

جایگشت با تکرار

همانطور که دیدید جایگشت های سه حرف a, b, c به صورت های $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ می باشند که تعداد آنها برابر ۶ است. حال فرض کنید می خواهیم جایگشت های سه حرف a, a, b را بنویسیم. با فرض متمایز بودن دو حرف a داریم $aab, aab, aba, aba, baa, baa$. اما واضح است که حالت های aab, aab یا aba, aba یا baa, baa هیچ فرقی با هم ندارند و تعداد جایگشت های متمایز برابر $3 = \frac{6}{2!}$ می باشد که $2!$ تعداد جایگشت های دو حرف a و a می باشد. بنابراین می توان گفت:

اگر n شیء داشته باشیم که در آن ها اشیای تکراری وجود داشته باشد ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و تعداد جایگشت های آنها را مانند قبل حساب کرده، در آخر بر جایگشت های اشیای تکراری تقسیم می کنیم.

 نکته: (تبدیل با تکرار) اگر n شی غیر متمایز داشته باشیم که از k نوع شی دارای تکرار تشکیل شود به طوری که

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \quad n = \overbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_k}^{k \text{ نوع شی}} \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{تعداد نوع اول} \quad \downarrow \text{تعداد نوع } k \text{ ام} \end{array}$$

 **سؤال ۱:** با حروف کلمه «*MARDSALAR*» چند کلمه ۹ حرفی می توان ساخت؟

👉 **پاسخ:** ابتدا تمام حروف را متمایز فرض می‌کنیم. پس ۹۱ کلمه می‌توان ساخت. حال چون سه حرف A و دو حرف R داریم باید جایگشت‌های آنها یعنی $3!$ و $2!$ را از تعداد کل کلمات می‌کنیم بنابراین تعداد کل کلمات برابر است با:

$$\frac{9!}{2! \times 3!} = 3 \times 24 \times 2$$

سؤال ۲: مجموع ارقام تمام اعداد چهار رقمی با رقم‌های متمایز حاصل از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ کدام است؟

72.0 (4) 18.0 (3) 252.0 (2) 114.0 (1)

👉 یاسخ: گزینہ ۱

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\} \subseteq \{1, 2, 4, 5\} \subseteq \{2, 3, 4, 5\} \\ & 4! \times (4 + 3 + 2 + 1) + 4! \times (1 + 2 + 3 + 5) + 4! \times (1 + 3 + 4 + 5) \\ & + 4! \times (1 + 2 + 4 + 5) + 4! \times (2 + 3 + 4 + 5) = 4! \times (10 + 11 + 13 + 12 + 14) \\ & = 4! \times 50 = 1440. \end{aligned}$$

سؤال ۳: به چند طریق می توان شش نفر را دور میزگرد شش نفره ای نشاند هرگاه همواره دو نفر خاص از آنها کنار

هم بنشینند؟

۳۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۲۴ (۲)

۷۲۰ (۱)

جابه جایی A و B
AB بسته
 $(1 + 4 - 1)! \times 2! = 4! \times 2! = 48$

پاسخ: گزینه ۳

سؤال ۴: با ارقام ۳, ۴, ۱, ۰, ۰, ۲, ۲, ۲ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت؟ (سراسری ۷۸)

$\frac{7!}{2! \times 3!}$ (۴)

$\frac{8!}{3! \times 2!}$ (۳)

$\frac{7!}{2!}$ (۲)

۸! (۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون در ارقام داده شده توسط طراح رقم تکراری وجود دارد، این بدان معناست که تکرار ارقام دیگر مجاز نیست بنا به نکته فقط به تعداد ارقامی که توسط طراح داده شده تکرار ارقام مجاز است بنابراین کل اعداد هشت رقمی که از ارقام داده شده به دست می آید، تعیین می کنیم و بر جایگشت ارقام تکراری تقسیم می کنیم. به نکات شماره (۱) و (۳) توجه کنید.

$$\left(\frac{6}{\text{نباشد } \{0,0\}} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \right) \times \frac{5}{2! \times 3!} = \frac{7!}{2!}$$

سؤال ۵: تعداد اعداد سه رقمی که با ارقام ۱, ۱, ۲ می توان نوشت کدام است؟

یکی تکراریه یکی تکراریه یکی تکراریه

$$(3 \times 2 \times 1) = 6 \rightarrow \{112, 121, 211, 211, 121, 112\} \rightarrow (\text{غ ق ق}) \rightarrow (3) \rightarrow \text{بدون توجه به نکته (۳)}$$

اصل ضرب نمی دونه که ارقام یا اشیا تکراری جابه جایشون بی اثر می شه بنابراین با نکته شماره (۳) بهش یاد می دیم.

$$(3 \times 2 \times 1) \times \frac{1}{2!} = 3 \rightarrow \{112, 121, 211\}$$

سؤال ۶: با ارقام ۰, ۰, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ چند عدد شش رقمی فرد می توان نوشت؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۸ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون در ارقام داده شده توسط طراح رقم تکراری وجود دارد بنابراین تکرار ارقام بیشتر از تعدادی که در صورت سوال ذکر شده مجاز نیست بنا به نکته (شرایط ویژه) و این که رقم یکان این عدد باید فرد باشد داریم:

$$\left(\frac{3}{\text{نباشد } \{0,0\}} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{\{3,3\}} \right) \times \frac{1}{2! \times 2! \times 2!} = 18$$

سؤال ۷: با ارقام ۲, ۴, ۴, ۶, ۶ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

۱۸ (۴)

۹ (۳)

۲۴ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\{2, 4, 6\} \rightarrow 3! = 6, \quad \{6, 6, 4\} \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3, \quad \{6, 6, 2\} \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

$$\{4, 4, 6\} \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3, \quad \{4, 4, 2\} \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

مجموع کل تعداد اعداد حاصل از افزارهای فوق جواب مسئله است که برابر ۱۸ می باشد.

سؤال ۸: چند عدد سه رقمی با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳ می توان نوشت؟

۳۰ (۴)

۱۸ (۳)

۲۴ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\{3, 3, 2\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3 \quad \{2, 1, 1\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3$$

$$\{3, 3, 1\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3 \quad \{2, 2, 3\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3$$

$$\{1, 1, 3\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3 \quad \{1, 1, 2\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{1}{2 \times 1} = 3$$

$$\{1, 2, 2\} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}\right) = 6 \quad \text{تعداد حالت ها} = 6 \times 3 + 6 = 24$$

سؤال ۹: با ارقام ۰, ۰, ۲, ۲, ۳, ۳ چند عدد سه رقمی وجود دارد که رقم سه لاقط یک بار در آن به کار رفته باشد؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۸ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left(\frac{3}{\frac{3}{\{0, 0\}}} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{\{3, 3\}}\right) \times \frac{1}{2! \times 2! \times 2!} = 18$$

سؤال ۱۰: سه لامپ مشابه و دو باطری خشک مشابه را به چند طریق می توان کنار هم در یک ردیف قرار داد؟

۱۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

باید حالت ها رو به جایگشت اشیا تکراری تقسیم کنیم:

$$\frac{(3+2)!}{2! \times 3!} = 10$$

سؤال ۱۱: تعداد تبدیلات پنج تایی از سه توپ تنیس و چهار توپ فوتبال کاملاً مشابه کدام است؟

۳۰ (۴)

۱۵ (۳)

۲۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

برای حل این تست باید چهار توپ فوتبال و سه توپ تنیس را به دست های پنج تایی افراز کنیم حالت اول چهار توپ فوتبال و یک توپ تنیس و در حالت دوم سه توپ فوتبال و دو توپ تنیس و در حالت سوم دو توپ فوتبال و سه توپ تنیس وجود دارد بنابراین داریم:

$$\frac{(4+1)!}{4!} + \frac{(3+2)!}{3! \times 2!} + \frac{(2+3)!}{2! \times 3!} = 5 + 10 + 10 = 25$$

سؤال ۱۲: با حروف کلمه «ABADAN» چند جایگشت ۶ حرفی می توان ساخت که حروف یکسان در کنار هم

باشند؟

پاسخ:

$$A, A, A, B, D, N \Rightarrow 4! \times \frac{3!}{3!} = 24$$

جایگشت A ها

سؤال ۱۳: با حروف کلمه «ABADAN» چند جایگشت ۶ حرفی می توان ساخت که حروف یکسان در کنار هم

باشند؟

پاسخ:

$$A, A, A, B, D, N \Rightarrow 4! \times \frac{3!}{3!} = 24$$

جایگشت کل
↑
جایگشت A ها
↓

سؤال ۱۴: با ارقام عدد ۱۱۳۲۴۶۸ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت به طوری که ارقام زوج و فرد یک در میان قرار

بگیرند؟

پاسخ: واضح است که ارقام زوج باید در خانه های دایره ای و ارقام فرد در خانه های مربعی قرار گیرند.

○ □ □ □ ○ □ □

جایگشت زوج ها

بنابراین تعداد جایگشت ها برابر است با:

$$4! \times \frac{3!}{2!} = 72$$

↓
جایگشت فرد ها

سؤال ۱۵: تعداد جایگشت های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که S ها کنار هم نباشند؟ (تجربی خارج ۸۲)

- ۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد حالتی که دو حرف S کنار هم هستند را حساب می کنیم و از تعداد کل جایگشت ها کم می کنیم:

$$\underbrace{SSYTEM}_{5!} \Rightarrow \frac{6!}{2!} - 5! = 360 - 120 = 240$$

سؤال ۱۶: با حروف کلمه «ABADAN» چند جایگشت شش حرفی می توان نوشت که همه A ها کنار هم نباشند؟

- ۱۰۸ (۱) ۱۰۴ (۲) ۹۴ (۳) ۹۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$[A, A, A], B, D, N \Rightarrow \frac{6!}{3!} - 4! = 120 - 24 = 96$$

سؤال ۱۷: با حروف کلمه «SISANGAN» چند جایگشت هشت حرفی می توان ساخت که حروف یکسان در کنار

هم قرار گیرند و حروف G و I کنار هم نباشند؟

- ۵۷۶ (۱) ۹۶ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

حروف یکسان را درون بسته هایی قرار می دهیم و جایگشت کل آنها را پیدا می کنیم. سپس حالتی را که حروف G و I نیز کنار هم هستند را حساب کرده و از کل کم می کنیم:

$$\underbrace{[SS][NN][AA], G, I}_{5!} - \underbrace{[SS][NN][AA][GI]}_{4! \times 2!} = 120 - 48 = 72$$

سؤال ۱۸: با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد پنج رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ می توان ساخت به طوری که در هر عدد از رقم

های ۲، ۳ و ۴ یک بار و از رقم ۱ دوبار استفاده شود؟

- ۳۶ (۱) ۲۴ (۲) ۴۲ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

قرار است با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱، عدد ۵ رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ بسازیم. فب اول این که تعداد کل ۵ رقمی های حاصل با این ارقام

برابر است با: $\frac{5!}{2!} = 60$ از طرفی اگر اولین رقم از سمت چپ ۱ باشد عدد حاصل از ۲۰۰۰۰ کوچکتر می شود پس تعداد آنها را حساب

کرده و از تعداد کل کم می کنیم ببینید:

$$\frac{1}{\{1\}} \times \frac{4}{\{1, 2, 3, 4\}} \times \frac{3}{\{1, 2, 3, 4\}} \times \frac{2}{\{1, 2, 3, 4\}} \times \frac{1}{\{1, 2, 3, 4\}} = 24 \Rightarrow$$

$60 - 24 = 36$ = تعداد اعدادی که بزرگتر از ۲۰۰۰۰ هستند

سؤال ۱۹: با ارقام ۱، ۱، ۷، ۴، ۴، ۴ و ۳ چند شماره تلفن شش رقمی می توان ساخت؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۴۲۰ (۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۳

نکته: تعداد جایگشت های $(n-1)$ تایی از n شیء با تعداد جایگشت های n تایی آنها برابر است.

در این جا می شود به جای این که تعداد شماره تلفن های ۶ رقمی از بین ۷ رقم را حساب کنیم تعداد شماره تلفن های ۷ رقمی را

$$\frac{7!}{3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 420$$

از میان ۷ رقم داده شده به دست آوریم یعنی:

سؤال ۲۰: با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد ۸ رقمی می توان نوشت؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

- (۱) ۸! (۲) $\frac{7!}{2!}$ (۳) $\frac{8!}{3!3!}$ (۴) $\frac{7!}{2!3!}$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر n شیء بخواهند کنار هم قرار گیرند به طوری که n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... و n_k شیء از نوع آخر باشند

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

تعداد حالات برابر است با:

در این جا در بین ارقام صفر وجود دارد لذا نمی تواند در خانه اول صفر بیاید. لذا برای انتقاب اول ۶ حالت داریم:

$$\frac{6 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!2!} = \frac{7!}{2!}$$

سؤال ۲۱: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می توان نوشت؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

- (۱) $\frac{8!}{2!4!}$ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

عدد مذکور در صورت تست عددی ۸ رقمی و زوج است و از آن جایی که رقم اول (رقم سمت چپ) نمی تواند صفر باشد متماً ۳

است و از آن جایی که این عدد زوج است پس رقم یکان آن متماً صفر است پس یک ۳ و یک صفر حذف می شوند. لذا داریم:

$$\frac{1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{3!3!} = 20$$

سؤال ۲۲: با ارقام عدد ۴۰۵۴۵۴ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟ (آزاد ریاضی ۷۶)

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۵ (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به آن که تعداد اعداد ۵ رقمی که با ارقام عدد ۴۰۵۴۵۴ می توان سافت با تعداد اعداد ۶ رقمی برابر است. پس کافی

است تعداد اعداد ۶ رقمی را حساب کنیم. به ترتیب ۵، ۵، ۴، ۳ و ... حالت دارد لذا داریم:

$$\frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!2!} = 50$$

سؤال ۲۳: با ارقام ۱, ۰, ۴, ۴, ۴, ۴ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟ (سراسری ریاضی ۷۵)

- ۸۱ (۱) ۱۰ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مسئله را در حال های زیر حل می کنیم و سپس این حالت ها را با هم جمع می کنیم:

(۱) تعداد اعداد ۳ رقمی که یک رقم ۴ دارند برابر است با: $n_1 = 2 \times 2 \times 1 = 4$

(۲) تعداد اعداد سه رقمی که دو رقم ۴ و یک رقم ۱ دارند برابر است با: $n_2 = \frac{3!}{2!} = 3$

(۳) تعداد اعداد ۳ رقمی که دو رقم ۴ و یک رقم صفر دارند برابر است با: $n_3 = 2$: (۴۴۰ و ۰۴۴)

(۴) تعداد اعداد سه رقمی که هر ۳ رقم آن ۴ است برابر است با: $n_4 = 1$: (۴۴۴)

لذا تعداد کل حالات برابر است با: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

سؤال ۲۴: با اعداد ۶, ۶, ۴, ۴, ۲, ۲ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟ (آزاد ریاضی ۷۹)

- ۱۵ (۱) ۲۴ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

در این با اعداد ۳ رقمی را می توان به دو دسته تقسیم دسته اول اعدادی که هر ۳ رقم آنها متمایز بوده و به صورت xyz می باشند و دسته دوم اعدادی که دارای ۲ رقم تکراری بوده و به صورت xxz می باشند. برای هر دسته داریم:

دسته اول: $xyz \rightarrow$ تعداد حالات $= 3 \times 2 \times 1 = 6$

دسته دوم: $xxz \rightarrow$ تعداد حالات $= 3 \times 2 \times \frac{3!}{2!} = 18$

$$\Rightarrow 6 + 18 = 24$$

سؤال ۲۵: با حروف کلمه **FOOTBALL** چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت به طوری که حرف (F) بعد از حرف

(T) قرار گیرد؟ (نه لزوماً بلافاصله)

- ۱۲۰ (۱) ۲۵۲۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۵۰۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

در کلماتی که با حروف **FOOTBALL** ساخته می شود در نصف کلمات حرف F بعد از حرف T آمده است و در نصف دیگر حرف T بعد از حرف F آمده است پس باید تعداد کل کلمات را بر ۲ تقسیم کنیم. (پون تعداد حروف زوج است.)

$$\text{تعداد کل کلمات} = \frac{8!}{2! \times 2!} \rightarrow$$

تعداد کلماتی که حرف F بعد از حرف T آمده است.

$$= \frac{8!}{2! \times 2! \times 2} = 7! = 5040$$

سؤال ۲۶: با حروف کلمه «**LAGRANGE**» را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت

حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟ (تجربی داخل ۸۵)

- ۳۶۰ (۱) ۵۴۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

حروف مثل هم را یکی فرض می کنیم و داریم: ۲

$$L \boxed{AA} \boxed{GG} RNE \Rightarrow \text{تعداد جایگشت ها} = 6! = 720$$