

فصل ۶ خط و معادله های خطی

۱. معادله خط

مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری می کنیم:

$$\left. \begin{matrix} x=1 \\ y=-2 \end{matrix} \right\} \rightarrow 1+(-2)=-1 \Rightarrow -1=-1 \Rightarrow$$

نقطه روی خط قرار دارد

مثال: محل برخورد خط $y = \frac{2}{3}x - 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$\text{محل برخورد با محور } x \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \Rightarrow x=0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال: مختصات نقطه ای از خط $y = 2x - 5$ را بیابید که عرض آن (-2) باشد.

به جای y در معادله خط (-2) را جایگزین می کنیم:

$$-2 = 2x - 5 \Rightarrow 2x = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

نکته ۴: خطهای مبدا گذر (خطهایی که از نقطه $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

می گذرند) همگی دارای معادله ای به شکل $y = ax$ هستند.

مثال: خطها به معادلات $y = \sqrt{2}x$ ، $y = -\frac{1}{3}x$ ، $y = 2x$

در $y = 0/3x$ همگی از مبدا می گذرند. چون نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

همه آنها صدق می کند.

نکته ۱: هر معادله خط در شکل استاندارد خود به صورت $y = ax + b$ است. هر معادله خط بی شمار جواب دارد.

یعنی بی شمار نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می توان یافت که

تساوی $y = ax + b$ را برقرار کنند.

مثال: معادلات $y = 2x - 3$ ، $y = x + 1$ ، $y = 2x$ و

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ همگی معادلات خطی هستند، زیرا همه

نقاطی که جوابهای این معادلات هستند روی یک خط راست قرار می گیرند.

نکته ۲: برای رسم نمودار یک معادله خط کافی است دو نقطه از آن خط را بیابیم. از آنجا که از هر دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد، با رسم خط گذرنده از آن دو نقطه نمودار مورد نظر به دست می آید.

مثال: معادله خط $y = 2x + 3$ را رسم کنید.

ابتدا مختصات دو نقطه از این خط را می یابیم. سپس خط گذرنده از این دو نقطه را رسم می کنیم.



x	0	1
y	3	5
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

نکته ۳: برای اینکه تشخیص دهیم آیا یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا نه می توانیم مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری کنیم. اگر تساوی برقرار شود، یعنی نقطه روی خط قرار دارد.

مثال: آیا نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی خط $x + y = -1$ قرار دارد؟

فعالیت

دو چرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر طی می کند. جدول زیر را کامل کنید.

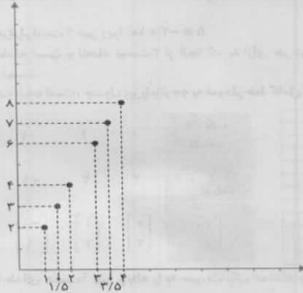
زمان (ثانیه)	x	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر)	y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۱۰

بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه ای هست؟ مسافت طی شده دو برابر مدت زمان سپری شده است.

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ $2 \times 100 = 200$ متر

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟ $2x$ متر

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید. این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ همه نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند. اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم چه شکلی به دست می‌آید؟ یک خط راست به دست می‌آید.



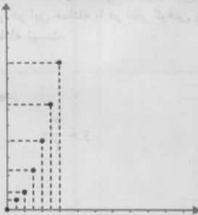
۹۷

کار در کلاس

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم. چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ محیط مربع چهار برابر ضلع آن است. یعنی y توان دوم x است.

$$\begin{array}{l} x \text{ ضلع} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} \\ y \text{ محیط} \rightarrow \end{array} \quad y = 4x$$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم. بین x و y چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید. مساحت مربع، توان دوم ضلع مربع است.



ضلع x (سانتی متر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتی متر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/5 \\ 0/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2/5 \\ 6/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ خیر، این نقاط روی یک خط راست نیستند.

۱- معادله $y = -x + 10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

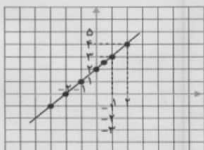
$$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. به جای یکی از مجهولات (x یا y) یک عدد دلخواه در نظر می‌گیریم، در این صورت یک معادله یک مجهولی درجه اول ایجاد می‌شود که با حل آن مجهول دیگر نیز به دست می‌آید.

آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ خیر زیرا $5 \neq -2 + 10$

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟ از آنجا که به ازای هر دو مقدار دلخواه برای x و y تساوی برقرار نیست، پس یک اتحاد نیست.

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	-۱	۲	-۲	$\frac{1}{2}$
y (عرض نقطه)	۲	۳	+۱	۴	۰	$2/5$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید. عرض ۲ واحد بیشتر طول است. یعنی $y = x + 2$.

۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$\begin{aligned} 3x - 4y = 12 & \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ y = 2x - 1 & \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases} \end{aligned}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ؟ در معادله سمت راست (پایین) راحت‌تر است. زیرا در این معادله با در نظر گرفتن یک عدد دلخواه برای x ، مقدار y بلافاصله حاصل می‌شود و نیازی به حل یک معادله نیست.

کار در کلاس

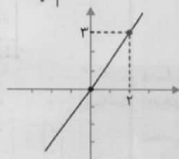
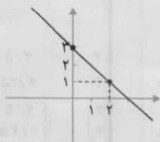
۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

$$y = -x + 3$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 3 & 1 \end{array}$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



۲ آیا خط $y = 3x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟ بله - زیرا با در نظر گرفتن $x = 0$ مقدار

$y = 0$ به دست می‌آید. یعنی $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ یک جواب معادله $y = 3x$ و یک نقطه از نمودار آن است.

۳- اگر در معادله $y = ax$ به جای عدد a ، عددهای مختلفی قرار دهیم، بیشمار معادله خطی مثل $y = 3x$ ، $y = -x$ ، $y = 2x$ و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله، زیرا در همگی این معادله‌ها نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. یعنی $0 = ax$

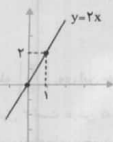
۹۹

فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه، معادله خط را حدس بزنید.

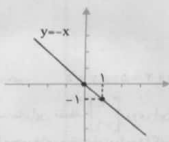
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$



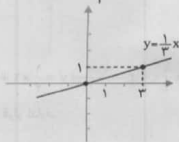
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = -x$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

$$y = 2x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$y = -x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{3}x \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

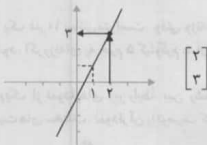
۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟ نقاط $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱۰۰

کار در کلاس

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی $y = 2x - 1$ پیدا کنید.

با استفاده از نمودار خط



$$y = 2x - 1$$

$$y = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از معادله خط

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{1}{3}x + 2$ پیدا کنید.

$$y = -3 \Rightarrow -3 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x = -5 \Rightarrow x = 15$$

۳- مختصات محل برخورد خط $y = 5x + 1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ عرض $\Rightarrow$ محل برخورد با محور x ها

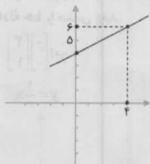
$$\Rightarrow 0 = 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5 \times 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ محل برخورد با محور y ها

۱۰۰

تمرین

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{3}x + 4$ را رسم کنید.



$$y = \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 6 \end{array}$$

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است. خیر. $y = \frac{1}{3}x + 4 \xrightarrow{x=2} y = \frac{1}{3} \times 2 + 4 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow y = 5$

وقتی طول ۲ است عرض ۵ باید باشد. بنابراین نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار ندارد.

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات را پیدا کنید.

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow x = -12 \Rightarrow \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \times 0 + 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

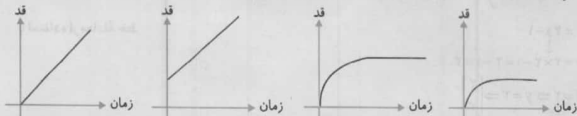
ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- پیدا کنید.

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \times (-1) + 4 \Rightarrow y = \frac{-1}{3} + 4 \Rightarrow y = \frac{11}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y = 0.8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

$$x = 5 \Rightarrow y = 0.8 \times 5 + 10 \Rightarrow y = 4 + 10 = 14 \text{ cm}$$

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه بین رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است.



نمودار دوم از سمت راست- محل برخورد این نمودار با محور y ها بیانگر قد نوزاد در بدو تولد است. همچنین طبق این نمودار رشد قد انسان در سال‌های اولیه زندگی سرعت زیادی دارد، اما پس از مدتی این رشد متوقف می‌شود.

۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$y = 3x$ $y = 2x - 1$ $y = 2x + 1$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

محل برخورد با محور عرض‌ها
 $x = 0 \Rightarrow y = -(0) + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

محل برخورد با محور طول‌ها
 $y = 0 \Rightarrow -x + 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{3}{5}x + 4$ را بیابید، که طول آن نقطه ۵ باشد.

$x = 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 \Rightarrow y = -3 + 4 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

۷- خط $y = -\frac{1}{3}x + 2$ را رسم کنید. آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط را پیدا کنید.



$y = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ y & 2 \\ & 1 \end{array}$

قرار دارد. $y = -\frac{1}{3}x + 2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}} 3 = -\frac{1}{3} \times (-2) + 2 \Rightarrow 3 = 3 \Rightarrow$

$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \times (-1) + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

$y = -2 \Rightarrow -2 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow -2 - 2 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -4 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$y = -\frac{1}{3}x + 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (محل برخورد با محور عرض‌ها)} \\ y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (محل برخورد با محور طول‌ها)} \end{cases}$

آزمایشی مستمر

۱- معادله دو مجهولی $2x + y = 6$ چند پاسخ دارد؟ چرا؟ ۳ پاسخ برای آن بنویسید. (۱/۵ نمره)

۲- خط به معادله $y = 2x - 3$ را رسم کنید. (۱)

۳- معادله خطی بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۱ نمره)

۴- آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط به معادله $y = 2x + 1$ قرار دارد؟ چرا؟ (۱)

۵- روی خط $2x - 3y = 1$ نقطه‌ای را تعیین کنید که عرض آن ۱- باشد. (۱)

۶- مختصات محل برخورد نمودار خط $y = 2x - 4$ را با محورهای مختصات بیابید. (۱/۵)

۷- معادله‌ی خط مقابل را به دست آورید. (۲)



یاستخ ارزشیابی مستمر

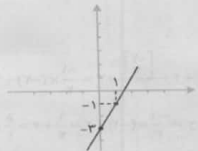
۱ بی‌شمار جواب دارد. زیرا برای هر مقدار دلخواهی برای x یک مقدار برای y می‌توان به دست آورد.

$$x = 1 \Rightarrow 2 \times 1 + y = 6 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$x = 0 \Rightarrow 2 \times 0 + y = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 \times (-1) + y = 6 \Rightarrow y = 6 + 2 = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{matrix} \quad (0/5)$$



۳ هر خط گذرنده از مبدأ مختصات به شکل $y = ax$ است.

$$y = ax \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}} 3 = a \times (-2) \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \quad (0/5)$$

۴ بله این نقطه روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد. (۱) زیرا:

$$y = 2x + 1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}} 5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2x - 3y = 1 \xrightarrow{y=-1} 2x - 3(-1) = 1 \Rightarrow 2x + 3 = 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \quad (0/25) \quad (0/25)$$

$$y = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور } x : 0 = 2x - 4 \Rightarrow x = 2 \quad (0/75) \\ \text{محل برخورد با محور } y : y = 2 \times 0 - 4 \Rightarrow y = -4 \quad (0/75) \end{cases}$$

۷ این خط از مبدأ و نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ گذشته است. پس: (۰/۵)

$$y = ax \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} 3 = a \times 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \quad (0/5) \quad (0/5) \quad (0/5)$$

شیب خط و عرض از مبدأ



۲

نکته ۵: هر گاه معادله یک خط را به شکل استاندارد

$y = ax + b$ بنویسیم، ضریب x (یعنی a) را شیب خط می‌گوئیم. همچنین عدد b را که محل برخورد خط با محور عرض‌هاست، عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

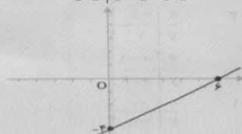
مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $12 = 2x - 3y$ را تعیین کنید و نمودار خط را رسم کنید.

$$2x - 3y = 12 \Rightarrow -3y = -2x + 12$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3} \text{ و عرض از مبدأ} = -4$$

x	۰	۶
y	-۴	۰
x	۰	۶
y	-۴	۰



مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن -2 باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

معادله کلی خط $y = ax + b$ است. چون شیب (-2) است پس $a = -2$.

$$\Rightarrow y = -2x + b \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow 3 = -2 \times 0 + b \Rightarrow b = 3$$

$\Rightarrow y = -2x + 3$

نکته ۶: هر گاه دو خط موازی باشند، شیب‌های آن دو با هم برابر است.

مثال: معادله خطی بنویسید که با خط $y = 2x - 3$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

چون خط موردنظر با خط $y = 2x - 3$ موازی است پس شیب خط مورد نظر 2 است. ($a = 2$)

$$y = 2x + b \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow 3 = 2 \times 1 + b \Rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

نکته ۷: خط‌هایی که موازی با محور x ‌ها باشند، دارای شیب صفر هستند و به شکل استاندارد $y = k$ هستند.

نکته ۸: خط‌هایی که موازی با محور y ‌ها باشند، شیب برایشان تعریف نشده است و به شکل $x = k$ هستند.

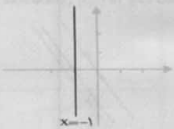
مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = 2$$



مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$x = -1$$



نکته ۹: معادله خط نیمساز ربع اول و ربع سوم $y = x$ است و معادله خط نیمساز ربع دوم و ربع چهارم $y = -x$ است.

نکته ۱۰: اگر دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ روی یک خط قرار داشته باشند، شیب آن خط از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌های $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

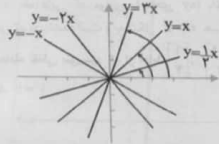
$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + b \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 = -\frac{3}{2} \times 1 + b \Rightarrow$$

$$b = \frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

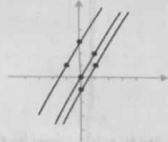
۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید: هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف)	$y = \frac{1}{3}x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 2 \\ y & 0 \quad 1 \end{array}$
ب)	$y = x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & 0 \quad 1 \end{array}$
ج)	$y = 3x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & 0 \quad 3 \end{array}$
د)	$y = -x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & 0 \quad -1 \end{array}$
هـ)	$y = -2x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & 0 \quad -2 \end{array}$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ تفاوت آن‌ها در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟ تفاوت آن‌ها در شیب آن‌ها (زاویه آنها با جهت مثبت محور x ها) است. با تغییر ضریب x این زاویه نیز تغییر می‌کند. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور x ها می‌سازد؟ زاویه منفرجه می‌سازند. ۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید: هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x + 3$	$\begin{array}{c c} x & -1 \quad 0 \\ y & 1 \quad 3 \end{array}$
$y = 2x$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & 0 \quad 2 \end{array}$
$y = 2x - 1$	$\begin{array}{c c} x & 0 \quad 1 \\ y & -1 \quad 1 \end{array}$



در معادله این خط‌ها ضریب x برابر ۲ است، که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور x ها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط با هم موازی هستند؟ تفاوت خط‌ها در محل برخورد خط‌ها با محور عرض‌ها (y) است. دلیل موازی بودن این خط‌ها این است که در هر سه خط ضریب x (شیب) برابر است. بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ محل برخورد خط با محور عرض‌ها، همان عدد ثابتی است که در معادله خط‌ها مشاهده می‌شود.

کاردر کلاس

۱- در هریک از معادله‌های زیر شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$y = 2x - 4$	$y = -\frac{2}{3}x$	$y = -3x + 1$
شیب = ۲	شیب = $-\frac{2}{3}$	شیب = -۳
-۴ = عرض از مبدأ	صفر = عرض از مبدأ	+۱ = عرض از مبدأ

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد. $y = -2x - 1$

ب) شیب آن $\frac{1}{3}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند. $y = \frac{1}{3}x + 3$

ج) با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد. $y = 2x + 4$

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = 0$$

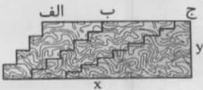
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۲ ۲ ۱ ۰

معادله خط $y = 2x$

۱۰۳

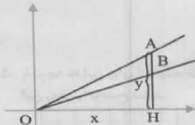
فعالیت

۱- در این تصویر مقابل سه نوع راه پله می بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می روید یکسان است.



- کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ راه پله سمت چپ (الف)
 کدام یک تعداد پله بیشتری دارد؟ راه پله سمت راست (ج)
 بالا رفتن از کدام یک راحت تر است؟ راه پله سمت راست (ج)

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ خط بالایی (OA)
 نقطه های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آن ها متفاوت است.



کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ تر است؟ چرا؟ این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط ها دارد؟
 $\frac{AH}{OH} > \frac{BH}{OH}$

چون مقدار AH از BH بیشتر است و مخرج ها مساوی است، کسر مربوط به خطی که شیب بیشتری دارد بزرگ تر است. این دو نسبت همان شیب خط ها هستند.

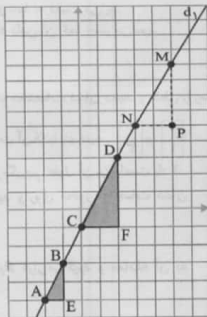
۳- روی خط d_1 به معادله $y = 2x - 1$ دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد

شده، شیب خط را به دست آورده ایم. $\text{شیب خط } d_1 = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثلث رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.
 $d_1 \text{ شیب خط} = \frac{DF}{CF} = \frac{2}{1} = 2$

دو نقطه دلخواه دیگری روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$d_1 \text{ شیب خط} = \frac{MP}{PN} = \frac{2}{1} = 2$

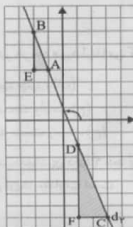


۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگتر از 90° می‌سازد؛ پس شیب خط منفی می‌شود. با توجه به مثلث‌های رسم شده

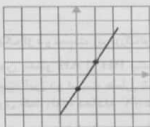
مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط } d_2 = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$$

خط d_2 محور عرض‌ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط d_2 را بنویسید. $y = -3x + 1$



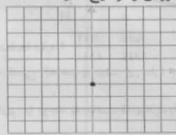
۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط $y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.



۳- با داشتن دو نقطه خط رسم می‌شود



۲- با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می‌شود



۱- خط از این نقطه می‌گذرد

۱- ابتدا با توجه به عرض از مبدأ خط داده شده که عدد (-1) است این عدد را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنیم.

۲- حال چون شیب خط $\frac{2}{1}$ است. به ازای هر یک واحد که به سمت راست برویم می‌بایست ۲ واحد به بالا حرکت کنیم. به این ترتیب نقطه دیگری از خط به دست می‌آید.

۳- با وصل کردن این دو نقطه و امتداد دادن آن خط رسم می‌شود.

۱۰۵

فعالیت

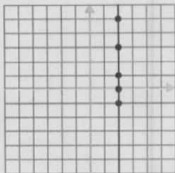
۱- نقطه‌های $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد. روی

خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آن‌ها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با: ۲
یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان

دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرد و معادله آن به صورت $x = 2$ است.



۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت $ax + by = c$ است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید: کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$$a=2, b=2, c=4 \rightarrow 2x+2y=4$$

$$a=-1, b=2, c=0 \rightarrow -x+2y=0$$

خط $-x+2y=0$ از مبدأ می‌گذرد.

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای a, b و c را پیدا کنید.

$$-3x+2y=2 \rightarrow a=-3, b=2, c=2$$

$$y=2x+1 \rightarrow 2x-y=-1 \rightarrow a=2, b=-1, c=-1$$

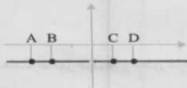
ج) برای خط $x=2$ مقدارهای a, b و c را بنویسید.

$$ax+by=c \rightarrow x=2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad -1 \Rightarrow a=1, b=0, c=2$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ عرض همه این نقاط -1 است.

معادله خط رسم شده را بنویسید. $y = -1$

در فرم کلی معادله‌های خطی به جای a, b و c چه عددی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$$ax+by=c$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad -1$$

۴- مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

$$2y-4x=8 \rightarrow 2y=4x+8 \rightarrow y=\frac{4}{2}x+\frac{8}{2} \rightarrow y=2x+4$$

عرض از مبدأ شیب

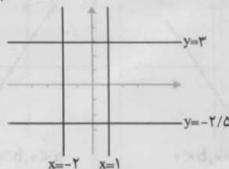
$$3x-2y=6 \Rightarrow -2y=-3x+6 \rightarrow y=\frac{3}{2}x-3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{3}{2} \\ \text{عرض از مبدأ} = -3 \end{cases}$$

$$x+3y-9=0 \Rightarrow 3y=-x+9 \rightarrow y=-\frac{x}{3}+3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -\frac{1}{3} \\ \text{عرض از مبدأ} = 3 \end{cases}$$

۱۰۶

کار در کلاس

۱- معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هم بنویسید.



۲- از برخورد دو خط $y = -3$ و $x = 2$ کدام نقطه به دست می‌آید؟ نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور x ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد. $y = 1$

تمرین

۱- خط‌های به معادله $y = 3$ و $x = -2$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ محل برخورد دو خط نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ است و زاویه بین آنها ۹۰ درجه است.



۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

مبدأ مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ = محل برخورد $\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \text{معادله محور طول} \\ x = 0 \Rightarrow \text{معادله محور عرض} \end{cases}$

۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

$$3y - 2x = 6$$

$$4x - 2y = 8$$

$$2x - y = 3$$

$$3y = 2x + 6$$

$$-2y = -4x + 8$$

$$-y = -2x + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

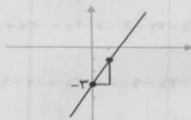
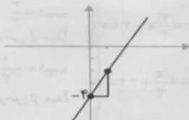
$$y = 2x - 4$$

$$y = 2x - 3$$

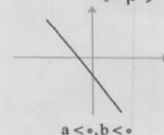
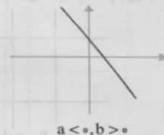
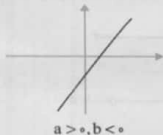
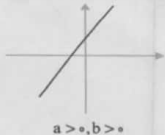
$$\begin{cases} \text{شیب} = \frac{2}{3} \\ \text{عرض از مبدأ} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{شیب} = 2 \\ \text{عرض از مبدأ} = -4 \end{cases}$$

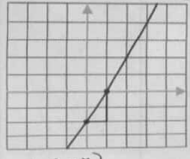
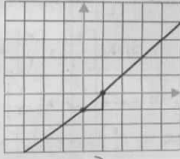
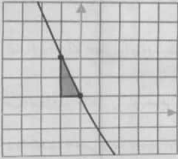
$$\begin{cases} \text{شیب} = 2 \\ \text{عرض از مبدأ} = -3 \end{cases}$$



۴- خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط‌های، زیر را بنویسید.

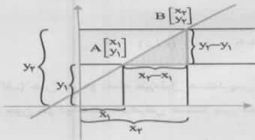


$\left. \begin{array}{l} \text{شیب} = -2 \\ \text{عرض از مبدأ} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -2x + 1$
 $\left. \begin{array}{l} \text{شیب} = 1 \\ \text{عرض از مبدأ} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x - 1$
 $\left. \begin{array}{l} \text{شیب} = 2 \\ \text{عرض از مبدأ} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2x - 2$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$2y - 4x = 5 \Rightarrow 2y = 4x + 5 \Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow \text{شیب} = 2$
 $\text{معادله خط} \rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = 2x + b \Rightarrow -1 = 2 + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow y = 2x - 3$

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



شیب خط $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

با توجه به شکل دو نقطه A و B روی خط قرار دارند. مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن AB باشد، دارای دو ضلع زاویه قائمه به طول‌های $(y_2 - y_1)$ و $(x_2 - x_1)$ است. بنابراین داریم:

شیب خط $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$
 $\text{معادله خط} \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = -3x + b \Rightarrow 2 = -9 + b \Rightarrow b = 11 \Rightarrow y = -3x + 11$

ارزشیابی مستمر

۱- شیب و عرض از مبدأ خط $3y - 2x = 6$ را بیابید. (۱ نمره)

۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱ باشد. (۱)

۳- مقدار m را طوری تعیین کنید که خط $3y - x = m$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

۴- معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲- باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۲)

۵- الف) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

ب) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۱)

۶- معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد. (۲)

بایستخ آوژشایی مستمر

$$3y - 2x = 6 \Rightarrow 3y = 2x + 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{2}{3} & (0/25) \\ \text{عرض از مبدأ} = 2 & (0/25) \end{cases}$$

$$y = ax + b \xrightarrow[b=1]{a=-2} y = -2x + 1 \quad (0/5)$$

$$3y - x = m \xrightarrow{(-2)} 3 \times (-2) - 1 = m \Rightarrow m = -7 \quad (0/5)$$

$$y = ax + b \xrightarrow[a=-2]{(-2)} y = -2x + b \xrightarrow{1} 1 = (-2) \times (-2) + b \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow b = +5 \quad (0/5) \Rightarrow y = -2x + 5 \quad (0/5)$$

الف) چون هر دو نقطه هم‌طول هستند پس معادله خط به شکل $x = 3$ است. (۱)

ب) چون هر دو نقطه هم‌عرض هستند پس معادله خط به شکل $y = -2$ است. (۱)

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{1 - 2} = \frac{-4}{-1} = 4 \quad (۱)$$

$$\Rightarrow y = 4x + b \xrightarrow{2} 1 = 4 \times 2 + b \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow b = -7 \Rightarrow y = 4x - 7 \quad (0/5)$$

دستگاه معادله‌های خطی

نکته ۱۶۴: هرگاه به دنبال جواب مشترکی برای دو یا چند معادله باشیم، می‌گوییم می‌خواهیم دستگاه متشکل از آن معادلات را حل کنیم. یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات خطی رسم نمودارها و یافتن نقاط تقاطع آنها است. مثال: با رسم نمودارهای دو خط زیر، جواب مشترک آنها را بیابید.

$$d_1: y = 2x + 1$$

x	0	-1
y	1	-1

$$d_2: 3x - y = 0$$

x	0	1
y	0	3

نکته ۱۶۵: دو خط یا با یکدیگر موازی‌اند یا اینکه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اگر دو خط موازی باشند و عرض از مبدأ آنها یکی باشد می‌گوییم این دو خط بر هم منطبق هستند. اگر دو خط بر هم منطبق باشند در بی‌شمار نقطه اشتراک دارند. دو خط موازی و غیرمنطبق در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارند و دو خط متقاطع تنها در یک نقطه مشترک‌اند.

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$۲=۲$$

$$x=x$$

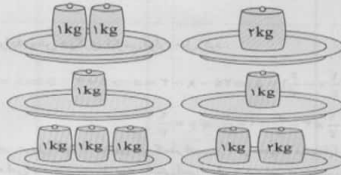
$$\text{الف) } ۵+۵=۱۰$$

$$\text{ب) } ۲x=۲x$$

$$۷=۷$$

$$۳x=۳x$$

ج)



از این مثال‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، یک تساوی جدید به دست می‌آید. با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

$$\text{الف) } \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$2x=4$$

$$x=2 \quad x+y=3$$

$$2+y=3 \rightarrow y=1 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در حل این دستگاه از این نکته استفاده شده است که اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، تساوی همچنان برقرار است.

$$\text{ب) } 2 \times \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ 5x=10 \end{cases}$$

$$x=2 \text{ و } x+2y=4$$

$$2+2y=4$$

$$2y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در حل این دستگاه ابتدا طبق نکته اول ضرایب معادله اول را در ۲ ضرب کرده‌ایم. سپس دو طرف دو تساوی را طبق نکته دوم با هم جمع کرده‌ایم.

۱۱۰

کاردرکلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y=-12 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$$

$$2y=-6 \Rightarrow y=-3 \quad x-y=3 \Rightarrow x-(-3)=3 \Rightarrow x=0$$

$$۲) \begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x+10y=-2 \\ 6x+9y=21 \end{cases}$$

$$19y=19 \Rightarrow y=1 \Rightarrow 2x+2y=7 \Rightarrow 2x+2=7 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=2.5$$

$$3) \quad (-1) \times \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -5 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases} \\ -x = -15 \Rightarrow \boxed{x=15}, \Rightarrow 2x + 2y = 35 \Rightarrow 30 + 2y = 35 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}}$$

۱۱۱

فعالیت

۱- دستگاه معادله های خطی زیر را به روش دیگری نیز می توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \Rightarrow 2x - x + 2 = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \xrightarrow{x=3} y = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح داده، کامل کنید.

روش ۱: $2x - 3$: طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\text{محیط} = 2(x + 2x - 3) = 24 \Rightarrow 2x + 4x - 6 = 24 \Rightarrow 6x - 6 = 24$$

$$6x = 30 \Rightarrow x = 5, \text{ عرض: } 2x - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

روش ۲:

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases} \quad \text{طول} \Rightarrow 2x - 3 = 7 \Rightarrow x = 5 \\ -y - 2y = 3 - 24 \Rightarrow \text{عرض } y = 7 \Rightarrow -3y = -21$$

روش ۳:

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + 2x - 3) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(3x - 3) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 6x - 6 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 6x = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 7$$

بین روش های اول و سوم چه شباهتی هست؟ در هر دو روش از جایگزینی متغیر در یکی از معادله ها استفاده شده است.

۱۱۲

کار در کلاس

دستگاه های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$1) \quad \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 2(3y + 7) - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 6y + 14 - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ -y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \\ \Rightarrow x = 3y + 7 \xrightarrow{y=-1} x = 3 \times (-1) + 7 = 4 \Rightarrow x = 4$$

$$2) \quad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}(3x - 6) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 2x + x - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 3x = 10 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \\ \Rightarrow y = 3x - 6 \xrightarrow{x=\frac{10}{3}} y = 3 \times \frac{10}{3} - 6 = 4 \Rightarrow y = 4$$

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} 2(x-y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x-y) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3y = 4 \\ 3x - 4x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$2 \times \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5} \Rightarrow 2x + \frac{18}{5} = 4 \Rightarrow 2x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-1) - 2(y-1) = 1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$2 \times \begin{cases} 3x-2y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2 \quad 2+y=4 \Rightarrow y=2$$

$$3) 2x-y-2 = 3x+y-1$$

این تساوی زمانی برقرار است که توان‌های دو عدد ۲ و ۳ در دو طرف تساوی صفر باشد. چرا که در این صورت حاصل دو طرف تساوی برابر با یک می‌شوند.

$$\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$2x=3 \Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow x+y-1=0 \xrightarrow{x=1} 1+y-1=0 \Rightarrow y=0$$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=1$ و $x+y=1$ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

ابتدا محل برخورد دو خط داده شده را می‌یابیم.

$$2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 1+y=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ نقطه برخورد}$$

$$\text{خط } y = ax + b, a = -\frac{2}{3}, x=1, y=0 \Rightarrow 0 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

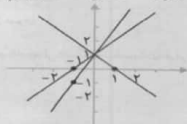
۴- در معادله $y = ax + 1$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم. معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید. به ازای

$a=1$ و $a=-1$ و $a=2$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارد؟

$$a=1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a=2 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a=-1 \Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ویژگی مشترک: همه‌ی این خط‌ها از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌گذرند.

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد.)

x: تعداد گاوها
y: تعداد شترمرغها

$$\begin{cases} -2x + x + y = 20 \\ 4x + 2y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 4x + 2y = 56 \end{cases}$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8, \quad x + y = 20 \xrightarrow{x=8} 8 + y = 20 \Rightarrow y = 12$$

در این مزرعه ۱۲ شترمرغ و ۸ گاو وجود دارد.

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.
آیا این دستگاه جواب دارد؟

$$\begin{cases} -2x + 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 6y = -12 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$0 = -9 \Rightarrow \text{نادرست} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

روش ترسیمی:

$$\begin{array}{r|rr} 2x - 3y = 7 & x & y & \text{intercept} \\ \hline & 3.5 & 0 & \\ & 0 & -1.4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 4x - 6y = 5 & x & y & \text{intercept} \\ \hline & 1.25 & 0 & \\ & 0 & -0.83 & \end{array}$$



طبق نمودار مشخص است که دو خط نقطه مشترکی ندارند. پس دستگاه جواب ندارد.

شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید که چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.

$$2x - 3y = 7 \rightarrow -3y = -2x + 7 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

$$4x - 6y = 5 \rightarrow -6y = -4x + 5 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

چون شیب دو خط با هم برابر است پس دو خط موازی اند و دو خط موازی هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند. پس نقطه مشترکی هم ندارند.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال است و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است سن هریک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

سن پدر = x سن علی = y

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$2x = 96 \Rightarrow x = 48$$

$$\Rightarrow 48 + y = 70 \Rightarrow y = 22$$

ارزشیابی مستمر

۱- آیا نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ می باشد یا خیر؟ (۲ نمره)

۲- با رسم خطها معین کنید جواب دستگاه $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ در کدام ناحیه از دستگاه مختصات قرار می گیرد. (۲)

۳- دستگاه $\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید. (۲)

۴- دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید. (۲)

۵- مجموع سن علی و پدرش ۵۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هریک را بیابید. (۲)

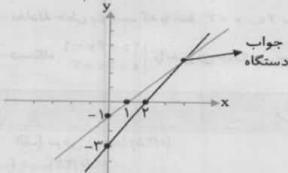
۱. بله، زیرا این نقطه در هر دو معادله خط صدق می‌کند یعنی روی هر دو خط قرار دارد.

$$2x + y = 4 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=2}} 2 \times 1 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \quad (۱)$$

$$x - 3y = -5 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=2}} 1 - 3 \times 2 = -5 \Rightarrow -5 = -5 \quad (۱)$$

$$3x - 2y = 6 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 2 \\ \hline y & -3 \end{array} \quad (۰/۵)$$

$$x - y = 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & -1 \end{array} \quad (۰/۵)$$



(۰/۵)

جواب دستگاه در ناحیه اول قرار دارد. (۰/۵)

$$\begin{cases} 5x - 3x + 2y = 1 \\ 3x + 5x + 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x + 10y = 5 \\ 15x + 9y = 22 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$$19y = 27 \Rightarrow y = 2 \quad (۰/۵)$$

$$-3x + 2y = 1 \xrightarrow{y=2} -3x + 2 \times 2 = 1 \quad (۰/۵)$$

$$\rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1 \quad (۰/۵)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -2y + 4 \quad (۰/۵)$$

$$2x - y = 3 \xrightarrow{x=-2y+4} 2(-2y+4) - y = 3 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow -4y + 8 - y = 3 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow x = -2 \times 1 + 4 \Rightarrow x = 2 \quad (۰/۵)$$

سن پدر علی = x

سن علی = y

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 26 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 26 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$$2x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{2} = 38 \Rightarrow y + 38 = 50 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow \text{علی ۱۲ سال و پدرش ۳۸ سال دارد.}$$

(۰/۵)