

فصل

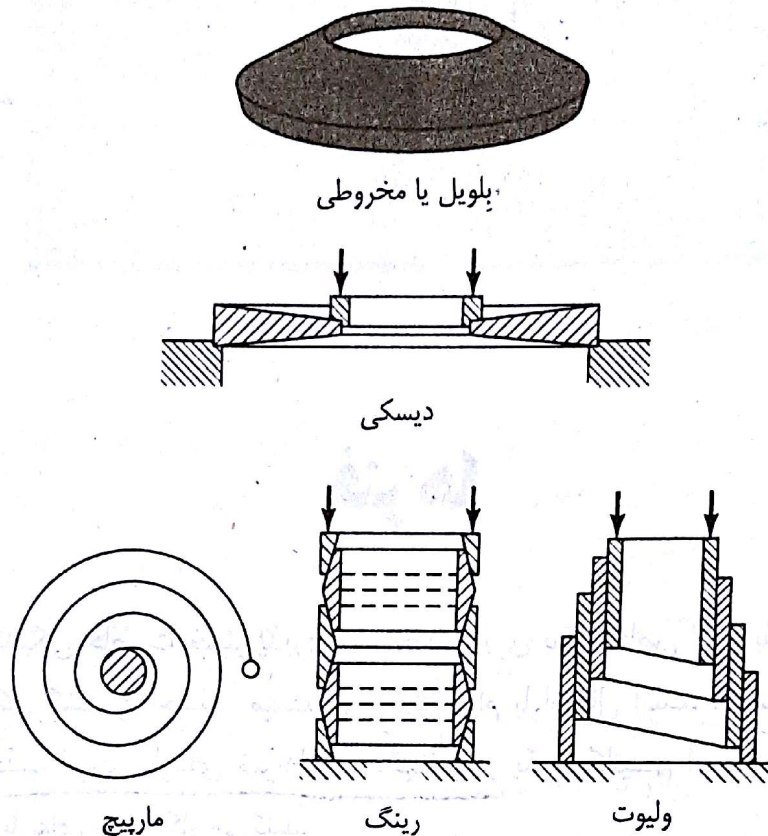
هفتم

فنرها

اگر در یک سیستم مکانیکی خاصیت خمش پذیری یا انعطاف پذیری بطور خاص لازم باشد، از انواع فنرها استفاده می شود. زیرا تغییر شکل کشسان اجسام مهندسی معمولاً توام با اشکال است. از فنرها برای اعمال نیروها و گشتاورها و یا برای جذب انرژی بارهای ضربه ای و ناگهانی در یک مکانیسم استفاده می شود. فنرها غالباً در تحت تنش های زیاد و بارهای متغیر کار می کنند.

فنرهای مارپیچی و تخت بیشتر از سایر انواع آنها به کار می روند. در شکل (۷-۱) تعدادی از انواع دیگر فنرها از جمله فنرهای بلویل (Belleville) دیسکی، حلزونی، حلقوی و ولیوت نشان داده شده اند. در زیر فهرستی از متغیرها، اختصارات و پیشوندهای مربوط به این فصل آمده است.

مساحت	A	متر؛ $39.370in$	m
ایندکس فنر	c	میلی (پیشوند)؛ به معنای یک هزارم	m
قطر سیم	d	میلی متر؛ برابر با $0.03937 in$	mm
مدول کشسانی؛ تنش قائم	E	مگا (پیشوند)؛ به معنای یک میلیون	M
ضریب اطمینان	F_s	مگاپاسکال؛ برابر با $1 N / mm^2$ یا $145 psi$	MPa
مدول کشسانی برشی	G	نیوتن؛ برابر با 0.2248 پاند نیرو	N
اینچ ($25.4 mm$)	in	تعداد حلقه های فعال	N_c
اینچ پاند ($113 N mm$)	$in.lb$	بار یا نیرو	P
گشتاور اینرسی	I	تعداد حلقه های غیرفعال انتهایی	Q
ژول؛ نیوتن متر (Nm)	J	شعاع متوسط مارپیچ	R
گشتاور اینرسی قطبی	J	گشتاور پیچشی ($1 in.lb = 113 Nmm$)	T
کیلو (پیشوند)؛ به معنای 1000	K	(دلتا)؛ تغییر شکل فنر مارپیچ	δ
ثابت فنری، نیرو بر واحد تغییر طول	k	(سیگما) تنش کششی نهایی	σ_{ult}
کیلوگرم (جرم)؛ برابر با 2.2046 پاند (جرم)	kg	تنش نقطه تسلیم کششی	σ_{yp}
ضریب تمرکز تنش ناشی از خمش (ضریب وال)	K_c	(تو) تنش برشی	τ
ضریب تنش برای برش عرضی	K_s	حد تحمل برشی؛ صفر تا تنش حداکثر	τ'_e
$1lb = 4.4482 N$ (نیرو)	lb	تنش نقطه تسلیم برشی	τ_{yp}
$1lb = 0.4536 kg$ (جرم)			



شکل ۷-۱: انواع مختلف فنرها

۷-۱ فنرهای مار پیچی

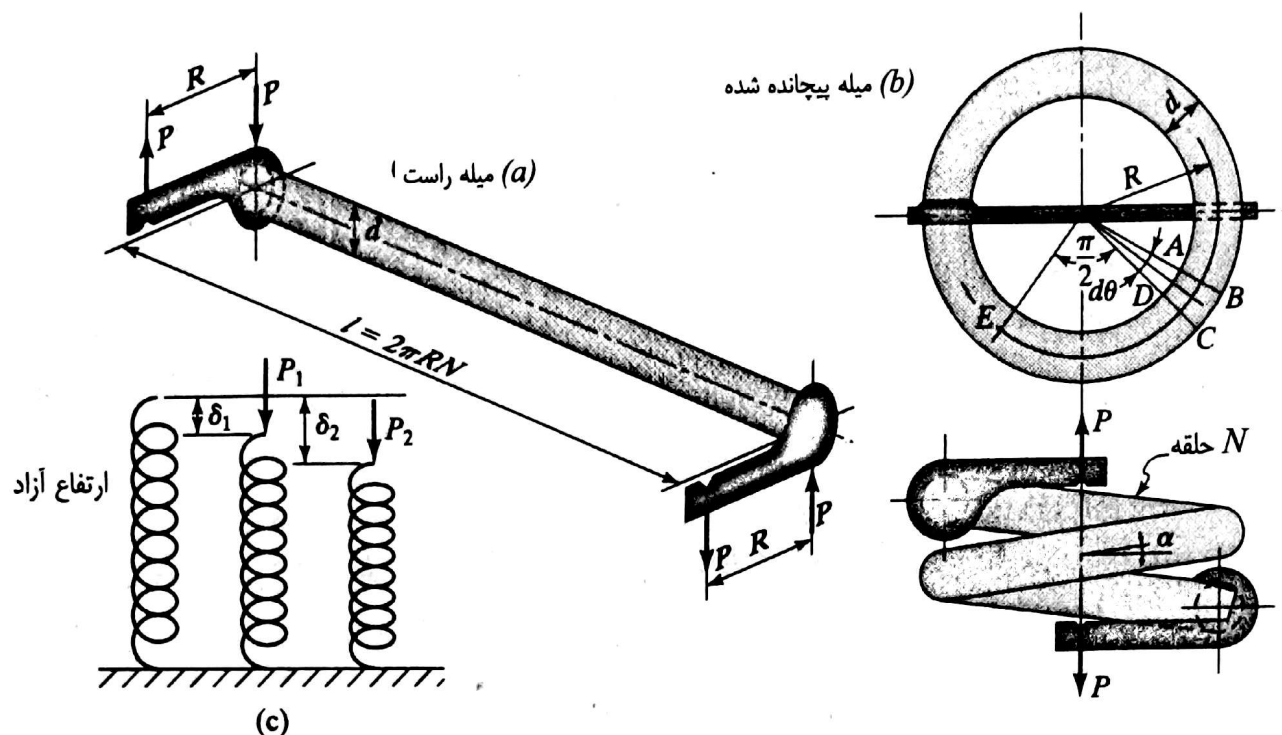
معادلات تنش و تغییر شکل برای یک فنر مارپیچی با حلقه‌های نزدیک به هم مستقیماً از معادلات تنش و تغییر شکل مربوط به پیچش میل گرد به دست می‌آید. (شکل ۷-۲a). به دو سر میله‌ای به طول l و به قطر d دو بازو به طول R بسته و این سیستم را تحت تاثیر بارهای P به حالت تعادل قرار می‌دهیم. فرض کنید این میل گرد را مطابق (شکل ۷-۲b) پیچانده و به شکل فنر مارپیچی به شعاع R و به تعداد حلقه N در آوریم. میله پیچانده شده تحت دو نیروی مساوی و مخالف P در حالت تعادل است. تنش در میله راست، از نوع برشی است و از گشتاور PR ناشی می‌شود. تنش بزرگتر در مارپیچ نیز از نوع برشی پیچشی است. با استفاده از معادله (۲) فصل ۱۳، تنش در شکل (۷-۲) بصورت زیر است

$$\text{تنش برشی پیچشی} = \frac{Tr}{J} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad (a)$$

اگر نسبت قطر مارپیچ $(2R)$ به قطر سیم (d) را بعنوان شاخص فنر c تعریف کنیم، خواهیم داشت

$$c = \frac{2R}{d} \quad (1)$$

شعاع مارپیچ
قطر سیم



شکل ۲-۷: فنر مارپیچی ساخته شده از میل گرد

پس از اینکه میل گرد را به شکل مارپیچ درآوردیم، در مقاطع آن یک تنش اضافی ایجاد می شود که از برش عرضی ناشی می شود. با تحلیل دقیق این موضوع، نتیجه می گیریم مقدار این تنش در وسط ارتفاع فنر برابر با $1.23 P/A$ است. بنابراین می توان نوشت

$$\text{تنش برشی عرضی} = 1.23 \frac{P}{A} = 1.23 \frac{4}{\pi} \frac{P}{d^2} \frac{c}{c} = 1.23 \frac{4P}{\pi d^2} \frac{2R}{cd} \frac{2}{2} = \frac{16 PR}{\pi d^3} \times \frac{0.615}{c} \quad (b)$$

تنش برشی (کل) τ در قسمت داخلی و در وسط ارتفاع مارپیچ، از بار استاتیکی P ناشی می شود، با جمع معادلات (a) و (b) بدست می آید

$$\tau = \frac{16 PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0.615}{c} \right) = K_s \frac{16 PR}{\pi d^3} \quad (2)$$

$$\boxed{K_s = 1 + \frac{0.615}{c}} \quad (3)$$

با جاگذاری معادله (۱) در (۲)، دو معادله دیگر برای محاسبه تنش بدست می آیند

$$\boxed{\tau = K_s \frac{8Pc}{\pi d^2} = K_s \frac{2Pc^3}{\pi R^2}} \quad (4), (5)$$

معادله (۳) را در معادله (۴) قرار می دهیم و نتیجه را برحسب c حل می کنیم. بدین ترتیب معادله مفید زیر بدست می آید

$$\boxed{c = \frac{\pi d^2 \tau}{8P} - 0.615} \quad (6)$$

با جاگذاری مقدار c از معادله (۱) در معادله (۶) خواهیم داشت

$$R = \frac{d}{2} \left(\frac{\pi d^2 \tau}{8 P} - 0.615 \right) \quad (6a)$$

تغییر طول فنر را می‌توان با در نظر گرفتن چرخش مقاطع آن نسبت به یکدیگر به دست آورد. یادآور می‌شویم که این چرخش از گشتاور پیچشی PR ناشی می‌شود. فرض کنید موقتاً جزء $ABCD$ در شکل (۷-۲b) انعطاف‌پذیر، اما بقیه فنر صلب باشد. در این حالت با استفاده از معادله (۵) فصل ۱۳، مقدار چرخش مقطع CD نسبت به مقطع مجاور AB به صورت زیر به دست می‌آید

$$d\phi = \frac{PR dl}{JG}$$

این چرخش یک طول دیفرانسیلی از فنر باعث می‌شود نقطه E که 90° آنطرفتر قرار دارد، به مقدار زیر جابجا می‌شود

$$d\delta = R d\phi = \frac{PR^2 dl}{JG}$$

اگر کل فنر کشسان باشد، کل تغییر طول آن با انتگرال‌گیری از این معادله در محدوده طول فنر به دست می‌آید

$$\delta = \frac{64PR^3 N_c}{Gd^4} = \frac{8Pc^3 N_c}{Gd} = \frac{4Pc^4 N_c}{GR} \quad (7), (8), (9)$$

در این معادلات طول فعال فنر برابر با $2\pi RN_c$ و گشتاور اینرسی قطبی J برابر با $\pi d^4 / 32$ در نظر گرفته شده است. معادلات (۸) و (۹) با جاگذاری معادله (۱) بدست می‌آیند. مقدار میانگین G که برای فولاد مورد استفاده قرار می‌گیرد در سیستم متریک برابر با 11500000 psi یا 79300 MPa است.

اگر Q نشانگر تعداد حلقه‌های غیرفعال در انتهای فنر باشد، کل طول فنر برابر با $2\pi R(N_c + Q)$ خواهد بود. مساحت سطح مقطع سیم فنر برابر با $\pi d^2 / 4$ است. حجم V ماده فنر از حاصلضرب دو عبارت یاد شده بدست می‌آید. بنابراین، خواهیم داشت

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q) \quad (10)$$

با استفاده از معادلات (۷)، (۸) و (۹) و با جاگذاری k به جای P و عدد I به جای δ ، معادله ای به صورت زیر برای محاسبه ثابت فنر k به دست می‌آید. یادآور می‌شویم ثابت فنر مقدار نیرویی است که برای ایجاد تغییر طول واحد در آن لازم است

$$k = \frac{Gd^4}{64R^3 N_c} = \frac{Gd}{8c^3 N_c} = \frac{GR}{4c^4 N_c} \quad (11)$$

با در نظر گرفتن معادله (۷-۲c)، معادله دیگری برای ثابت فنر k بدست می‌آید

$$k = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{P_2 - P_1}{\delta_2 - \delta_1} \quad (12)$$

یک فنر مارپیچی فشاری از سیم شماره ۸ ساخته شده است. می‌خواهیم این فنر تحت بار استاتیکی 100 lb به اندازه 1 in تغییر طول دهد. همچنین می‌خواهیم تنش برشی ماکزیمم برابر با 80000 psi باشد. تعداد حلقه های غیرفعال Q انتهای فنر ۲ تا است. مقادیر لازم برای شعاع میانگین R ، تعداد حلقه های غیرفعال N_c و حجم ماده فنر V را به دست آورید.

اطلاعات داده شده: شماره سیم فنر ۸ است؛ بار استاتیکی 100 lb ؛ $\delta = 1\text{ in}$ ؛ $\tau_{max} = 80000\text{ psi}$ ؛ $Q = 2$ ؛

فرضها: تغییر طول ها در محدوده کشسانی ماده فنر انجام می‌گیرند، و بارها به شکل تنش برشی پیچشی و تنش عرضی تحمل می‌شوند.

روش حل: از معادلات تئوری فنرهای مارپیچی به دست آمده در بخش ۷-۱، یعنی از معادلات (۱)، (۶)، (۹) و (۱۰)، استفاده می‌کنیم. همچنین از جدول (۷-۱) برای تعیین قطر سیم استفاده می‌کنیم. **جزئیات حل:** با استفاده از جدول (۷-۱)، قطر سیم به صورت $d = 0.1620\text{ in}$ به دست می‌آید. با استفاده از معادله (۶) می‌توان نوشت

$$R = \frac{d}{2} \left(\frac{\pi d^2 \tau}{8 P} - 0.615 \right) = \frac{0.1620}{2} \left(\frac{\pi 0.1620^2 \times 80000}{8 \times 100} - 0.615 \right) = 0.618\text{ in}$$

از معادله (۱) داریم

$$c = \frac{2R}{d} = \frac{2 \times 0.618}{0.162} = 7.63$$

از معادله (۹) داریم

جدول ۷-۱: سیم فنر فولادی، استحکام کششی مینیمم، σ_{ult} و مشخصات ASTM

فولاد بی لکه ۳۰۲	نوع (۱) گرم شده	سیم موسیقی	نوع سخت کشیده (۱)	قطر d (in)	شماره گنج W, M *
نوع (۱)	در روغن	A228-93	A227-93 [^]		A313-92
296,000	293,000	350,000	283,000	0.0204	25
292,000	289,000	343,000	279,000	0.0230	24
291,000	286,000	337,000	275,000	0.0258	23
285,000	283,000	332,000	271,000	0.0286	22
282,000	280,000	327,000	266,000	0.0317	21
280,000	274,000	323,000	261,000	0.0348	20
275,000	266,000	314,000	255,000	0.0410	19
267,000	259,000	306,000	248,000	0.0475	18
265,000	253,000	301,000	243,000	0.0540	17
258,000	247,000	293,000	237,000	0.0625	16
250,000	241,000	287,000	232,000	0.0720	15
246,000	235,000	282,000	227,000	0.0800	14
238,000	230,000	275,000	220,000	0.0915	13
227,000	225,000	269,000	216,000	0.1055	12
222,000	220,000	263,000	210,000	0.1205	11
217,000	215,000	258,000	206,000	0.1350	10

9	0.1483	203,000	253,000	210,000	205,000
8	0.1620	200,000	249,000	205,000	198,000
7	0.1770	195,000	245,000	200,000	194,000
6	0.1920	192,000	241,000	195,000	188,000
5	0.2070	190,000	238,000	190,000	182,000
4	0.2253	186,000	235,000	188,000	175,000
1/4 in.	0.2500	182,000	230,000	185,000	168,000
5/16 in.	0.3125	174,000		183,000	155,000
3/8 in.	0.3750	167,000		180,000	145,000

* واشبورن و موتم

مقادیر به صورت میانابایی به دست آمده اند.

$$N_c = \frac{\delta R G}{4 P c^4} = \frac{1 \times 0.618 \times 11500000}{4 \times 100 \times 7.63^4} = 5.24 \text{ حلقه های فعال}$$

از معادله (۱۰) داریم

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q) = \frac{1}{2} \pi^2 0.1620^2 \times 0.618 (5.24 + 2) = 0.5797 \text{ in}^3$$

در طراحی فنر معمولاً ضریب تمرکز را در نظر نمی گیرند. زیرا بارهای وارده معمولاً استاتیکی هستند و یا تعداد نوسانات آنها در طی عمر انتظاری فنر نسبتاً کم است.

مثال ۷-۱۴

یک فنر مارپیچی فشاری از جنس فولاد از سیمی به قطر 4 mm ساخته شده است. این فنر تحت بار 450 N به اندازه 25 mm تغییر طول می دهد. تنش برشی حداکثر برای ماده این فنر برابر با 550 MPa است. تعداد حلقه های غیرفعال Q در انتهای این فنر ۲ تا است. مقادیر لازم برای شعاع میانگین R ، تعداد حلقه های فعال N_c و حجم V ماده فنر را به دست آورید.

اطلاعات داده شده: سیمی به قطر $d = 4 \text{ mm}$ ؛ بار استاتیک به مقدار 450 N ؛ $\delta = 25 \text{ mm}$ ؛ $Q = 2$ و $\tau_{max} = 550 \text{ MPa}$.

فرضها: تغییر طولها در محدوده کشسانی ماده فنر انجام می گیرند. و بارهای وارده به صورت تنش برشی پیچشی و برشی عرضی در فنر تحمل می شود.

روش حل: از تئوری فنرهای مارپیچی بدست آمده در بخش ۷-۱، یعنی از معادلات (۱)، (۶a)، (۹) و (۱۰)، استفاده می کنیم.

جزئیات حل: از معادله (۶a) داریم

$$R = \frac{d}{2} \left(\frac{\pi d^2 \tau}{8 P} - 0.615 \right) = \frac{4}{2} \left(\frac{\pi 4^2 \times 550}{8 \times 450} - 0.615 \right) = 14.14 \text{ mm}$$

از معادله (۱) داریم

$$c = \frac{2R}{d} = \frac{2 \times 14.14}{4} = 7.07$$

از معادله (۹) داریم

$$N_c = \frac{\delta R G}{4 P c^4} = \frac{25 \times 14.14 \times 79300}{4 \times 450 \times 7.07^4} = 6.23 \text{ حلقه های فعال}$$

از معادله (۱۰) داریم

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q) = \frac{1}{2} \pi^2 4^2 \times 14.14 (6.23 + 2) = 9188 \text{ mm}^3$$

از میله‌های پیچشی شبیه میله (شکل ۷-۲a)، به عنوان فنرهای پیچشی در سیستم تعلیق خودروها استفاده می‌شود. اگر طول فنر مارپیچ فشاری نسبت به قطر آن نسبتاً زیاد باشد، ممکن است تحت بارهایی کمتر از بار مجاز آنها، خطر عمل ستونی یا کمانش جانبی اتفاق افتد.

در بعضی موارد، برای جلوگیری از کمانش فنرهای طویل، در داخل آنها یک میله و یا فنر را در داخل یک لوله قرار می‌دهند. میله و لوله بعنوان راهنمای فنر^۱ عمل می‌کند.

۷-۲ خواص مواد فنری

فنرهای مارپیچ را برحسب قطر سیمشان، بصورت سرد و یا گرم می‌پیچانند. فنرهای نازک را به صورت سرد پیچانده می‌شوند. اما فنرهایی که قطر سیمشان از $3/8 \text{ in.}$ بیشتر است، به حالت گرم می‌پیچانند. به عبارت دیگر ابتدا سیم یا میله را گرم می‌کنند، سپس بشکل فنر فرم می‌دهند. برای ساخت فنرهایی که به حالت سرد پیچانده می‌شوند، از مواد گوناگون استفاده می‌شود. اندازه‌ها و خواص مقاومتی چندین نوع ماده در جدول (۷-۱) آمده است. این سیمها از نوع سرد - کشیده (بصورت سرد از داخل حدیده گذرانده شده) هستند. سیمهای سرد - کشیده ای که دارای قطر کمی هستند، مقاومت بیشتری دارند. زیرا در موقع کشیدن، سختی در آنها تا عمق نسبتاً زیادی نفوذ می‌کند. سیمهای سرد کشیده، ارزاترین سیم برای ساخت فنرهای عمومی هستند. در مواردی که ارزان بودن فنر مهم است، غالباً از این نوع سیم استفاده می‌شود. یادآور می‌شویم فنرهایی که از سیمهای سرد - کشیده ساخته می‌شوند تنها برای تحمل بارهای کم و بارهای ثابت دوام دارند. فنرهای ساخته شده از سیمهای سرد - کشیده نباید در دماهای بالای $250^\circ F$ یا زیر صفر کار کنند. سیم مرغوب پرکربن مورد استفاده در دستگاههای موسیقی، پرمصرفترین نوع سیمهای نازک به شمار می‌رود.

^۱ به صفحه ۴۳ کتاب مرجع ۳ در انتهای این فصل رجوع کنید.

جدول ۷-۲: سیم فولاد فنر آلیاژی، مقاومت کششی حداقل: σ_{ult}

قطر بر حسب in	Cr-V A231-96	Cr-Si A401-96	قطر بر حسب in	Cr-V A231-96	Cr-Si A401-96
0.020	300,000		0.177		260,000
0.032	290,000	300,000	0.192	220,000	260,000
0.041	280,000	298,000	0.219		255,000
0.054	270,000	292,000	0.244	210,000	
0.062	265,000	290,000	0.250		250,000
0.080	255,000	285,000	0.283	205,000	
0.092		280,000	0.312	203,000	245,000
0.105	245,000		0.375	200,000	240,000
0.120		275,000	0.438	195,000	235,000
0.135	235,000	270,000	0.500	190,000	230,000
0.162	225,000	265,000			

محدودیت دمایی برای این سیمها نیز همانند سیم سرد - کشیده (کشش سخت) است. سیم گرم شده در روغن (تمپره روغن) را ابتدا به روش کشیدن به اندازه یا قطر مطلوب در می آورند، سپس آنرا سرد و تمپره می کنند. به لحاظ ارزان بودن این نوع سیم، می توان از آن بجای سیم موسیقی استفاده کرد، اما برای مواردی که عمر خستگی (تحت بارهای متغیر) بیشتری لازم است مناسب نیست.

فولاد بی لکه 302 (دارای 18% کرم و 8% نیکل) دارای مقاومت کششی و خاصیت ضد خوردگی خوبی است. این نوع فولاد می تواند در دماهای پایین تر از صفر و تا $550^{\circ}F$ کار کند. مقاومت آن نسبت به خزش در دماهای بالا بسیار خوب است.

جدول ۷-۳: سیم فنر فولاد کربن؛ مقاومت کششی حداقل: σ_{ult} (مشخصات ASTM شماره 4230-93)

قطر بر حسب in	مقاومت بر حسب psi
0.093-0.128	235,000
0.129-0.162	230,000
0.163-0.192	225,000
0.193-0.225	220,000
0.226-0.250	215,000
over 0.250	210,000

خواص سیمهای فولاد فنری آلیاژی در جدول (۷-۲) آمده است. برای مواردی که بارهای وارده سنگین یا از نوع بارهای ضربه ای است، از این نوع فولاد استفاده می شود. برای شکل دهی خشن، لازم است سیم تابکاری شده باشد. پس از پیچاندن فنر از سیم تابکاری شده، آن را تحت عملیات حرارتی قرار می دهند. این مواد همچنین در شرایط گرم شده در روغن نیز وجود دارند.

سیم فنر سوپاپ که در جدول (۷-۳) آمده شده، بطور ویژه برای ساخت فنر سوپاپ و فنرهای که تحت نیروهای متناوب و متغیر کار می کنند به کار می رود. بعبارت دیگر، از سیم فنر سوپاپ در مواردی که عمر خستگی زیاد لازم

است استفاده می شود.

برنز فسفردار (جدول ۷-۴) دارای مقاومت ضد خوردگی و ضریب رسانایی الکتریکی خوبی است و غالباً برای ساخت فنرهای اتصال در کلیدهای برق به کار می رود. برنج فنی نیز دارای همین خواص است (جدول ۷-۵) و در حالت کلی ارزان تر از برنز فسفردار است. از این ماده نباید در دماهای بالای $150^{\circ}F$ استفاده کرد ولی برای دماهای زیر صفر مناسب است. مقادیر حداکثر مقاومت این مواد اندکی بیشتر از مقادیر حداقل ارائه شده در جداول است.

جدول ۷-۴: سیم برنز فسفردار؛ $Ho8$ (گرمکاری فنی)؛ سیم فنر UNS شماره $C5 1000$ با مقطع گرد یا چهار گوش (مشخصات $ASTM B159-93$).

مقاومت کششی حداقل	قطر برحسب اینچ؛ فاصله بین سطوح موازی
145,000	0.025 and under
135,000	Over 0.025 to 0.0625
130,000	Over 0.0625 to 0.125
125,000	Over 0.125 to 0.250
120,000	Over 0.250 to 0.375
105,000	Over 0.375 to 0.500
Sn, 4.2–5.8%; Ph 0.03–0.35%; Cu + Sn + Ph, remainder	

جدول ۷-۵: سیم برنجی؛ مقاومت کششی حداقل؛ σ_{ult} ؛ بر سیم های با مقطع چهار گوش غیرمربعی؛ با گرمکاری اضافی (مشخصات $ASTM B134-93$)

مقاومت کششی حداقل	روی	آهن	ماکزیمم درصد سرب	درصد مس	آلیاژ مس شماره
61,000	Remainder	0.05	0.05	94.0–96.0	UNS C21000
72,000	Remainder	0.05	0.05	89.0–91.0	UNS C22000
82,000	Remainder	0.05	0.05	84.0–86.0	UNS C23000
89,000	Remainder	0.05	0.05	78.5–81.5	UNS C24000
95,000	Remainder	0.05	0.07	68.5–71.5	UNS C26000
90,000	Remainder	0.07	0.10	63.0–68.5	UNS C26800
90,000	Remainder	0.05	0.10	61.0–64.0	UNS C27400

جدول های (۷-۱) تا (۷-۵) تنها شامل مقاومت کششی مواد فنی هستند، در حالی که معمولاً طراحی ماشین و قطعات آنرا معمولاً بر اساس مقاومت تسلیم برشی ماده انجام می دهند.

نتایج آزمایشگاهی نشان می دهند که مطابق جدول (۷-۶)، رابطه ای میان مقاومت کششی σ_{ult} و مقاومت تسلیم برشی τ_{yp} وجود دارد.

جدول ۷-۶: نسبت مقاومت تسلیم برشی τ_{yp} و حد تحمل برشی (صفر تا حداکثر τ'_e) تا مقاومت نهایی σ_{ult} .

نوع	$\frac{\tau_{yp}}{\sigma_{ult}}$	$\frac{\tau'_e}{\sigma_{ult}}$
سیم سرد - کشیده	0.42	0.21
سیم موسیقی	0.40	0.23
سیم گرم شده در روغن	0.45	0.22
سیم فولاد بی لکه (302)، ۸-۱۸	0.46	0.20
سیم آلیاژ Cr-V و Cr-Si	0.51	0.20

۷-۳ فنرهای گرم - پیچانده

فنرهای مارپیچی که قطر سیم آنها $\frac{3}{8}$ in یا بیشتر است معمولاً به صورت گرم پیچانده می‌شوند. این کار از به وجود آمده تنش‌های محبوس جلوگیری می‌کند. یادآور می‌شویم که در موقع سرد پیچاندن فنر، مقداری تنش در آن حبس می‌شود. فنر را پس از پیچاندن فنر، آن سرد کرده و سپس گرم می‌کنند تا خواص فیزیکی مطلوب در آن ایجاد شود.

در ساخت فنرهای گرم - پیچانده، هم از فولادهای آلیاژی و هم از فولادهای کربن ساده استفاده می‌شود. پرمصرفترین مواد در جدول (۷-۷) داده شده‌اند. ترکیبات این فولادها در فصل ۲ آمده است.

جدول ۷-۷: مقاومت کششی فولادهای حرارت دیده متداول در ساخت فنرهای گرم پیچانده. نمونه‌های با قطر 1- 5/8 در دمای نشان داده شده کشیده شده‌اند.

دمای کشیدن (°F)	فولاد کربن 1095		فولاد کروم - وانادیوم 6150		فولاد کروم - نیکل مولیبدن 8660		فولاد سیلیسیم منگنز 9262	
	تنش تسلیم	تنش پارگی	تنش تسلیم	تنش پارگی	تنش تسلیم	تنش پارگی	تنش تسلیم	تنش پارگی
850	192,000	128,000	220,000	203,000	206,000	193,000	243,000	212,000
950	188,000	120,000	198,000	185,000	190,000	170,000	214,000	182,000
1050	172,000	107,000	180,000	168,000	171,000	150,000	188,000	156,000
1150	151,000	92,000	162,000	152,000	150,000	129,000	167,000	137,000

برای پیچش، از 0.60 مقدار کشش متناظر استفاده کنید.

فولاد کربن ساده ۱۰۹۵ به دلیل فراوانی و ارزان بودن بیشتر به کار می‌روند. سختی در این نوع فولاد تا عمق کمی نفوذ می‌کند و سیم‌هایی که قطرشان بیشتر از 3/8 in است به طور کامل سخت نمی‌شوند. اگرچه فولادهای آلیاژی گرانبه‌تر هستند، اما برای به دست آوردن عمق سختی بیشتر و همچنین مقاومت تسلیم زیاد، از این نوع فولاد باید استفاده شود. فولاد سیلیسیم - منگنز ۹۲۶۲ نوعی سیم فولاد آلیاژی است و به دلیل ارزان

بودن به طور گسترده کاربرد دارد. از دست دادن کربن در حین عملیات حرارتی و تمایل این نوع فولاد به داشتن مقادیر زیادی مواد غیرفلزی و سطح ناصاف، از معایب آن است. فولاد کروم - وانادیوم ۶۱۵۰ به دلیل گرانیقیمت بودنش با فولادهای دیگر جایگزین می‌شود. میزان کاربرد فولاد کروم - نیکل - مولیبدن ۸۶۶۰ به دلیل قیمت ارزان و خواص مطلوبی مانند مقاومت زیاد در مقابل ضربه، عدم دی کربوریزاسیون در حین عملیات حرارتی، خوب بودن کیفیت سطح، رو به افزایش است. فنرهای ساخته شده از فولادهای آلیاژی در حین کار تغییر شکل دائمی کمتری نسبت به فولادهای کربن ساده پیدا می‌کنند و برای کار تحت بارهای ضربه ای و به ویژه بارهای خشن که باعث خراش در سطح فنر می‌شوند مناسبتر هستند.

۷-۴ فنر مارپیچی با حداقل ماده تحت بار استاتیکی

در طراحی فنرهای مارپیچ، متغیرهای زیادی دخالت دارند و طراحی فنرهای کار آمد بر پایه روشهای مبتنی بر آزمون و خطا مشکل است. برای فنری که تحت بار استاتیکی است فرض کنید تغییر طول δ ، مدول G ، تعداد حلقه های غیر فعال Q دو سر فنر، بار P ، و تنش τ به صورت فرمول زیر گروه بندی شود و نتیجه را B بنامیم

$$B = \frac{\delta G}{Q \sqrt{8P\pi\tau}} \quad (13)$$

می توان ثابت کرد که اگر B از معادله زیر برحسب اندیس فنر c حساب شود فنر محاسبه شده تحت بار استاتیکی شامل حداقل مقدار ماده خواهد بود

$$B = \frac{c^3 (5c+1.23)}{2.46 \sqrt{c+0.615}} \quad (13a)$$

جدول ۷-۸: ثابت های طراحی برای غالب فنرهای مارپیچی کارآمد تحت بار استاتیکی فشاری.

c	B	c	B	c	B	c	B	c	B
3.0	94	4.0	257	5.0	563	6.0	1,066	7.0	1,830
3.1	105	4.1	280	5.1	603	6.1	1,130	7.1	1,924
3.2	118	4.2	305	5.2	646	6.2	1,196	7.2	2,020
3.3	131	4.3	331	5.3	690	6.3	1,346	7.3	2,121
3.4	145	4.4	359	5.4	737	6.4	1,337	7.4	2,224
3.5	161	4.5	387	5.5	783	6.5	1,412	7.5	2,331
3.6	178	4.6	420	5.6	837	6.6	1,489	7.6	2,443
3.7	196	4.7	453	5.7	891	6.7	1,570	7.7	2,557
3.8	215	4.8	487	5.8	947	6.8	1,654	7.8	2,675
3.9	235	4.9	524	5.9	1,005	6.9	1,741	7.9	2,798
4.0	257	5.0	563	6.0	1,066	7.0	1,830	8.0	2,924

در تعیین این نتیجه ضریب K_s منظور شده است. کمیت B برای مقادیر مختلف c محاسبه شده و نتایج آن در جدول (۷-۷) ارائه شده است. پس از تعیین مقدار c با استفاده از معادله قبل می‌توانیم قطر d سیم، شعاع میانگین R مارپیچ فنر، تعداد حلقه‌های فعال N_c و حجم V را حساب کنیم. طرز استفاده از معادله (۱۳) در مثال‌های ۷-۲A و ۷-۲ نشان داده شده است.

مثال ۲-۷

می‌خواهیم یک فنر مارییچی را طوری طراحی کنیم که با تغییر طول 1 in ، بار ثابتی (استاتیک) به اندازه 100 lb را تحمل کند. می‌خواهیم تنش τ آن برابر با 80000 psi باشد. تعداد فنرهای غیر فعال Q برابر با ۲ است. مقدار قطر d سیم لازم برای کارآمدترین فنر را به دست آورید. نزدیک‌ترین اندازه استاندارد را برای فنر واقعی انتخاب و مقادیر R و N_c نظیر این اندازه را حساب کنید. مقدار حجم ماده فنر را پیدا کنید.

اطلاعات داده شده: ماده فنر از فولاد است؛ بار استاتیکی برابر با $P=100\text{ lb}$ است. $\delta=1\text{ in}$ ، $Q=2$ ؛ $\tau_{max}=80000\text{ psi}$

فروضها: می‌خواهیم فنری طراحی کنیم که مقدار ماده آن حداقل است. بار وارد بر آن ثابت است. روش حل: از معادلات (۱)، (۳)، (۴)، (۹)، (۱۰) و (۱۳) همراه با اطلاعات جداول (۳-۴)، (۱-۷) و (۸-۷) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: از جدول (۳-۴) مقدار $G=11500000\text{ psi}$ برای فولاد به دست می‌آید. با استفاده از معادله (۱۳) خواهیم داشت

$$B = \frac{\delta G}{Q \sqrt{8 P \pi \tau}} = \frac{1 \times 11500000}{2 \sqrt{8 \times 100 \pi 80000}} = 406$$

با استفاده از جدول (۸-۷) داریم

$$c = 4.56 \text{ (آزمایشی)}$$

با استفاده از معادله (۳) داریم

$$K_s = 1 + \frac{0.615}{c} = 1 + \frac{0.615}{4.56} = 1.135$$

با استفاده از معادله (۴) می‌توان نوشت

$$d = \left(\frac{8 K_s P c}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8 \times 1.135 \times 100 \times 4.56}{\pi (80000)} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.1284\text{ in.}$$

با استفاده از جدول (۷-۱) سیم شماره ۱۰ با قطر $d=0.1350\text{ in}$ را انتخاب می‌کنیم. از معادله (۶) می‌توان نوشت

$$c = \frac{\pi d^2 \tau}{8 P} - 0.615 = \frac{\pi (0.1350)^2 \times 80000}{8 \times 100} - 0.615 = 5.110$$

با استفاده از معادله (۱) خواهیم داشت

$$R = \frac{c d}{2} = \frac{5.110 \times 0.1350}{2} = 0.3450\text{ in.}$$

با استفاده از معادله (۹) داریم

$$N_c = \frac{\delta R G}{4 P c^4} = \frac{1 \times 0.3450 \times 11500000}{4 \times 100 \times 5.110^4} = 14.54 \text{ حلقه‌های فعال}$$

با استفاده از معادله (۱۰) داریم

$$V_{min} = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q) = \frac{1}{2} \pi^2 0.1350^2 \times 0.3450 (14.54 + 2) = 0.5131 \text{ in}^3.$$

داده های مثالهای ۷-۱ و ۷-۲ یکسان هستند، به استثنای اینکه در مثال ۷-۱ قطر سیم به طور دلخواه انتخاب شده است. اما در مثال ۷-۲ ابتدا اندازه بهینه تعیین شد. مشاهده می شود که ماده سیمی که به دلخواه انتخاب شده است به اندازه ۱۳ درصد بیشتر از ماده کارآمدترین سیم طراحی شده است.

مثال ۷-۲۴

می خواهیم یک فنر مارپیچ فولادی طوری طراحی کنیم که با تغییر طول 25 mm بار ثابتی معادل 45 N را تحمل کند. تنش τ آن برابر با 550 MPa است. تعداد حلقه های غیرفعال Q انتهایی این فنر ۲ است. قطر سیم d لازم برای کارآمدترین فنر را بدست آورید. نزدیک ترین اندازه استاندارد را برای فنر واقعی انتخاب کرده و مقادیر R و N_c ماده فنر را پیدا کنید.

اطلاعات داده شده: ماده فنر از جنس فولاد است؛ بار استاتیکی و برابر با $P=45 \text{ N}$ است؛ $\delta = 25 \text{ mm}$ ؛ $Q=2$ ؛ $\tau_{max} = 550 \text{ MPa}$

فرضها: هدف طراحی فنری است که مقدار ماده آن حداقل باشد بار وارد بر آن ثابت است.
روش حل: از معادلات (۱)، (۳)، (۴)، (۹)، (۱۰) و (۱۳) همراه با اطلاعات جداول (۴-۳A)، (۷-۱) و (۷-۸) استفاده می کنیم.

جزئیات حل: با استفاده از جدول (۴-۳A) برای فولاد داریم

$$G = 79300 \text{ MPa}$$

از معادله (۱۳) داریم

$$B = \frac{\delta G}{Q \sqrt{8 P \pi \tau}} = \frac{25 \times 79300}{2 \sqrt{8 \times 450 \pi 550}} = 397$$

از جدول (۷-۸) داریم

$$c = 4.53$$

با استفاده از معادله (۳) داریم

$$K_s = 1 + \frac{0.615}{c} = 1 + \frac{0.615}{4.53} = 1.136$$

با استفاده از معادله (۴) داریم

$$d = \left(\frac{8 K_s P c}{\pi \tau} \right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 1.136 \times 450 \times 4.53}{\pi (550)} \right)^{1/2} = 3.27 \text{ mm} = 0.1289 \text{ in}.$$

با استفاده از جدول (۷-۱) برای سیم شماره ۱۰ داریم

$$d = 0.1350 \text{ in} = 3.43 \text{ mm}$$

از معادله (۶) داریم

$$c = \frac{\pi d^2 \tau}{8 P} - 0.615 = \frac{\pi (3.43)^2 \times 550}{8 \times 450} - 0.615 = 5.032$$

از معادله (۱) داریم

$$R = \frac{cd}{2} = \frac{5.032 \times 3.43}{2} = 8.63 \text{ mm}$$

با استفاده از معادله (۹) می توان نوشت

$$N_c = \frac{\delta RG}{4Pc^4} = \frac{25 \times 8.63 \times 79300}{4 \times 450 \times (5.032)^4} = 14.83 \text{ حلقه فعال}$$

با استفاده از معادله (۱۰) داریم

$$V_{min} = \frac{f}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q) = \frac{1}{2} \pi^2 (03.43)^2 \times 8.63 (14.54 + 2) = 8432 \text{ mm}^3$$

فهرهایی که به حالت سرد شکل داده می شوند، پس از پیچاندن، قطرشان اندکی افزایش پیدا می کنند. بنابراین، قطر سیم آنها اندکی کوچک انتخاب می شود تا پس از عملیات شکل دهی، اندازه آنها به حد مطلوب برسد. در بعضی موارد فهرهای سرد پیچانده را پیش از کاربرد، گرم کرده و تنش های محبوس آنها را آزاد می کنند. همچنین، فهرهای سرد - پیچانده را می توان از سیم های فولاد آلیاژی یا فولاد کربن ساده تابکاری شده ساخت، و سپس با استفاده از عملیات حرارتی، مقاومت آنها را اصلاح نمود. در برخی موارد، گام و ارتفاع فتر فشاری را در موقع پیچاندن، بیشتر از مقدار مطلوب انتخاب می کنند و پس از پیچاندن، آن را تا آخرین حد، چندین بار فشار می دهند. با این عمل تا جایی که ممکن است تغییر شکل دائمی در فتر ایجاد می شود و گام و ارتفاع آن به اندازه مطلوب می رسد. این کار باعث می شود که فتر در موقع کار تغییر شکل دائمی ندهد و در شرایط مطلوب (با ارتفاع و گام مطلوب) کار کند، به عبارت دیگر، اندازه و مقادیر آن به طور دائمی به مقادیر نامطلوب تنظیم نشود. این عمل را تنظیم دائمی یا تنظیم شدن سرد *cold setting* می نامند. در برخی موارد فتر را تحت تنشی بیشتر از تنش حد تسلیم آن قرار می دهند و در آن تنش هایی را حبس می کنند. علامت تنش حبس شده مخالف علامت تنشی است که در حین کار به آن وارد می شود. بنابراین، تنش های محبوس، باعث مقاوم شدن فتر می گردد. یعنی فهرهای دارای تنش های محبوس، نسبت به فهرهایی که بدون تنش محبوس هستند، بارهای سنگین تری را تحمل می کنند.

۵-۷ طراحی بهینه فتر مارپیچی

در بیشتر کاربردها، فتر در محدوده مشخصی کار می کند و باید خواص زیر را داشته باشد

(۱) در حالت کاملاً باز باید قادر به وارد کردن نیروی مشخص P_1 باشد.

(۲) در حالت کاملاً فشرده تنش برشی پیچشی آن نباید از مقدار معین τ_2 تجاوز کند.

فتر محبوس (شکل ۳-۷) نمونه خوبی برای تامین نیازهای بالا است. قطعات این سیستم نسبت به هم حول یک مرکز مشترک می چرخند. وقتی که تویی در شیار قرار دارد، فتر باید نیروی کافی برای حفظ موقعیت دو قطعه نسبت به هم وارد کند. پس از اتفاق افتادن حرکت نسبی و خارج شدن تویی از شیار، تنش ایجاد شده در فتر نباید از مقدار مجاز (بی خطر) تجاوز کند.

اگر تنها تنش برشی و پیچشی و حلقه های فعال فتر را در نظر بگیریم، (Q, K_2) می توان فتر را طوری طراحی کرد که ماده آن به حداقل برسد. برای اینکار کافی است حداقل بار و تنش و تغییر طول فتر را برابر با نصف حداکثر آن انتخاب کنیم. این حکم را می توان اثبات کرد و در مثالهای ۳-۷ و ۳-۷A تشریح شده است.

مثال ۷-۳

می‌خواهیم یک فنر فولادی طوری طراحی کنیم که در حالت کاملاً باز نیرویی مانند $P_1 = 30\text{ lb}$ وارد کند، و پس از اینکه به اندازه $(\delta_2 - \delta_1 = 0.375\text{ in})$ فشرده می‌شود تنش برشی پیچشی τ_2 آن از 75000 psi تجاوز نکند. محدودیتهای فضایی ایجاب می‌کند که شعاع میانگین فنر حداکثر 0.40 in باشد. (الف) قطر سیم فنر، تعداد حلقه‌های فعال و حجم ماده حلقه‌های فعال را برای فنر بهینه حساب کنید. (ب) فرض کنید طراح بدخواه تصمیم بگیرد این فنر را از سیم شماره ۹ بسازد، مقدار ماده حلقه‌های فعال این فنر را حساب کنید و آنرا با حجم بدست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید. مقدار R را باز هم برابر با 0.40 in در نظر بگیرید.

اطلاعات داده شده: ماده فنر از فولاد است. $P_1 = 30\text{ lb}$ ؛ پس از فشردن فنر به اندازه $\delta_2 - \delta_1 = 0.375\text{ in}$ ، تنش برشی پیچشی τ_2 باید کوچکتر از 75000 psi باشد؛ (بطور تقریبی) $R = 0.40\text{ in}$. **فرضها:** تغییر شکلها در محدوده کشسان ماده رخ می‌دهند و اگر تنها تنش برشی پیچشی را در نظر بگیریم برای طراحی بهینه فنر لازم است مقدار تنش را برابر با نصف حداکثر تنش مجاز در نظر بگیریم. **روش حل:** از معادلات (۲)، (۷) و (۱۰) همراه با اطلاعات جدولهای (۳-۴) و (۱-۷) استفاده می‌کنیم. **جزئیات حل:** با استفاده از جدول (۳-۴) برای فولاد داریم $G = 11500000\text{ psi}$. از تنش برشی عرضی صرف‌نظر می‌کنیم. (الف) برای فنر بهینه داریم

$$\tau_1 = 0.5 \times 75000 = 37500\text{ psi}$$

از معادله (۲) برای $K_S = 1$ داریم

$$d^3 = \frac{16P_1R}{\pi\tau_1} = \frac{16 \times 30 \times 0.4}{37500\pi} = 0.001630$$

$$d = 0.1177\text{ in.}$$

از جدول (۱-۴) برای سیم شماره ۱۱ داریم

$$d = 0.1205\text{ in.}$$

از معادله (۲) می‌توان نوشت

$$R = \frac{\pi\tau_1d^3}{16P_1} = \frac{\pi \times 37500 \times 0.1205^3}{16 \times 30} = 0.4294\text{ in.}$$

(تنظیم شده برای قطر واقعی سیم فنر).

با استفاده از معادله (۷) داریم

$$N_c = \frac{d^4G\delta_1}{64P_1R^3} = \frac{0.1205^4 \times 11500000 \times 0.375}{64 \times 30 \times 0.4294^3} = 5.98\text{ حلقه}$$

با استفاده از معادله (۱۰) برای حجم داریم

$$V_{min} = (1/2)\pi^2d^2RN_c = (1/2)\pi^2 \times 0.1205^2 \times 0.4294 \times 5.98 = 0.1840\text{ in}^3$$

(ب) از جدول (۱-۷) برای سیم شماره ۹ داریم

$$d = 0.1483\text{ in.}$$

با استفاده از معادله (۲) داریم

$$P_2 = \frac{\pi d^3 \tau_2}{16 R} = \frac{\pi 0.1483^3 \times 75000}{16 \times 0.4} = 120.1 \text{ lb}$$

به دلیل تغییر $P_2 - P_1$ ، با استفاده از معادله (۷)، تعداد حلقه‌های فعال بصورت زیر به دست می‌آید

$$N_c = \frac{d^4 G (\delta_2 - \delta_1)}{64 (P_2 - P_1) R^3} = \frac{0.1483^4 \times 11500000 \times 0.375}{64 (120.1 - 30) \times 0.4^3} = 5.65 \text{ حلقه}$$

با استفاده از معادله (۱۰) مقدار حجم به صورت زیر حساب می‌شود

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R N_c = \frac{1}{2} \pi^2 (0.1483)^2 \times 0.4 \times 5.6 = 0.2455 \text{ in}^3$$

نسبت حجم‌ها عبارت است از

$$\frac{V}{V_{min}} = \frac{0.2455}{0.1840} = 1.33$$

بنابراین قطری که به طور دلخواه برای سیم فنر انتخاب شد، قطر مناسبی نبود، زیرا حجم ماده ساخته شده از این سیم، نسبت به فنری که حجم ماده اش حداقل است، ۳۳ درصد بیشتر است.

مثال ۳۴-۷

می‌خواهیم که یک فنر فولادی طوری طراحی کنیم در حالت کاملاً باز نیرویی مانند $P_1 = 135 \text{ N}$ وارد کند و پس از اینکه به اندازه $\delta_2 - \delta_1 = 9.4 \text{ mm}$ فشرده می‌شود تنش برشی پیچشی τ_2 آن از 500 MPa تجاوز نکند. محدودیتهای فضایی ایجاب می‌کند که شعاع میانگین فنر حداکثر 10 mm باشد. مدول برشی را برابر با $G = 77000 \text{ N/mm}^2$ فرض کنید.

(الف) قطر سیم فنر، تعداد حلقه‌های فعال و حجم ماده حلقه‌های فعال را برای بهترین فنر حساب کنید.
(ب) فرض کنید طراح بدلتخواه تصمیم بگیرد. این فنر را از سیم شماره ۹ طراحی کند. مقدار ماده ی حلقه‌های فعال این فنر را حساب کرده و آنرا با حجم بدست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید. مقدار R را باز هم 10 mm فرض کنید. $G = 77000 \text{ N/mm}^2$.

اطلاعات داده شده: $G = 77000 \text{ N/mm}^2$; $P_1 = 135 \text{ N}$ ؛ پس از فشردن فنر به اندازه

$$\delta_2 - \delta_1 = 9.4 \text{ mm}, \text{ تنش برشی پیچشی باید به صورت } \tau_2 \leq 500 \text{ MPa} \text{ باشد. (تقریبی) } R = 10 \text{ mm}$$

فرضها: تغییر شکلهای در محدوده کشسانی ماده رخ می‌دهند و اگر تنها تنش برشی پیچشی را در نظر بگیریم، برای طراحی فنر بهینه لازم است مقدار تنش را برابر با نصف حداکثر تنش مجاز در نظر بگیریم.

روشن حل: از معادلات (۲)، (۷) و (۱۰) همراه با اطلاعات جدول (۷-۱) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: از تنش برشی عرضی صرف‌نظر می‌کنیم.

(الف) برای فنر بهینه داریم

$$\tau_1 = 0.5 \times 500 = 250 \text{ MPa}$$

از معادله (۲) داریم

$$d^3 = \frac{16 P_1 R}{\pi \tau_1} = \frac{16 \times 135 \times 10}{250 \pi} = 27.5; \quad d = 3.185 \text{ mm} = 0.125 \text{ in.}$$

از جدول (۷-۱) برای سیم شماره ۱۱ داریم

$$d = 0.1205 \text{ in.} = 3.06 \text{ mm}$$

از معادله (۲) داریم

$$R = \frac{\pi \tau_1 d^3}{16 P_1} = \frac{\pi 250 \times 3.06^3}{16 \times 135} = 10.42 \text{ mm} \quad (\text{مقدار تنظیم شده})$$

از معادله (۷) داریم

$$N_c = \frac{d^4 G \delta_1}{64 P_1 R^3} = \frac{3.06^4 \times 77000 \times 9.4}{64 \times 135 \times 10.42^3} = 6.49$$

(حلقه فعال)

با استفاده از معادله (۱۰) برای حجم فنر داریم

$$V_{min} = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R N_c = \frac{1}{2} \pi^2 3.06^2 \times 10.42 \times 6.49 = 3125 \text{ mm}^3$$

(ب) با استفاده از جدول (۷-۱) برای سیم شماره ۹ داریم

$$d = 0.1483 \text{ in} = 3.767 \text{ mm}$$

از معادله (۲) داریم

$$P_2 = \frac{\pi d^3 \tau_2}{16 R} = \frac{\pi 3.767^3 \times 500}{16 \times 10} = 525 \text{ N}$$

به دلیل تغییر در مقدار $P_2 - P_1$ ، تعداد حلقه های فعال فنر از معادله (۷) به صورت زیر حساب می شود

$$N_c = \frac{d^4 G (\delta_2 - \delta_1)}{64 (P_2 - P_1) R^3} = \frac{3.767^4 \times 77000 \times 9.4}{64 (525 - 135) \times 10^3} = 5.84 \quad (\text{حلقه فعال})$$

با استفاده از معادله (۱۰) برای حجم فنر داریم

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R N_c = \frac{1}{2} \pi^2 (3.767)^2 \times 10 \times 5.84 = 4098 \text{ mm}^3$$

نسبت حجمها عبارت است از

$$\frac{V}{V_{min}} = \frac{4089}{3125} = 1.31$$

بنابراین، قطری که به طور دلخواه در قسمت (ب) برای سیم فنر انتخاب شد، قطر مناسبی نبود. زیرا حجم ماده فنر ساخته شده از این سیم، نسبت به ماده فنر بهینه، ۳۱ درصد بیشتر است.

۷-۶ خستگی فنرها

از آنجا که غالب گسیختگیها در اثر خستگی اتفاق می افتند، سطح ناصاف فنرهای گرم - پیچانده بدترین عامل منفی برای این نوع فنراست. شکل (۷-۴) بعنوان نمونه گسیختگی یک فنر را بر اثر خستگی نشان می دهد. ترک

خستگی از یک ناحیه معیوب در سطح فنر که در آن تمرکز تنش وجود دارد، شروع می‌شود. تنش حد تحمل برای میله‌های نورد شده از جنس فولاد کربن و فولادهای کم آلیاژی از 30000 الی 45000 psi است. در صورت ناصاف بودن سطح، تنش حد تحمل به 18000 - 20000 psi کاهش می‌یابد. موقعی که نمونه صافی از فنر را در آزمایشگاه تحت آزمایش قرار می‌دهیم، مشاهده می‌کنیم حد تحمل آن بسیار بیشتر از حد تحمل فنر واقعی (با سطح معمولی) است. در طی عملیات حرارتی، قشری از سطح فولاد کربن خود را از دست می‌دهد و این باعث ضعیفتر شدن فولاد می‌شود. زیرا بر اثر این دی کربوریزاسیون، ممکن است حد تحمل سطح فولاد از مقدار تنش مجاز فنر کمتر باشد. اگر عملیات حرارتی در یک فضای قابل کنترل انجام گیرد، می‌توان از دی کربوریزاسیون (از دست رفتن کربن) فولاد جلوگیری کرد. یک خوردگی کوچک نیز به مقدار زیادی از مقاومت خستگی جسم می‌کاهد. آبکاری سطح فولاد با کادمیوم تا حدودی از خوردگی آن جلوگیری می‌کند.

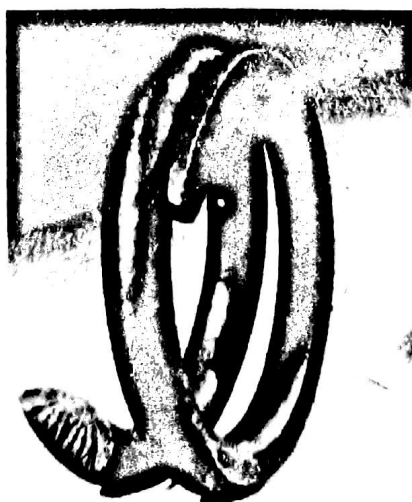
ساچمه زنی باعث حبس تنش‌های فشاری در سطح فولاد می‌شود، و لذا به عنوان یک روش موفقیت آمیز برای افزایش مقاومت گسیختگی فولادها به شمار می‌آید. برای بالا بردن مقاومت خستگی فنر، می‌توان از میله‌های سنگ‌زنی شده و یا فضای تحت کنترل استفاده کرد، اما در این حالت هزینه ساخت فنر افزایش می‌یابد. اما چنین سطحی (سطح سنگ زنی شده) بر اثر بارهای خشن، صافی خود را از دست می‌دهد.

اگر از فنر در دماهای بالاتر استفاده شود، ممکن است در آن خزش یا تغییر شکل دائمی ایجاد شود، مگر اینکه بارهای وارد بر آن بسیار کم باشد. این اثرات در دماهای بالای $350^{\circ}F$ قابل توجه می‌شوند، و از فولادهای فنری معمولی نمی‌توان در دماهای بالای $400^{\circ}F$ استفاده کرد.

فولادهای بی‌لکه 188 در دماهای بالا بیشتر از انواع دیگر فولادهای فنری مقاومت می‌کنند. برای دماهای $500 - 800^{\circ}F$ باید از فولاد تند بر (18W, 4Cr, IV) استفاده شود.

در دماهای پایین از فولادهای آلیاژی جدول (۷-۷) استفاده می‌شود. موقعی که فنر در دماهای پایین کار می‌کند، برای جلوگیری از گسیختگی آن بر اثر بارهای ضربه‌ای، می‌توان در سیستم فنربندی یک مانع طوری ایجاد کرد که نگذارد فنر بیشتر از مقدار مجاز تغییر طول بدهد.

با استفاده از روش سکه زنی، از میله‌های تخت نیز فنرهای ویژه ای می‌سازند که در ساختار ماشینها و مکانیزمها به کار می‌روند. در کارهای سنگین و خشن، لبه‌های برش خورده فنرهای تخت را باید صاف و پلیسه گیری کرد تا از بروز ترک‌های خستگی در امان باشند.



شکل ۴-۷: گسیختگی فنر مارپیچی در اثر خستگی

۷-۷ طراحی فنر برای بارهای متغیر

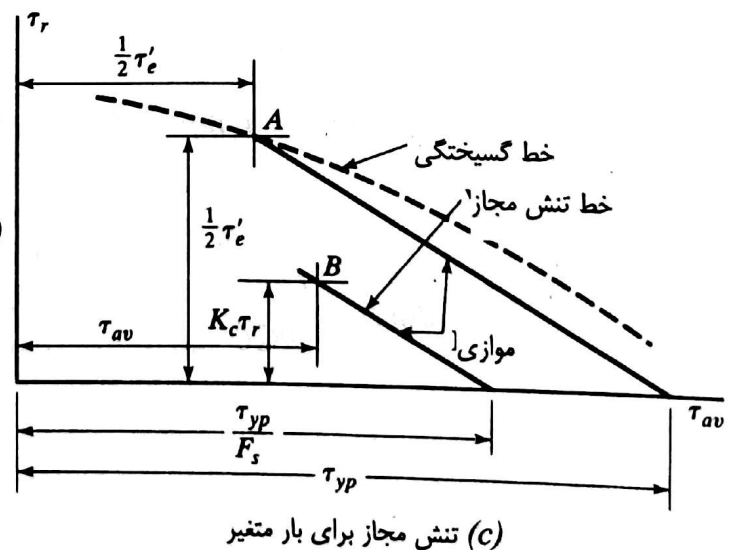
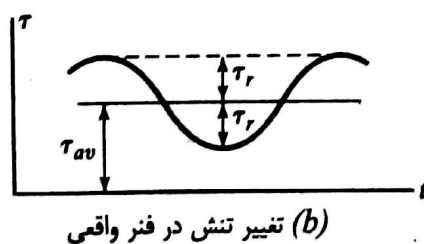
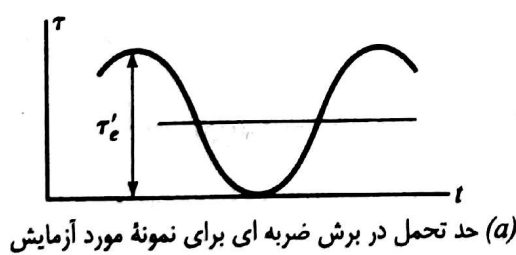
اگر بار وارد بر فنر بطور دائم تغییر کند، در طراحی آن باید اثر خستگی و تمرکز تنش را در نظر گرفت. نمونه ماده فنر را تحت تنش برشی متغیر (از صفر تا τ'_e) قرار می‌دهند و مثلث تنش مجاز را (همانطوری که در فصل ۴ بررسی شد) مطابق شکل (۷-۵) رسم می‌کنیم. رابطه بین τ'_e و تنش کششی حد پارگی σ_{ult} در جدول (۷-۶) آمده است. برای چنین بارگذاری آزمایشی تنش متغیر برابر با تنش میانگین یا $\tau'_e/2$ است. بنابراین، مطابق شکل (۷-۵c) از نقطه A یک خط راست به عنوان خط تقریبی مقاومت گسیختگی ماده رسم می‌کنند. خط مقادیر تنش‌های مجاز واقعی موازی با این خط خواهد بود، و برای رسم آن مقادیر تنش حد تسلیم برشی τ_{yp} را بر ضریب اطمینان F_s تقسیم می‌کنیم. ضریب تمرکز تنش یا ضریب وال K_c برای انحنا را با معادله زیر تعریف می‌کنند

$$K_c = \frac{4c-1}{4c-4} \quad (14)$$

تنش رنج τ_r که توسط معادلات (۲)، (۴) یا (۵) برای بار رنج P_r بدست آمد، پیش از ترسیم آن در شکل ۷-۵c در ضریب K_c ضرب می‌شود.

معمولاً در طراحی قطعه برای بار متغیر، هر گاه تنش برشی میانگین τ_{av} (که از بار میانگین P_{av} تعیین می‌شود) محاسبه شود از تمرکز تنش صرف‌نظر می‌شود. همچنین، تنش‌های محبوس ناشی از پیچاندن فنر و اعمال بارهای خارج از مرکز به قدری کوچک هستند که از آنها چشم‌پوشی می‌شود. با استفاده از تناسب موجود میان اضلاع مثلث‌های متشابه شکل (۷-۵) می‌توان نوشت

$$\frac{K_c \tau_r}{\tau_{yp} - \tau_{av}} = \frac{\frac{1}{2} \tau'_e}{\tau_{yp} - \frac{1}{2} \tau'_e} \quad (15)$$



شکل ۷-۵: دیاگرام تنش مجاز برای فنرها

این معادله، معادله پایه برای طراحی فنرهایی است که تحت بارهای متغیر یا نوسانی کار می کنند.

مثال ۷-۴

یک فنر ماریچی فشاری از سیم موسیقی شماره ۴ ساخته شده است. این فنر بار متغیری را تحمل می کند. اندیس فنری آن ۶ و ضریب اطمینان برابر ۱.۵ است. اگر میانگین بار وارد بر فنر ۱۲۰ lb باشد، مقادیر حداکثر و حداقل بار وارد بر آنرا حساب کنید.

اطلاعات داده شده: سیم موسیقی شماره ۴ بار متغیر است. $P_{avg} = 120 \text{ lb}$; $N_{fs} = 1.5$; $C = 6$.

فرضها: چون بار متغیر است، محتملترین عامل گسیختگی آن، خستگی خواهد بود.

روش حل: از معادلات (۱)، (۲)، (۱۴) و (۱۵) همراه با جداول (۷-۱) و (۷-۶) استفاده می کنیم.

جزئیات حل: با استفاده از جدول (۷-۱)، قطر $d = 0.2253 \text{ in}$ ، برای سیم موسیقی شماره ۴ به دست می آید. از معادله (۱) داریم

$$R = \frac{cd}{2} = \frac{6 \times 0.2253}{2} = 0.676$$

از معادله (۱۴) داریم

$$K_c = \frac{4 \times 6 - 1}{4 \times 6 - 4} = 1.15$$

از معادله (۲) داریم

$$\tau_{av} = \frac{16 \times 120 \times 0.676}{\pi (0.2253)^3} \left[1 + \frac{0.615}{6} \right] = 39820 \text{ psi}$$

از جدول (۷-۱) داریم

$$\sigma_{ult} = 235000 \text{ psi}$$

از جدول (۷-۶) داریم

$$\tau_{yp} = 0.4 \times 235000 = 94000 \text{ psi}; \quad \tau'_e = 0.23 \times 235000 = 54050 \text{ psi}$$

با استفاده از معادله (۱۵) می توان نوشت

$$\frac{1.15 \tau_r}{\frac{94000}{1.5} - 39820} = \frac{27025}{94000 - 27025} \rightarrow \tau_r = 8020 \text{ psi}$$

بنابراین می توان نوشت

$$P_r = \frac{\tau_r}{\tau_{av}} P_{av} = \frac{8020}{39820} \times 120 = 24.2 \text{ lb}$$

$$P_2 = 120 + 24.2 = 144.2 \text{ lb}$$

$$P_1 = 120 - 24.2 = 95.8 \text{ lb}$$

خواننده می‌تواند برای این مسئله یک منحنی مانند منحنی شکل (۷-۵c) رسم کند و با اندازه‌گیری طولها، درستی مقادیر بالا را امتحان نماید.

مثال ۷-۴A

یک فنر مارپیچی فشاری از سیم موسیقی شماره 4 ساخته شده است. این فنر بار متغیری را تحمل می‌کند. اندیس فنری آن 6 و ضریب اطمینان برابر 1.5 است. اگر میانگین بار وارد بر فنر 535 N باشد، مقادیر حداکثر و حداقل بار وارد بر آنرا حساب کنید.

اطلاعات داده شده: سیم موسیقی شماره 4، بار متغیر است. $P_{av} = 535 \text{ N}$; $N_f = 1.5$; $C = 6$.

فرضها: چون بار متغیر است، محتملترین عامل گسیختگی آن، خستگی خواهد بود.

روش حل: از معادلات (۱)، (۲)، (۱۴) و (۱۵) همراه با جداول (۷-۱) و (۷-۶) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: با استفاده از جدول (۷-۱)، قطر $d = 0.2253 \text{ in} = 5.72 \text{ mm}$ ، برای سیم موسیقی شماره 4 به دست می‌آید.

از معادله (۱) داریم

$$R = \frac{cd}{2} = \frac{6 \times 5.72}{2} = 17.17 \text{ mm}$$

از معادله (۱۴) داریم

$$K_c = \frac{4 \times 6 - 1}{4 \times 6 - 4} = 1.15$$

از معادله (۲) داریم

$$\tau_{ave} = \frac{16 \times 535 \times 17.17}{\pi 5.72^3} \left(1 + \frac{0.615}{6} \right) = 275.3 \text{ MPa}$$

از جدول (۷-۱) داریم

$$\sigma_{ult} = 235000 \text{ psi} = 1620 \text{ MPa}$$

از جدول (۷-۶) داریم

$$\tau_{yp} = 0.4 \times 1620 = 648 \text{ MPa}$$

$$\tau'_e = 0.23 \times 1620 = 372.6 \text{ MPa}$$

با استفاده از معادله (۱۵) می‌توان نوشت

$$\frac{1.15 \tau_r}{\frac{648}{1.5} - 275.3} = \frac{186.3}{648 - 186.3} \rightarrow \tau_r = 55.0 \text{ MPa}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{P_r}{\tau_r} = \frac{P_{av}}{\tau_{av}} \rightarrow P_r = \frac{P_{av} \tau_r}{\tau_{av}} = \frac{535 \times 55.0}{275.3} = 107 \text{ N}$$

$$P_2 = 535 + 107 = 642 \text{ N} \text{ بار ماکزیمم}$$

$$P_1 = 535 - 107 = 428 \text{ N} \text{ بار مینیمم}$$

۷-۸ کمانش فنرهای فشاری (تحت بار فشاری)

در فنرهای فشاری طول فنر نباید به اندازه‌ای زیاد باشد که در حین کار کمانش بوجود آید. فنری را که دو سرش سنگ‌زنی و تخت و میان دو صفحه صلب فشرده شده، می‌توان بعنوان یک ستون با سرهای ثابت فرض کرد. طول کمانش l_0 مربوط به چنین فنری را می‌توان برابر با مقدار زیر در نظر گرفت^۳

$$l_0 = 2\delta + \frac{22.3 R^2}{\delta} \quad (16)$$

اما عواملی مانند خارج از مرکز بودن بار، اثر حلقه‌های انتهایی و امثال آن باعث می‌شوند طول کمانش فنر اندکی کمتر از مقدار بالا باشد.

۷-۹ ارتعاش یا موج‌زدن فنرها

با وارد شدن یک بار فشاری بر انتهای فنر مارپیچی یک موج فشاری در آن ایجاد می‌کند. این موج در طول فنر حرکت می‌کند و به انتهای دیگر آن می‌رسد و سپس باز می‌گردد. ماده فنر در موقع ارتعاش تحت تنش‌های زیادی قرار می‌گیرد و ممکن است در اثر این ارتعاشات به زودی گسیخته شود. بسامد طبیعی این ارتعاش رفت و برگشتی از معادله زیر بدست می‌آید

$$f = \frac{d}{2\pi R^2 N_c} \sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \text{ (دور بر ثانیه)} \quad (17)$$

در این معادله، g نشانگر شتاب جاذبه زمین به مقدار 386 in/sec^2 است. γ نشانگر وزن ماده فنر برحسب پاند بر اینچ مکعب است. برای یک فنر فولادی به مشخصات $G = 11500000 \text{ psi}$ و $\gamma = 0.285 \text{ lb/in}^3$ معادله (۱۷) بصورت زیر در می‌آید

$$f = \frac{3510 d}{R^2 N_c} \text{ (دور بر ثانیه)} \quad (18)$$

مثال ۷-۵

فنر سوپاپی از سیم فنر فولادی شماره ۴ ساخته شده است. تعداد حلقه‌های فعال آن برابر ۱۰ است. میانگین قطر مارپیچ این فنر 2 in است. کمترین بسامد طبیعی آن را بدست آورید.

۳. به فصل ۲۴ مرجع شماره ۷ در آخر این فصل نگاه کنید.

اطلاعات داده شده: ماده فنر از فولاد است. شماره سیم فنر 4 است. $N_c = 10$. قطر میانگین فنر 2 in. است. فرضها: کمترین بسامد طبیعی فنر همان بحرانی ترین بسامد آن است. روش حل: از معادله (۱۸) و جدول (۷-۱) استفاده می کنیم. جزئیات حل: $R = 1 \text{ in.}$ با استفاده از جدول (۷-۱) داریم

$$d = 0.2253 \text{ in.}$$

از معادله (۱۸) داریم

$$f = \frac{3510 \times 0.2253}{I^2 \times 10} = 79.1 \text{ (دور بر ثانیه)} = 4745 \text{ (دور بر دقیقه)}$$

یاد آور می شویم یک فنر می تواند دارای ارتعاشات سریعتر نیز باشد، مقادیر بسامدهای طبیعی آنها برابر با حاصلضرب اعداد $2, 3, 4, \dots$ در مقدار بدست آمده از معادلات (۱۷) و (۱۸) است.

۷-۱۰ تفرانس های تجارتی

اندازه های فنرهای مارپیچ استاندارد نشده است. بنابراین آنها را باید براساس سفارش ساخت. اگر برای ابعاد فنر و همچنین بار اعمالی تفرانس های آزادی قابل شویم، هزینه های تولید فنر را می توانیم کاهش دهیم. تفرانس های مربوط به فنرهای تجارتی در جدولهای (۷-۹) و (۷-۱۰) و (۷-۱۱) درج شده اند.

جدول ۷-۹، تفرانسهای استاندارد برای سیم فنر*

حداکثر نامدوری بر حسب mm یا $in.$	تفرانس بر حسب mm یا $in.$	قطر بر حسب mm یا $in.$
0.010 (0.0004)	± 0.010 (0.0004)	0.51–0.71 (0.020–0.028)
0.015 (0.0006)	± 0.015 (0.0006)	0.71–2.00 (0.028–0.078)
0.020 (0.0008)	± 0.020 (0.0008)	2.00–3.00 (0.078–0.118)
0.030 (0.0012)	± 0.030 (0.00118)	3.00–6.00 (0.118–0.240)
0.050 (0.002)	± 0.050 (0.00197)	6.00–9.00 (0.240–0.354)
0.070 (0.0028)	± 0.070 (0.00276)	9.50–16.00 (0.375–0.625)

• هدیه گروه فنرساز بارن. قالب این فنرها را می توان با تفرانسهای دقیقتر نیز تهیه کرد. سیم موسیقی و اغلب سیمهای غیر آهنی با تفرانسهای دقیقتر موجودند.

جدول ۱۰-۷، تفرانسهای قطر مارپیچ فنرهای فشاری و کششی*

قطر سیم <i>mm (in.)</i>	تفرانس بعلاوه منهای <i>mm</i> یا <i>in.</i>						
	شاخص فنر (D/d)						
	4	6	8	10	12	14	16
0.38	0.05	0.05	0.08	0.10	0.13	0.15	0.18
(0.015)	(0.002)	(0.002)	(0.003)	(0.004)	(0.005)	(0.006)	(0.007)
0.58	0.05	0.08	0.10	0.15	0.18	0.20	0.25
(0.023)	(0.002)	(0.003)	(0.004)	(0.006)	(0.007)	(0.008)	(0.010)
0.80	0.05	0.10	0.15	0.18	0.23	0.28	0.33
(0.035)	(0.002)	(0.004)	(0.006)	(0.007)	(0.009)	(0.011)	(0.013)
1.30	0.08	0.13	0.18	0.25	0.30	0.38	0.43
(0.051)	(0.003)	(0.005)	(0.007)	(0.010)	(0.012)	(0.015)	(0.017)
1.93	0.10	0.18	0.25	0.33	0.41	0.48	0.53
(0.076)	(0.004)	(0.007)	(0.010)	(0.013)	(0.016)	(0.019)	(0.021)
2.90	0.15	0.23	0.33	0.46	0.53	0.64	0.74
(0.114)	(0.006)	(0.009)	(0.013)	(0.018)	(0.021)	(0.025)	(0.029)
4.34	0.20	0.30	0.43	0.58	0.71	0.84	0.97
(0.171)	(0.008)	(0.012)	(0.017)	(0.023)	(0.028)	(0.033)	(0.038)
6.35	0.28	0.38	0.53	0.71	0.90	1.07	1.24
(0.250)	(0.011)	(0.015)	(0.021)	(0.028)	(0.035)	(0.042)	(0.049)
9.53	0.41	0.51	0.66	0.94	1.17	1.37	1.63
(0.375)	(0.016)	(0.020)	(0.026)	(0.037)	(0.046)	(0.054)	(0.064)
12.70	0.53	0.76	1.02	1.57	2.03	2.54	3.18
(0.500)	(0.021)	(0.030)	(0.040)	(0.062)	(0.080)	(0.100)	(0.125)

* هدیه گروه فنر سازان بارن.

جدول ۱۱-۷، تفرانسهای طول آزاد فنرهای مارپیچی فشاری با سیمهای با مقطع مربعی و سنگ زنی شده.

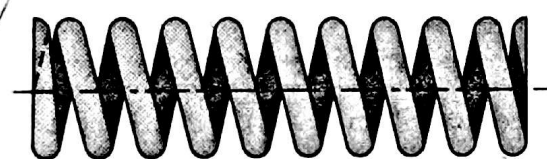
تعداد حلقه های فعال در هر <i>mm</i> یا <i>in</i>	تفرانس برحسب بعلاوه منهای <i>mm</i> یا <i>in.</i> مربوط به طول آزاد						
	شاخص فنر (D/d)						
	4	6	8	10	12	14	16
0.02	0.010	0.011	0.012	0.013	0.015	0.016	0.016
(0.5)							
0.04	0.011	0.013	0.015	0.016	0.017	0.018	0.019
(1)							
0.08	0.013	0.015	0.017	0.019	0.020	0.022	0.023
(2)							
0.2	0.016	0.018	0.021	0.023	0.024	0.026	0.027
(4)							
0.3	0.019	0.022	0.024	0.026	0.028	0.030	0.032
(8)							
0.5	0.021	0.024	0.027	0.030	0.032	0.034	0.036
(12)							
0.6	0.022	0.026	0.029	0.032	0.034	0.036	0.038
(16)							
0.8	0.023	0.207	0.031	0.034	0.036	0.038	0.040
(20)							

هدیه گروه فنر سازان بارن. برای فنرهای با طول کمتر از 12.7 mm (0.500 in) از تفرانسهای مربوط به طول 12.7 mm (0.500) استفاده کنید. اگر دو سر فنر بسته و فاقد سنگ زنی باشد، مقادیر بالا را به 1.7 ضرب کنید.

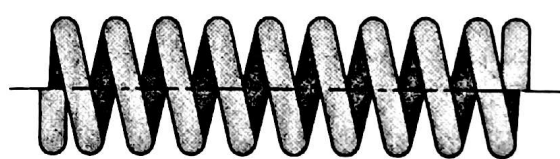
۷-۱۱ اثر حلقه‌های انتهایی در فنرهای فشاری

چند نوع حلقه انتهایی مورد استفاده در فنرهای مارپیچ فشاری در شکل (۷-۶) نشان داده شده است. در استخراج معادلات مربوط به طراحی فنرها، فرض شده که بار وارده بر فنر در راستای محور فنر اعمال می‌شود. بوجود آوردن این شرایط در عمل، مشکل است. حلقه‌های انتهایی یک بار خارج از مرکز تولید می‌کنند که این بار موجب افزایش تنش در یک طرف فنر می‌گردد. تحت برخی شرایط، مخصوصاً موقعی که تعداد حلقه‌های فنر کم است، این اثر را باید بحساب آورد. بهترین حالتی که در آن بارهای وارده بر فنر می‌تواند تقریباً در راستای محور فنر باشد، در شکل (۷-۶a) نشان داده شده است. بطوری که مشاهده می‌کنید در این شکل انتهای فنر را تخت و سپس سنگ‌زنی کرده‌اند. بطوری که سطح مورد سنگ‌زنی کاملاً عمود بر محور مارپیچ است. در معادله تغییر طول (۷) تعداد صحیح حلقه‌های فعال N_c لازم است، لذا از تعداد کل حلقه‌ها باید تعداد حلقه‌های ناموثر در تغییر شکل را کسر کرد.

غیر ممکن است که دقیقاً بگوییم چقدر از تعداد کل حلقه‌های فنر باید کسر شود. اما از طریق آزمایش معلوم شده، برای بدست آوردن تعداد حلقه‌های فعال فنر شکل (۷-۶a) (فنری که دو انتهای آن تخت و بطور عمود بر محور مارپیچ سنگ‌زنی شده است)، باید 1.75 حلقه را از تعداد کل حلقه‌ها کسر کنیم. برای فنرهایی که سرهایشان مطابق شکل (۷-۶c) ساده می‌باشند $1/2$ حلقه و در مورد فنرهای شکل (۷-۶d)، باید یک حلقه از تعداد کل حلقه‌ها کسر کنیم.



(a) فنر با سرهای تخت سنگ زنی یا آهن‌گری شده



(b) فنر با سرهای بسته غیر سنگ خورده



(c) فنر با سرهای ساده



(d) فنر با سرهای ساده سنگ خورده

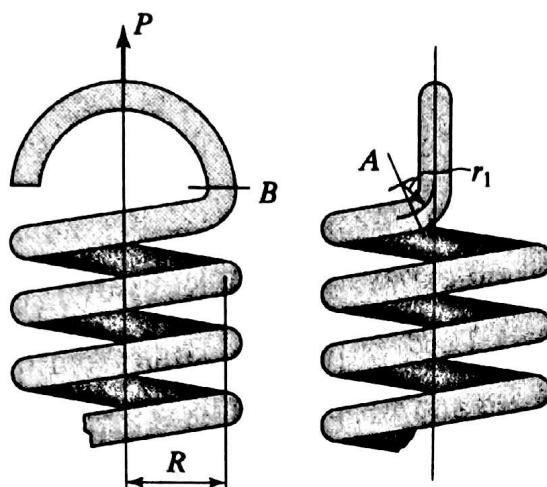
شکل ۷-۶: انواع حلقه‌های انتهایی مورد استفاده در فنرهای فشاری

۷-۱۲ فنرهای مارپیچی کششی

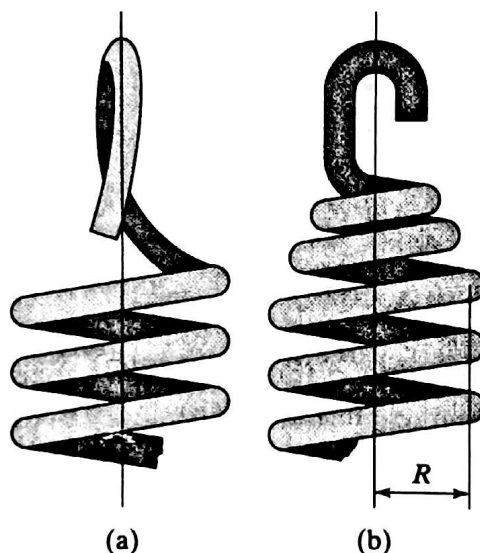
بطوری که می‌دانید در فنرهای مارپیچی کششی حلقه‌های انتهایی فنر را بصورت قلاب در آورده و بار را از طریق این قلابها اعمال می‌کنند. بنابراین شکل این قلابها را باید طوری طراحی کرد که انحنای حاصل از ایجاد قلاب، تیز نشده و در نتیجه تا حد امکان از تمرکز تنش جلوگیری گردد. در شکل (۷-۷) تنها با خم کردن نصف حلقه انتهایی به طرف بالا، قلاب بوجود آورده‌ایم. اگر شعاع انحنای کمتر باشد، مقدار تمرکز تنش در سطح مقطع A بیشتر خواهد شد.

شایعترین روش برای کاهش تمرکز تنش در مقطع مذکور، زیاد کردن شعاع خم r_1 است. در شکل (۷-۸a) روشی را برای اینکار مشاهده می‌نمایید. در اینجا یک حلقه کامل را با انحنای ملایم بطرف بالا خم کرده‌ایم. بدین ترتیب از تمرکز تنش بمقدار زیادی کاسته شده است. یک روش دیگر این است که شعاع حلقه‌های انتهایی فنر را از مقدار ماکزیمم R بتدریج کاهش دهیم، (شکل ۷-۸b). اگر چه در این حالت انحنای حلقه‌های انتهایی فنر زیاد می‌شود، اما بهمان نسبت از بازوی گشتاور مربوط به نیروی وارده کاسته می‌شود.

ایجاد حلقه‌ها یا قلابهای مخصوص در انتهای فنرها و همچنین سنگ‌زنی انتهای فنرهای فشاری، بر هزینه‌های تولید می‌افزایند. بنابراین در موارد ممکن، باید از آنها صرف‌نظر کرد.



شکل ۷-۷: قلاب انتهایی فنر با خم کردن نصف حلقه آخری ایجاد می‌شود.



شکل ۷-۸: انواع قلابهای انتهایی که تمرکز تنش را کاهش می‌دهند.

در محاسبه تغییر طول فنر، قلاب فنر شکل (۷-۷) به اندازه ۰.۱ حلقه و قلاب فنر شکل (۷-۸a) به اندازه ۰.۵ حلقه در نظر گرفته می‌شود. مشخصه دیگر فنرهای مارپیچی کششی عبارت از نیروی کششی اولیه است که در موقع پیچاندن، در آن ایجاد می‌شود. در این نوع فنر تا زمانی که نیروی وارده از کشش اولیه بیشتر نشده تغییر شکل ایجاد نمی‌شود. تنشهای کار برای فنرهای پیچشی کششی معمولاً ۷۵٪ تنشهای کار مربوط به فنرهای پیچشی فشاری است.

۷-۱۳ فنرهای مارپیچی پیچانده شده از سیم مستطیلی

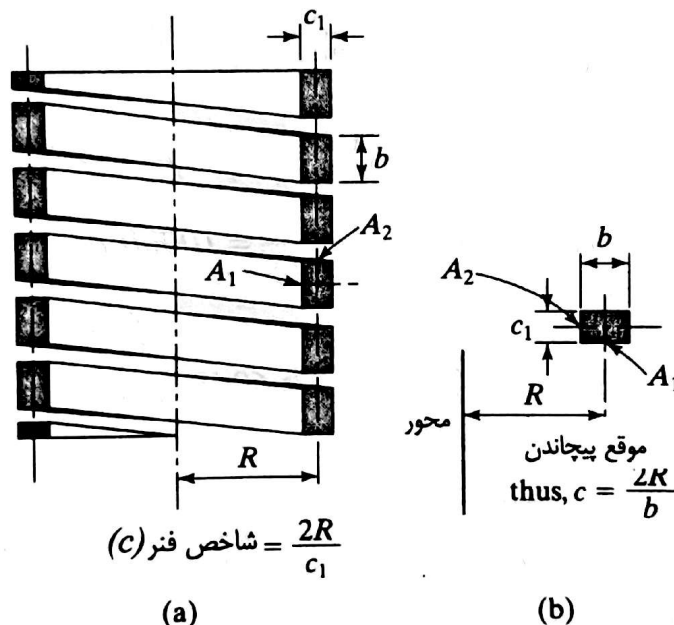
اگر مقطع سیم فنر مارپیچی مستطیلی باشد، می‌توان مقدار تنش برشی آنرا با استفاده از معادلات مربوط به شفت مستطیلی بدست آورد. برای فنرهای نشان داده شده در شکلهای (۷-۹a و b) تنشهای موجود در نقاط A_1 و A_2 از طریق معادلات (۲۳) و (۲۴) فصل ۱۳ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\tau = \frac{PR}{\alpha_1 b c_1^2} \quad \text{برای نقطه } A_1 \quad (19)$$

$$\tau = \frac{PR}{\alpha_2 b c_1^2} \quad \text{برای نقطه } A_2 \quad (20)$$

مقادیر α_1 و α_2 برای نسبت‌های مختلف b/c_1 از جدول (۴-۱۳) بدست می‌آید. تنش برشی عرضی $1.5P/A$ را باید در شکل (۷-۹a) به تنش نقطه A_1 ، و در شکل (۷-۹b) به تنش نقطه A_2 اضافه کرد. با جایگزینی $\theta_1 = \delta / Rl$ و $l = 2\pi R N_c$ در معادله (۲۵) فصل ۱۳، یک معادله مطابق زیر برای تغییر طول فنر بدست می‌آید.

$$\delta = \frac{2\pi PR^3 N_c}{\beta G b c_1^3} \quad (21)$$



شکل ۷-۹: فنر مارپیچی با سیم و مقطع مستطیلی

بعد از پیچاندن سیم مستطیلی مقطع آن تقریباً به فرم دوزنقه در می‌آید. و نوشتن معادلات تنش و تغییر طول برای مقطع دوزنقه‌ای (مقطع واقعی سیم فنر) بسیار مشکل است. لذا معادلات فوق در مورد این نوع فنرها تقریبی خواهد بود، چون در آنها فرض شده سطح مقطع سیم بعد از پیچاندن نیز بطور مستطیلی باقی می‌ماند.

مثال ۶-۷

تنش‌های نقاط A_1 و A_2 فنر شکل (۷-۹b) را به ازای $c_1 = 1/2 \text{ in}$ ، $b = 3/4 \text{ in}$ و $R = 1.2 \text{ in}$ بدست آورید. بار ثابت وارد بر فنر 2500 lb است. اگر تعداد حلقه‌های فعال فنر ۶ عدد باشد، تغییر طول فنر را به دست آورید.

$$P = 2500 \text{ lb} , R = 1.2 \text{ in} , c_1 = \frac{1}{2} , b = \frac{3}{4} \text{ in}.$$

اطلاعات داده شده:

فرضها: فنر از سیم با مقطع مستطیلی ساخته شده است. لذا معادلات بخش ۷-۱۳ صدق می کنند.
روش حل: از معادلات (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) همراه با اطلاعات جدول (۳-۱۳) استفاده می کنیم.
جزئیات حل: از شکل (۷-۹) داریم

$$c = \frac{2R}{b} = \frac{2 \times 1.2}{3/4} = 3.2$$

از جدول (۳-۱۳) داریم

$$b/c_1 = 1.50; \alpha_1 = 0.231; \alpha_2 = 0.269; \beta = 0.196$$

از معادله (۱۹) برای نقطه A_1 داریم

$$\tau = \frac{PR}{\alpha_1 b c_1^2} = \frac{2500 \times 1.2}{0.231 \times 0.75 \times 0.5^2} = 69270 \text{ psi}$$

از معادله (۲۰) برای نقطه A_2 داریم

$$\tau = \frac{PR}{\alpha_2 b c_1^2} = \frac{2500 \times 1.2}{0.269 \times 0.75 \times 0.5^2} = 59480 \text{ psi}$$

تنش برشی عرضی در A_2 به صورت زیر حساب می شود

$$\tau = 1.5 \frac{P}{A} = 1.5 \frac{2500}{0.75 \times 0.5} = 10000 \text{ psi}$$

کل تنش برشی در A_2 عبارت است از

$$\tau = 59480 + 10000 = 69480 \text{ psi}$$

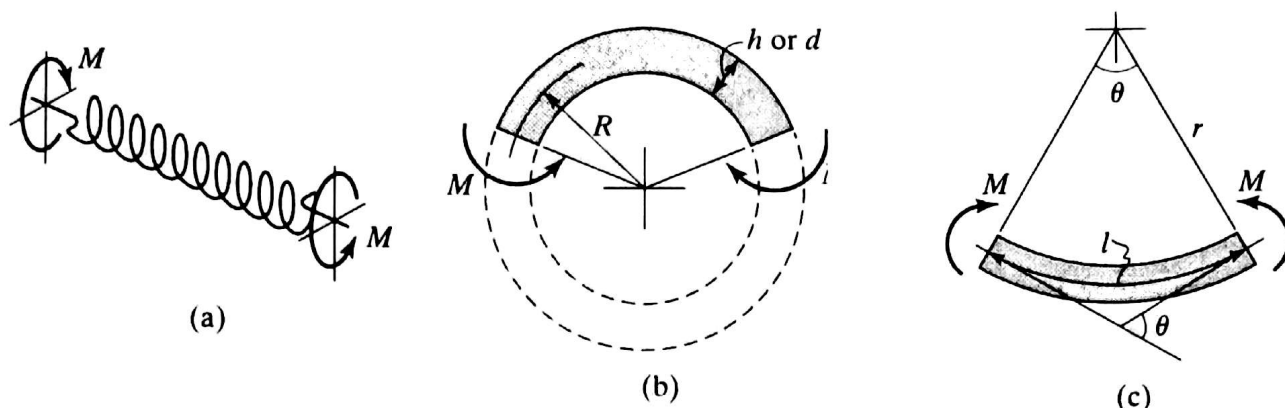
در معادله (۲۱) داریم

$$\delta = \frac{2\pi \times 2500 \times 1.2^3 \times 6}{0.196 \times 11500000 \times 0.75 \times 0.5^3} = 0.771 \text{ in.}$$

در مورد بارهای متغیر می توان از مطالب بخش (۷-۷) برای طراحی فنر استفاده کرد. در محاسبات مربوط به این روش، مقدار K_c را بطور تقریبی از معادله (۱۴) تعیین می کنند.

۷-۱۴ فنرهای مارپیچی تحت بارهای پیچشی

یک فنر مارپیچی را می توان نسبت به محور طولیش تحت گشتاور قرار داد. مطابق شکل (۷-۱۰a) اعمال گشتاور به یک فنر مارپیچی شبیه اعمال بار پیچشی به یک شفت است. موقعی که حول محور فنر مارپیچی گشتاور وارد می شود، در حقیقت مقاطع سیم فنر مطابق شکل (۷-۱۰b) تحت مماس خمشی قرار می گیرند. بنابراین تنشی در فنر ایجاد می شود که تمایل به خم کردن ماده فنر دارد، برای محاسبه آن از معادله تنش خمشی معمولی استفاده می شود.



شکل ۱۰-۷: بارگذاری و تغییر شکل زاویه‌ای فنر پیچشی

بدلیل منحنی بودن حلقه‌های فنر، مقدار تنش در سطح داخلی حلقه‌ها بیشتر از سطح خارجی آنها است. با ضرب کردن مقدار تنش حاصل از معادله (۱۰)، $\sigma = Mv / I$ ، در یک ضریب تمرکز تنش مناسب، می‌توان مقادیر تنش را در سطح داخلی و خارجی بدست آورد. در صورتی که مقطع سیم فنر مستطیلی باشد این ضرایب بصورت زیر خواهند بود.

$$K_1 = \frac{3c^2 - c - 0.8}{3c(c-1)} \quad \text{برای لبه داخلی} \quad (22)$$

$$K_2 = \frac{3c^2 + c - 0.8}{3c(c+1)} \quad \text{برای لبه خارجی} \quad (23)$$

در معادلات فوق $c = 2R / h$ و h عبارت از عمق قائم مقطع سیم در امتداد محور است. در مورد مقاطع دایره‌ای سیم فنر، ضرایب تمرکز تنش بصورت زیر هستند

$$K_3 = \frac{4c^2 - c - 1}{4c(c-1)} \quad \text{برای لبه داخلی} \quad (24)$$

$$K_4 = \frac{4c^2 + c - 1}{4c(c+1)} \quad \text{برای لبه خارجی} \quad (25)$$

در این معادلات $c = 2R / d$ است.

در فنرهای سرد - پیچانده بعد از پیچاندن فنر، در سطح خارجی آن تنش فشاری حبس می‌شود. بنابراین برای افزایش استحکام فنر باید بار قائم وارد بر آن را طوری اعمال کرد که بخواهد فنر را بپیچاند (در سطح خارجی حلقه‌ها تنش کششی ایجاد کند). اگر در داخل فنر میله یا ستونی وجود داشته باشد، باید بین میله و سطح داخلی فنر فاصله کافی وجود داشته باشد تا فنر بتواند در حین کار پیچانده شده و کاهش شعاع بدهد. در صورتی که بارهای وارده بر فنر متغیر باشند، باید خمهای مربوط به قلابهای موجود در انتهای فنر نیز نباشند، در غیر اینصورت تمرکز تنش در آنها خیلی بیشتر خواهد شد. برای اندیس فنرهای معمول، انحناهای حلقه‌های فنر در مقدار تغییر شکل زاویه‌ای تأثیری ندارد. مقدار تغییر شکل سیم فنر بطول l برابر با مقدار تغییر شکل یک میله راست به همان طول است. مطابق نمودار (۱۳-۱) تغییر شکل زاویه‌ای کل θ بین دو خط مماس بر دو انتهای یک میله (شکل ۱۰-۷)، بصورت زیر است

$$\theta = \frac{Ml}{EI} \quad (26)$$

در بعضی موارد مقدار θ برابر با چند دور می شود.

مثال ۷-۷

فنر مارپیچی پرده کرکره پنجره‌ای را از سیم موسیقی شماره 17 ساخته‌اند. قطر مارپیچ و تعداد حلقه‌های آن به ترتیب برابر با 0.875in و 400 است. فرض کنید $\sigma_{yp} = 0.6\sigma_{ult}$ و براساس نقطه سیلان مقدار $F_S = 2$ باشد. با در نظر گرفتن تمرکز تنش حاصل از انحنای حلقه‌ها، تنش‌های موجود در سطح داخلی مارپیچ را حساب کنید. اگر فنر از حالت کاملاً پیچانده شده، 12 دور باز شود مقدار گشتاوری را که می‌تواند در این حالت اعمال کند چقدر است.

اطلاعات داده شده: ماده فنر سیم موسیقی شماره 17 است؛

$$F_S = 2 \text{ و } D = 0.875 ; N_c = 400 ; \sigma_{yp} = 0.6 \sigma_{ult} \text{ ; } 12 \text{ دور باز شده.}$$

فرضها: بارگذاری در فنر پیچشی از نوع خمشی است.

روش حل: علاوه بر معادلات معمولی مربوط به خمش تیر در فصل ۱، از معادلات (۲۴) و (۲۶) همراه با اطلاعات جدول (۷-۱) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: از جدول (۷-۱) داریم

$$d = 0.0540 \text{ , } \sigma_{ult} = 301000 \text{ psi}$$

$$c = \frac{2R}{d} = \frac{0.875}{0.054} = 16.2$$

از معادله (۲۴) داریم

$$K_3 = \frac{4 \times 16.2^2 - 16.2 - 1}{4 \times 16.2 (16.2 - 1)} = 1.048$$

$$\sigma_{yp} = 0.6 \times 301000 = 180600 \text{ psi}$$

$$K_3 \sigma = \frac{\sigma_{yp}}{F_S} = \frac{180600}{2} = 90300 \text{ psi}$$

$$\sigma = \frac{90300}{1.048} = 86140 \text{ psi}$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.054^4}{64} = 0.0000004174 \text{ in}^4$$

در تحت تنش حداکثر داریم

$$M = \frac{\sigma I}{r} = \frac{86140 \times 0.0000004174}{0.027} = 1.3317 \text{ in} \cdot \text{lb}$$

$$l = 2\pi RN_c = \pi \times 0.875 \times 400 = 1100 \text{ in.}$$

با استفاده از معادله (۲۶) در تحت تنش حداکثر داریم

$$\theta = \frac{1.3317 \times 1100}{30000000 \times 0.0000004174} = 116.94 \text{ rad}$$

پس از ۱۲ دور باز شدن فنر داریم

$$\theta_2 = 116.94 - 12 \times 2\pi = 41.54 \text{ rad}$$

با استفاده از معادله (۲۶) گشتاور پیچشی باقیمانده به صورت زیر حساب می‌شود

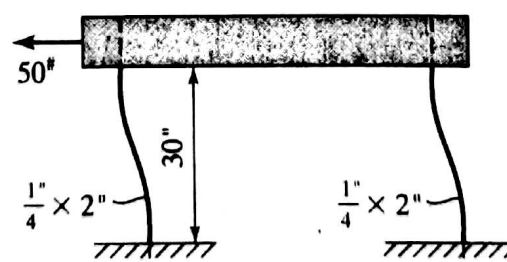
$$M = \frac{30000000 \times 0.0000004174 \times 41.54}{1100} = 0.473 \text{ in.lb}$$

۷-۱۵ فنرهای برگ

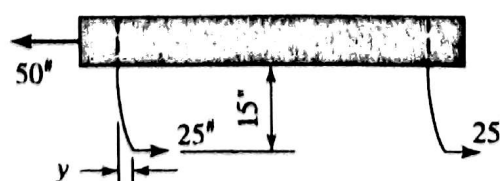
تنش‌ها و تغییر شکل‌های یک فنر برگ مستطیلی را در صورتی که مقدار خمش کمتر باشد، می‌توان از طریق معادلات مربوط به تیر (بطوری که فصل ۱ مورد بحث قرار گرفت) حساب کرد. در مواردی که عرض مقطع فنر نسبت به ضخامت آن زیاد است، لازم است مقدار خمش محاسبه شده از معادله تیر نازک را به عبارت $(1 - \mu^2)$ ضرب کنیم. همانگونه که در بخش ۱۳-۱ از فصل ۱ تشریح شد، (μ) را نسبت پواسون می‌نامند.

مثال ۷-۸

مقدار جابجایی جانبی میز متکی به فنر نشان داده شده در شکل (۷-۱۱) را به دست آورید. فنرهای فولادی در بالا و پایین ثابت هستند، به گونه ای که خطوط مماس در دو سر فنرها همواره به صورت قائم می‌مانند.



(a)



(b)

شکل ۷-۱۱: مثال ۷-۸

اطلاعات داده شده: خواص هندسی و بارگذاری در شکل (۷-۱۱).

فرضها: جابجایی ها کوچک است به گونه ای که می توان از معادلات مربوط به تیر ساده استفاده کرد. برای فولاد $\mu = 0.3$ است.

روش حل: از معادلات نمودار شماره ۵ شکل (۱-۱۳) استفاده می کنیم.

جزئیات حل: فنرها به طور متقارن خم شده اند و نقطه عطف آنها در نقطه وسط ارتفاع آنها قرار دارد. گشتاور خمشی در نقطه عطف صفر است. زیرا در این نقطه، گشتاور خمشی تغییر علامت می دهد. همانگونه که در نمودار جسم آزاد شکل (۷-۱۱b) نشان داده شده، اگر فنرها را از نقطه وسط ارتفاع آنها برش دهیم، تنها نیروهای برشی موجود خواهند بود. بنابراین می توان نوشت

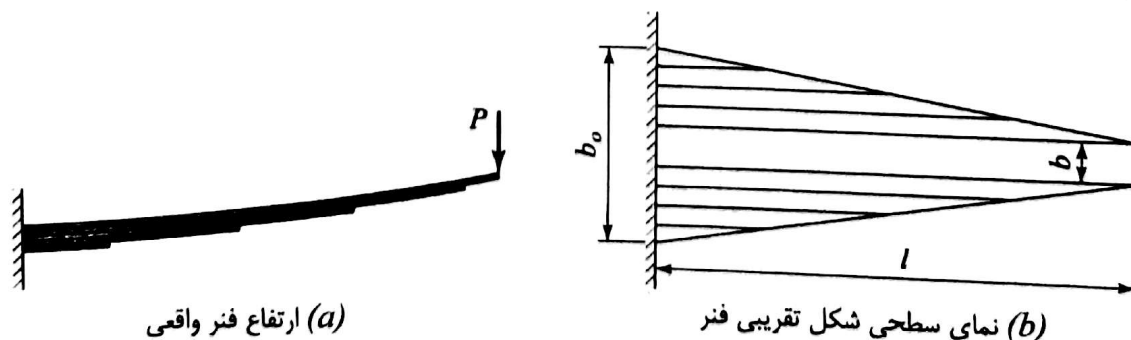
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{64 \times 12} = \frac{1}{384} \text{ in}^4.$$

$$y = (1 - \mu^2) \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{(1 - 0.3^2) \times 25 \times 15^3 \times 384}{3 \times 30000000} = 0.3276 \text{ in}.$$

کل جابجایی میز برابر است با

$$2 \times 0.3276 = 0.6552 \text{ in}.$$

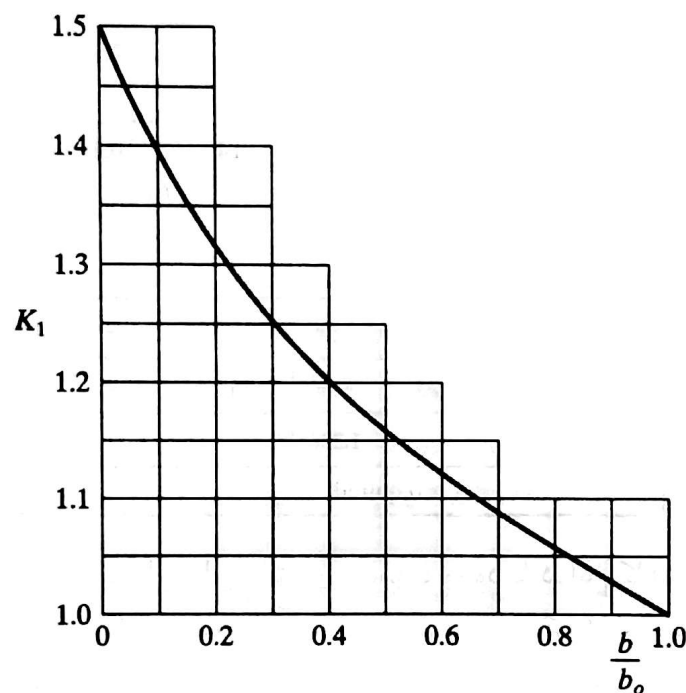
فنر برگ مرکب بطور وسیعی بخصوص در اتومبیل ها و خودروهای راه آهن مورد استفاده قرار می گیرد. تحلیل دقیق این نوع فنرها مشکل است. ولی اگر فرض کنیم برگهای کوتاهتر بطور شیبدار باشند (بطوری که انتهای آنها تیز باشد) و در موقع خمش فنر برگهای آن در تمام طولشان با هم مماس باقی بمانند. می توان بطور تقریبی این نوع فنرها را محاسبه کرد. با در نظر گرفتن شرایط فوق می توان فنر واقعی شکل (۷-۱۲a) را بصورت دوزنقه (شکل ۷-۱۲b) فرض نمود و انحنا و تنش آنرا محاسبه کرد. برای تشکیل این دوزنقه هر یک از برگهای کوچکتر فنر را از خط وسط طولی آن برش داده و دو قسمت می کنیم. سپس هر قسمت را در یک طرف شاه فنر (بزرگترین برگ فنر) قرار داده و به همدیگر جوش می دهیم. عرض b_0 در تکیه گاه دوزنقه برابر با حاصلضرب عرض هر یک از برگها در تعداد آنها است. موقعی که این دوزنقه تحت تاثیر نیروی P خمش پیدا می کند، انحنا و خمش و در نتیجه تنش موجود در دو طرف خط جوش برابر می شوند. برای خمش های کم، معادله خمش برای چنین دوزنقه ای تحت بار P بصورت زیر است



شکل ۷-۱۲: فنر برگ مرکب به شکل یک دوزنقه تقریبی

$$\delta = K_I \frac{Pl^3}{3EI_0} \quad (27)$$

ضریب K_I به نسبت عرض‌های b/b_0 بستگی دارد و توسط منحنی شکل (۷-۱۳) داده می‌شود. ممان اینرسی I_0 مربوط به مقطع دوزنقه در دیوار است و مقدار آن از عبارت $b_0 h^3 / 12$ بدست می‌آید. در این عبارت h ضخامت برگ فنر است. اگر مقدار b در مقایسه با h زیاد باشد، به نکته گفته شده در مورد خمش تیرهای عریض باید توجه کرد.



شکل ۷-۱۳: ضریب K_I برای خمش فنر دوزنقه‌ای

اگر مقدار خمش فنر در مقایسه با ضخامت آن زیاد باشد، نمی‌توان از معادلات معمولی مربوط به خمش کم تیرها، استفاده کرد. محاسبه مقدار خمش‌های بیشتر بسیار مشکل و از حوصله این کتاب خارج است. اطلاعات حاصل از شکل (۷-۱۳) را می‌توان با استفاده از یک مدول ویژه آماده شده برای این هدف بدست آورد. برای تشریح کاربرد این مدول، مثال زیر آورده شده است.

مثال ۷-۹

یک فنر دوزنقه ای به ابعاد $b = 3 \text{ in.}$ و $b_0 = 9 \text{ in.}$ طراحی شده است. مقدار ضریب K_I را به دست آورید.

اطلاعات داده شده: فنر از نوع دوزنقه ای است. $b = 3 \text{ in.}; b_0 = 9 \text{ in.}$

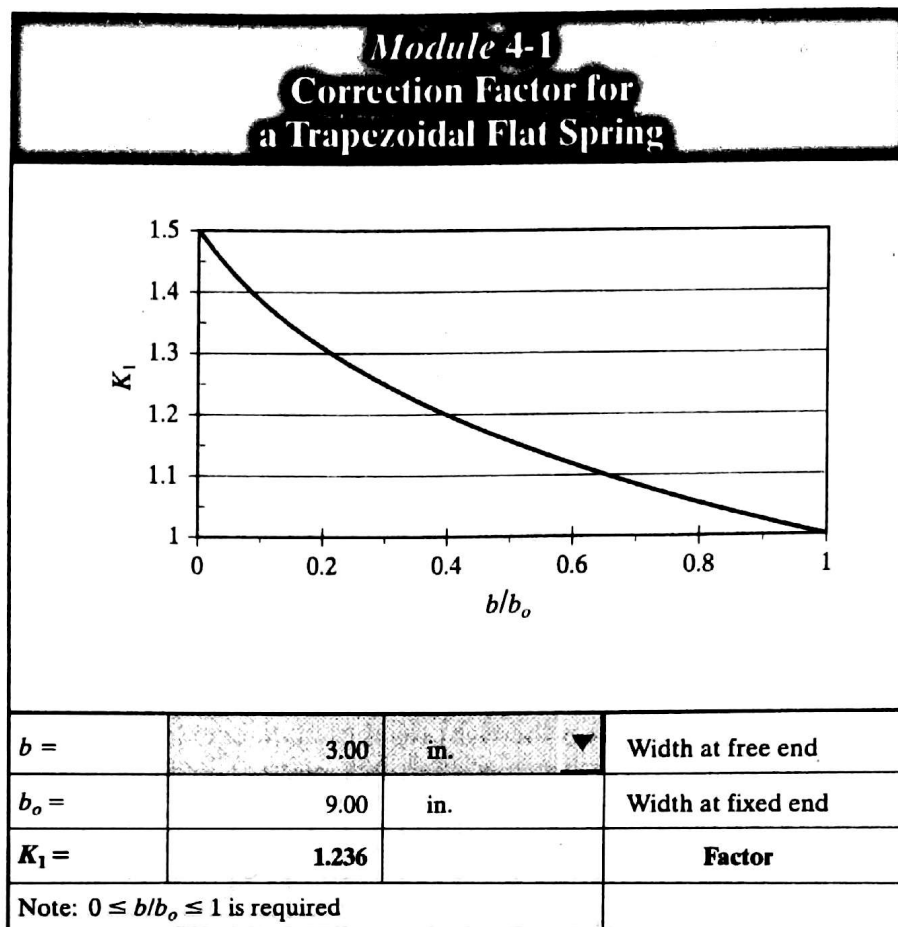
فرضها: جابجایی (خمش) فنر نسبتاً کوچک است.

روش حل: از اطلاعات جدول (۷-۱۳) به دست آمده از صفحه گسترده (۴-۱) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: با استفاده از مدول (۴-۱) صفحه قبل، این مسئله حل می‌شود.

Click here for instructions on how to use this spreadsheet.

Click here to learn more about this spreadsheet.



معمولاً در کف فنرهای برگ یک سوراخ برای بستن پیچ و مهره وجود دارد. این کاهش سطح همراه با تمرکز تنش معمولاً در نقطه پر تنش فنر قرار دارد و اغلب موجب گسیختگی فنر می‌گردد. ضریب تمرکز تنش یک میله تحت تنش با شیارهای نیم‌دایره‌ای و میله سوراخدار در شکل (۲۰-۴) توسط منحنی داده شده است. عامل مضر دیگر عبارت از فشاری است که در موقع بستن فنر اعمال می‌شود. این فشار نیز معمولاً در نقطه‌ای که مقدار تنش خمشی ماکزیمم است بوجود می‌آید و موجب کاهش استحکام خستگی فنر می‌گردد.

مواد مناسب برای فنرهای برگ در جدول (۷-۷) داده شده‌اند. نکاتی که قبلاً در مورد کیفیت سطح و سطح کربن از دست داده ذکر شده در مورد فنرهای برگ نیز صادقند. اگر خمش‌های تیز در نقاط پر تنش فنر بوجود آیند، باید تمرکز تنش ناشی از آنها را در محاسبات خود وارد کنیم. بخصوص اگر بارهای اعمالی به فنر از نوع غیر ثابت باشند.

۷-۱۶ ذخیره سازی انرژی توسط فنرها

فنرها مکرراً در موتورهای فنری جهت ذخیره کردن انرژی و یا برای جذب انرژی حاصل از بارهای ضربه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر نیرو و تغییر شکل فنر متناسب باشند، انرژی ذخیره شده مساوی $P\delta/2$ خواهد بود. در این عبارت P مقدار بار و δ تغییر شکل فنر است. در این عبارت چنین فرض شده که قبل از بار P فنر بدون بار است. انرژی ذخیره شده در یک فنر مارپیچی با سیم فنر گرد و تحت بار استاتیکی عبارتست از

$$\text{انرژی} = \frac{1}{2} P\delta = \frac{P}{2} \times \frac{64PR^3 N_c}{d^4 G}$$

اجازه دهید تساوی زیر را توسط معادله (a) بخش ۱-۴ و معادله (۱۰) تشکیل دهیم

$$\frac{\tau^2}{4G} \times \text{حجم} = \frac{1}{4G} \times \frac{256 P^2 R^2}{\pi^2 d^6} \times \frac{\pi^2 d^2 R N_c}{2}$$

طرفهای راست معادلات فوق مساوی هستند. بنابراین

$$\text{حجم} = \frac{1}{2} P \delta = \frac{\tau^2}{4G} \times \text{حجم} \quad (28)$$

فنرهای وجود دارند که واحد وزن آنها به ازای تنش‌های مساوی، انرژی بیشتری نسبت به سایر انواع فنر ذخیره می‌کنند. برای مقایسه فنرهای مارپیچی با سایر انواع فنر، معادله (۲۸) را به واحدهای تنش محوری تبدیل می‌کنیم. در محدوده الاستیک $\tau = 0.5 \sigma$ و $G = E / 2(1 + \mu)$ است. در این عبارت $\mu = 0.3$ است. این مقادیر را در معادله (۲۸) جاگذاری می‌کنیم.

$$\text{حجم} = \frac{\sigma^2}{6.15 E} \times \text{انرژی} \quad (29)$$

برای یک فنر پیچشی مقدار انرژی مساوی $\theta M/2$ است. حال با استفاده از معادله (۲۶) و با جاگذاری $M = \sigma I / c$ و $I = bh^3 / 12$ ، در مورد فنرهای که از سیم مستطیلی ساخته شده‌اند خواهیم داشت

$$\text{حجم} = \frac{\sigma^2}{6 E} \times \text{انرژی} \quad (30)$$

اگر فنر پیچشی از سیم فنر گرد ساخته شده باشد، مقدار ممان اینرسی $I = \pi d^4 / 64$ است و معادله انرژی بصورت زیر خواهد بود

$$\text{حجم} = \frac{\sigma^2}{8 E} \times \text{انرژی} \quad (31)$$

ملاحظه می‌کنید که ظرفیت ذخیره انرژی فنرهایی که از سیم گرد ساخته شده‌اند کمتر است. اگر یک سرتیری با مقطع مستطیلی را در دیواری متصل کرده و در سر دیگر آن باری معادل P بگذاریم خمشی در تیر ایجاد می‌شود که مقدار آن از عبارت $Pl^3 / 3EI$ بدست می‌آید. همچنین معادله انرژی بر حسب تنش ماکزیمم (که در تکیه‌گاه ایجاد می‌شود) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\text{حجم} = \frac{\sigma^2}{18 E} \times \text{انرژی} \quad (32)$$

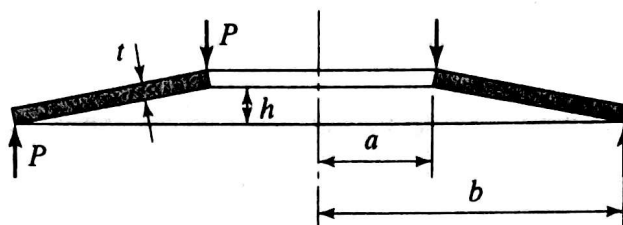
هرگاه مقطع تیر مذکور بشکل مثلث ($b/b_0 = 0$) باشد، مقدار خمشی با استفاده از معادله (۲۱) و شکل (۱۳-۷) برابر با $1.5 Pl^3 / 3EI_0$ می‌شود و معادله انرژی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\text{حجم} = \frac{\sigma^2}{6 E} \times \text{انرژی} \quad (33)$$

چون فنر برگ مرکب را می‌توان تقریباً بصورت تیر مثلثی یاد شده فرض کرد، طبق معادله (۳۳) چنین فنری انرژی زیادی در خود ذخیره می‌کند.

۷-۱۷ فنر بلویل

فنر مخروطی یا بلویل در شکل (۷-۱۴) نشان داده شده است. در این نوع فنر رابطه بین خمش و بار غیرخطی است. ابعاد این فنر را می‌توان طوری انتخاب کرد که به ازای یک بار ناچیز خمش زیادی از خود نشان دهد. این خاصیت در بعضی ماشینها دارای اهمیت زیادی است.

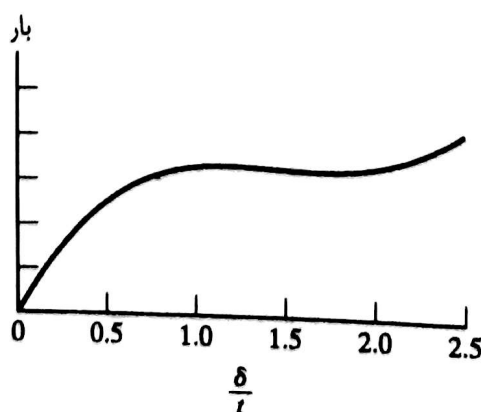


شکل ۷-۱۴: سطح مقطع فنر مخروطی یا بلویل

طراحی این فنرها بسیار مشکل است، اما اگر مقدار بار بقدری باشد که خمش فنر δ برابر با ارتفاع h و $h/t = 1.5$ باشد می‌توان معادلات ساده‌ای آن نوشت. در شرایط مذکور فنر تحت تاثیر بار، فشرده شده و بصورت تخت در می‌آید. اما منحنی بار - خمش شکل (۷-۱۵) برای فنری با $h/t = 1.5$ نشان می‌دهد که چنین باری عملاً متناظر با مقادیر δ/t بین ۱.۰ و ۲.۰ خواهد بود. بدین ترتیب این فنر در اثر اعمال بار ناچیز (یا عملاً صفر) خمش زیادی از خود نشان می‌دهد. جدول (۷-۱۲) مقادیر لازم برای انجام محاسبات را نشان می‌دهد. معادله زیر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\sigma_t = K_I \frac{Et^2}{b^2} \quad (34)$$

در طراحی فنرهای بلویل از تنش‌های زیاد استفاده می‌کنند. در شکل (۷-۱۴) تنش ماکزیمم عبارتست از فشاری که در مرز داخلی سطح فوقانی وجود دارد. طی تجربه ثابت شده که برای بارهای استاتیک یا بارهایی که تعداد تناوبشان کم است. تنش ماکزیمم می‌تواند 200000 psi باشد، حتی اگر تنش سیلان ماده فنر بطور قابل توجهی کم باشد. اگر مقدار تنش وارده از تنش حد سیلان ماده فنر تجاوز کند، یک پخش مجدد تنش‌ها بدلیل سیلانهای موضعی ماده، بوجود می‌آید. در این فنرها تنش‌هایی با علامت مخالف حبس می‌شوند. این تنش‌های محبوس باعث می‌شوند تنش‌های حاصل از بارهای اعمالی، در ماده فنر از مقدار محاسبه شده کمتر باشند.



شکل ۷-۱۵: منحنی بار - خمش به ازای $h/t = 1/5$

جدول ۷-۱۲، ثابتهای مربوط به فنر بل ویل فولادی به ازای $h/t = \delta/t = 1.5$.

$\frac{b}{a}$	K_1	$\frac{b\sigma_t}{\sqrt{P}}$
1.25	-8.83	-22,090
1.50	-6.29	-19,430
1.75	-5.63	-19,050
2.00	-5.44	-19,350
2.50	-5.54	-20,630

مثال ۷-۱۰

یک فنر بل ویل فولادی به مشخصه $h/t = 1.5$ باری معادل 1000 lb را با تنش حداکثر 200000 psi تحمل می‌کند این فنر تحت فشار وارده کاملاً به صورت تخت (بدون انحنای) در آمده است. اگر $b/a = 1.75$ باشد، مقادیر شعاع خارجی b و ضخامت t آن را بدست آورید.

اطلاعات داده شده: $h/t = 1.5$ و $b/a = 1.75$; $\sigma_t = 200000\text{ psi}$; $P = 1000\text{ lb}$

فرضها: فنر از نوع بلویل است.

روش حل: از اطلاعات جدول (۷-۱۲) و معادله (۳۴) استفاده می‌کنیم.

جزئیات حل: از جدول (۷-۱۲) داریم

$$\frac{b\sigma_t}{\sqrt{P}} = -19050; K_1 = -5.63$$

بنابراین

$$b = \frac{-19050 \sqrt{P}}{\sigma_t} = \frac{-19050 \sqrt{1000}}{-200000} = 3.012\text{ in.}$$

$$a = \frac{b}{1.75} = \frac{3.012}{1.75} = 1.721$$

از معادله (۳۴) داریم

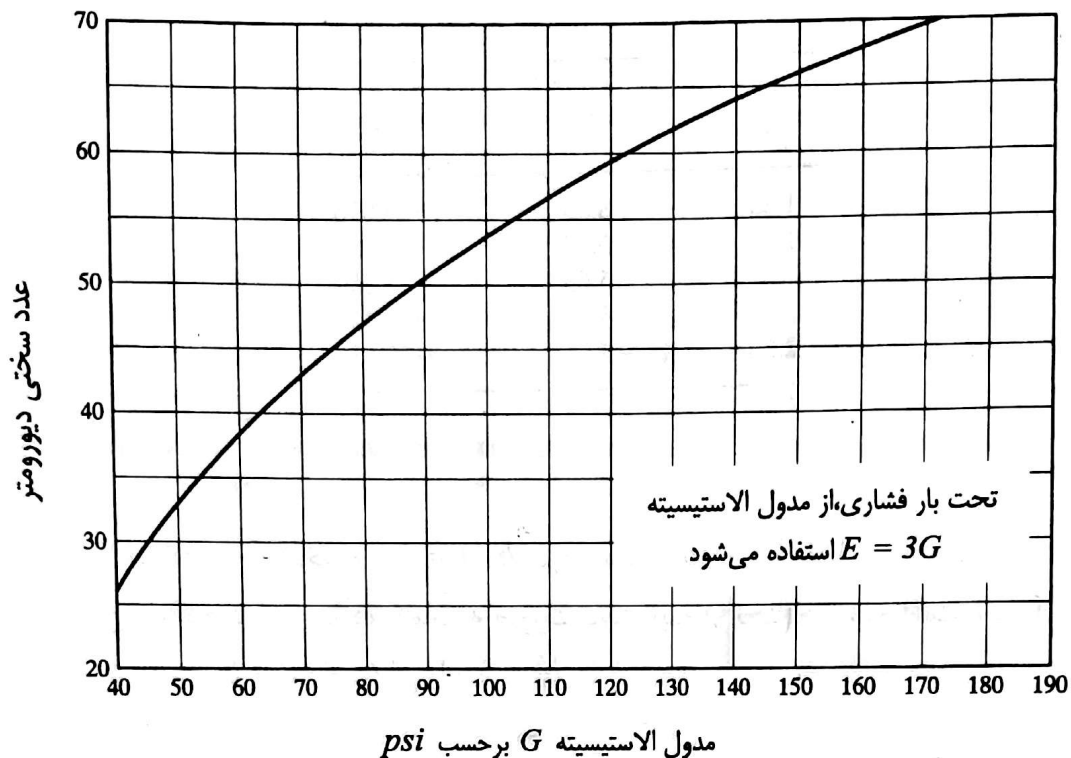
$$t^2 = \frac{b^2 \sigma_t}{K_1 E} = \frac{3.012^2 (-200000)}{-5.63 \times 30000000} = 0.01074$$

$$\rightarrow t = 0.1036\text{ in.}, h = 1.5t = 0.1554\text{ in.}$$

بدین ترتیب ابعاد فنر بطور کامل تعیین می‌شود.

۷-۱۸ فنرهای لاستیکی

کاربرد فنرهای لاستیکی و بالشتک‌های کشسانی در صنعت بسرعت افزایش می‌یابد. رفتار لاستیک در تحت تنشهای وارد به طور کامل شناخته نشده است. بنابراین نتایج محاسبات مربوط به آنها تقریبی است.



شکل ۱۶-۷: رابطه بین عدد سختی دیورومتر و مدول الاستیسیته لاستیک

مدول کشسانی مواد لاستیکی مطابق شکل (۱۶-۷) بستگی به عدد سختی دیورومتر (*durometer*) آنها دارد. لاستیک از قانون هوک پیروی نمی کند، اما در اثر تغییر شکل سفت تر می شود. اسمیت معادله زیر را به عنوان رابطه عددی بین سختی دیورومتر D و مدول کشسانی E لاستیک پیشنهاد کرد

$$E = 50.8 e^{0.033 D} \quad (34a)$$

اسمیت خاطر نشان کرد که این رابطه تنها در محدوده زیر قابل استفاده است

$$24 \leq D \leq 72$$

در شکل (۱۷-۷) رابطه بین بار و خمش برای یک لاستیک مکعبی یک اینچی با دیورومتر ۵۵ نشان داده شده است. آقایان شوپ و سانچز^۴ یک رابطه عددی برای این منحنی ارائه کرده اند که در این کتاب بعنوان بخشی از مدول صفحه گسترده به کار رفته است.

غالباً از تکه های لاستیکی مطابق شکل (۱۸-۷) به عنوان فنر فشاری استفاده می کنند. براساس آزمایشات متعددی، معادله تجربی^۵ زیر را برای محاسبه درصد تغییر بعد (خمش) فنر به دست آورده اند

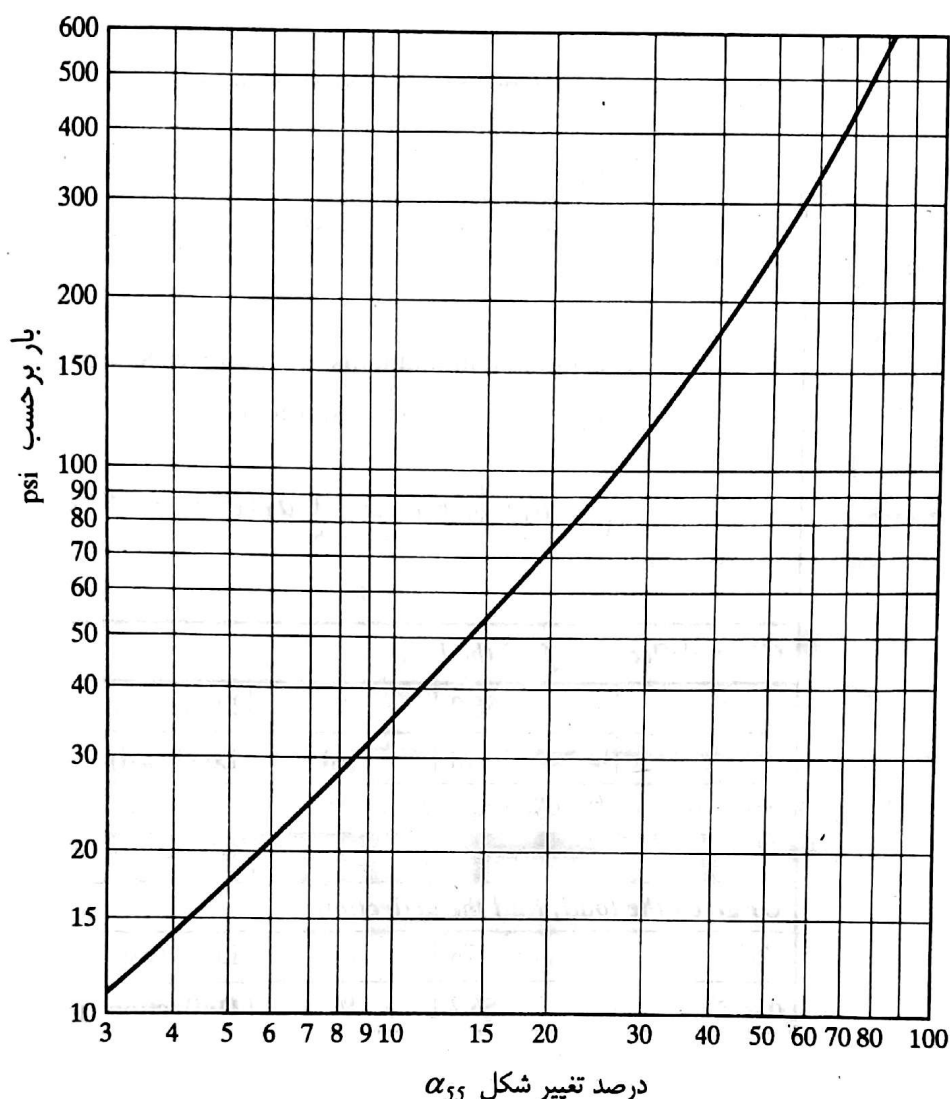
$$\alpha = \frac{\alpha_{55} E_{55}}{E} \times \frac{(h\beta)^{2/3}}{\sqrt{A}} \quad (35)$$

در اینجا α_{55} نشانگر درصد تغییر شکل لاستیک مکعبی یک اینچی با عدد دیورومتر ۵۵ تحت تنش فشاری است (شکل ۱۷-۷). E_{55} بیانگر مدول کشسانی ۳۱۳ psi برای لاستیکی با دیورومتر ۵۵ است. همانگونه که در

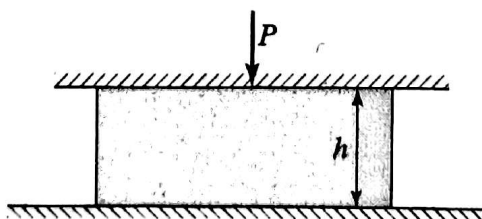
۴. کتاب 'طراحی کامپیوتری فنرهای مونتاز' نوشته آقای T.E. shoup و L.A. Sanchez

۵. به کتاب 'مونتازهای لاستیکی' نوشته J.F.D smith نگاه کنید.

شکل (۷-۱۶) می‌بینید، مدول E بیانگر سختی دیورومتر تکه ورق مورد نظر است. ضخامت تکه ورق با h in.، نسبت طول آن به پهنایش با β و مساحت قائم بر بار با A نشان داده شده است.



شکل ۷-۱۷: منحنی بار و تغییر شکل لاستیک مکعبی به ضلع l اینچ و با دیورومتر 55 که توسط صفحات فولادی پوشانده شده است



شکل ۷-۱۸: فنر لاستیکی تحت بار فشاری

مثال ۷-۱۱

تکه لاستیکی به سطح 3×6 in. و به ضخامت 1 in. باری برابر با 5000 lb تحمل می‌کند. عدد دیورومتر لاستیک برابر با 65 است. درصد تغییر بعد (α) این تکه لاستیک را بدست آورید.

اطلاعات داده شده: ابعاد لاستیک $3 \times 6 \times 1$ in. است؛ سختی دیورومتر لاستیک 65 است. $P = 5000$ lb.

فرضها: این ماده از قانون هوک پیروی نمی کند، اما از رابطه اسمیت پیروی می کند.
روش حل: از تقریب شوپ و سانچز در مورد خط اسمیت، همانگونه که در مدول (۲-۴) صفحه گسترده بکار رفته، استفاده می کنیم. همچنین از معادلات (۳۴a) و (۳۵) استفاده خواهیم کرد.

Click here for instructions on how to use this spreadsheet.

Click here to learn more about this spreadsheet.

Module 4-2
Mean Load-Deflection of a 1 inch Cube of 55 Durometer Rubber

This module implements the Shoup & Sanchez approximation to the Smith line for rubber.

$$\frac{P}{A} = a_1 \alpha_{55} + a_2 \alpha_{55}^2 + a_3 (e^{a_4 \alpha_{55}} - e^{a_5 \alpha_{55}})$$

Given deflection, find the load			
$\alpha_{55} =$	56.2	%	Deflection (percent)
P/A	278	psi	Load (psi)
Note: $0 \leq \alpha_{55} \leq 80\%$ required			
Or given the load, find the deflection			
P/A	278	psi	Load (psi)
$\alpha_{55} =$	56.2	%	Deflection (percent)
Note: $0 < P/A < 600$ psi required			

جزئیات حل: بار واحد عبارت است از

$$\beta = \frac{6}{3} = 2 ; P = \frac{5000}{3 \times 6} = 278 \text{ psi}$$

با استفاده از معادله (۳۴a) داریم

$$E = 50.8e^{0.033D} = 50.8e^{0.033 \times 65} = 434 \text{ psi}$$

از معادله (۳۵) داریم

$$\alpha = \frac{56.2 \times 313 (1 \times 2)^{2/3}}{434 \sqrt{3 \times 6}} = 15.16\%$$

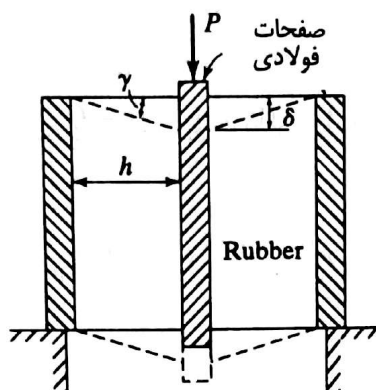
با تعیین مقادیر α به ازای بارهای دیگر، می توان نمودار بار - تغییر بعد فنر لاستیکی را رسم کرد. در اینجا فرض شده که سطوح بالایی و تحتانی لاستیک در شکلهای (۷-۱۷) و (۷-۱۸) با صفحات فلزی پوشانیده شده اند.

در شکل (۷-۱۹) یک فنر برشی ساده متشکل از دو تکه لاستیک، نشان داده شده است. قانون هوک بطور منطقی در مورد لاستیک تحت برش، صدق می کند. و معادله زیر را می توان برای تغییر شکل برشی γ آن نوشت

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{2AG} \quad (a)$$

در این معادله A نشانگر مساحت یکی از سطوح تحت برش است. تغییر بعد δ فنر برابر با $h \tan \gamma$ است. در مورد زوایای کوچک می‌توان به جای تانژانت زاویه، خود زاویه را قرار داد. در اینصورت خواهیم داشت $\delta = h\gamma$. اکنون با جاگذاری مقدار γ در معادله (۳۶)، معادله تغییر بعد δ به صورت زیر بدست می‌آید

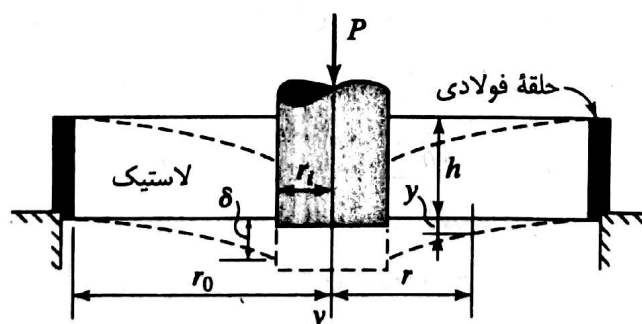
$$\delta = \frac{P h}{2 A G} \quad (36)$$



شکل ۱۹-۴: فنر لاستیکی برشی ساده

در شکل (۲۰-۷) یک فنر برشی استوانه‌ای نشان داده شده است. سطح خارجی این لاستیک با یک حلقه فولادی پوشانده شده و سطح داخلی آن به یک شفت فولادی منتهی می‌شود. مقدار تنش برشی در شعاع r از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\tau = \gamma G = \frac{P}{2 \pi r h}$$



شکل ۲۰-۷: فنر لاستیکی استوانه‌ای تحت بار برشی

بنابراین زاویه تغییر شکل فنر بصورت زیر خواهد بود

$$\gamma = \frac{P}{2 \pi r h G} = \frac{b}{r}$$

در این رابطه داریم

$$b = \frac{P}{2 \pi h G}$$

شیب لاستیک تغییر شکل یافته، در شعاع r از معادله زیر بدست می‌آید

$$\frac{dy}{dr} = \tan \gamma = -\tan \frac{b}{r}$$

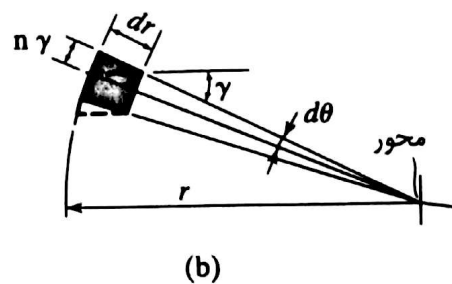
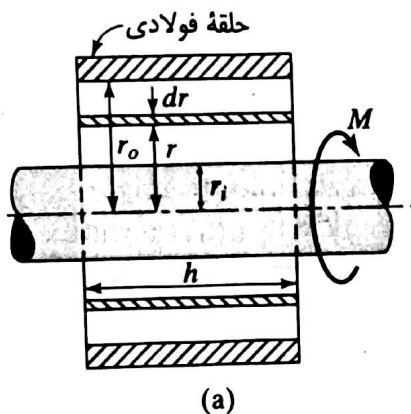
علامت منفی از این واقعیت ناشی می‌شود که مقدار شیب در سیستم مختصات منتخب منفی است. حال عبارت تانژانتی را بصورت یک سری بسط می‌دهیم و جمله به جمله از آن انتگرال می‌گیریم

$$\frac{dy}{dr} = \frac{-b}{r} - \frac{b^3}{3r^3} - \dots$$

$$y = -b \log_e r + \frac{b^3}{6r^2} + \dots + C$$

اگر مقدار γ حدوداً از ۰.۴ کمتر باشد، غیر از عبارت $b \log_e r$ از جملات دیگر صرف‌نظر می‌کنیم. زیرا نیازی به دیگر جملات نیست. به ازای $r = r_0$ داریم $y = 0$. با جاگذاری این مقادیر در معادله، مقدار ثابت انتگرال C به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت

$$C = b \log_e r_0 \quad ; \quad y = b \log_e \frac{r_0}{r}$$



شکل ۷-۲۱: فنر لاستیکی استوانه‌ای تحت بار پیچشی

مقدار ماکزیمم γ یا δ به ازای $r = r_i$ اتفاق می‌افتد. پس خواهیم داشت

$$\delta = b \log_e \frac{r_0}{r_i} = \frac{P}{2\pi h G} \log_e \frac{r_0}{r_i} \quad (37)$$

در شکل (۷-۲۱) یک فنر استوانه‌ای تحت تنش برشی پیچشی نشان داده شده است. در شعاع r مقدار مساحت تحت تنش برشی برابر با $2\pi r h$ است. مقدار نیروی برشی از حاصلضرب مساحت سطح در تنش برشی τ و مقدار گشتاور پیچشی یا گشتاور نیرو در شعاع r بدست می‌آید.

$$M = 2\pi r^2 h \tau \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{M}{2\pi r^2 h}$$

به ازای مقدار حداقل r مقدار تنش برشی حداکثر خواهد بود. بنابراین داریم

$$\tau_{max} = \frac{M}{2\pi r_i^2 h} \quad (38)$$

شکل (۷-۲۱b) تغییر شکل زاویه‌ای γ یک تکه لاستیک کوچک در شعاع r از محور را، در مقیاس بزرگ نشان می‌دهد. چون $r d\theta = dr \tan \gamma$ است، مقدار تغییر زاویه‌ای که توسط جزء کوچکی به شعاع dr در شعاع r ، در کل چرخش زاویه‌ای شفت ایجاد می‌شود، از رابطه زیر بدست می‌آید

$$d\theta = \frac{dr \tan \gamma}{r}$$

زاویه γ از معادله زیر به دست می‌آید

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M}{2\pi r^2 h G} = \frac{c}{r^2}; \quad c = \frac{M}{2\pi h G}$$

حال مقدار γ را در معادله $d\theta$ قرار می‌دهیم و جمله تانژانتی را بصورت سری بسط می‌دهیم. از معادله بدست آمده جمله به جمله انتگرال می‌گیریم

$$d\theta = \frac{1}{r} \left(\tan \frac{c}{r^2} \right) dr = \frac{1}{r} \left(\frac{c}{r^2} + \frac{c^3}{3r^6} + \dots \right) dr; \quad \theta = \left(-\frac{c}{2r^2} - \frac{c^3}{18r^6} \right)_{r_i}^{r_0}$$

این سری بسرعت همگرا می‌شود و معمولاً جمله اول آن برای محاسبه مقدار θ کافی است. با جاگذاری حدود r در معادله بالا، معادله زیر برای θ بدست می‌آید

$$\theta = \frac{M}{4\pi h G} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \quad (39)$$

معادلات مربوط به غالب فنرهای لاستیکی را می‌توان از کتابهای نوشته شده در این مورد بدست آورد. مقدار تنش‌های برشی مجاز عموماً به $25 - 50 \text{ psi}$ محدود می‌شوند. در مورد فنرهای فشاری لاستیکی، برای جلوگیری از وقوع خزش بیش از حد، تغییر شکل فنر نباید از $10 - 20$ درصد ارتفاع آزاد آن تجاوز کند. در مورد بارهای متغیر (خستگی)، تغییر شکل فنر باید از این هم کمتر باشد. برای عمل آوری بهتر لاستیک در حین عملیات ولکانش، ضخامت آن نباید بیشتر از 2 in باشد، حتی بهتر است کمتر از 1 in باشد.

مراجع

1. *Design Handbook*, 1981, Bristol, CT: Associated Spring-Barnes Group.
2. *Manual on the Design and Application of Helical and Spiral Springs*-SAEJ 795, *Handbook Supplement 9*, New York: Society of Automotive Engineers, Inc., July 1962.
3. *Metals Handbook*, 8th ed., Vol. 1, Metals Park, OH: American Society for Metals, 1961.
4. Rothbart, H. A., Ed., *Mechanical Design and Systems Handbook*, New York: McGraw-Hill, 1964, Section 33.
5. Spotts, M. F., *Mechanical Design Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.
6. Wahl, A. M., "Analysis of Effect of Wire Curvature on the Allowable Stresses, in Helical Springs," *Trans. ASME*, **61**, 1939; *J. Appl. Mech.*, p. A-25.
7. Wahl, A. M., *Mechanical Springs*, 2d ed., New York: McGraw-Hill, 1963.

مسایل

در مسایل زیر ماده فنر از فولاد است.

۷-۱ لازم است یک فنر مارپیچی فولادی بار استاتیکی 100 lb را با تغییر طول 2.3 in. تحمل کند. ایندکس فنری آن ۶ است. اگر این فنر از سیم شماره ۸ ساخته شده باشد، مقدار تنش ماکزیمم و تعداد حلقه‌های فعال آنرا پیدا کنید.
 $N_c = 25$ (جواب)

۷-۲ یک فنر مارپیچی از سیم شماره ۱۰ ساخته شده و دارای ۲۰ حلقه فعال است. ایندکس فنری آن ۴.۶۷ است. بار وارده از نوع استاتیکی است. با استفاده از واحدهای SI مقدار تنش این فنر را در تغییر طولی معادل 25 mm حساب کنید.
 477 MPa (جواب)

۷-۳ فنری مارپیچی از سیم شماره ۸ ساخته شده و ایندکس فنری آن ۶ است. کل بار وارد بر آن ثابت و ثابت فنری آن برابر با 42.5 lb/in. است. تنش ماکزیمم برابر با 60000 psi فرض شود. تعداد حلقه‌های فعال را پیدا کنید.
 $N_c = 25.4\text{ coils}$ (جواب)

۷-۴ به سر یک فنر مارپیچی با ثابت فنری 10 N/mm فنر دیگری با ثابت فنری 7 N/mm سوار شده است. نیروی لازم برای ایجاد تغییر طول کل 50 mm چقدر است.
 $F = 206\text{ N}$ (جواب)

۷-۵ یک فنر مارپیچی در داخل فنر مارپیچی دیگری قرار داده شده است (هم محور هستند). ثابت فنری فنر خارجی برابر 2400 lb/in. و داخلی برابر 1750 lb/in. است. طول فنر خارجی به اندازه $1/2\text{ in.}$ از طول فنر داخلی بیشتر است. اگر کل بار وارده بر آنها مساوی 8000 lb باشد، مقدار بار تحملی هر کدام را حساب کنید.
 (جواب) داخلی $= 2867.5\text{ lb}$, خارجی $= 5132.5\text{ lb}$

۷-۶ یک فنر مارپیچی فشاری در داخل فنر مارپیچی دیگری قرار دارد. فنر بزرگتر از میل‌گردی به قطر 38 mm ساخته شده است. قطر خارجی مارپیچ آن 225 mm و تعداد حلقه‌های فعال آن ۶ عدد است. فنر داخلی (کوچکتر) از میل‌گردی به قطر 25 mm ساخته شده است. قطر خارجی مارپیچ این فنر 140 mm و تعداد حلقه‌های فعال آن ۹ عدد است. ارتفاع آزاد فنر خارجی 19 mm از ارتفاع فنر داخلی بیشتر است. مقدار تغییر طول هر یک از این فنرها را تحت بار 90000 N پیدا کنید. فرض کنید $G = 77000\text{ MPa}$ باشد. بار تحملی هر یک از این فنرها را حساب کنید.
 (جواب) $P_0 = 62054\text{ N}$, $\delta_0 = 98.75\text{ mm}$

۷-۷ لازم است یک فنر مارپیچی فشاری از سیمی به قطر 0.120 in. ، با ده حلقه فعال و با قطر متوسط مارپیچ 1 in. ساخته شود. تفرانس‌های تجاری برای این سیم 0.1185 و 0.1215 in. است. قطر مارپیچ ممکن است از 0.980 تا 1.020 in. تغییر کند. تعداد حلقه‌های فعال ممکن است از $9\text{ }3/4$ تا $10\text{ }1/4$ و مدول الاستیسیته از 11400000 الی 11800000 psi تغییر کند. مقدار ثابت فنری را برای ضعیف‌ترین فنر (برای حالتی که تمام متغیرها تمایل دارند ضعیف‌ترین فنر را به دست دهند) حساب کنید. همچنین مقدار ثابت فنری را برای سفت‌ترین فنر حساب کنید.
 (جواب) $k = 25.8\text{ lb/in.}$, $k = 35.0\text{ lb/in.}$

۷-۸ یک فنر مارپیچی باید نیرویی معادل 600 N را بعد از آزاد کردن آن به اندازه 10 mm از حالت کاملاً فشرده، اعمال کند. قطر سیم فنر 6 mm و ایندکس فنری آن ۶ است. بار وارده ثابت و تنش ماکزیمم مساوی

۴۰۰ MPa است. تعداد حلقه‌های فعال لازمه را حساب کنید. (جواب) حلقه $N_c = 10.8$

۷-۹ یک فنر مارپیچی فشاری از سیم شماره ۴ ساخته شده و بار ثابت 250 lb را تحمل می‌کند. تنش برشی ماکزیمم را معادل 60000 psi فرض کنید. تعداد حلقه‌های فعال و مقدار شعاع مارپیچ فنر را به ازای تغییر طولی معادل $3/4\text{ in.}$ حساب کنید. (جواب) حلقه $N_c = 13.4$ ، $R = 0.470\text{ in.}$

۷-۱۰ یک فنر مارپیچی ساخته شده از سیم موسیقی تحت یک بار دائماً متغیر قرار گرفته است. طول آن بین 63.5 و 70 mm تغییر می‌کند. که بارهای نظیر این طولها به ترتیب 510 N و 350 N است. شماره سیم فنر ۷ و قطر متوسط مارپیچ آن 25 mm است. مقدار ضریب اطمینان و تعداد حلقه‌های فعال این فنر را حساب کنید. (جواب) حلقه $N_c = 10.6$ ، $F_s = 1.32$

۷-۱۱ یک فنر مارپیچی فولادی در تغییر طولی معادل 0.25 in. بار فشاری استاتیکی 50 lb را تحمل می‌کند. تنش ماکزیمم 75000 psi و تعداد حلقه‌های انتهایی Q مساوی 1.5 است. مقدار c را برای حالتی که حجم ماده فنر حداقل (کمینه شده) باشد، حساب کنید. مقدار d را حساب کرده و نزدیک‌ترین قطر استاندارد را برای فنر واقعی انتخاب کنید، سپس مقدار R و تعداد حلقه‌های فعال نظیر این فنر را حساب کنید. همچنین مقدار حجم ماده را پیدا کنید. (جواب) $c = 3.7$

۷-۱۲ یک فنر مارپیچی تحت بار دائماً متغیری قرار گرفته است. فنر مذکور از سیم تمپره - روغن شماره ۷ ساخته شده و شعاع متوسط مارپیچ آن 13 mm است. در حالت کاملاً فشرده فنر، مقدار نیروی وارده 400 N است. بعد از آزاد کردن این فنر به اندازه 8 mm از حالت کاملاً فشرده، نیروی مذکور حداقل به 260 N کاهش می‌یابد. مقدار ضریب اطمینان و تعداد حلقه‌های فعال فنر را محاسبه کنید. (جواب) $N_c = 13.2$ ، $F_s = 1.33$ حلقه

۷-۱۳ یک فنر مارپیچی از سیم مستطیلی به مقطع $1/2 \times 1/4\text{ in.}$ ساخته شده است. سطح باریک سیم با محور فنر موازی است. شعاع متوسط مارپیچ 1.5 in. و بار استاتیکی وارده 150 lb است. (الف) اگر تعداد حلقه‌های فعال ۸ تا باشد، مقادیر تنش ماکزیمم و تغییر طول فنر را حساب کنید. (ب) فرض کنید سیم مذکور را طوری پیچانده باشند که سطح عریض آن موازی محور باشد، برای این حالت بند (الف) را تکرار کنید. (جواب) $\delta = 1.24\text{ in.}$ ، $c_1 = 29270\text{ psi}$ (الف)

۷-۱۴ یک فنر مارپیچی بار استاتیکی 1110 N را تحمل می‌کند. تعداد حلقه‌های فعال این فنر ۱۰ عدد و شعاع متوسط آن 25 mm است. (الف) ابعاد مقطع سیم مربعی لازم جهت ساختن چنین فنری چیست. مقدار تغییر طول آن را 50 mm فرض کنید. (ب) اگر این فنر را از سیمی گرد بسازیم، قطر لازم برای سیم و مقدار تنش را محاسبه کنید. با استفاده از سیم گرد، چند درصد در وزن ماده فنر صرفه جویی می‌شود.

(جواب) $c_1 = 6.64\text{ mm}$ ، $\tau = 454\text{ MPa}$ (الف)

۷-۱۵ فنر مارپیچی پیچشی یک درب 30 in. در شکل (۷-۲۲) نشان داده شده است. موقعی که درب بسته است فنر مذکور نیرویی معادل 1 lb و موقعی که در به اندازه 180° چرخیده است، نیرویی معادل 3 lb اعمال

۷-۱۹ (الف) چقدر نیرو F لازم است تا صفحه میز نوسانی شکل (۷-۲۴) را 1.75 in. به یک طرف حرکت دهیم. در همه حال، خط مماس بر فنرهای میز در بالا و پایین آنها، قائم است. به عبارت دیگر فنرها در بالا و پایین بطور محکم ثابت شده‌اند. مقدار تنش خمشی فنرها را حساب کنید. (ب) این بار ضخامت فنر سمت راستی را $5/16 \text{ in.}$ فرض کرده (بدون تغییر سایر ابعاد) و سوال (الف) را تکرار کنید.

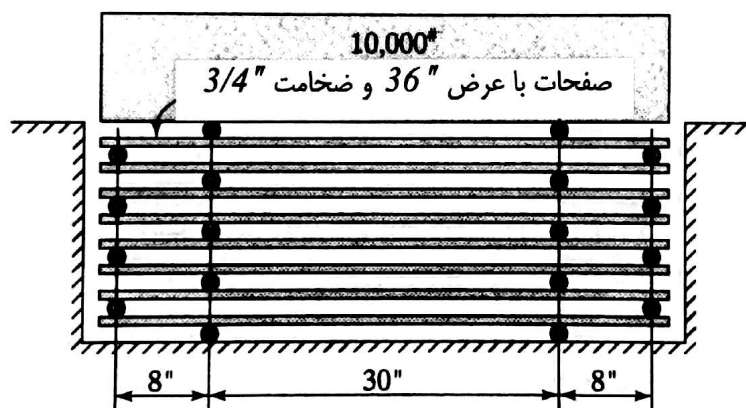
(جواب) $(a) F=326 \text{ lb}$, $(b) F=481 \text{ lb}$

۷-۲۰ یک فنر برگ مرکب یک سر معلق، مانند شکل (۷-۱۲) از پنج شاخه (برگ) به عرض 62 mm و به ضخامت 12 mm ساخته شده است. فاصله بین نیروی وارده و تکیه‌گاه 500 mm است. فرض کنید طول و شکل دو انتهای شاخه‌های فنر طوری باشد که شکل فنر مرکب تقریباً بصورت یک دوزنقه باشد. این فنر با تنش 400 MPa چقدر بار استاتیکی را می‌تواند تحمل کند. مقدار افت بار چقدر خواهد بود؟

(جواب) $P = 5950 \text{ N}$, $\delta = 35.2 \text{ mm}$

۷-۲۱ ماشینی روی یک فنر متشکل از چند صفحه و غلتک فولادی مطابق شکل (۷-۲۵) قرار داده شده است. مقادیر خمش و تنشهای خمشی را در صفحات حساب کنید.

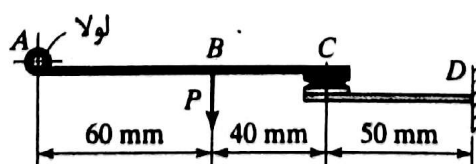
(جواب) $y = 1.084 \text{ in}$, $\sigma = 11850 \text{ psi}$



شکل ۷-۲۵

۷-۲۲ اگر نیروی موجود در بین نقاط تماس در شکل (۷-۲۶) معادل 13 N باشد مقدار نیروی P را حساب کنید. مقدار خمش یا افت نقطه B را پیدا کنید. برگ یا شاخه‌های فنر از فولاد و ضخامت و عرض آنها به ترتیب برابر 0.75 mm و 10 mm است. از اثر هرگونه اصطکاک موجود در سیستم صرف‌نظر کنید.

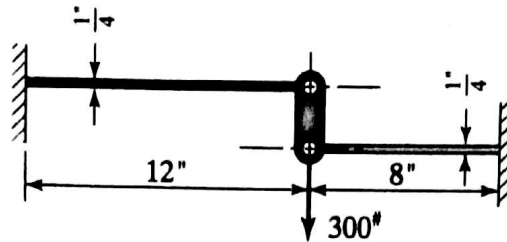
(جواب) $P = 21.7 \text{ N}$, $y = 9.26 \text{ mm}$



شکل ۷-۲۶

۷-۲۳ بار تحمیلی هر یک از فنرهای شکل (۷-۲۷) را پیدا کنید. فنر سمت چپی به صورت دوزنقه‌ای است، بطوری که عرض آن در روی دیوار 1 in. و در نزدیکی لولا 2 in. است. عرض فنر سمت راستی یکنواخت و

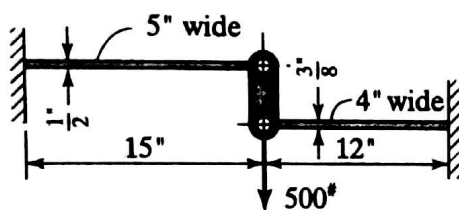
برابر 3 in است. لولاها را بدون اصطکاک و تسمه رابط این دو فنر را صلب (بدون تغییر طول) فرض کنید. مقدار افت بار را حساب کنید. (جواب) $\delta = 0.0583 \text{ in}$, راست 170 lb , چپ 130 lb



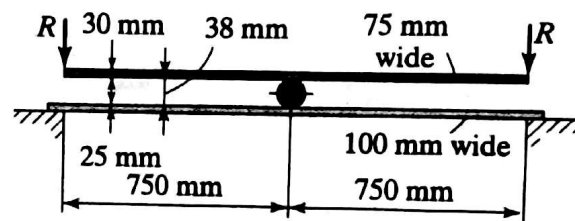
شکل ۷-۲۷

۷-۲۴ در شکل (۷-۲۸) برای اینکه دو سر فنر بالایی به دو سر فنر پایینی مماس شود، نیروهای R باید چقدر باشند. ماده آنها از فولاد است. (جواب) $R = 4069 \text{ N}$

۷-۲۵ در شکل (۷-۲۹) مقدار افت بار را پیدا کنید. فنرها از فولاد هستند. لولاها را بدون اصطکاک و تسمه رابط را صلب فرض کنید. (جواب) $y = 0.1975 \text{ in}$.



شکل ۷-۲۹



شکل ۷-۲۸

۷-۲۶ یک سر فنری در دیوار ثابت و سر دیگر آن آزاد است. در انتهای آزاد این فنر باری گذاشته شده است. مقطع فنر مثلثی و ضخامت آن در امتداد طولش یکنواخت است. ثابت کنید مقدار تنش خمشی برای تمام سطح مقطعیهای فنر یکسان است.

۷-۲۷ فرض کنید انرژی کرنشی ذخیره شده در فنر برگی u که در روی تکیه‌گاههای ساده قرار داشته و در مرکزش بار P گذاشته شده است، برابر با $1/2 Py$ باشد. در این عبارت y مقدار خمش را نشان می‌دهد. ثابت کنید $\sigma = c\sqrt{6EU/\Pi}$ است. در این معادله، c فاصله محور خنثی تا ضلع مقطع است. با استفاده از این رابطه ثابت کنید انرژی جذب شده در یک مقطع مستطیلی با تنش ثابت σ ، بستگی به این ندارد که کدام بعد مقطع (بعد بزرگتر یا کوچکتر مستطیل) بطور عمودی قرار گرفته است.

۷-۲۸ لازم است یک فنر مارپیچی بار استاتیکی 450 N را با تنش 480 MPa تحمل کند. ایندکس فنری ۶ است. مقدار تثوریک قطر سیم گرد فنر را حساب کنید.

۷-۲۹ لازم است یک فنر مارپیچی فولادی با تعداد حلقه فعال ۱۳، تحت بار استاتیکی 250 N ، به اندازه 16 mm تغییر طول بدهد. ایندکس فنر ۵.۲۵ است. مقدار تثوریک قطر سیم فنر را حساب کنید.

۷-۳۰ یک فنر مارپیچی فولادی دارای ۲۰ حلقه فعال و ایندکس فنری آن ۴.۶۴ است. به ازای تنش 480 MPa ، تغییر طولی معادل 38 mm در آن ایجاد می‌شود. مقدار بار استاتیکی که این فنر تحمل می‌کند و همچنین شعاع متوسط مارپیچ آنرا حساب کنید.

۷-۳۱ یک فنر مارپیچی فولادی بعد از اینکه به اندازه 0.10 in. از حالت کاملاً فشرده رها می‌شود باید نیرویی معادل 2.5 lb. اعمال کند. سیم فنر از نوع شماره 19 است. ایندکس فنری 6 است. اگر تنش ماکزیمم 60000 psi باشد، مقدار بار استاتیکی اعمالی و تعداد حلقه‌های فعال را پیدا کنید.
(جواب) حلقه $N_c = 7.12$; $P_2 = 5.99 \text{ lb.}$

۷-۳۲ مقدار ماکزیمم و مینیمم بارهای استاتیکی وارده بر یک فنر مارپیچی فولادی به ترتیب 380 N و 320 N هستند. این بارها موجب تغییری معادل 6 mm در طول فنر می‌گردند. ایندکس فنری 8 و تنش ماکزیمم 480 MPa است. مقدار تئوریک d و مقادیر R و N_c را حساب کنید.

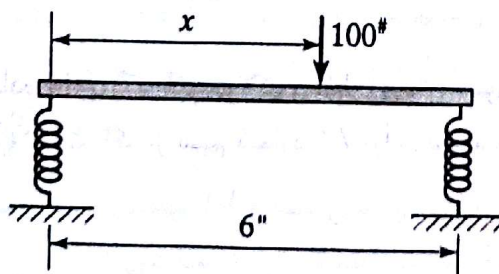
۷-۳۳ در مسئله ۷-۱۲ مقدار R را مساوی 15 mm فرض کرده و مقدار F_s را برای فنر حساب کنید.

۷-۳۴ لازم است فنر سوپاپ موتوری در حالتی که سوپاپ بسته است نیرویی برابر 60 lb و در حالت باز بودن سوپاپ نیرویی برابر 100 lb را اعمال کند. مقدار خیز یا طول کورس حرکت سوپاپ $5/16 \text{ in.}$ است. مقادیر $\tau_{yp} = 90000 \text{ psi}$ و $\tau_e = 48000 \text{ psi}$ برای ماده فنر صادقند. اگر $F_s = 1.5$ و ایندکس فنری 6 باشد، مقدار قطر تئوریک سیم را حساب کنید. همچنین تعداد حلقه‌های فعال و فشار اولیه فنر را پیدا کنید.

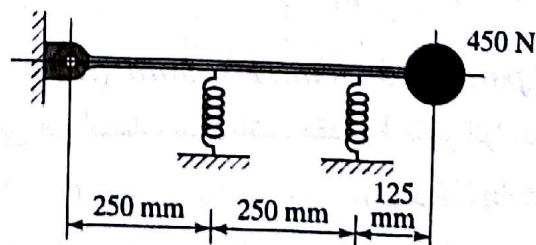
۷-۳۵ یک فنر مارپیچی از سیم سخت - کشیده شماره 10 ساخته شده است. مقدار بار بطور مداوم از 25 تا 50 lb تغییر می‌کند. شعاع مارپیچ فنر $5/16 \text{ in.}$ است. مقدار ضریب اطمینان را حساب کنید.

۷-۳۶ در مسئله ۷-۲۲ مقدار نیروی بین نقاط تماس را 9 N و بعد 40 mm را 60 mm فرض کرده و مسئله را حل کنید.
(جواب) $Y_b = 10.46 \text{ mm}$

۷-۳۷ در شکل (۷-۳۰) هر یک از فنرهای فولادی دارای 10 حلقه فعال است. سیم این فنرها از نوع شماره 12 است. شعاع متوسط مارپیچ 0.3 in. است. ارتفاع آزاد فنر سمت راستی به اندازه 0.5 in. از ارتفاع آزاد فنر سمت چپ بیشتر است. بعد از اعمال بار، میله بطور افقی قرار می‌گیرد. مقدار فاصله x را حساب کنید.



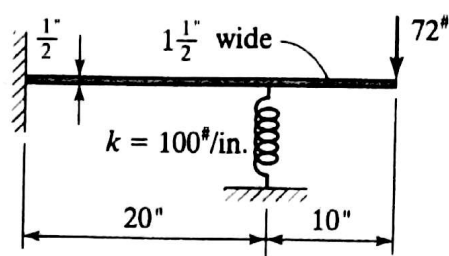
شکل ۷-۳۰



شکل ۷-۳۱

۷-۳۸ در شکل (۷-۳۱) میله را سرد و بدون وزن، و اتصال آنرا در طرف چپ بدون اصطکاک فرض کنید. هر یک از فنرهای فولادی از سیم شماره 10 و با 10 حلقه فعال ساخته شده است. ایندکس فنری آنها 5 است. موقعی که میله افقی قرار گرفته، تنشی در فنرها وجود ندارد. نیروی تحملی هر یک از فنرها و مقدار افت وزنه را حساب کنید.
(جواب) $\delta = 20.69 \text{ mm}$

۷-۳۹ میلۀ نشان داده شده در شکل (۷-۳۲) از فولاد ساخته شده است. نیروی فنر را پیدا کنید.



شکل ۷-۳۲

۷-۴۰ یک فنر مارپیچی فولادی با تغییر طولی معادل 16 mm و با تنش برشی 700 MPa ، بار استاتیکی 250 N را تحمل می‌کند. تعداد حلقه‌های انتهایی فنر ۲ عدد است. قطر سیم را برای بهترین فنر حساب کنید. نزدیک‌ترین قطر استاندارد را حساب کرده و تعداد حلقه‌های فعال و حجم ماده فنر را تعیین کنید. (جواب) $N_c = 21.3$ حلقه

۷-۴۱ یک فنر بلویل با مشخصه $h/t = 1.5$ تحت اثر بار 500 lb فشرده شده و مسطح می‌گردد. مقدار قطر خارجی b و ضخامت t را برای این فنر حساب کنید. تنش ماکزیم فشاری آن 150000 psi و $b/a = 2$ و $b = 2.88 \text{ in}$, $t = 0.087 \text{ in}$. (جواب) فرض شود.

۷-۴۲ بار ماکزیم وارد بر یک فنر مارپیچی فشاری، به اندازه 4 lb از بار مینیم آن بیشتر است. تغییر طول فنر به ازای بار ماکزیم، به اندازه 0.25 in . از تغییر طول آن تحت بار مینیم بیشتر است. به طور آزمایشی، تعداد حلقه‌های فعال را ۱۰ عدد و ضریب اطمینان را ۱.۵ و $R = 0.25 \text{ in}$. فرض کنید. یک سیم با اندازه استاندارد و مناسب برای این فنر انتخاب کرده و تعداد دقیق حلقه‌های فعال آنرا تعیین کنید. همچنین تغییر طول اولیه فنر را پیدا کنید. (جواب) $N_c = 11.0$, $\delta_l = 0.620 \text{ in}$.

۷-۴۳ داده‌های مربوط به یک فنر فولادی فشاری به صورت $\tau = 95000 \text{ psi}$; $\delta = 3/4 \text{ in}$.; $P = 50 \text{ lb}$ cte و $Q = 2$ است. اندازه سیم این فنر را برای حالت بهینه آن و مقدار V نظیر آنرا بدست آورید. (جواب) شماره سیم $= 14$; $V = 0.1364 \text{ in}^3$

۷-۴۴ داده‌های یک فنر فولادی فشاری به صورت (ثابت) $\tau = 95000 \text{ psi}$; $\delta = 3/4 \text{ in}$.; $P = 50 \text{ lb}$ و $Q = 2$ است. اگر از سیم شماره ۱۱ برای ساخت این فنر استفاده شده باشد، مقدار V نظیر آنرا بدست آورید. (جواب) $V = 0.1956 \text{ in}^3$

۷-۴۵ داده‌های یک فنر فولادی فشاری به صورت (ثابت) $\tau = 100000 \text{ psi}$; $\delta = 1 \text{ in}$.; $P = 75 \text{ lb}$ و $Q = 2$ است. اندازه سیم این فنر را برای حالت بهینه آن و مقدار V نظیر آن را بدست آورید. (جواب) شماره سیم $= 12$; $V = 0.2458 \text{ in}^3$

۷-۴۶ داده‌های یک فنر فشاری فولادی به صورت (ثابت) $\tau = 100000 \text{ psi}$; $\delta = 1 \text{ in}$; $P = 75 \text{ lb}$ و $Q = 2$ است. اگر از سیم شماره ۱۰ برای ساخت این فنر استفاده شده باشد، مقدار V نظیر این فنر را حساب

کنید.

$$V = 0.3054 \text{ in}^3 \text{ (جواب)}$$

۷-۴۷ داده های یک فنر فولادی فشاری به صورت (ثابت) $\tau = 90000 \text{ psi}$; $\delta = 3/8 \text{ in}$; $P = 20 \text{ lb}$ و $Q = 1.75$ است. اندازه سیم مربوط به حالت بهینه این فنر و مقدار V نظیر آن را به دست آورید.

$$V = 0.0310 \text{ in}^3; 17 = \text{شماره سیم فنر} \text{ (جواب)}$$

۷-۴۸ داده های مربوط به یک فنر فولادی فشاری به صورت ثابت $\delta = 3/8 \text{ in}$; $P = 20 \text{ lb}$ و $\tau = 90000 \text{ psi}$; $Q = 1.75$ است. اگر برای ساخت این فنر از سیم فنر شماره 16 استفاده شود، مقدار V نظیر آنرا بدست آورید.

$$V = 0.0332 \text{ in}^3 \text{ (جواب)}$$

۷-۴۹ می خواهیم یک فنر مارپیچی فولادی با طرح بهینه طوری طراحی کنیم که پس از رها شدن به اندازه 0.10 in از حالت کاملاً فشرده، باری برابر با 2.5 lb را تحمل کند و حداکثر تنش برشی آن 60000 psi باشد. به ازای مقدار آزمایشی $c = 6$ ، قطر سیم استاندارد مناسب، مقدار دقیق c و تعداد حلقه های فعال این فنر را به دست آورید. نتایج به دست آمده را با نتایج مسئله ۳۱ مقایسه کنید.

$$N_c = 10.74 \text{ حلقه}; 20 = \text{شماره سیم فنر} \text{ (جواب)}$$

۷-۵۰ می خواهیم یک فنر مارپیچی فولادی با طرح بهینه طوری طراحی کنیم که پس از رها شدن به اندازه 0.25 in از حالت کاملاً فشرده، باری برابر با 8 lb را تحمل کند و تنش برشی آن 80000 psi باشد. به ازای مقدار آزمایشی $c = 8$ ، اندازه سیم فنر استاندارد مناسب، شعاع میانگین مارپیچ فنر و تعداد حلقه های فعال آنرا تعیین کنید.

$$R = 0.240 \text{ in}; 16 = \text{شماره سیم فنر} \text{ (جواب)}$$

۷-۵۱ می خواهیم یک فنر مارپیچی فولادی با طرح بهینه طوری طراحی کنیم که پس از رها شدن به اندازه 0.1875 in از حالت کاملاً فشرده اش، باری برابر با 10 lb را تحمل کند و تنش برشی آن 90000 psi باشد. به ازای مقدار آزمایشی $c = 6$ ، اندازه سیم فنر استاندارد مناسب، شعاع میانگین مارپیچ فنر و تعداد حلقه های فعال آنرا بدست آورید.

$$R = 0.139 \text{ in}; 17 = \text{شماره سیم فنر} \text{ (جواب)}$$

۷-۵۲ یک فنر مارپیچی با شعاع میانگین مارپیچ 0.4 in ، از سیم موسیقی شماره 12 پیچانده شده است. بار وارد بر آن بطور پیوسته میان 25 lb و 15 lb تغییر می کند. مقدار ضریب اطمینان را بدست آورید.

$$F_S = 1.70 \text{ (جواب)}$$

۷-۵۳ یک فنر مارپیچی با شعاع میانگین مارپیچ 0.3 in از سیم موسیقی شماره 14 پیچانده شده است. بار وارد بر آن به طور پیوسته میان 10 lb و 4 lb تغییر می کند. مقدار ضریب اطمینان را بدست آورید.

$$F_S = 2.28 \text{ (جواب)}$$

۷-۵۴ یک فنر مارپیچی با شعاع میانگین مارپیچ 0.25 in از سیم موسیقی شماره 16 پیچانده شده است. بار وارد بر آن به طور پیوسته میان 2 lb و 8 lb تغییر می کند. مقدار ضریب اطمینان را بدست آورید.

$$F_S = 1.58 \text{ (جواب)}$$