



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تهیه کننده: حسین زارع

بهمن‌ماه ۱۳۹۹





بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

- در کامپیوترها مقدار حافظه‌ای که برای ذخیره‌ی هر عدد اختصاص داده می‌شود (طول کلمه) محدود است. به همین دلیل همواره تعداد محدودی از اعداد حقیقی قابل ذخیره در کامپیوتر هستند.

سیستم ممیز ثابت:

در این سیستم نمایش اگر طول کلمه‌ی کامپیوتر ℓ باشد، آنگاه n مکان آن برای نگهداری ارقام قبل از ممیز، m مکان آن برای نگهداری ارقام بعد از ممیز و 1 مکان برای علامت (منفی یا مثبت) در نظر گرفته می‌شود که $\ell = m + n + 1$.

$$\mathbb{F}_\circ = \{ \pm (a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_\circ / b_1 b_2 \dots b_m)_\beta \mid a_j, b_j \in \{ \circ, 1, \dots, \beta - 1 \} \}$$

مکان علامت با یکی از ارقام $\circ$ و 1 پر می‌شود که رقم $\circ$ برای علامت مثبت و رقم 1 برای علامت منفی به کار می‌رود. مثلاً اگر $\beta = 2, m = 2, n = 3$ ، آنگاه عدد $-(1 \circ 1 / \circ 1)_2 = -5/25$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:





قضیه: در یک سیستم نمایش ممیز ثابت با مبنای β که در آن n مکان آن برای نگهداری ارقام قبل از ممیز، m مکان آن برای نگهداری ارقام بعد از ممیز و ۱ مکان برای علامت (منفی یا مثبت) در نظر گرفته می‌شود:

(الف) تعداد اعداد حقیقی قابل نمایش عبارت است از $2\beta^{m+n} - 1$ ؛

(ب) بزرگترین عدد مثبت قابل نمایش برابر است با $\beta^n - \beta^{-m}$ ؛

(ج) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش برابر است با β^{-m} .

اثبات:

(الف) تعداد حالت‌های پر کردن مکان علامت برابر است با ۲ و هر یک از دیگر مکان‌ها را نیز می‌توان با یکی از β رقم ۰ تا $\beta - 1$ پر کرد که چون تعداد این مکان‌ها $m + n$ ست، طبق اصل ضرب این کار به β^{m+n} حالت امکان‌پذیر است. از طرفی ۰+ و ۰- هر دو نمایش عدد صفر هستند. در نتیجه تعداد تمام اعداد قابل نمایش در این سیستم عبارت است از $2\beta^{m+n} - 1$.



ب) فرض می‌کنیم $x_{\max}$ بزرگترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم باشد و قرار می‌دهیم $z = \beta - 1$ در این صورت

$$\begin{aligned} x_{\max} &= +(\underbrace{zz \dots z}_n / \underbrace{zz \dots z}_m) \beta = \sum_{i=-m}^n z \beta^i = \sum_{i=-m}^n (\beta - 1) \beta^i \\ &= \sum_{i=-m}^n (\beta^{i+1} - \beta^i) = \beta^n - \beta^{-m}. \end{aligned}$$

ج) فرض می‌کنیم $x_{\min}$ کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم باشد. بنابراین

$$x_{\min} = +(\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_n / \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{m-1} 1) \beta = \beta^{-m}.$$

• توزیع اعداد در سیستم نمایش ممیز ثابت یکنواخت است. به این معنی که تمام اعداد با فواصل یکسان در بازه $[-x_{\max}, x_{\max}]$ قرار دارند. فاصله‌ی هر دو عدد متوالی برابر با β^{-m} است.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تعریف: نمایش ممیز شناور یک عدد حقیقی دلخواه مانند A در مبنای β به صورت زیر است:

$$A = \pm a \times \beta^e.$$

در نمایش فوق، a عددی بین صفر و یک در مبنای β است که به آن مانتیس می‌گویند و e عددی صحیح در مبنای β است که به آن نما گفته می‌شود.

• یک عدد حقیقی ممکن است نمایش‌های ممیز شناور متفاوتی داشته باشد. مثلاً هر یک از اعداد

$$(\circ/1)_\beta \times \beta^1, \quad (\circ/1)_\beta \times \beta^2, \quad (\circ/1)_\beta \times \beta^3$$

نمایش ممیز شناور عدد ۱ در مبنای β هستند.

• اگر اولین رقم پس از ممیز در مانتیس مخالف صفر باشد (مگر در حالتی که مانتیس صفر باشد)، آنگاه هر عدد حقیقی نمایش ممیز شناور یکتایی خواهد داشت که به آن نمایش ممیز شناور نرمال گفته می‌شود.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

سیستم ممیز شناور نرمال:

در این سیستم نمایش اگر طول کلمه‌ی کامپیوتر ℓ باشد، آنگاه n مکان آن برای نگهداری ارقام نما، m مکان آن برای نگهداری ارقام مانتیس، ۱ مکان برای علامت مانتیس و ۱ مکان برای علامت نما در نظر گرفته می‌شود که $\ell = m + n + 2$.

$$\mathbb{F} = \{ \pm ({}_0 b_1 b_2 \dots b_m)_\beta \times \beta^{\pm(e_1 e_2 \dots e_n)_\beta} \mid b_i, e_j \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}, b_1 \neq 0 \} \cup \{0\}$$

در این سیستم نمایش نیز مکان‌های علامت با یکی از دو رقم ۰ و ۱ پر می‌شوند که رقم ۰ برای علامت مثبت و رقم ۱ برای علامت منفی به کار می‌رود. مثلاً اگر $\beta = 2, m = 3, n = 2$ ، آنگاه عدد $-0.375 = -({}_0 110)_2 \times 2^{-({}_0 1)_2} = -({}_0 110)_2 \times 2^{-1}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{1} \boxed{110} \boxed{1} \boxed{01}$$

در نمایش بالا اولین رقم از چپ علامت مانتیس، سه رقم بعدی ارقام مانتیس (آن‌هایی که در سمت راست ممیز در نمایش دودویی قرار دارند)، رقم بعدی علامت نما و دو رقم آخر ارقام نما را مشخص می‌کنند.

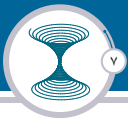


قضیه: در یک سیستم نمایش ممیز شناور نرمال با مبنای β که در آن n مکان آن برای نگهداری نما، m مکان آن برای نگهداری ارقام مانتیس و ۲ مکان برای علامت‌های مانتیس و نما (منفی یا مثبت) در نظر گرفته می‌شود:

الف) تعداد اعداد حقیقی قابل نمایش عبارت است از $1 + (2\beta^n - 1)\beta^{m-1}(\beta - 1)$ ؛

ب) بزرگترین عدد مثبت قابل نمایش برابر است با $\beta^{\beta^n - 1}(1 - \beta^{-m})$ ؛

ج) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش برابر است با $\beta^{-\beta^n}$.



اثبات: الف)

- ابتدا تعداد مانتیس‌های ممکن را می‌شماریم. علامت مانتیس می‌تواند مثبت یا منفی باشد (۲ حالت). از آن‌جا که هر عدد ناصفر قابل نمایش در این سیستم، نرمال شده است، اولین رقم مانتیس نمی‌تواند صفر باشد. پس اولین رقم مانتیس یکی از ارقام ۱ تا $\beta - 1$ است (۱ - β حالت). سایر ارقام مانتیس می‌توانند هر یک از رقم‌های ۰ تا $\beta - 1$ را اختیار کنند (در مجموع β^{m-1} حالت). بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد مانتیس‌های ممکن برابر با $2(\beta - 1)\beta^{m-1}$ است.
- حال تعداد نماهای ممکن را می‌شماریم. علامت نما می‌تواند مثبت یا منفی باشد (۲ حالت) و هر یک از ارقام نما می‌توانند یکی از β رقم ۰ تا $\beta - 1$ را اختیار کنند (در مجموع β^n حالت). از طرفی در نما 0^+ و 0^- هر دو نمایش عدد صفر هستند. در نتیجه تعداد نماهای ممکن برابر با $2\beta^n - 1$ است.
- با توجه به دو قسمت بالا تعداد تمام اعداد ناصفر قابل نمایش در این سیستم عبارت است از $(2\beta^n - 1)(2(\beta - 1)\beta^{m-1})$. حال با افزودن عدد صفر به این تعداد، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.



ب) فرض می‌کنیم $x_{\max}$ بزرگترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم باشد و قرار می‌دهیم $z = \beta - 1$ در این صورت

$$x_{\max} = +(\underbrace{0/z/z \dots z}_{\text{مرتبه } m})_{\beta} \times \beta^{\underbrace{+(zz \dots z)_{\beta}}_{\text{مرتبه } n}} = \left(\sum_{i=-m}^{-1} z\beta^i \right) \times \beta^{(\sum_{i=0}^{n-1} z\beta^i)} \\ = (1 - \beta^{-m})\beta^{\beta^n - 1}.$$

ج) فرض می‌کنیم $x_{\min}$ کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش در این سیستم باشد. بنابراین

$$x_{\min} = +(\underbrace{0/1/0 \dots 0}_{\text{مرتبه } m-1})_{\beta} \times \beta^{\underbrace{-(zz \dots z)_{\beta}}_{\text{مرتبه } n}} = \beta^{-1} \times \beta^{-(\beta^n - 1)} = \beta^{-\beta^n}.$$



- توزیع اعداد در سیستم نمایش ممیز شناور نرمال یکنواخت نیست. در حقیقت اگر $x \in \mathbb{F}$ ، یک عدد مثبت و دارای نمایش $(\circ_1 b_1 b_2 \dots b_m)_\beta \times \beta^e$ باشد، عدد بزرگ‌تر بلافاصله بعد از آن که با x_+ نشان داده می‌شود، دارای نمایش

$$x_+ = (\circ_1 b_1 b_2 \dots b_m + \underbrace{\circ_1 \circ \circ \dots \circ}_m 1)_\beta \times \beta^e$$

است. بنابراین فاصله‌ی بین دو عدد قابل نمایش متوالی x و x_+ برابر است با

$$(\circ_1 \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_m 1)_\beta \times \beta^e = \beta^{-m} \times \beta^e = \beta^{e-m}.$$

این فاصله به وضوح به نما وابسته است، یعنی با افزایش نما، فاصله‌ی بین اعداد بیشتر خواهد شد.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

• در یک ماشین محاسباتی که از یک سیستم نمایش اعداد استفاده می‌کند، تنها تعدادی متناهی از اعداد حقیقی را می‌توان نمایش داد. به اعداد قابل نمایش در ماشین، اعداد ماشینی و به اعداد غیر قابل نمایش در ماشین، اعداد غیرماشینی می‌گویند.

تعریف: اگر در یک سیستم نمایش برای عدد حقیقی x داشته باشیم $|x| > x_{\max}$ آنگاه نمایش x در این سیستم امکان‌پذیر نیست. به چنین حالتی اصطلاحاً پدیده‌ی سرریزی گفته می‌شود.

• با رخ دادن پدیده‌ی سرریزی در یک ماشین، انجام عملیات توسط ماشین با دادن یک پیغام خطا متوقف می‌شود. پدیده‌ی سرریزی در سیستم نمایش ممیز شناور به علت محدود بودن نما از بالا رخ می‌دهد.

تعریف: اگر در یک سیستم نمایش برای عدد حقیقی x داشته باشیم $|x| < x_{\min}$ آنگاه نمایش x در این سیستم امکان‌پذیر نیست. به چنین حالتی اصطلاحاً پدیده‌ی زیرریزی گفته می‌شود.

• با رخ دادن پدیده‌ی زیرریزی در یک ماشین، مقدار x برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. پدیده‌ی زیرریزی در سیستم نمایش ممیز شناور به علت محدود بودن نما از پایین رخ می‌دهد.



روند کردن ماشینی:

فرآیند محاسبات و اعلام نتیجه‌ی محاسبه توسط ماشین، به کمک عددهای ماشینی صورت می‌گیرد. اما محدودیت در تعداد ارقام مانتیس سبب می‌شود که مجموعه‌ی اعداد ماشینی تنها زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد گویای مختوم متعلق به بازه‌ی $\Omega = [-x_{\max}, x_{\max}]$ باشند. بنابراین در ماشین‌های محاسباتی امکان نگهداری و نمایش بسیاری از عددهای حقیقی وجود ندارد. از این رو، عددهای غیر ماشینی با اعداد ماشینی تقریب زده می‌شوند و فرآیند محاسبات بر روی تقریب آن‌ها صورت می‌گیرد.

فرض کنید که حالت‌های سرریز یا زیرریز رخ ندهند و $x \in \Omega - A$ که A مجموعه‌ی اعداد ماشینی است. در این صورت می‌توان با تعریف نگاشت نمایش‌ساز $\text{fl} : \Omega \rightarrow A$ عدد x را با یک عدد ماشینی تقریب زد و اصطلاحاً x را قابل نمایش نمود. عمل نگاشت fl را روند کردن می‌نامیم.

• توجه کنید که دامنه‌ی نگاشت fl برابر با Ω است، یعنی نگاشت fl برای اعداد ماشینی نیز تعریف می‌شود. در حقیقت داریم

$$x \in A \iff \text{fl}(x) = x.$$

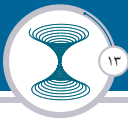


بریدن و گرد کردن:

ضابطه‌ی نگاشت fl به شکل‌های مختلفی تعریف می‌شود. دو تعریف متداول عبارتند از روند کردن به سمت صفر (بریدن یا قطع کردن) و گرد کردن. فرض کنید $x \in \Omega - A$ و x_+ و x_- به ترتیب نشان‌دهنده‌ی نزدیک‌ترین اعداد ماشینی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از x باشند.

• در روند کردن به سمت صفر (قطع کردن)، x با اولین عدد ماشینی که بر سر راه حرکت آن به سمت صفر قرار دارد تقریب زده می‌شود. به عبارت دیگر، اگر fl_c نشان‌دهنده‌ی این نگاشت باشد داریم:

$$\text{fl}_c(x) = \begin{cases} x_+ & x < 0, \\ x_- & x > 0. \end{cases}$$



- در روند کردن به نزدیک‌ترین (گرد کردن)، x با نزدیک‌ترین عدد ماشینی مجاور خود تقریب زده می‌شود. اگر این نگاشت را با fl_r نشان دهیم، داریم:

$$\text{fl}_r(x) = \begin{cases} x_- & x < x_*, \\ x_+ & x > x_*, \\ x_+ \text{ OR } x_- & x = x_*, \end{cases}$$

که در آن $x_* = (x_- + x_+)/2$.

- همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در این روش چنانچه $x = x_*$ ، یعنی x دقیقاً بین x_+ و x_- واقع شده باشد، می‌توان به دلخواه گرد کردن را به بالا یا به پایین انجام داد. اما معمولاً در این حالت از قرارداد «گرد کردن به زوج» استفاده می‌شود. به این ترتیب که هر یک از اعداد x_+ و x_- که آخرین رقم سمت راست مانتیس آن زوج باشد، به عنوان تقریب x انتخاب می‌شود.



گرد کردن بهتر است!

سیستم ممیز شناور نرمال زیر را برای نمایش اعداد در نظر بگیرید:

$$\mathbb{F} = \{ \pm (\circ, b_1 b_2 \dots b_m)_\beta \times \beta^e \mid b_i \in \{\circ, 1, \dots, \beta - 1\}, b_1 \neq \circ, L \leq e \leq U \} \cup \{\circ\}$$

اگر x عددی حقیقی و غیر ماشینی با نمایش ممیز شناور نرمال

$$x = (\circ, b_1 b_2 \dots b_m b_{m+1} \dots)_\beta \times \beta^e$$

باشد، آنگاه

$$|x - \text{fl}_c(x)| = (\circ, \underbrace{\circ \dots \circ}_m b_{m+1} \dots)_\beta \times \beta^e \leq (\circ, \underbrace{\circ \dots \circ}_{m-1} 1)_\beta \times \beta^e = \beta^{e-m}$$

$$|x - \text{fl}_r(x)| \leq \frac{1}{\beta} (x_+ - x_-) = \frac{1}{\beta} \beta^{e-m}.$$



- با توجه به اینکه $x > (\underbrace{0 \dots 0}_{m-1 \text{ مرتبه}})_\beta \times \beta^e = \beta^{e-1}$ کران‌های بالای زیر را برای خطای نسبی $\text{fl}_c(x)$ و $\text{fl}_r(x)$ خواهیم داشت:

$$\frac{|x - \text{fl}_c(x)|}{|x|} \leq \frac{\beta^{e-m}}{\beta^{e-1}} = \beta^{1-m}$$

$$\frac{|x - \text{fl}_r(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \frac{\beta^{e-m}}{\beta^{e-1}} = \frac{1}{2} \beta^{1-m}.$$

- همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، کران بالای خطای نسبی به اندازه‌ی عدد (نما) بستگی ندارد و تنها به ارقام مانتیس وابسته است. بنابراین در سیستم ممیز شناور، اگرچه فاصله‌ی دو عدد متوالی بزرگ، زیاد است اما تأثیری در خطای نسبی ندارد. این یک مزیت برای اعداد ممیز شناور به شمار می‌رود.



تعریف: به فاصله‌ی بین عدد یک و عدد ممیز شناور بلافاصله پس از آن در یک سیستم نمایش ممیز شناور نرمال اپسیلون ماشین می‌گوییم و آن را با نماد ϵ_M یا eps نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه عدد یک به صورت $1 = (\underbrace{01 \ 00 \dots 0}_{m-1 \text{ مرتبه}})_\beta \times \beta^1$ نمایش داده می‌شود، داریم

$$\epsilon_M = 1_+ - 1 = (\underbrace{01 \ 00 \dots 0}_{m-2 \text{ مرتبه}})_\beta \times \beta^1 - (\underbrace{01 \ 00 \dots 0}_{m-1 \text{ مرتبه}})_\beta \times \beta^1 = \beta^{1-m}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید اپسیلون ماشین تنها به مبنا و تعداد ارقام مانتیس بستگی دارد.



- فرض کنید x عددی مخالف صفر و متعلق به Ω باشد و نگاشت نمایش‌ساز fl را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم

$$\delta = \frac{x - \text{fl}(x)}{x}.$$

در این صورت $\text{fl}(x) = x(1 + \delta)$ و $|\delta| \leq u$ که در آن

$$u = \begin{cases} \beta^{1-m} = \epsilon_M, & \text{fl}(x) = \text{fl}_c(x), \\ \frac{1}{4}\beta^{1-m} = \frac{\epsilon_M}{4}, & \text{fl}(x) = \text{fl}_r(x). \end{cases}$$

عدد u روند واحد نامیده می‌شود و علاوه بر مبنا و تعداد ارقام مانتیس به نوع نگاشت نمایش‌ساز بستگی دارد. بنابراین اگر u روند واحد وابسته به نگاشت نمایش‌ساز fl باشد، آنگاه به ازای هر $x \in \Omega$ داریم

$$\text{fl}(x) = x(1 + \delta), \quad |\delta| \leq u$$



• با توجه به تعریف $\text{fl}(x)$ با قرار دادن $x = 1$ داریم

$$1 = \text{fl}(1) = 1 + \delta; \quad |\delta| \leq u,$$

بنابراین

$$\text{fl}(1 + \delta) = \text{fl}(\text{fl}(1)) = \text{fl}(1) = 1; \quad |\delta| \leq u$$

یعنی در یک سیستم نمایش ممیز شناور نرمال به همراه نگاشت نمایش ساز fl ، روند واحد بزرگ‌ترین مقداری است که اگر با عدد 1 جمع شود، هم‌چنان عدد 1 به عنوان حاصل جمع نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر

$$u = \sup\{\delta \mid \text{fl}(1 + \delta) = 1\}$$

نتیجه: اگر $|\delta| < u$ ، آنگاه نمایش $1 + \delta$ برابر با 1 است. هم‌چنین با توجه به اینکه

$$x + y = x\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

اگر داشته باشیم $|y/x| < u$ ، آنگاه نمایش $x + y$ با نمایش x یکسان خواهد بود.



مرتبه‌ی همگرایی روش‌های حل عددی $f(x) = 0$:

الف) مرتبه‌ی همگرایی روش‌های تنصیف و نابجایی برابر با ۱ است.

ب) در روش تکرار نقطه‌ی ثابت، $x_{n+1} = g(x_n)$ برای یافتن ریشه‌ی α از معادله‌ی $f(x) = 0$ حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

• اگر $g'(\alpha) \neq 0$ ، آنگاه مرتبه‌ی همگرایی برابر با یک است.

• اگر $g'(\alpha) = 0$ ، آنگاه مرتبه‌ی همگرایی حداقل ۲ است. در حقیقت اگر

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

ولی $g^{(m)}(\alpha) \neq 0$ ، آنگاه مرتبه‌ی همگرایی برابر m است.

ج) مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن برای ریشه‌ی تکراری f برابر با ۱، برای ریشه‌ی ساده‌ی f که ریشه‌ی مشتق دوم f نباشد برابر با ۲ و برای ریشه‌ی ساده‌ی f که ریشه‌ی مشتق دوم f نیز باشد، بیشتر از ۲ است.

د) مرتبه‌ی همگرایی روش وتری برابر است با $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده، برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۷ با ۲ رقم مانتیس و روش بریدن، فاصله‌ی بین عدد ۶ و نزدیکترین عدد قابل نمایش دیگر چقدر است؟
(دکتری ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{6}$
- (۲) $\frac{1}{7}$
- (۳) $\frac{1}{7^2}$
- (۴) $\frac{1}{5}$



پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. نمایش عدد ۶ در این سیستم به صورت زیر است:

$$x = 6 = (0,60)_7 \times 7^1.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}x_+ &= (0,61)_7 \times 7^1 = (0,60 + 0,01)_7 \times 7^1 = 6 + \frac{1}{7} \\x_- &= (0,56)_7 \times 7^1 = (0,60 - 0,01)_7 \times 7^1 = 6 - \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

و در نتیجه فاصله‌ی مورد نظر برابر است با $\frac{1}{7}$.



تست: فرض کنید $k > 1$ عددی طبیعی باشد و $a > 0$. دنباله‌ی $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}.$$

اگر مرتبه‌ی همگرایی این دنباله حداقل ۲ باشد، آنگاه (دکتری ریاضی ۹۱)

$$k = 3 \quad (1)$$

$$k = 2 \quad (2)$$

$$k \leq 2 \quad (3)$$

$$k > 3 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. فرض کنید $g(x) = \frac{x^k + kax}{kx^{k-1} + a}$ اگر α نقطه‌ی ثابت g باشد،
آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^k + ka\alpha}{k\alpha^{k-1} + a} = \alpha &\implies \alpha^k + ka\alpha = k\alpha^k + a\alpha \\ &\implies (k-1)a\alpha = (k-1)\alpha^k \\ &\xRightarrow{k>1} a = \alpha^{k-1}. \end{aligned}$$

با توجه به فرض، مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی داده شده، حداقل ۲ است. بنابراین باید $g'(\alpha) = 0$.
از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{(k\alpha^{k-1} + ka)(k\alpha^{k-1} + a) - (k(k-1)\alpha^{k-2})(\alpha^k + ka\alpha)}{(k\alpha^{k-1} + a)^2} = 0.$$

با توجه به اینکه $\alpha^{k-1} = a$ ، معادله به صورت $ka^2(k^2 - 2k - 3) = 0$ ساده می‌شود که از آن با در نظر داشتن $k > 1$ داریم $k = 3$.



تست: محاسبه‌ی

$$T = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

به ازای مقادیر بزرگ x به طوری که مقدار محاسبه شده برای $x + \frac{1}{x}$ برابر x باشد، مد نظر است. عبارت مناسب برای تخمین T کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- (۲) $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$
- (۳) $\frac{2}{\sqrt{x}}$
- (۴) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$



پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. برای جلوگیری از خطای حذف، می‌توانیم عبارت داده شده را در مزدوج آن ضرب و تقسیم کنیم. بنابراین عبارت داده شده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} &\times \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}} = \frac{(x + \frac{1}{x}) - (x - \frac{1}{x})}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}} \\ &\approx \frac{\frac{2}{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$



تست: فرض کنید یک دستگاه خطی $Ax = b$ با روش حذفی گوس و انتخاب محور سطری (یا جزئی) در یک کامپیوتر حل شده و جواب $\bar{x}$ محاسبه شده است. اگر روند عدد یک در ماشین تقریباً برابر 10^{-t} و عدد حالت ماتریس A تقریباً برابر $10^{t/2}$ باشد، در این صورت رقم درست داشته باشد. (دکتری ریاضی ۹۲)

- (۱) نمی‌توان انتظار داشت که $\bar{x}$ هیچ
- (۲) نمی‌توان انتظار داشت که $\bar{x}$ حتی یک
- (۳) می‌توان انتظار داشت که $\bar{x}$ تقریباً $t/2$
- (۴) می‌توان انتظار داشت که $\bar{x}$ حداکثر یک



پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. از قضایای مربوط به اختلال در دستگاه‌های معادلات خطی می‌دانیم که اگر درایه‌های A و b با t رقم اعشار درست داده شده باشند و عدد حالت ماتریس A برابر با 10^p باشد، آنگاه در محاسبه‌ی جواب دستگاه $Ax = b$ در حدود p رقم دقت از تعداد ارقامی که به کار گرفته شده است، کاسته می‌شود. بنابراین اگر $\kappa(A) \approx 10^p$ عدد حالت ماتریس A ، و $u \approx 10^{-t}$ روند عدد یک در ماشین باشد، آنگاه می‌توان انتظار داشت که خطای نسبی جواب در حدود $10^{-(t-p)}$ و تعداد ارقام درست در جواب تقریباً برابر با $t - p$ باشد. در اینجا داریم

$$p = \frac{t}{2} \Rightarrow t - p = t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

بنابراین می‌توان انتظار داشت که $\bar{x}$ تقریباً $t/2$ رقم درست داشته باشد.



تست: فرض کنید $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ و $f''(x^*) \neq 0$. مقدار k چقدر باشد تا آهنگ (یا نرخ) همگرایی مجانبی تکرار نقطه ثابت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{k f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با شروع از یک نقطه‌ی مناسب x_0 ، به x^* ریشه‌ی $f(x) = 0$ ، با فرض هموار بودن مناسب f دست کم برابر ۲ باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۲)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- $\sqrt{2}$ (۳)
- ۳ (۴)



پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. با توجه به اینکه $f'(x^*) = f(x^*) = 0$ و $f''(x^*) \neq 0$ داریم $f(x) = (x - x^*)^2 h(x)$ و $h(x^*) \neq 0$. قرار می‌دهیم $g(x) = x - \frac{kf(x)}{f'(x)}$. در این صورت با توجه به قضیه تکرار نقطه‌ای ثابت، برای اینکه مرتبه‌ی همگرایی دست کم ۲ باشد باید داشته باشیم $g(x^*) = x^*$ و $g'(x^*) = 0$. داریم

$$g(x) = x - \frac{kf(x)}{f'(x)} = x - \frac{k(x - x^*)h(x)}{2h(x) + (x - x^*)h'(x)} \Rightarrow g(x^*) = x^*.$$

از طرفی داریم

$$g'(x) = 1 - \frac{(kh(x) + k(x - x^*)h'(x))(2h(x) + (x - x^*)h'(x))}{(2h(x) + (x - x^*)h'(x))^2} + \frac{(3h'(x) + (x - x^*)h''(x))(k(x - x^*)h(x))}{(2h(x) + (x - x^*)h'(x))^2}$$

و شرط $g'(x^*) = 0$ نتیجه می‌دهد $1 - \frac{2kh''(x^*)}{2h'(x^*)^2} = 0$ که از آن خواهیم داشت $k = 2$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: فرض کنید x عددی نزدیک صفر باشد. می‌دانیم

$$x \sin x - x^2 \cos x - \frac{1}{3} \ln(1 + x^4) = O(x^k).$$

مقدار k برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۲)

۴ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴)



پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. با استفاده از بسط مک‌لورن داریم

$$\begin{aligned}x \sin x - x^2 \cos x - \frac{1}{3} \ln(1 + x^4) &= x \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right) \\&\quad - x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right) \\&\quad - \frac{1}{3} \left(x^4 - \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} - \dots \right) \\&= -\frac{x^6}{30} + \dots \\&= O(x^6).\end{aligned}$$

بنابراین $k = 6$.



تست: آهنگ (یا نرخ) همگرایی مجانبی تکرار نقطه‌ای ثابت

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با شروع از یک نقطه‌ای مناسب x_0 مناسب برای تخمین $\sqrt[k]{A}$ با $A > 0$ و $k \geq 3$ دست کم برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۲)

$$\begin{array}{l} 1 \quad (1) \\ 2 \quad (2) \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3) \\ 3 \quad (4) \end{array}$$



پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{A}{x^{k-1}} \right).$$

در این صورت داریم $g(\sqrt[k]{A}) = \sqrt[k]{A}$ و

$$g'(x) = \frac{1}{k} \left[(k-1) - \frac{(k-1)x^{k-2}A}{x^{2k-2}} \right] \Rightarrow g'(\sqrt[k]{A}) = 0,$$

$$g''(x) = \frac{-(k-1)(k-2)x^{k-3}Ax^{2k-2} + (2k-2)x^{2k-3}(k-1)x^{k-2}A}{kx^{4k-4}}.$$

می‌توان دید که $g''(\sqrt[k]{A}) \neq 0$. بنابراین مرتبه‌ی همگرایی دست کم برابر با ۲ است.

- روش سریعتر: رابطه‌ی داده شده در حقیقت رابطه‌ی تکراری نیوتن برای محاسبه‌ی $\sqrt[k]{A}$ است که از روی معادله‌ی $f(x) = x^k - A = 0$ به دست آمده است و می‌دانیم که روش نیوتن با نقطه‌ی شروع مناسب دارای مرتبه‌ی همگرایی دست کم ۲ است.



تست: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه معادله $\cos nx = x^{2n}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟
(دکتری ریاضی ۹۳)

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)



پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. قرار می‌دهیم $f(x) = x^{2n} - \cos \lambda x$. در این صورت f تابعی زوج است. بنابراین برای تعیین تعداد ریشه‌های f کافی است تعداد ریشه‌های مثبت آن را دو برابر کنیم. از طرفی داریم

$$f(0) < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{16}\right) > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0, \quad f(\pi) > 0.$$

این موضوع نشان می‌دهد که f در فاصله‌ی $[0, \pi]$ دارای سه ریشه است. همچنین با رسم نمودارهای

$$y = x^{2n}, \quad y = \cos \lambda x$$

می‌توان دید که f همین سه ریشه را در اعداد حقیقی مثبت دارد و مقدار آن به ازای مقادیر $x > \pi$ همواره مثبت است. بنابراین f دارای ۶ ریشه‌ی حقیقی (۳ ریشه‌ی مثبت و ۳ ریشه‌ی منفی) است.



تست: فرض کنید $f(x) = e^{\sin x} - x$. می‌دانیم که یک ریشه‌ی $f(x) = 0$ به $[0, \pi]$ تعلق دارد. مقدار x به روش دوبرخی (تنبیف) کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

$$(1) \frac{5\pi}{8}$$

$$(2) \frac{\pi}{8}$$

$$(3) \frac{3\pi}{4}$$

$$(4) \frac{7\pi}{8}$$



پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. داریم

$$f(0) = 1 > 0, f(\pi) = 1 - \pi < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e - \frac{\pi}{2} > 0, f(\pi) < 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

حال باید علامت $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} - \frac{3\pi}{4} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{3\pi}{4}$ را تعیین کنیم. داریم

$$\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\approx 0.7} < \underbrace{2 \ln 3 - 2 \ln 2}_{\approx 0.8} < \ln(3\pi) - \ln 4 = \ln\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \frac{3\pi}{4}$$

$$.x_3 = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{5\pi}{8} \quad \text{بنابراین } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \text{ و در نتیجه}$$



تست: فرض کنید معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ دارای دو جواب حقیقی مثبت، α و β باشد. شرط کافی برای همگرایی دنباله‌ی

$$x_{k+1} = \frac{-(ax_k + b)}{x_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

با x_0 بزرگتر و نزدیک α ، در کدام گزینه آمده است؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

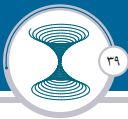
(۱) $|\alpha| < |\beta|$

(۲) $|\alpha| > |\beta|$

(۳) $|\alpha + \beta| > 1$

(۴) $2|\alpha| < |\beta|$

• این تست اشتباه تایپی داشته و در دفترچه‌ی سؤالات، معادله به صورت $x^3 + ax + b = 0$ داده شده است. در اینجا صورت اصلاح‌شده‌ی تست را آورده‌ایم.



پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. فرض کنیم $g(x) = \frac{-(ax+b)}{x}$ داریم

$$g'(x) = \frac{-ax + ax + b}{x^2} = \frac{b}{x^2}.$$

با توجه به اینکه نقطه‌ی شروع x نزدیک به α فرض شده است، می‌توانیم فرض کنیم که در صورت همگرایی x_n داریم $x_n \rightarrow \alpha$ و از آنجا با در نظر داشتن شرط $|g'(x)| < 1$ خواهیم داشت

$$\left| \frac{b}{\alpha^2} \right| < 1 \implies |b| < \alpha^2.$$

اما $b = \alpha\beta$. بنابراین $|\alpha\beta| < \alpha^2$ و در نتیجه $|\beta| < |\alpha|$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: خطای $1 + 2x$ به عنوان تقریبی برای تابع $f(x) = \ln(1 + x) + e^x$ در نزدیکی صفر متناسب است با (دکتری ریاضی ۹۴)

$$x \quad (1)$$

$$x^2 \quad (2)$$

$$x^3 \quad (3)$$

$$x^4 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با استفاده از بسط مکلورن داریم

$$\begin{aligned}\ln(1+x) + e^x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) \\ &= 1 + 2x + O(x^3).\end{aligned}$$

بنابراین خطای $1 + 2x$ به عنوان تقریبی برای $f(x)$ متناسب است با x^3 .



تست: تعداد ریشه‌های منفی معادله‌ی

$$\frac{-e^{x^3}}{x} = \ln \frac{1}{3}$$

کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)



تست: تعداد ریشه‌های منفی معادله‌ی

$$\frac{-e^{x^3}}{x} = \ln \frac{1}{3}$$

کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: معادله را به شکل $e^{x^3} = x \ln 3$ بازنویسی می‌کنیم. واضح است که این معادله در اعداد منفی جواب ندارد، زیرا اگر $x < 0$ ، آنگاه سمت چپ معادله عبارتی مثبت و سمت راست معادله عبارتی منفی است.



تست: نرخ همگرایی مجانبی روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه‌های $g(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ در صورتی که به ریشه همگرا شود، است. (دکتری ریاضی ۹۴)

- (۱) برای همه‌ی ریشه‌ها، خطی
- (۲) برای همه‌ی ریشه‌ها، از مرتبه‌ی دو
- (۳) برای ریشه‌ی برابر با صفر، از مرتبه‌ی دو و برای ریشه‌های ناصفر، خطی
- (۴) برای ریشه‌ی برابر با صفر، خطی و برای ریشه‌های ناصفر از مرتبه‌ی دو



تست: نرخ همگرایی مجانبی روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه‌های $g(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ در صورتی که به ریشه همگرا شود، است. (دکتری ریاضی ۹۴)

(۱) برای همه‌ی ریشه‌ها، خطی

(۲) برای همه‌ی ریشه‌ها، از مرتبه‌ی دو

(۳) برای ریشه‌ی برابر با صفر، از مرتبه‌ی دو و برای ریشه‌های ناصفر، خطی

(۴) برای ریشه‌ی برابر با صفر، خطی و برای ریشه‌های ناصفر از مرتبه‌ی دو

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. داریم $g(x) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. حال چون $x = 0$ یک ریشه‌ی تکراری g است، پس روش نیوتن دارای نرخ همگرایی خطی برای محاسبه‌ی این ریشه است. از طرفی $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ ریشه‌های ساده‌ی g هستند ولی ریشه‌ی مشتق دوم g نیستند. پس روش نیوتن دارای نرخ همگرایی مرتبه‌ی دو برای محاسبه‌ی این ریشه‌ها است.



تست: برای یافتن ریشه‌ی معادله‌ی

$$\int_0^1 e^{xt} dt = 2$$

تابع تکراری روش نیوتن کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

$$(1) \frac{(x-1)e^x + 1}{e^x - 2}$$

$$(2) \frac{(x-2)e^x - 1}{e^x + 2}$$

$$(3) \frac{(x-2)e^x - 1}{e^x - 2}$$

$$(4) \frac{(x-1)e^x + 1}{e^x + 2}$$



پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. داریم

$$\int_0^1 e^{xt} dt = 2 \Rightarrow \left. \frac{e^{xt}}{x} \right|_{t=0}^{t=1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x}(e^x - 1) = 2 \Rightarrow e^x - 2x - 1 = 0.$$

حال اگر رابطه‌ی تکراری نیوتن را به صورت $x_{n+1} = g(x_n)$ در نظر بگیریم، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 2x - 1}{e^x - 2} \\ &= \frac{xe^x - 2x - e^x + 2x + 1}{e^x - 2} \\ &= \frac{(x-1)e^x + 1}{e^x - 2}. \end{aligned}$$



تست: روش تکراری نقطه‌ی ثابت $x_{n+1} = \phi(x_n)$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ را با تابع تکرار $\phi(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$ در نظر بگیرید. برای عدد مثبت α ، ثابت‌های A, B, C را طوری تعیین می‌کنیم که مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ به $\frac{1}{\alpha}$ حداقل ۳ باشد. در این صورت ثابت‌های A و B کدام هستند؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

$$A = 3 \text{ و } B = -3\alpha$$

$$A = 3\alpha \text{ و } B = -3$$

$$A = 3\alpha \text{ و } B = 3$$

$$A = -3 \text{ و } B = 3\alpha$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. می‌خواهیم ثابت‌های A, B, C را طوری تعیین کنیم که مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ به $\frac{1}{\alpha}$ حداقل ۳ باشد. پس باید داشته باشیم

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \\ \phi'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \\ \phi''\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (A-1)\frac{1}{\alpha} + \frac{B}{\alpha^2} + \frac{C}{\alpha^3} = 0 & (1) \\ A + \frac{2B}{\alpha} + \frac{3C}{\alpha^2} = 0 & (2) \\ 2B + \frac{6C}{\alpha} = 0 \implies C = \frac{-B\alpha}{3} \end{cases}$$

با جایگذاری C در تساوی‌های (۱) و (۲) داریم

$$\begin{cases} (A-1)\alpha + \frac{2}{3}B = 0 \\ A + \frac{B}{\alpha} = 0 \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$A = 3, \quad B = -3\alpha, \quad C = \alpha^2.$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: می‌دانیم که x عددی نزدیک صفر است و

$$x^2 \cos x - x \sin x + \frac{1}{3} \ln(1 + x^4) = O(x^p).$$

عدد p کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)



پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با استفاده از بسط مک‌لورن داریم

$$\begin{aligned}x^2 \cos x - x \sin x + \frac{1}{3} \ln(1 + x^4) &= x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right) \\&\quad - x \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right) \\&\quad + \frac{1}{3} \left(x^4 - \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} - \dots\right) \\&= \frac{x^6}{30} + \dots \\&= O(x^6).\end{aligned}$$

بنابراین $p = 6$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: در یک دستگاه ممیز شناور نرمال در مبنای ۲، هر عدد حقیقی به صورت

$$\pm (0.d_1d_2)_2 \times 2^{\pm d_3d_4}$$

با d_i ها ارقام در مبنای ۲ و $d_1 \neq 0$ (وقتی عدد مخالف صفر باشد) ذخیره می‌شود. فرض کنید در این دستگاه ارقام غیر قابل نمایش بریده می‌شوند. کوچکترین عدد قابل نمایش و روند عدد یک به ترتیب برابرند با (دکتری ریاضی ۹۵)

$$(1) \quad 2^{-4} \text{ و } 2^{-5}$$

$$(2) \quad -4 \text{ و } 1/2$$

$$(3) \quad -2^{-5} \text{ و } 2^{-5}$$

$$(4) \quad -6 \text{ و } 1/2$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: در یک دستگاه ممیز شناور نرمال در مبنای ۲، هر عدد حقیقی به صورت

$$\pm (0.d_1 d_2)_2 \times 2^{\pm d_r d_r}$$

با d_i ها ارقام در مبنای ۲ و $d_1 \neq 0$ (وقتی عدد مخالف صفر باشد) ذخیره می‌شود. فرض کنید در این دستگاه ارقام غیر قابل نمایش بریده می‌شوند. کوچکترین عدد قابل نمایش و روند عدد یک به ترتیب برابرند با (دکتری ریاضی ۹۵)

$$(1) \quad 2^{-4} \text{ و } 2^{-5}$$

$$(2) \quad -4 \text{ و } 1/2$$

$$(3) \quad -2^{-5} \text{ و } 2^{-5}$$

$$(4) \quad -6 \text{ و } 1/2$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. کوچکترین عدد قابل نمایش عبارت است از

$$x_{\min} = -(0.11)_2 \times 2^{+(11)_2} = -(2^{-1} + 2^{-2}) \times 2^3 = -6$$

و روند عدد یک نیز برابر است با $\frac{1}{4} = 2^{1-2} = u$.



تست: برای تعیین تقریبی از کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ به روش تکرار ساده، یعنی $x_{n+1} = g(x_n)$ ، گزینه‌ی مناسب برای $g(x)$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (۱)$$

$$g(x) = 2 + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (۲)$$

$$g(x) = \pi + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (۳)$$

$$g(x) = -2 + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (۴)$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

۵۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با رسم توابع x و $\tan(\frac{\pi}{4}x)$ دیده می‌شود که کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله در بازه‌ی $(1, 3)$ قرار دارد. حال معادله‌ی داده شده را به صورت

$$x = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

بازنویسی می‌کنیم. داریم $\arctan x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و بنابراین $\frac{2}{\pi} \arctan x \in (-1, 1)$. از آنجا که طبق قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت لازم است شرط $g[a, b] \subset [a, b]$ برقرار باشد، پس باید تابع $\frac{2}{\pi} \arctan x$ را با تبدیل مناسب به بازه‌ی شامل ریشه انتقال دهیم. بنابراین g را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \arctan x \implies g(x) \in (1, 3)$$

می‌توان دید که شرط $|g'(x)| < 1$ نیز برقرار است و بنابراین تابع g تعریف شده به صورت بالا، گزینه‌ای مناسب است.



تست: مرتبه‌ی همگرایی (مجانبی) روش تکراری نیوتن برای تعیین مینیمم تابع

$$f(x) = (x - 1)^4(x^2 + 1) - 1$$

برابر است با (دکتری ریاضی ۹۵)

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار



پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. برای تعیین مینیمم تابع f باید معادله‌ی غیر خطی زیر را حل کنیم:

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x^2+1) + 2x(x-1)^4 = 0.$$

از سوی دیگر داریم

$$f'(x) = (x-1)^3 [4(x^2+1) + 2x(x-1)] = (x-1)^3 (6x^2 - 2x + 4)$$

از اینجا دیده می‌شود که تنها ریشه‌ی f' برابر با $x=1$ است و چون این ریشه یک ریشه‌ی تکراری f' است روش نیوتن با نرخ همگرایی خطی به آن همگرا می‌شود.



تست: رابطه‌ی تکراری زیر را برای پیدا کردن مینیمم‌کننده‌ی $f(x)$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{q(x_n)}.$$

فرض کنید دنباله‌ی $\{x_n\}$ به یک نقطه‌ی x^* همگراست و می‌دانیم

$$f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) > 0.$$

چه رابطه‌ای بین f و q برقرار باشد تا نرخ همگرایی دستکم برابر با ۲ باشد؟
(دکتری ریاضی ۹۵)

$$q'(x^*) = f'(x^*) \quad (۱)$$

$$q'(x^*) = f''(x^*) \quad (۲)$$

$$q''(x^*) = f'(x^*) \quad (۳)$$

$$q''(x^*) = f(x^*) \quad (۴)$$



پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فرض کنیم

$$g(x) = x - \frac{f'(x)}{q(x)}.$$

حال با توجه به قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت برای آنکه مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی $x_{n+1} = g(x_n)$ به x^* دست کم برابر با ۲ باشد، باید داشته باشیم $g'(x^*) = 0$. بنابراین

$$1 - \frac{f''(x^*)q(x^*) - f'(x^*)q'(x^*)}{q(x^*)^2} = 0.$$

اما با توجه به $f'(x^*) = 0$ داریم

$$f''(x^*)q(x^*) = q(x^*)^2$$

و از آنجا خواهیم داشت $f''(x^*) = q(x^*)$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: فرض کنید $a > 0$ و $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$. کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۶)

۱) دنباله‌ی $\{x_n\}$ با هر نقطه‌ی اولیه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبه‌ی همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

۲) دنباله‌ی $\{x_n\}$ با هر نقطه‌ی اولیه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبه‌ی همگرایی آن دقیقاً ۱ است.

۳) دنباله‌ی $\{x_n\}$ به ازای هر $x_0 < 0$ همگرا به $-\sqrt{a}$ است و مرتبه‌ی همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

۴) دنباله‌ی $\{x_n\}$ به ازای هر $-\sqrt{a} \leq x_0 \leq \sqrt{a}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبه‌ی همگرایی آن دقیقاً ۲ است.



پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. داریم

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{4x_n} \quad (1)$$

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 \Rightarrow x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2$$

از اینکه $x_{n+1}^2 - a \geq 0$ نتیجه می‌گیریم که صورت کسر (۱) همواره منفی است. بنابراین علامت $x_{n+1} - x_n$ بستگی به علامت مخرج کسر (۱) دارد. همچنین با توجه به $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ملاحظه می‌کنیم که اگر $x > 0$ آنگاه تمام x_n ‌ها مثبت و اگر $x < 0$ آنگاه تمام x_n ‌ها منفی هستند. بنابراین

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow x_n < 0 \Rightarrow \frac{a - x_n^2}{4x_n} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n \geq 0, \\ x_n < 0, x_{n+1}^2 - a \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq -\sqrt{a}. \end{cases}$$

از این رو اگر $x < 0$ آنگاه x_n صعودی و از بالا کراندار است و بنابراین همگراست.



به طور مشابه داریم:

$$\begin{cases} x_0 > 0 \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow \frac{a-x_n}{x_n} \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0, \\ x_n > 0, x_{n+1}^2 - a \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{a}. \end{cases}$$

از این رو اگر $x_0 < 0$ آنگاه x_n صعودی و از بالا کراندار است و بنابراین همگراست. توجه داریم اگر $x_0 = 0$ آنگاه جمله‌ی بعدی دنباله را نمی‌توان محاسبه کرد. بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ به دلیل داشتن نقطه‌ی شروع $x = 0$ رد می‌شوند. همچنین می‌توان دید که دنباله داده شده همان رابطه‌ی تکراری روش نیوتن برای حل معادله‌ی

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

است و می‌دانیم که مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن برای محاسبه‌ی ریشه‌های این معادله برابر با ۲ است.



تست: فرض کنید $g(x) = x + \lambda f(x)$ ، f' بر $[a, b]$ پیوسته و مثبت است و $f(a)f(b) < 0$.
 λ کدام شرایط را داشته باشد تا دنباله‌ی $x_{n+1} = g(x_n)$ با x_0 مناسب به یک صفر تابع f
 همگرا باشد؟ فرض کنید $m = \min_{a \leq x \leq b} f'(x)$ و $M = \max_{a \leq x \leq b} f'(x)$
 (دکتری ریاضی ۹۶)

$$-\frac{2}{M} < \lambda < 0 \quad (1)$$

$$\max \left\{ -\frac{2}{m}, -\frac{2}{M} \right\} < \lambda < 0 \quad (2)$$

$$-\frac{2}{m} < \lambda < 0 \quad (3)$$

$$\min \left\{ -\frac{2}{m}, -\frac{2}{M} \right\} < \lambda < 0 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه‌های ۱ و ۲ هر دو صحیح هستند. فرض کنیم $-\frac{2}{M} < \lambda < 0$. در این صورت داریم

$$g'(x) = 1 + \lambda f'(x) \implies 1 + M\lambda \leq g'(x) \leq 1 + m\lambda.$$

بنابراین به ازای هر x داریم $|g'(x)| \leq L = \max\{|1 + M\lambda|, |1 + m\lambda|\}$. به علاوه،

$$-\frac{2}{M} < \lambda < 0 \implies \begin{cases} -1 < 1 + M\lambda < 1 \implies |1 + M\lambda| < 1, \\ -1 < 1 - \frac{2m}{M} < 1 + m\lambda < 1 \implies |1 + m\lambda| < 1. \end{cases}$$

از این رو، $|g'(x)| \leq L < 1$ و دنباله‌ی $x_{n+1} = g(x_n)$ با نقطه‌ی شروع مناسب x_0 به ریشه‌ی $f(x) = 0$ همگراست. از اینجا درستی گزینه‌ی ۱ معلوم می‌شود. همچنین با توجه به

$$m \leq M \Leftrightarrow -2M \leq -2m \Leftrightarrow \frac{-2M}{mM} \leq \frac{-2m}{mM} \Leftrightarrow \frac{-2}{m} \leq \frac{-2}{M}$$

ملاحظه می‌کنیم که گزینه‌ی ۲ نیز درست است.



تست: دنباله‌ی روش نیوتن برای یافتن ریشه‌ی $\alpha = 0$ مربوط به تابع $f(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید. اگر دنباله به ازای هر x در بازه‌ی $(-x^*, x^*)$ همگرا باشد، در کدام رابطه صدق می‌کند؟ (دکتری ریاضی ۹۶)

$$-\frac{\pi}{4} < x^* < \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$x^* = \tan x^* \quad (۲)$$

$$x^* = 2 \tan x^* \quad (۳)$$

$$2x^* = \tan x^* \quad (۴)$$



پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. دنباله‌ی تکراری روش نیوتن برای تعیین ریشه‌ی معادله‌ی

$$f(x) = \sin x = 0$$

به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n}{\cos x_n} = x_n - \tan x_n.$$

حال اگر $x_0 = x^*$ و x^* چنان باشد که در معادله‌ی

$$\tan x^* = x^*$$

صدق کند، آنگاه داریم $x_1 = -x^*$ و $x_2 = x^*$. بنابراین روش نیوتن در یک حلقه‌ی تکراری گرفتار می‌شود و به ریشه‌ی $\alpha = 0$ همگرا نخواهد شد. بنابراین $|x_0| < x^*$ که $\tan x^* = x^*$.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲ با ۱۰ رقم مانتیس و روش بریدن در نمایش اعداد، فاصله‌ی بین عدد قابل نمایش 2^P با $1 > P$ ، و بزرگترین عدد قابل نمایش کوچکتر از 2^P کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

(۱) 2^{-9}

(۲) 2^{-10}

(۳) 2^{P-10}

(۴) 2^{P-9}



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲ با ۱۰ رقم مانتیس و روش بریدن در نمایش اعداد، فاصله‌ی بین عدد قابل نمایش 2^P با $1 > P$ ، و بزرگترین عدد قابل نمایش کوچکتر از 2^P کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

$$(1) 2^{-9}$$

$$(2) 2^{-10}$$

$$(3) 2^{P-10}$$

$$(4) 2^{P-9}$$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. اگر $x = 2^P$ ، آنگاه داریم

$$x_- = 2^P - (\underbrace{0/00\dots0}_9 \text{ بار})_2 \times 2^P \Rightarrow 2^P - x_- = 2^{-10} \times 2^P = 2^{P-10}.$$

• توجه کنید که $x_+ = (\underbrace{0/100\dots0}_8 \text{ بار})_2 \times 2^{P+1}$ و بنابراین

$$x_+ - x = 2^{-10} \times 2^{P+1} = 2^{P-9}.$$



تست: فرض کنید α ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد و $f''(\alpha) = 0$. مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن برای محاسبه‌ی تقریبی از α کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

(۱) ۲

(۲) خطی

(۳) دست کم ۲

(۴) دست کم ۳



تست: فرض کنید α ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد و $f''(\alpha) = 0$. مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن برای محاسبه‌ی تقریبی از α کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

(۱) ۲

(۲) خطی

(۳) دست کم ۲

(۴) دست کم ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. روش نیوتن برای محاسبه‌ی ریشه‌ی ساده‌ی α از تابع f که ریشه‌ی مشتق دوم f نیز باشد، دارای نرخ همگرایی بیشتر از ۲ است.



تست: اگر $\bar{x}$ جواب محاسبه شده برای یک مسئله و x جواب دقیق مسئله باشد و بتوان نشان داد که $\|x - \bar{x}\| \leq 10^{-30} + 10^{-10} \|\bar{x}\|$ و $\|\bar{x}\| > 10^{-7}$ ، آنگاه تعداد رقم‌های دهدهی یکسان در x و $\bar{x}$ دست کم برابر است با (دکتری ریاضی ۹۷)

۱۱ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۳۰ (۴)



تست: اگر $\bar{x}$ جواب محاسبه شده برای یک مسئله و x جواب دقیق مسئله باشد و بتوان نشان داد که $\|\bar{x}\| \leq 10^{-3} + 10^{-1} \|\bar{x}\|$ و $\|\bar{x}\| > 10^{-7}$ ، آنگاه تعداد رقم‌های دهدهی یکسان در x و $\bar{x}$ دست کم برابر است با (دکتری ریاضی ۹۷)

۱۱ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. با توجه به اینکه 10^{-3} در مقایسه با $10^{-1} \|\bar{x}\|$ مقداری بسیار کوچک است، داریم

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \lesssim 10^{-1}.$$

از این رو x و $\bar{x}$ در حدود 10^{-1} رقم دهدهی با هم یکسان هستند.



تست: دنباله‌ی تولید شده از

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + 1), \quad k = 0, 1, \dots$$

با شروع از یک نقطه‌ی مناسب x_0 وقتی به کمینه کننده تابع $f(x) = (x - 1)^2$ همگرا شود، نرخ همگرایی مجانبی از مرتبه دارد. (دکتری ریاضی ۹۸)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) زبرخطی



تست: دنباله‌ی تولید شده از

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(x_k + 1), \quad k = 0, 1, \dots$$

با شروع از یک نقطه‌ی مناسب x_0 وقتی به کمینه کننده تابع $f(x) = (x - 1)^2$ همگرا شود، نرخ همگرایی مجانبی از مرتبه دارد. (دکتری ریاضی ۹۸)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) زبرخطی

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. فرض کنیم $\alpha = 1$ و $g(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$. در این صورت

داریم $g(\alpha) = \alpha$ و $g'(\alpha) = \frac{1}{4} \neq 0$. بنابراین مرتبه‌ی همگرایی دنباله داده شده به α برابر با ۱ است.



تست: فرض کنید $x > 0$ و محاسبه‌ی

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}$$

روی یک کامپیوتر با روند عدد یک برابر u مد نظر است. یک فرمول جایگزین مناسب برای محاسبه‌ی A ، (دکتری ریاضی ۹۸)

(۱) $\frac{2}{x^3}$ است اگر $x > \left(\frac{2}{u}\right)^{\frac{1}{4}}$

(۲) $\frac{1}{x^3}$ است اگر $x > \left(\frac{2}{u}\right)^{\frac{1}{4}}$

(۳) $\frac{2}{x^3}$ است اگر $x > u^{\frac{1}{4}}$

(۴) $\frac{1}{x^3}$ است اگر $x > \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$



پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. با ضرب و تقسیم A در مزدوج آن داریم

$$A = \frac{(x^2 + \frac{2}{x^2}) - (x^2 - \frac{2}{x^2})}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}} = \frac{\frac{4}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}}.$$

حال چنانچه نمایش $x^2 \pm \frac{2}{x^2}$ با نمایش x^2 برابر باشد، آنگاه $\frac{2}{x^2} = \frac{4}{x^2}$ جایگزین مناسبی برای

محاسبه A است. برای آن که نمایش $x^2 \pm \frac{2}{x^2}$ با نمایش x^2 برابر باشد، باید نمایش $1 \pm \frac{2}{x^2}$ با نمایش ۱ برابر باشد و این هنگامی امکان‌پذیر است که

$$\left| \frac{2}{x^2} \right| < u \Rightarrow \left(\frac{2}{u} \right)^{\frac{1}{2}} < x.$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: دستگاه ممیز شناور نرمال شده را با نمایش عدد حقیقی ناصفر به صورت

$$\pm (0.d_1 d_2 d_3 d_4) \times 2^{\pm d_5 d_6}$$

در نظر بگیرید که در آن $d_1 = 1$ و $d_i = 0$ یا 1 به ازای $i = 2, \dots, 6$. فرض کنید که روش بریدن ارقام غیر قابل نمایش به کار می‌رود. اگر نمایش $2 + t$ برابر با عدد 2 باشد، آنگاه مقدار t کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

(۱) 0.5

(۲) 0.25

(۳) 0.125

(۴) 0.375



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: دستگاه ممیز شناور نرمال شده را با نمایش عدد حقیقی ناصفر به صورت

$$\pm (d_1 d_2 d_3 d_4) \times 2^{\pm d_5 d_6}$$

در نظر بگیرید که در آن $d_1 = 1$ و $d_i = 0$ یا 1 به ازای $i = 2, \dots, 6$. فرض کنید که روش بریدن ارقام غیر قابل نمایش به کار می‌رود. اگر نمایش $2 + t$ برابر با عدد 2 باشد، آنگاه مقدار t کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

(۱) 0.5

(۲) 0.25

(۳) 0.125

(۴) 0.375

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. برای آنکه نمایش $2 + t$ با نمایش 2 برابر باشد، کافی است نمایش $1 + \frac{t}{4}$ با نمایش 1 برابر باشد. پس کافی است $\frac{t}{4} < u$ که در آن $u = 2^{-4} = 2^{-3} = 2^{-1}$ روند عدد یک در سیستم داده شده است. بنابراین $t < 1/4$.



تست: کدام یک از دنباله‌های زیر مرتبه‌ی همگرایی برابر با ۲ دارد؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

$$\left\{ \frac{1}{e^n} \right\} \quad (۱)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \quad (۳)$$

$$\left\{ \frac{1}{2^{2^n}} \right\} \quad (۴)$$



تست: کدام یک از دنباله‌های زیر مرتبه‌ی همگرایی برابر با ۲ دارد؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

$$\left\{ \frac{1}{e^n} \right\} \quad (۱)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \quad (۳)$$

$$\left\{ \frac{1}{2^{2^n}} \right\} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. می‌دانیم که یک دنباله مانند $\{x_n\}$ همگرا به α از مرتبه‌ی p است، هرگاه ثابتی مانند $C > 0$ و عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشند به طوری که اگر $n > N$ آنگاه

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} \leq C.$$



در اینجا حد دنباله‌های داده شده برابر با $\alpha = 0$ است و داریم

$$\bullet x_n = \frac{1}{e^n} \Rightarrow \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{1}{e^{2n}}} = \frac{e^{2n}}{e^{n+1}} \rightarrow \infty.$$

$$\bullet x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{n}{\sqrt{n+1}} \rightarrow \infty.$$

$$\bullet x_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{n^4}{(n+1)^2} \rightarrow \infty.$$

$$\bullet x_n = \frac{1}{2^{2^n}} \Rightarrow \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}} \rightarrow 1.$$

بنابراین سه دنباله‌ی اول شرایط همگرایی مرتبه‌ی ۲ را ندارند و در دنباله‌ی چهارم می‌توان $C \geq 1$ انتخاب کرد.



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: فرض کنید $\bar{x}$ جواب دستگاه $Ax = b$ است که در آن A ناتکین (وارون‌پذیر) است. $\tilde{x}$ را یک جواب تقریبی محاسبه شده برای این دستگاه بگیرید و قرار دهید $r = b - A\tilde{x}$ و $e = \bar{x} - \tilde{x}$. در این صورت داریم

$$\|e\| \geq \dots?$$

(دکتری ریاضی ۹۹)

$$\|A^{-1}\| \|r\| \quad (۱)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \quad (۲)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A^{-1}\|} \quad (۳)$$

$$\|r\| \|A\| \quad (۴)$$



بررسی نکات و تست‌های مبانی آنالیز عددی در آزمون‌های دکتری

تست: فرض کنید $\bar{x}$ جواب دستگاه $Ax = b$ است که در آن A ناتکین (وارون‌پذیر) است. $\tilde{x}$ را یک جواب تقریبی محاسبه شده برای این دستگاه بگیرید و قرار دهید $r = b - A\tilde{x}$ و $e = \bar{x} - \tilde{x}$. در این صورت داریم

$$\|e\| \geq \dots?$$

(دکتری ریاضی ۹۹)

$$\|A^{-1}\| \|r\| \quad (۱)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \quad (۲)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A^{-1}\|} \quad (۳)$$

$$\|r\| \|A\| \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$Ae = A(\bar{x} - \tilde{x}) = b - A\tilde{x} = r \Rightarrow \|A\| \|e\| \geq \|Ae\| = \|r\| \Rightarrow \|e\| \geq \frac{\|r\|}{\|A\|}.$$



- تست: روش نیوتن را برای حل مسئله‌ی $\min_x (x^4 - 8x^2)$ در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)
- (۱) روش وگراست.
 - (۲) همگرایی مجانبی می‌تواند خطی باشد.
 - (۳) همگرایی مجانبی از درجه‌ی دوم است.
 - (۴) همگرایی مجانبی به یک مینیمم‌کننده خطی و به مینیمم‌کننده دیگر از درجه‌ی دوم است.



تست: روش نیوتن را برای حل مسئله‌ی $\min_x (x^4 - 8x^2)$ در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

- (۱) روش واگراست.
- (۲) همگرایی مجانبی می‌تواند خطی باشد.
- (۳) همگرایی مجانبی از درجه‌ی دوم است.
- (۴) همگرایی مجانبی به یک مینیمم‌کننده خطی و به مینیمم‌کننده دیگر از درجه‌ی دوم است.

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. برای تعیین مینیمم باید معادله‌ی

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2) = 0$$

را حل کنیم. ریشه‌های معادله عبارتند از ۲، -۲، ۰، و مقدار مینیمم به ازای $x = 2$ و $x = -2$ به دست می‌آید. چون این دو ریشه، ریشه‌های ساده‌ی f' هستند ولی ریشه‌های مشتق دوم f'' نیستند، پس روش نیوتن برای محاسبه‌ی آن‌ها دارای نرخ همگرایی مرتبه ۲ است.



با سپاس از توجه شما