فصل دوم

احتمال[۱]

مقدمه

احتمال موضوع مشکلی است. یک دلیل عمده آن عدم قطعیت درباره معنی آن و تردیدآمیز بودن ارزش آن در حل مسائل واقعی است احتمال بر خلاف سایر رشته‌های علمی، با تصادف، شانس و حتی بی‌خبری در ارتباط است. اساساً با میانگین‌های پدیده‌های توده‌ای، سر و کار دارد.

پدیده‌هایی که پی در پی یا همزمان رخ می‌دهند، از قبیل: بازی‌های شانسی، رای گیری، بیمه، وراثت، کنترل کیفیت، مکانیک آماری، تئوری صف و نویز دیده شده است که در این رشته‌ها و رشته‌های دیگر، برخی میانگین‌ها با افزایش تعداد مشاهدات به مقدار ثابتی میل می‌کند. و این مقدار چنانچه میانگین روی هر زیر مجموعه‌ای از پیش انتخاب شده‌ای از مشاهدات محاسبه شود تفاوتی نمی‌کند برای مثال در آزمایش پرتاب سکه، نسبت شیرها به تعداد پرتاب‌ها به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. هدف تئوری این است که چنین میانگین‌هایی را برحسب احتمال رویدادها تشریح و پیش‌بینی کند. برای طبقه‌بندی نتایج آزمایش‌ها و ارائه مدل احتمال، ابتدا تئوری مجموعه‌ها، ...

مفهوم فضای نمونه، پیشامد و قوانین شمارش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

۱. Probability

۲-۱ تئوری مجموعه‌ها

مجموعه‌ها گردآوریی از اشیاء هستند و با حروف بزرگ A، B، C،... نمایش می‌دهند اشیاء یک مجموعه، عناصر خوانده می‌شوند اشیاء یک مجموعه عناصر خوانده می‌شوند مانند مجموعه اعداد طبیعی

$$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,\ldots\}$$

که ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ... عناصر مجموعه A می‌باشند

در ادامه مجموعه S را مجموعه کل یا مجموعه جهانی در نظر می‌گیریم. مجموعه S اغلب با یک مستطیل و عناصر آن با نقاطی در داخل مستطیل نمایش داده می‌شوند. به این ترتیب همه مجموعه‌های دیگر تحت بررسی با ناحیه‌های مختلف در داخل مستطیل نمایش داده می‌شوند. چنین نمایشی را دیاگرام ون می‌نامند.

یک دیاگرام ون از تعداد بی‌شماری نقطه تشکیل می‌شود، هر چند مجموعه S که دیاگرام نمایش دهنده آن است لازم نیست مقدار بی‌شماری عنصر داشته باشد. دیاگرام تنها برای نمایش ترسیمی عملیات مجموعه‌ای مختلف به کار می‌رود.

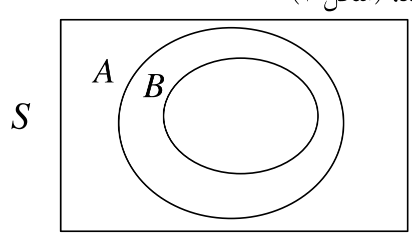
مثال مجموعه انواع گروه خونی

$$S\{A, B, O, AB, O^{+}, O^{-}\}$$

A	B	O
AB	O^{+}	O^{-}

۲-۱-۱ زیرمجموعه

مجموعه B را یک زیر مجموعه از مجموعه A گویند هرگاه هر عنصر از B عنصری از A، نیز باشد، (شکل ۱)



شکل ۱

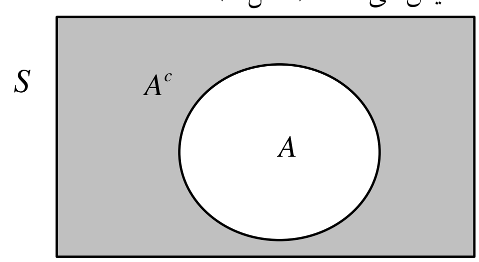
۲-۱-۲ اجتماع و اشتراک

برای مجموعه مفروض A و B، مجموعه‌ای از تمامی عناصری کـه یـا در A یـا در B یا در هر دو وجود دارد. و به صورت $A \bigcup B$ نوشته می‌شـود. اجتمـاع مجموعـه-های A و B گویند.

اگر برای دو مجموعه A و B مجموعه‌ای از تمامی عناصری که هـم در A و هم در B وجود دارد و به صورت $A \bigcap B$ نوشته می‌شـود و اشـتراک مجموعـه‌هـای A و B گویند.

۲-۱-۳ متمم

برای مجموعه مفروض A، مجموعه‌ای از تمامی عناصری از A که در نیـستند مـتمم A گویند و با A^c نمایش می‌دهند. (شکل ۲)



شکل ۲

۲-۱-۴ مجموعه‌های ناسازگار

مجموعه A و B را ناسازگار گویند، هرگاه عنـصر مـشترکی نداشـته باشـند. اگـر دو مجموعه ناسازگار باشند، اشتراک آنها تهی است.

۲-۱-۵ حاصل ضرب کارترین دو مجموعه

حاصل ضرب کارترین دو مجموعه $A = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_m\}$ و $A = \{B_۱, B_۲, \ldots, B_n\}$، مجموعه‌ای است با عناصر همه جفت‌های ممکـن (A_i, B_j) بـرای $i = ۱,۲,\ldots,m$، $i = ۱,۲,\ldots,n$ و آن را با $A \times B$ نشان می‌دهند و

$$A \times B = \{(A_i, B_j) | A_i \in A, B_j \in B\} = \{(A_۱, B_۱), (A_۲, B_۲), \ldots, (A_m, B_n)\}$$

مثال اگر $A=\{H,T\}$، $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشند، حاصلضرب کارترین A و B یا $A\times B$ برابر است با

$$S=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶)\\ (T,۱),(T,۲),(T,۳),(T,۴),(T,۵),(T,۶)\}$$

مثال یک سکه دو ریالی و یک سکه ۵ ریالی با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند. حاصلضرب کارترین $C=A\times B$ را بنویسید.

برای سکه ۵ ریالی $B=\{H,T\}$، برای سکه دو ریالی $A=\{H,T\}$

$$A\times B=C=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

۲-۲ فضای نمونه و پیشامد

در یک تجزبه تصادفی یا آزمایشی اگر برآمد خاصی معین نباشد، همه برامدهای ممکن آن را از قبل قابل پیش‌بینی است. در این صورت مجموعه همه این برآمدهای ممکن را فضای نمونه آن آزمایش گویند و با علامت نمایش می‌دهند. و بعضی از زیر مجموعه‌های S را پیشامد گویند و برای نمایش پیشامد از حروف A، B، C، ... استفاده می‌کنند.

مثال در آزمایش پرتاب یک سکه، فضای نمونه S شامل دو برآمد یا نقطه است، شیر (H) و خط (T) بنابراین

$$S=\{H,T\}$$

و ظاهر شدن شیر یا خط را پیشامد گویند و می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت.

$A=$ پیشامد اینکه در پرتاب یک سکه شیر ظاهر شود. $=\{H\}$

$B=$ پیشامد اینکه در پرتاب یک سکه خط ظاهر شود. $=\{T\}$

مثال در آزمایش پرتاب یک تاس، فضای نمونه S شامل ۶ برآمد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است.

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

و پیشامدهای A و B به ترتیب ظاهر شدن وجه تاس زوج یا فرد باشند برابر با

$$A=\{۲,۴,۶\} \quad , \quad B\{۱,۳,۵\}$$

مثال اگر یک سکه و تاس با هم پرتاب شود فضای نمونه را بنویسید و پیشامدهای زیر را مشخص کنید

الف- پیشامد اینکه سکه شیر و تاس زوج ظاهر شود

ب- پیشامد اینکه سکه خط و تاس فرد ظاهر شود

ج- پیشامد اینکه سکه شیر ظاهر شود

د- پیشامد اینکه تاس زوج ظاهر شود.

$$S=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶)$$
$$(T,۱),(T,۲),(T,۳),(T,۴),(T,۵),(T,۶)\}$$
$$A=\{(H,۲),(H,۴),(H,۶)\}$$
$$B=\{(T,۱),(T,۳),(T,۵)\}$$
$$C=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶)\}$$
$$D=\{(H,۲),(H,۴),(H,۶),(T,۲),(T,۴),(T,۶)\}$$

اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشد با توجه به نظریه مجموعه‌ها روابط زیر بین پیشامدهای A و B قابل تصور است.

- پیشامد B را زیر مجموعه A گوییم هرگاه وقوع پیشامد E مستلزم وقوع A است.

$$B\subset A$$

- پیشامدهای A و B را برابر گوییم هرگاه وقوع A، وقوع B را نتیجه دهد و برعکس. یعنی

$$A\subseteq B \quad , \quad B\subseteq A \;\Rightarrow\; A=B$$

- پیشامدی را اشتراک دو پیشامد A و B گوییم هرگاه تنها وقتی رخ دهد که A و B با هم رخ دهند. و با علامت $A\bigcap B$ نمایش داده می‌شود.

– پیشامدی را اجتماع دو پیشامد A و B گوییم هرگاه وقتی رخ دهد که لااقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد و به صورت $A \cup B$ نمایش داده می‌شود.
– پیشامدی را مکمل یا متمم پیشامد A گوییم هرگاه تنها وقتی رخ دهد که A رخ ندهد. مکمل A را با A^c نشان می‌دهند بدیهی است.

$$A^c = S - A$$

– پیشامدی را مطمئن گوییم هرگاه یقیناً رخ دهد. فضای نمونه یا S یک پیشامد مطمئن است.
– پیشامد را ناممکن گوییم هرگاه یقیناً رخ ندهد. S^c یا ϕ پیشامد ناممکن است.

۲-۳ اصول موضوع احتمال

در نظریه احتمال برهانما در چارچوب روش اصل موضوعی انجام می‌شوند. با این روش، اگر بخواهیم هر فردی منطقی را متقاعد کنیم که گزاره‌ای صیح است، به او نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان گزاره را اول را به صورتی منطقی از گزاره دوم که مورد قبول اوست نتیجه گرفت. اما اگر او گزاره دوم را قبول نداشته باشد باید ثابت کنیم که چگونه می‌توان گزاره دوم را به صورتی منطقی از گزاره ساده‌تر دوم به دست آورد. اگر او منکر گزاره دوم باشد باید این فرایند را ادامه دهیم تا جایی که جدول توجیه دیگری به گزاره مورد قبول او برسیم. لذا این گزاره اساس استدلال ما خواهد بود وجود این گزاره لازم است، زیرا در غیر این صورت فرایند بدون آنکه به نتیجه برسد تا بینهایت پیش خواهد رفت. بنابراین در روش اصل موضوعی، ابتدا بعضی گزاره‌های ساده غیر قابل انکار و سازگار را بدون هیچ توجیهی می‌پذیریم. اینها را اصول موضوعی می‌نامیم. نظریه احتمال براساس سه اصل موضوع پایه گذاری شده است. هر مطلب دیگری به جزء اینها باید ثابت شود.

فرض کنید S فضای نمونه‌ای یک آزمایش باشد. به هر پیشامد A از S عددی به نام احتمال وقوع پیشامد A نسبت داده و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که در اصول موضوعی زیر صدق می‌کند.

اصل موضوع ۱: $P(A) \geq ۰$

اصل موضوع ۲: $P(S) \geq ۱$

اصل موضــوع ۳: اگـر A_1، A_2، A_3، ...، A_K پیـشامدهای دو بـه دو ناسـازگار از S باشند. آنگاه،

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A\right) = \sum_{i=1}^{K} P\left(A_i\right)$$
$$= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_K\right)$$

پیشامد ساده از اصول موضوع احتمال این است که اگر فضای نمونه‌ای آزمـایش، نقطه یا برآمد هم احتمال داشته باشد و پیشامد N دارای $n\left(A\right)$ یا n نقطه (برآمـد) باشد. احتمال وقوع پیشامد A برابر با

$$P\left(A\right) = \frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)} = \frac{n}{N}$$

$n\left(S\right) = N$ را تعداد برآمدهای کل S است.

نتایج زیر را از اصول موضوع احتمال می‌توان نتیجه گرفت که بدون اثبـات بیـان می‌شود (برای اثبات به کتاب آمار و احتمالات مهندسی، تألیف دکتـر نـصیری مراجعـه کنید)

در مواقعی که فضای نمونه و پیشامد روی خط، صفحه یا فضا تعریف می‌شـوند، احتمال را به صورت احتمال هندسی تعریف می‌کنند.

قطعه خط l را که قسمتی از قطعه خط L است در نظـر بگیریـد، نقطـه‌ای بـه تصادف از قطعه خط انتخاب می‌کنیم. اگر احتمال قرار گرفتن نقطه روی قطعه خـط l با طول آن متناسب باشد و به محل قرار گـرفتن قطعـه خـط l روی خـط L بـستگی نداشته باشد در این صورت احتمال قرار گرفتن نقطه مزبور روی قطعـه خـط l برابـر است با

$$P = \frac{l \quad \text{طول خط}}{L \quad \text{طول خط}} = \frac{l}{L}$$

مثال روی قطعه خط به طول ۵ سانتی‌متر، قطعه خطی به طول ۲ سانتی‌متر علامت می‌زنیم. نقطه‌ای به تصادف از قطعه خط انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه نقطه انتخاب شـده روی قطعه خط علامت‌دار باشد چقدر است؟

$$P = \frac{\text{طول قطعه خط علامت‌دار}}{\text{طول کل خط}} \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

قضیه ۲-۳-۱ اگر ϕ مجموعه تهی باشد آنگاه

$$P(\phi)=0$$

قضیه ۲-۳-۲ اگر A^c متمم پیشامد A باشد آنگاه

$$P(A^c)=1-P(A)$$

قضیه ۲-۳-۳ اگر $A \subset B$ باشد آنگاه

$$P(A)\leq P(B)$$

قضیه ۲-۳-۴ اگر A یک پیشامد باشد آنگاه

$$0\leq P(A)\leq$$

قضیه ۲-۳-۵ اگر A و B دو پیشامد دلخواه در S باشند آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

قضیه ۲-۳-۶ اگر C ، B ، A سه پیشامد دلخواه از S باشند آنگاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

مثال یک سکه متعال یک بار پرتاب می‌شود. مطلوب است

الف- فضای نمونه

ب- پیشامد اینکه سکه شیر ظاهر شود.

ج- پیشامد اینکه سکه خط ظاهر شود.

د- احتمالات ب و ج را حساب کنید.

الف) $S=\{H,T\}$

ب) $A=\{H\}$ ج) $B=\{T\}$

د) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{2}$ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{1}{2}$

مثال یک تاس متعادل یک بار پرتاب می‌شود. مطلوبست
الف- فضای نمونه
ب- پیشامد اینکه تاس زوج رویت شود.
ج- پیشامد اینکه وجهی که ظاهر می‌شود کمتر از ۵ باشد.
د- احتمالات ب و ج را حساب کنید.

الف) $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ، $n(S)=N=۶$

ب) $A=\{۲,۴,۶\}$ ، $n(A)=۳$

ج) $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $n(B)=۴$

د) $P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ $\quad P(B)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

مثال یک سکه و تاس با هم پرتاب می‌شود. مطلوبست
الف- حاصلضرب کارترین یا فضای نمونه
ب- پیشامد اینکه سکه شیر ظاهر شود.
ج- پیشامد اینکه تاس فرد ظاهر شود.
د- احتمالات ب و ج را حساب کنید.

$$A=\{H,T\} \quad ، \quad B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$S=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶)$$
$$(T,۱),(T,۲),(T,۳),(T,۴),(T,۵),(T,۶)\}$$

ب) $C=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶)\}$

ج) $D=\{(B,۱),(B,۳),(B,۵)\}$

د) $P(C)=\frac{n(S)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ ، $P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

هـ- نشان دهید که $D\subset C$ و $P(D)\le P(C)$ با توجه به جواب ب و ج مشخص است که $D\subset C$ است و

$$P(D)=\frac{۱}{۴}\le P(C)=\frac{۱}{۲}$$

مثال شهرداری منطقه‌ای ۱۰ پروژه عمرانی را جهت مناقصه اعلام کرده است

$$S=\{P_۱,P_۲,P_۳,P_۴,P_۵,P_۶,P_۷,P_۸,P_۹,P_{۱۰}\}$$

دو شرکت A و B در این مناقصه شرکت کرده‌اند و پروژه‌های پیشنهادی به صورت زیر اعلام کرده‌اند.

$$A=\{P_۱,P_۳,P_۵,P_۷,P_۹\} \qquad B=\{P_۱,P_۲,P_۳,P_۴,P_۵\}$$

احتمال اینکه پروژه‌های اعلامی مناقصه توسط شرکت A یا B انجام شود چقدر است

$$n(S)=۱۰ \ ، \ n(A)=۵ \ ، \ n(B) \ ، \ A\cap B=\{P_۱,P_۳,P_۵\}$$

$$P(A)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \ ، \ P(B)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \ ، \ P(A\cap B)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۱۰}=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

مثال اگر A، B، C پیشامدهای از S باشند و داشته باشیم

$$P(A)=\frac{۲}{۵} \ ، \ P(B)=\frac{۱}{۵} \ ، \ P(C)=\frac{۱}{۱۰} \ ، \ P(A\cap B)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰} \ ، \ P(A\cap B)=\frac{۲}{۵} \ ، \ P(A\cap C)=\frac{۱}{۱۰} \ ، \ P(A\cup B\cup C)$$

مطلوبست

$$P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}$$

$$=\frac{۷}{۱۰}-\frac{۶}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

۲-۴ شمارش

در معادله زمینه‌های مختلف احتمال مثل بازیهای ساده شانسی، مسائل اشتغال و تربیت، شیوه‌های نمونه‌گیری، معمولاً با فضای نمونه‌ای متناهی سر و کار داریم که در آنها همه نقاط نمونه‌ای متساوی‌الاحتمال‌اند. و احتمال رخ داد پیشامد A با تقسیم تعداد نقاط A بر تعداد نقاط کل فضای نمونه‌ای حاصل شد. بنابراین در احتمال می‌توان بعضی مسائل را تنها با شمارش تعداد کل نقاط فضای نمونه‌ای و تعداد راههایی که یک پیشامد می‌تواند رخ دهد حل کرد. در این بخش برای شمارش سیستماتیک حالتهای مختلف، قواعدی را مطالعه می‌کنیم. این قواعد مربوط به زمینه‌ای از ریاضیات موسوم به آسایش ترکیبی است که از روشهای مختلف شمارش بحث می‌کند. این زمینه بسیار وسیع است و تقریباً در همه شاخه‌های ریاضیات کاربردی و محض کاربرد دارد. و غیر از آمار و احتمال، در نظریه اطلاع، کد گذاری و کد گشایی، برنامه‌ریزی خطی، مسائل حمل و نقل، طرحهای صنعتی و سایر زمینه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۵ اصول شمارش

فرض کنید کار x با m طریق به نامهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و کار y با n طریق به نامهای $y_1, y_2, \ldots, y_n$ قابل باشند.
اصول شمارش عبارتند از:

۲-۵-۱ اصل اول شمارش

اگر انجام کار z منوط به انجام کار x یا y باشد آنگاه کار z را می‌توان به $m+n$ طریق با نامهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$، $y_1, y_2, \ldots, y_n$ انجام داد.

مثال جعبه شماره ۱ شامل ۵ لامپ سفید و جعبه شماره ۲ شامل ۷ لامپ سبز است به چند طریق می‌توان یک لامپ سفید یا سبز انتخاب کرد.
در این مثال $m=5$، $n=7$ پس $m+n=12$ حالت.

۲-۵-۲ اصل دوم شمارش

اگر انجام کار z منوط به انجام پیاپی کار x و y باشد. آنگاه کار z را می‌توان به $m \times n$ طریق زیر انجام داد.

$$\begin{matrix} (x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_n) \\ \vdots \\ (x_m, y_1), (x_m, y_2), \ldots, (x_m, y_n) \end{matrix}$$

مثال تعداد طریق یا فضای نمونه را برای سه کتاب مدیریت پروژه فارسی با برچسب‌های I، II و III دو کتاب انگلیسی با برچسب‌های B و A را بنویسید.

با استفاده از اصل دوم شمارش $m = 3$، $n = 2$ و تعداد طرق برابر است با $3 \times 2 = 6$ و با فضای نمونه زیر

$$S = \{(\mathrm{I}, A), (\mathrm{II}, A), (\mathrm{III}, A), (\mathrm{I}, B), (\mathrm{II}, B), (\mathrm{III}, B)\}$$

مثال از ۴ دانشجوی رشته مهندسی مدیریت پروژه و ۳ دانشجوی رشته آمار به چند طریق دو نماینده انتخاب می‌کنیم و یکی دانشجوی رشته مدیریت پروژه و دیگری دانشجوی رشته آمار باشد.

در این مثال $m = 4$، $n = 3$ و در نتیجه $m \times n = 12$.

اصل دوم شمارش در حالت کلی انجام عملی مرکب از k مرحله است به طوری که مرحله اول بتواند به n_1 طریق انجام شود و برای هر یک از این طرق، مرحله دوم بتواند به n_2 طریق صورت گیرد و برای هر یک از طرق این دو مرحله، مرحله دوم بتواند به n_3 طریق صورت گیرد و الی آخر؛ آنگاه کل عمل می‌تواند به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق قابل انجام باشد

مثال یک سکه دو ریالی، یک تاس و یک سکه ۵ ریالی همزمان پرتاب می‌شوند. تعداد کل برآمدها را بنویسید.

در این مثال، $n_1=۲$، $n_2=۶$، $n_3=۲$ پس $۲\times۶\times۲=۲۴$.

مثال چند عدد زوج سه رقمی از ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۹ را می‌توان نوشت به طوریکه هر رقم فقط یک بار استفاده شود؟

از اینکه اعداد زوج باشد، برای رقم یکان فقط دو انتخاب وجود دارد پس کل طریق برابر است با $۲\times۴\times۳=۲۴$.

مثال از سه نفر دانشجو، ۴ نفر معلم و ۲ نفر استاد، می‌خواهیم یک کمیته علمی دو نفری تشکیل دهند که اعضای آن دارای تخصص متفاوت باشند. به چند طریق می‌توان این کمیته را تشکیل داد؟

طبق اصل دوم شمارش از ۳ نفر دانشجو و ۴ نفر معلم به $۳\times۴=۱۲$ طریق می‌توان یک کمیته دو نفری تشکیل داد که دارای تخصص متفاوت باشند و همانطور، دانشجو و استاد، استاد و معلم و طبق اصل اول شمارش

$$۳\times۴+۳\times۲+۴\times۲=۲۶$$

۲-۶ جایگشت

ترتیبی از مجموعه n شیء با آرایش معین جایگشت اشیاء خوانده می‌شود.

۲-۶-۱ جایگشت n شیء متمایز

جایگشت n شیء متمایز برابر با $۱\times۲\times۳\times\ldots\times(n-۱)n=n!$ است. در حقیقت n شیء داریم و می‌خواهیم در مکان n قرار دهیم، چون اشیاء متمایز هستند لذا، برای مکان اول n حالت وجود دارد. اگر مکان اول توسط یک شیء اشغال شود، برای مکان دوم $n-۱$ حالت وجود دارد. چون در مکان اول یک شیء قرار داده شده و تعداد اشیاء از n تعداد به $n-۱$ تقلیل پیدا کرده است برای مکان سوم $n-۲$ حالت وجود دارد و الی آخر. طبق اصل دوم شمارش تعداد طریق برابر است با:

$$n(n-۱)(n-۲)\times\ldots\times۲\times۱=n!$$

مثال سه کتاب A، B و C را چند طریق در قفسه کنار هم قرار می‌گیرند؟

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$ و $۳\times۲\times۱=۶=۳!$

مثال با ارقام ۷، ۴، ۳، ۱ بدون تکرار چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت.

$۴\times۳\times۲\times۱=۲۴=۴!$

۲-۶-۲ جایگشت r تایی، n شیء متمایز

جایگشت r تایی، n شیء متمایز برابر با $n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)$ است. در حقیقت n شیء داریم و می‌خواهیم در r مکان قرار دهیم. چون اشیاء متمایز هستند. لذا برای مکان اول n حالت وجود دارد، برای مکان دوم $n-۱$ حالت و به همین ترتیب برای مکان r، $n-r+۱$ حالت وجود دارد. طبق اصل دوم شمارش تعداد طریق برابر است با:

$$n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)$$

اما

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)(n-r)(n-r-۱)\ldots۲\times۱}{(n-r)(n-r-۱)\ldots۲\times۱}=\frac{n!}{(n-۱)!}$$

در آمار جایگشت r تایی، n شیء متمایز را با نماد $n\,\mathrm{Pr}$ نمایش می‌دهند.

$$n\,\mathrm{Pr}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال چهار کتاب A، B، C و D را به چند طریق می‌توان در دو قفسه جا داد؟

در این مثال $n=۴$ و $r=۲$ پس:

$$۴P۲=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=۱۲$$

۲-۶-۳ جایگشت r تایی n شیء متمایز با تکرار اشیا

جایگشت r تایی، n شیء متمایز با تکرار اشیا برابر است با $n\,\mathrm{P'r}=n^r$

در حقیقت n شیء داریم و می‌خواهیم در r مکان قرار دهیم و برخلاف حالت قبل هر یک از اشیا می‌توانند تکرار شوند. یعنی در مکان اول یکی از n شیء می‌تواند قرار گیرد. و همانطور برای مکان دوم، سوم و الی آخر، پس

$$n\,\mathrm{P}'\mathrm{r} = n \times n \times n \times \ldots \times n = n^r$$

مثال با اعداد ۷، ۴، ۳، ۱ چند عدد ۳ رقمی با تکرار می‌توان نوشت؟

در این مثال، $n = ۴$ و $r = ۳$ پس:

$$۴P'۳ = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

۲-۶ ۴ جایگشت با اشیاء مکرر

تعداد جایگشت‌های n شیء که $n_۱$ شیء شبیه هم، $n_۲$ شیء شبیه هم و ... و n_k شیء شبیه هم هستند برابر است با

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\ldots n_k!} = \binom{n}{n_۱, n_۲, \ldots, n_k}$$

که در آن

$$\sum_{i=۱}^{k} n_i = n$$

در حقیقت n شیء داریم که $n_۱$ تا شبیه هم هستند، $n_۲$ تا شبیه هم هستند و الی آخر. اگر n شیء متمایز بودند از جابجایی $n_۱, n_۲, \ldots, n_k$ شیء تبدیل‌های جدیدی به تعداد $n_۱!n_۲!\ldots n_k!$ به دست می‌آمد ولی چون اشیاءمتمایز نیستند این تبدیل‌ها به یک صورت تلقی مس‌شوند. لذا کل جایگشت مکرر برابر است با

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\ldots n_k!} = \binom{n_۱}{n_۱, n_۲, \ldots, n_k}$$

مثال هشت پرچم به طور عمودی آوریزان هستند. به طوری که ۴ تای آنها قرمز، ۳ تای آنها آبی و یک پرچم سفید است. با این مجموعه پرچم‌ها چه تعداد علامت مختلف می‌توان به وجود آورد؟

در این مثال $n = ۸$ ، $n_۱ = ۴$ ، $n_۲ = ۳$ ، $n_۳ = ۱$ و تکرار وجود دارد. لذا

$$\binom{۸}{۴,۳,۱} = \frac{۸!}{۴!۳!۱!} = ۲۸۰$$

مثال با اعداد ۹، ۷، ۷، ۴، ۴ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

$$n_۳ = ۲, n_۲ = ۲, n_۱ = ۱, n = ۵, \binom{۵}{۱,۲,۲} = \frac{۵!}{۱!۲!۲!} = ۳۰$$

۲-۶-۵ جایگشت شیء متمایز در محیط دایره

جایگشت n شیء متمایز روی محیط دایره برابر با $(n-۱)$ است.

مثال چند جایگشت دوری از ۵ ورزشکار که دور یک میز گرد نشسته‌اند وجود دارد؟
در این مثال $n = ۵$ و $(۵-۱)! = ۲۴$

۲-۷ ترکیب

هرگاه در جایگشت، آرایش و نظم اشیاء کنار هم مورد توجه نباشد آن را ترکیب گویند. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های دو حرفی A، B، C و D برابر با ۱۲ است و جایگشت‌ها عبارتند از

$$AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC$$

با توجه به فهرست بالا درمی‌یابیم که چندین جفت از جایگشت‌ها بدون توجه به آرایش و نظم قرار گرفتنشان در کنار یکدیگر به هم شبیه هستند. وقتی که جایگشت‌های مشابه را جور کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{matrix} AB & AC & AD & BC & BD & CD \\ BA & CA & DA & CB & DB & DC \end{matrix}$$

اگر فرضاً بین جایگشت‌های AB و BA تمایز قایل نشویم تعداد جایگشت ۱۲ حالتی بالا به شش حالت تقلیل پیدا می‌کند.

$AB \quad AC \quad AD \quad BC \quad BD \quad CD$

۲-۷-۱ ترکیب r تایی، n شیء متمایز

ترکیب r تایی، n شیء متمایز برابر است با

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در حقیقت از میان n شیء، r شیء انتخاب می‌کنیم که در جایگشت، این r شیء به $r!$ می‌توانند کنار هم قرار گیرند. از طرفی جایگشت‌های r تایی، n شیء برابر با $n\Pr = \frac{n!}{(n-r)!}$ است. ولی در ترکیب هر r حالت، تنها به یک صورت نوشته می‌شود. زیرا جابجایی مطرح نیست. با یک تناسب ساده می‌توان نوشت.

تعداد جایگشت	تعداد ترکیب
$r!$	۱
$n\Pr$	x

که نتیجه می‌شود

$$x = \frac{n\Pr}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = nCr$$

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۵ مهندس مدیریت پروژه و ۳ مهندس مدیریت اجرایی یک کمیته ۳ نفری برای مدیریت عالی پروژه تشکیل داد که شامل دو نفر مهندس مدیریت پروژه و یک نفر مهندس مدیریت اجرایی باشد؟

تعدا ترکیبات ۲ از ۵ برابر است با:

تعداد ترکیبات ۱ از ۳ برابر است با:

با استفاده از اصل دوم شمارش تعداد کل کمیته‌ها برابر است با:

$$۵C۲ = \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۰$$

$$۳C۱ = \frac{۳!}{۱!۳!} = ۳$$

با استفاده از اصل دوم شمارش تعداد کل کمیته‌ها برابر است با: $۱۰\times ۳ = ۳۰$

۲-۷-۲ ترکیب r تایی، n شیء با تکرار اشیاء

فرض کنید ۳ حرف متمایز A ، B و C داریم و می‌خواهیم ترکیب دوتایی آنها را به دست آوریم، به طوری که هر حرف می‌تواند ۲ بار تکرار شود. ترکیب ۲ از ۳ برابر است با ۳ و حالات برابر با AB، AC و BC هستند اما هر حرفی می‌تواند ۲ بار تکرار شود مانند AA، BB و CC که تعداد کل حالات برابر می‌شود با

$$AB, AC, BC, AA, BB, CC$$

در حالت کلی ترکیبات r تایی، n شیء متمایز با تکرار اشیاء به تعداد r از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$n+r-1Cr = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

مثال تعداد ترکیبات دوتایی حروف A ، B و C با تکرار مجاز دو برابر است با

$$n=۳, r=۲, n+r-۱=۴ \quad ، \quad ۴C۲ = \frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$$

قبل از تعریف احتمال شرطی دو قضیه زیر را بدون اثبات با یک مثال مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیه ۲-۷-۳ اگر P_1، P_2، ...، P_K احتمالات جداگانه وقوع K پیشامد متصل باشند. احتمال وقوع توأم K پیشامد برابر است با

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \ldots P_K = \prod_{i=1}^{K} P_i$$

مثال احتمال ظاهر شدن سه شیر در پرتاب سه سکه را بدست آورید.

$P_1 =$ احتمال آوردن یک شیر با اولین سکه $= \frac{۱}{۲}$

$P_۲ =$ احتمال آوردن یک شیر با دومین سکه $= \frac{۱}{۲}$

$P_۳ =$ احتمال آوردن یک شیر با سومین سکه $= \frac{۱}{۲}$

احتمال ظاهر شدن سه شیر در سه پرتاب $= P_۱\ P_۲\ P_۳ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$

مثال اگر سه تاس ریخته شوند احتمال اینکه هر سه تاس عدد ۵ را نشان دهند برابر است با

چون پرتاب سه تاس متصل‌اند و طبق قضیه، احتمال اینکه هر سه تاس عدد ۵ را نشان دهند برابر است با

$$P_۱\ P_۲\ P_۳ = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲۱۶}$$

قضیه ۲-۷-۴ اگر احتمال وقوع پیشامد $A_۱$ برابر $P_۱$ و احتمال وقوع پیشامد $A_۲$ برابر $P_۲$ و احتمال وقوع پیشامد A_K برابر P_K و پیشامدها دو به دو متصل باشند. آنگاه احتمال اینکه فقط یکی از آنها اتفاق بیفتد برابر است با

$$P_۱(۱-P_۲)(۱-P_۳)\ldots(۱-P_K)+(۱-P_۱)P_۲(۱-P_۳)\ldots(۱-P_K)+$$
$$\ldots(۱-P_۱)(۱-P_۲)\ldots(۱-P_{K-۱})P_K$$

برای $K = ۲$

$$P_۱(۱-P_۲)+(۱-P_۱)P_۲$$

مثال دو آبریز در انبار کالا ساختمانی برای آگاهی از آتش سوزی نصب شده است. این دو آژیر به طور متصل کار می‌کنند و احتمال اینکه در مواقع خطر آژیر اول بکار افتد برابر ۹۵٪ و برای آزیر دوم برابر با ۹٪ است. احتمال اینکه در موقع خطر فقط یکی از آن کار کند چقدر است.

$$P(A_۱) = ۰/۹۵ \text{ ، } ۱-P(A_۱) = ۰/۰۵ \text{ ، } P(A_۲) = ۰/۹ \text{ ، } ۱-P(A_۲) = ۰/۱$$

$$P\left(A_1 \cup A_2\right) = P_1\left(1-P_2\right)+\left(1-P_1\right)P_2$$
$$= 0/95\times 0/1 + 0/05 + 0/9 = 0/14$$

قضیه ۲-۷-۵ در حالتی که K واقعه غیر مستقل باشند، به طوری که احتمال رخ داد اولین واقعه P_1 باشد و احتمال رخ داد دومین واقعه پس از واقعه اول، P_2 باشد و بعد از رخ داد واقعه‌های اول و دوم احتمال رخ دادن واقعه سوم P_3 باشد و الی آخر، احتمال رخ داد تمام وقایع به ترتیب مشخص شده اتفاق بیفتد برابر با

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \ldots P_K$$

مثال کیسه‌ای شامل ۵ مهره آبی و ۳ مهره سفید است دو مهره پی در پی و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم احتمال اینکه اولین مهره خارج شده آبی و دومین سفید باشد چقدر است.

$P_1 = P(A) =$ احتمال اینکه اولین مهره خارج شده آبی باشد $= \frac{5}{8}$

$P_2 = P(B) =$ احتمال اینکه دومین مهره خارج شده سفید باشد $= \frac{3}{7}$

$P_1P_2 =$ احتمال اولین مهره آبی و دومین مهره چقدر باشد $= \frac{5}{8}\times\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

۲-۸ احتمال شرطی[1]

فرض کنید A و B دو پیشامد از S باشند. احتمال رخ دادن یک واقعه یا پیشامد B با دو نظریه گرفتن اینکه واقعه یا پیشامد A رخ داده باشد احتمال شرطی رخ دادن واقعه B نامیده و به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$P\left(B \mid A\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)} \quad ، \quad P(A) > 0$$

که در آن $P\left(A \cap B\right)$ احتمال رخ دادن هر دو واقعه A و B می‌باشد و از آنجایی که A و B متصل نیستند طبق قضیه ۲-۸، $P\left(A \cap B\right) = P_1P_2$

۱. Conditional Probability

فرمول اخیر را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

برای نمایش احتمال رخ دادن یک واقعه یا پیشامد A، موقعی که اطلاعی از رخ دادن یک واقعه دیگر در دست نداشته باشیم از فرمول ساده $P(A)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین احتمال $P(A)$ عبارت است از احتمال رخ دادن یک واقعه A قبل از آنکه آزمایش انجام گرفته باشد. از این رو آن را احتمال پیشین یا احتمال قبلی می‌نامند. و احتمال $P(B|A)$ نشان دهنده احتمال رخ دادن واقعه B، بعد از انجام مقدار آزمایش است. یعنی بعد از دانستن اینکه واقعه A رخ داده است. در این صورت آن را به نام احتمال پیشین یا احتمال بعدی گویند. در بسیاری از مسائل، محاسبه یک احتمال پسین از روی یک احتمال پیشین مورد توجه است. که تحت عنوان فرمول بیز در بخش بعدی بحث خواهد شد.

مثال یک تاس پرتاب می‌شود و پیشامدهای A و B به صورت زیر ترتیب می‌شوند

A: پیشامد اینکه وجهی که ظاهر می‌شود زوج باشد.

B: پیشامد اینکه وجهی که ظاهر می‌شود عدد ۲ باشد.

مطلوبست $P(B)$، $P(A)$ و $P(B|A)$

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \quad ، \quad A = \{۲, ۴, ۶\} \quad ، \quad B = \{۲\} \quad ، \quad A \cap B = \{۲\}$$

$$P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad ، \quad P(B) = \frac{۱}{۶} \quad ، \quad P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال جعبه‌ای حاوی ۳ توپ سفید و ۲ توپ قرمز است ۲ توپ را بدون جایگذاری و پی در پی از جعبه خارج می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه اولین توپ سفید و دومین توپ قرمز باشد را بدست آورید.

A : پیشامد اینکه اولین توپ خارج شده سفید باشد. $\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۵}$

B : پیشامد اینکه اولین توپ خارج شده سفید باشد به شرطی که اولین توپ خارج شده سفید باشد. $\Rightarrow P(B|A)=\frac{۲}{۴}$

$$P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A)=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

مثال از مجموعه همه خانواده‌های دو فرزندی بچه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم این بچه دختراست. احتمال اینکه بچه دوم خانواده انتخاب شده دختر باشد چقدر است.

A : پیشامد اینکه بچه‌ای که اول انتخاب می‌شود دختر باشد.

B : پیشامد اینکه بچه دوم همان خانواده نیز دختر باشد.

در این مسئله هدف محاسبه $P(B|A)$ است.

حالات مختلف در خانواده دو فرزندی به صورت زیر است.

بچه اول	دختر	دختر	پسر	پسر
بچه دوم	دختر	پسر	دختر	پسر

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

چون $P(A)$ برابر با احتمال اینکه بچه اول دختر باشد که دو حالت از چهار حالت دارای بچه اول دختر است پس $P(A)=\frac{۲}{۴}$ و $P(A\cap B)$ برابر با احتمال اینکه بچه اول و دوم خانواده هر دو دختر باشد که حالت از چهار حالت است. پس

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$$

۲-۹ دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم، اگر رخ داد یکی تأثیری در دیگری نداشته باشد

در این صورت

$$P(A|B)=P(A) \text{ و } P(B|A)=P(B)$$

در نتیجه

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

مثال فرض کنید ۵ فیوز سالم و ۲ فیوز معیوب در هم شده‌اند. برای یافتن فیوزهای معیوب آنها را به تصادف یکی بعد از دیگری و بدون جایگذاری امتحان می‌کنیم، احتمال اینکه دو فیوز در دو احتمال اول معیوب باشند چقدر است.

A: پیشامد اینکه فیوز اول معیوب باشد.

B: پیشامد اینکه فیوز دوم معیوب باشد.

$A\cap B$: پیشامد اینکه فیوز اول و دوم هر دو معیوب باشند.

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۱}{۲۱}$$

چون $P(B|A)$ برابر با احتمال اینکه فیوز دوم معیوب باشد به شرطی فیوز اول خارج شده معیوب بوده است.

رابطه $P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$ را می‌توان برای محاسبه احتمال وقوع توأم چندین پیشامد تعمیم داد. برای سه پیشامد A ، B ، C ، $P(A\cap B\cap C)$ برابر با

$$P(A\cap B\cap C)=P(C|A\cap B)P(B|A)P(A)\text{، } P(A\cap B)>۰$$

مثال فرض کنید ۵ فیوز سالم و ۳ فیوز معیوب در هم شده‌اند. برای یافتن فیوزهای معیوب آنها را به تصادف یکی بعد از دیگری و بدون جایگذاری امتحان می‌کنیم. احتمال اینکه هر سه فیوز معیوب را در سه امتحان اول پیدا کنیم چقدر است. فرض کنید پیشامدهای به ترتیب پیشامدهای یافتن فیوزهای معیوب در امتحان اول، دوم و سوم باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap C)&=P(C|A\cap B)P(B|A)P(A)\\&=\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۵۶}\end{aligned}$$

قضیه ۲-۹-۱ (قانون جمع احتمالات) فرض کنید پیشامدهای A_1، A_2، ...، A_K پیشامدهای دو به دو مجزا از هم و اجتماع آنها S باشد و A یک پیشامد دلخواه از S باشد آنگاه

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) + \ldots + P(A|A_K)P(A_K)$$
$$= \sum_{i=1}^{K} P(A|A_i)P(A_i)$$

برهان

$$A \cap S = A \text{ ، } \bigcup_{i=1}^{K} A_i = S \text{ یا } A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_K = S$$

$$A = A \cap (S) = A \cap (A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_K)$$
$$= (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \ldots \cup (A \cap A_K)$$

پیشامدهای طرف راست رابطه اخیر دو به دو مجزا هستند. طبق اصل موضوع ۳

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_K)$$
$$= \sum_{i=1}^{K} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{K} P(A|A_i)P(A_i)$$

۲-۱۰ فرمول بیز

اگرپیشامدهای A_1 ، A_2 ،...، A_K افزاری از S و دو به دو مجزا باشند آنگاه برای هر پیشامدی مانند A از S

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{P(A)} = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{K} P(A|A_i)P(A_i)}$$

اثبات رابطه فوق با توجه به قضیه اخیر بسیار ساده است.

در حالت خاص برای $K = 2$ و $K = 3$ فرمول بیز بترتیب برابرند با

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(A|A_i)P(A_i)} = \frac{P(A|A_1)P(A_1)}{P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2)}$$

$$P\left(A_۱|A\right)=\frac{P\left(A|A_۱\right)P\left(A_۱\right)}{\sum_{i=۱}^{۳}P\left(A|A_i\right)P\left(A_i\right)}$$
$$=\frac{P\left(A|A_۱\right)P\left(A_۱\right)}{P\left(A|A_۱\right)P\left(A_۱\right)+P\left(A|A_۲\right)P\left(A_۲\right)+P\left(A|A_۳\right)P\left(A_۳\right)}$$

مثال برنامه‌های نرم‌افزاری یک شرکت مهندسی پروژه توسط ۲ برنامه نویس نوشته می‌شود به طوری که سهم برنامه اولی و دومی به ترتیب برابر با ۴۰٪ و ۶۰٪ است اگر اشتباهات این برنامه نویس به ترتیب برابر با ۱ و ۲ درصه باشد. مطلوبست:

الف- احتمال اینکه برنامه انتخاب شده دارای اشتباه باشد.

ب- احتمال اینکه برنامه انتخاب شده دارای اشتباه و توسط برنامه نویس اول نوشته شده باشد.

ج- احتمال اینکه برنامه انتخاب شده دارای اشتباه و توسط برنامه نویس دوم نوشته شده باشد.

A : پیشامد اینکه برنامه انتخاب شده دارای اشتباه باشد.

$A_۱$: پیشامد اینکه برنامه توسط برنامه نویس i-ام برای نوشته شده باشد.

$$P\left(A_۱\right)=۰/۴۰ \quad , \quad P\left(A_۲\right)=۰/۶۰$$
$$P\left(A|A_۱\right)=۰/۰۱ \quad , \quad P\left(A|A_۲\right)=۰/۰۲$$
$$P\left(A\right)=\sum_{i=۱}^{۲}P\left(A|A_i\right)P\left(A_i\right)=P\left(A|A_۱\right)P\left(A_۱\right)+P\left(A|A_۲\right)P\left(A_۲\right)$$
$$=۰/۰۱\times۰/۴۰+۰/۰۲\times۰/۶۰=۰/۰۱۶$$
$$P\left(A_۱|A\right)=\frac{P\left(A|A_۱\right)P\left(A_۱\right)}{P\left(A\right)}=\frac{۰/۰۱\times۰/۴۰}{۰/۰۱۶}=\frac{۴}{۱۶}=۰/۲۵$$
$$P\left(A_۲|A\right)=\frac{P\left(A|A_۲\right)P\left(A_۲\right)}{P\left(A\right)}=\frac{۰/۰۱۲}{۰/۰۱۶}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

مثال سه ماشین اتوماتیک قطعات مشابه اتومبیل را تولید می‌کنند.

ماشین $A_۱$ به نسبت ۴۰٪، ماشین $A_۲$ به نسبت ۲۵٪ و ماشین c به نسبت ۳۵٪ از مجموع را تولید می‌کنند. به طور متوسط ۱۰٪ از قطعات ساخته شده به وسیله ماشین

A_1 با مشخصات وفق نمی‌دهد و برای ماشین‌های B و C درصدهای متناظر به ترتیب ۵٪ و ۱٪ است. اگر یک قطعه به طور تصادف از محصول رویهم ریخته شده انتخاب گردد مطلوبست

الف- احتمال اینکه با مشخصات وفق ندهد چقدر است.

ب- اگر مشاهده شود که با مشخصات وفق نمی‌دهد. احتمال اینکه این قطعه به وسیله ماشین A_2 تولید شده باشد جقدر است.

ج- اگر مشاهده شود که با مشخصات وفق نمی‌دهد. احتمال اینکه این قطعه به وسیله A_1 یا A_3 تولید شده باشد چقدر است.

A : پیشامد اینکه قطعه انتخاب شده با مشخصات وفق ندهد.

A_i : پیشامد اینکه قطعه انتخاب شده توسط ماشین i -ام تولید شده باشد.

$$P(A_1)=0/4 \qquad P(A_2)=0/25 \qquad P(A_3)=0/35$$

$$P(A|A_1)=0/1 \qquad P(A|A_2)=0/05 \qquad P(A|A_3)=0/01$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|A_i)P(A_i)$$

$$=0/4\times0/1+0/25\times0/05+0/35\times0/01=0/056$$

$$P(A_2|A)=\frac{P(A|A_2)P(A_2)}{P(A)}=\frac{0/25\times0/05}{0/056}=\frac{0/0125}{0/056}=\frac{125}{560}$$

$$P\left[A_1\cup A_3|A\right]=\frac{P\left[(A_1\cup A_3)|A\right]}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A_1|A)+P(A_3|A)}{P(A)}=\frac{0/04+0/0035}{0/056}$$

چون

$$P\left[A_1\cup A_3|A\right]=\frac{P\left[(A_1\cup A_3)\cup A\right]}{P(A)}$$

$$=\frac{P\left[(A_1\cap A)\cup(A_3\cap A)\right]}{P(A)}=\frac{P(A_1\cap A)+P(A_3\cap A)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A_1|A)P(A)+P(A_3|A)P(A)}{P(A)}=P(A_1|A)+P(A_3|A)$$