]. \end{aligned} \tag{21}$$

بر حسب ِ پارامترها یِ بی‌بُعد ِ

$$a := \sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g\,R^2}}, \tag{22}$$

$$X := \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho}, \tag{23}$$

و با استفاده از رابطه یِ (15)، معادله یِ (21) می‌شود

$$h(a, \theta, \chi) = \pi\,X, \tag{24}$$

که

$$h(a, \theta, \chi) := 2\,a^2\,\sin(\theta - \chi) + 4\,a\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta - \chi}{2} + \theta - \frac{1}{2}\,\sin 2\,\theta. \tag{25}$$

گستره یِ پارامترها عبارت است از

$$\chi \in [0, \pi],$$

$$
\begin{aligned}
\theta &\in [0, \pi], \\
a &\in (0, \infty), \\
X &\in (0, \infty).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

4 پای‌داری‌ ي تعادل ِ استوانه

رابطه‌ ي (24) مقدار ِ θ را بر حسب ِ پارامترها ي χ، X، و a می‌دهد. ممکن است به ازا ي بعض ی از مقدارها ي این سه‌پارامتر، برا ي θ جواب وجود نداشته باشد، یا بیش از یک جواب وجود داشته باشد. در حالت ی که برا ي θ (که باید بین ِ صفر و π باشد) جواب نداریم، استوانه نمی‌تواند بر سطح ِ مایع شناور بماند. اگر بیش از یک جواب داشته باشیم، باید معلوم شود کدام جواب اضافی است. برا ي تعیین ِ جواب ِ درست، پای‌داری‌ ي تعادل را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید یک نیرو ي عمودی‌ ي اضافی رو به پایین به استوانه وارد شود. وجود ِ این نیرو ي اضافی مثل ِ افزایش ِ ρ_s است. در این حالت استوانه پایین‌تر می‌رود. اگر نقطه‌ ي تعادل به ازا ي ρ_s ِ جدید زیر ِ نقطه‌ ي قبلی باشد، تعادل ِ جدید ی برقرار می‌شود. اما اگر نقطه‌ ي تعادل ِ جدید بالا ي نقطه‌ ي قبلی باشد، استوانه مرتباً پایین‌تر می‌رود و از تعادل دورتر و دورتر می‌شود. پس در این حالت تعادل ناپای‌دار است. با بحث ِ مشابه ی نشان داده می‌شود اگر با کاهش ِ ρ_s نقطه‌ ي تعادل پایین برود، تعادل ناپای‌دار است. پس شرط ِ پای‌داری‌ ي تعادل آن است که ارتفاع ِ مرکز ِ استوانه در حالت ِ تعادل، نسبت به ρ_s (یا X) نزولی باشد، یعنی استوانه هر چه چگال‌تر باشد پایین‌تر برود.

مختصه‌ ي y متناظر با مرکز ِ استوانه را با y_c نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$
Y := \frac{y_\mathrm{c}}{R}. \tag{27}
$$

از (15) نتیجه می‌شود

$$
Y = -2\,a\,\sin\frac{\theta-\chi}{2} + \cos\theta, \tag{28}
$$

شرط ِ پای‌داری‌ ي تعادل آن است که

$$
\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{a,\chi} \le 0, \tag{29}
$$

که در آن θ از (24) بر حسب ِ X، a، و χ به دست می‌آید. از (28) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} = -a\, \cos\frac{\theta-\chi}{2} - \sin\theta. \tag{30}$$

دیده می‌شود در گستره ي مقدارها يِ χ، θ، و a،

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} \le 0. \tag{31}$$

از ترکیب ِ این رابطه با (29) نتیجه می‌شود شرط ِ پای‌داری يِ تعادل این است که

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} \ge 0, \tag{32}$$

یا

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) \ge 0, \tag{33}$$

که،

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) :=&\ \left[\frac{\partial h(a,\theta,\chi)}{\partial\theta}\right]_{a,\chi},\\ =&\ 2\,a^2\,\cos(\theta-\chi) + 2\,a\,\left(2\,\cos\theta\,\sin\frac{\theta-\chi}{2} + \sin\theta\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}\right)\\ &+1-\cos 2\,\theta.\end{aligned} \tag{34}$$

یعنی شرط ِ پای‌داری این است که با افزایش ِ چگالی يِ استوانه بخش ِ ترشده يِ آن بزرگ‌تر شود.

به ازا يِ χ و a ِ معین، سه نقطه يِ $\theta_0(a,\chi)$، $\theta_1(a,\chi)$، و $\theta_2(a,\chi)$ هست که

$$0 \le \theta_0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi, \tag{35}$$

چنان که

$$h(a,\theta,\chi) < 0, \qquad 0 \le \theta < \theta_1, \tag{36}$$

$$h(a,\theta,\chi) > 0, \qquad \theta_1 < \theta < \pi, \tag{37}$$

و،

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) < 0, \qquad 0 \le \theta < \theta_0, \tag{38}$$

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) > 0, \qquad \theta_0 < \theta < \theta_2, \tag{39}$$

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) < 0, \qquad \theta_2 < \theta \le \pi. \tag{40}$$

به این ترتیب، شرط‌ها یِ (24) و (33) مقدار ِ θ را به ناحیه یِ $[\theta_1, \theta_2)$ محدود می‌کنند. البته ممکن است θ_2 برابر با π شود. θ_1 صفر است، اگر و تنها اگر $\chi = 0$. ضمناً به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\theta_1 \le \chi \le \theta_2. \tag{41}$$

θ_1 با χ برابر است اگر و تنها اگر $\chi = 0$، و θ_2 با χ برابر است اگر و تنها اگر $\chi = \pi$.

5 وجود ِ جواب

معادله یِ (24) و شرط ِ (33) مقدار ِ θ را بر حسب ِ X و χ و a می‌دهند. اما لزوماً به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ این سه‌پارامتر جواب ی برا یِ θ وجود ندارد. شرط ِ لازم و کافی برا یِ وجود ِ جواب برا یِ θ این است که

$$\max\{h(a,\theta,\chi) \mid \theta\} \ge \pi\, X, \tag{42}$$

یا

$$q(a,\chi) \ge \pi\, X, \tag{43}$$

که

$$q(a,\chi) := h[a, \theta_2(a,\chi), \chi]. \tag{44}$$

داریم

$$\left[\theta_2(a,\chi) = \pi \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial a}\right)_\chi = 0\right] \quad \vee \quad (D_2 h)(a,\theta_2,\chi) = 0. \tag{45}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)_\chi &= (\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) + (D_2 h)(a,\theta_2,\chi)\,\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial a}\right)_\chi,\\ &= (\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi).\end{aligned} \tag{46}$$

هم‌چنین،

$$(\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) = 4\,a\sin(\theta_2-\chi) + 4\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta_2-\chi}{2}, \tag{47}$$

و با توجه به (41)،

$$(\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) \geq 0. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)_\chi \geq 0. \tag{49}$$

داریم

$$\{q(a,\chi)\mid a\} = (\pi,\infty). \tag{50}$$

از ترکیب ِ این با (43) و (44) نتیجه می‌شود به ازا یِ

$$a \leq \bar{a}(X,\chi), \tag{51}$$

برا یِ θ جواب وجود ندارد، که

$$\begin{cases} q[\bar{a}(X,\chi),\chi] = \pi\,X, & X>1\\ \bar{a}(X,\chi)=0, & X\leq 1\end{cases}. \tag{52}$$

به این ترتیب، استوانه ای که چگال یَش از چگالی یِ مایع بیش‌تر نباشد، حتماً رو یِ مایع شناور می‌ماند. اما استوانه ای که چگالی یَش از چگالی یِ مایع بیش‌تر باشد فقط وقت ی رو یِ مایع شناور می‌ماند که شعاع َش از حد ِ معین ی بیش‌تر نشود.

رفتار ِ θ_2 و $\bar{a}$ بر حسب ِ X و χ را بررسی کنیم. روشن است که کافی است حالت ِ $X>1$ را بررسی کنیم. داریم

$$\theta_2 = \pi, \tag{53}$$

اگر

$$h(\bar{a},\pi,\chi) \;=\; \pi\,X, \tag{54}$$

$$\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\pi,\chi) \;\geq\; 0. \tag{55}$$

از (54) نتیجه می‌شود

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\pi\,(X-1)}{2\,\sin\chi}}, \tag{56}$$

که جاگذاری ي آن در (55) نتیجه می‌دهد

$$\chi \geq \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad X \geq 1 + \frac{4\,(1+\cos\chi)\,\sin\chi}{\pi\,\cos^2\chi}. \tag{57}$$

اگر (57) برقرار نباشد، θ_2 و $\bar{a}$ رابطه‌ها يِ

$$h(\bar{a}, \theta_2, \chi) \;=\; \pi\, X, \tag{58}$$

$$\mathrm{D}_2 h(\bar{a}, \theta_2, \chi) \;=\; 0 \tag{59}$$

را بر می‌آورند. می‌شود (59) را یک رابطه يِ پارامتری برا يِ $\bar{a}$ (بر حسب ِ θ_2) گرفت، که از جاگذاری يِ آن در (58) مقدار ِ X بر حسب ِ θ_2 به دست می‌آید. معادله يِ (59) را می‌شود نوشت

$$A\,\bar{a}^2 + 2\,B\,\bar{a} + C = 0, \tag{60}$$

که

$$A \;:=\; 2\,\cos(\theta_2 - \chi),$$

$$B \;:=\; 2\,\cos\theta_2\,\sin\frac{\theta_2-\chi}{2} + \sin\theta_2\,\cos\frac{\theta_2-\chi}{2},$$

$$C \;:=\; 1 - \cos 2\,\theta_2. \tag{61}$$

معادله يِ (59) ممکن است برا يِ $\bar{a}$ صفر، یک، یا دو جواب (ِ مثبت) داشته باشد. مشتق ِ هر یک از این جواب‌ها نسبت به θ_2 هم از این رابطه به دست می‌آید.

$$\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial\theta_2}\right)_\chi = -\frac{\mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 h(\bar{a}, \theta_2, \chi)}{\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a}, \theta_2, \chi)}. \tag{62}$$

صورت ِ این کسر منفی است (چون θ_2 مقدار ِ h را بیشینه می‌کند). پس علامت ِ مشتق ِ $\bar{a}$ نسبت به θ_2 همان علامت ِ $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a}, \theta_2, \chi)$ است، که

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a}, \theta_2, \chi) \;&=\; 2\,A\,\bar{a} + 2\,B,\\ &=\; \pm 2\sqrt{B^2 - A\,C}.\end{aligned} \tag{63}$$

علامت ِ $\pm$ متناظر است با ریشه‌ها يِ $\bar{a}_\pm$، که

$$\bar{a}_\pm := \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A\,C}}{A}. \tag{64}$$

اگر A منفی باشد، (60) یک و فقط یک جواب برا یِ $\bar{a}$ دارد. این جواب $\bar{a}_-$ است، که نسبت به θ_2 نزولی است و

$$\lim_{\theta_2 \to \pi^-} \bar{a}_- = 0^+. \tag{65}$$

اگر A مثبت باشد، برا یِ $\bar{a}$ یا دو جواب هست یا صفر جواب. در این حالت شرط ِ وجود ِ جواب (ِ مثبت) برا یِ $\bar{a}$ این است که مبین ِ (60) مثبت و B منفی باشد. جا یی که مبین مثبت باشد، B تغییرِعلامت نمی‌دهد. مبین به ازا یِ $A = 0$ مثبت است. پس به ازا یِ بعض ی مقدارها یِ مثبت ِ A هم برا یِ $\bar{a}$ جواب داریم، اگر و تنها اگر جا یی که A تغییرِعلامت می‌دهد B منفی باشد. داریم

$$A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{66}$$

(در این‌جا از این استفاده شده که $\theta_2 > \chi$.) پس

$$A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{-2\,\sin\chi + \cos\chi}{\sqrt{2}}. \tag{67}$$

پس برا یِ $\bar{a}$ جواب‌ها یِ متناظر با A یِ مثبت هم هست، اگر

$$\tan\chi > \frac{1}{2}. \tag{68}$$

در این حالت یک مقدار ِ $\tilde{\theta}(\chi)$ هست که

$$B^2 - A\,C = 0, \qquad \theta_2 = \tilde{\theta}(\chi). \tag{69}$$

پس اگر

$$\tilde{\theta}(\chi) < \theta_2 < \chi + \frac{\pi}{2}, \tag{70}$$

آن‌گاه برا یِ $\bar{a}$ دو جواب (ِ مثبت) هست. بین ِ این‌ها $\bar{a}_-$ نسبت به θ_2 نزولی و $\bar{a}_+$ نسبت به θ_2 صعودی است. البته از (41) دیده می‌شود

$$\tilde{\theta}(\chi) > \chi. \tag{71}$$

خلاصه، گستره یِ مقدارها یِ (X, χ) را به شش ناحیه تقسیم می‌کنیم:

I $\qquad X < u(\chi)$

$u(\chi) < X < 1$ **II**

$X > 1 \quad \wedge \quad \chi < \tan^{-1}\frac{1}{2}$ **III**

$X > 1 \quad \wedge \quad \tan^{-1}\frac{1}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}$ **IV**

$\chi > \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad 1 < X < v(\chi)$ **V**

$\chi > \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad v(\chi) < X$ **VI**

در این رابطه‌ها،

$$u(\chi) := \frac{1}{\pi}\left(\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi\right), \tag{72}$$

$$v(\chi) := 1 + \frac{4\,(1+\cos\chi)\,\sin\chi}{\pi\,\cos^2\chi}. \tag{73}$$

ناحیه‌ها یِ I تا VI: به طور ِ کلی داریم

$$\lim_{a\to\infty}\theta = \chi. \tag{74}$$

این یعنی برا یِ استوانه‌ها یِ بسیار کوچک، سطح ِ مایع عملاً افقی می‌ماند.

ناحیه‌ها یِ I و II: در این حالت به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ a برا یِ θ جواب هست، و داریم

$$\lim_{a\to 0^+}\theta = u^{-1}(X). \tag{75}$$

این یعنی برا یِ استوانه‌ها یِ بسیار بزرگ، نیرو یِ ارشمیدس است که وزن ِ استوانه را خنثا می‌کند.

ناحیه یِ I: در این حالت داریم

$$\theta < \chi, \tag{76}$$

که یعنی در این حالت سطح ِ مایع در نزدیکی یِ استوانه بالا یِ سطح ِ مایع در جاها یِ دور از استوانه است.

ناحیه‌ها یِ II تا VI: در این حالت

$$\theta > \chi, \tag{77}$$

که یعنی در این حالت سطح ِ مایع در نزدیکی یِ استوانه زیر ِ سطح ِ مایع در جاها یِ دور از استوانه است.

ناحیه‌ها یِ III تا VI: در این حالت شرط ِ وجود ِ جواب برا یِ θ این است که a از $\bar{a}$ کم‌تر نباشد. در χ یِ ثابت، $\bar{a}$ تابع ی صعودی از X است و داریم

$$\lim_{X\to 1^+} \bar{a} = 0, \tag{78}$$

و

$$\lim_{X\to\infty} \bar{a} = \infty. \tag{79}$$

هم‌چنین،

$$\lim_{X\to 1^+} \theta_2 = \pi. \tag{80}$$

ناحیه‌ها یِ III تا V: در این حالت

$$\theta_2 < \pi. \tag{81}$$

ناحیه‌ها یِ III و IV: در این حالت

$$\lim_{X\to\infty} \theta_2 = \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{82}$$

ناحیه یِ III: در این حالت θ_2 تابع ی نزولی از X است و داریم

$$\theta_2 > \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{83}$$

ناحیه‌ها یِ IV و V: در این حالت یک مقدار ِ $X_2(\chi)$ هست که

$$\theta_2[X_2(\chi), \chi] := \tilde{\theta}(\chi). \tag{84}$$

در χ یِ ثابت، θ_2 به ازا یِ $1 < X < X_2$ نزولی و به ازا یِ $X > X_2$ صعودی است.

ناحیه یِ IV: در این حالت یک مقدار ِ $X_1(\chi)$ هست که

$$\theta_2[X_1(\chi), \chi] = \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{85}$$

روشن است که

$$1 < X_1 < X_2. \tag{86}$$

ناحیه یِ V: در این حالت

$$\lim_{X\to v(\chi)} \theta_2 = \pi. \tag{87}$$

ناحیه یِ VI: در این حالت θ_2 مقدار ِ ثابت ِ π است و $\bar{a}$ هم از (56) به دست می‌آید.

6 رفتار ِ جواب بر حسب ِ پارامترها

θ جواب ِ معادله ي ِ (24) با شرط ِ (33) است. برا يِ بررسی ي ِ رفتار ِ θ بر حسب ِ X، a، و χ، به علامت ِ مشتق‌ها يِ پاره‌ای يِ h نیاز داریم:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{a,\chi} = \frac{\pi}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}, \tag{88}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} = -\frac{\mathrm{D}_1 h(a,\theta,\chi)}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}, \tag{89}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial \chi}\right)_{X,a} = -\frac{\mathrm{D}_3 h(a,\theta,\chi)}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}. \tag{90}$$

شرط ِ (33) نتیجه می‌دهد

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{a,\chi} > 0. \tag{91}$$

پس با افزایش ِ چگالی ي ِ استوانه، زاویه ي ِ بخش ِ ترشده بیش‌تر می‌شود.

از (25) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{D}_1 h(a,\theta,\chi) = 4\,a\,\sin(\theta-\chi) + 4\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta-\chi}{2}, \tag{92}$$

$$\mathrm{D}_3 h(a,\theta,\chi) = -2\,a^2\,\cos(\theta-\chi) - 2\,a\,\sin\theta\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}. \tag{93}$$

رابطه ي ِ (92) نشان می‌دهد علامت ِ $\mathrm{D}_1 h$ همان علامت ِ $(\theta-\chi)$ است. از ترکیب ِ این با (89) و (33) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} &< 0, \qquad \theta > \chi,\\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} &> 0, \qquad \theta < \chi.\end{aligned} \tag{94}$$

این یعنی در ناحیه ي ِ I (که استوانه مایع را بالا می‌کشد) با بزرگ‌شدن ِ استوانه زاویه ي ِ بخش ِ ترشده کم می‌شود، در حال ی که در ناحیه‌ها ي ِ دیگر (که استوانه مایع را به پایین هل می‌دهد) با بزرگ‌شدن ِ استوانه زاویه ي ِ بخش ِ ترشده زیاد می‌شود.

سرانجام، نشان می‌دهیم

$$\mathrm{D}_3 h(a, \theta, \chi) < 0. \tag{95}$$

برا یِ این کار توجه می‌کنیم که در X ـِ ثابت، به ازا یِ a ها یِ بزرگ θ به χ می‌گراید و در نتیجه در این حالت (95) برقرار است. $\mathrm{D}_3 h$، اگر بخواهد تغییرِعلامت بدهد باید جا یی صفر شود. نشان می‌دهیم در این حالت شرط ـِ (33) نقض می‌شود. فرض کنید

$$\mathrm{D}_3 h = 0. \tag{96}$$

از این،

$$a = -\frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\chi)}\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}. \tag{97}$$

این را در (34) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_2 h &= \frac{-2\,\sin\theta\,\cos\theta}{\cos(\theta-\chi)}\,\sin(\theta-\chi)+1-\cos 2\,\theta,\\ &= \frac{2\sin\theta\,\sin\chi}{\cos(\theta-\chi)}.\end{aligned} \tag{98}$$

از (96) ضمناً نتیجه می‌شود

$$\cos(\theta-\chi) < 0, \tag{99}$$

که از ترکیب ـِ آن با (98) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{D}_2 h < 0. \tag{100}$$

پس (96) شرط ـِ (33) را نقض می‌کند. بنابراین در ناحیه یِ تعادل ـِ پای‌دار $\mathrm{D}_3 h$ تغییرِعلامت نمی‌دهد و (95) هم‌واره برقرار است. از ترکیب ـِ (33)، (90)، و (95) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\chi}\right)_{X,a} > 0. \tag{101}$$

یعنی با افزایش ـِ چسبنده‌گی یِ استوانه با مایع، زاویه یِ بخش ـِ ترشده بیش‌تر می‌شود.