

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

گر همچو من افتاده‌ی این دام شوی  
ای بس که خراب باده و جام شوی  
ما عاشق و رند و مست و عالم سوزیم  
با ما نشین اگر نه بد نام شوی



# فصل سوم: پیچش

*Torsion*

اکبر اقبالی



تغییر شکل

گرنش برشی

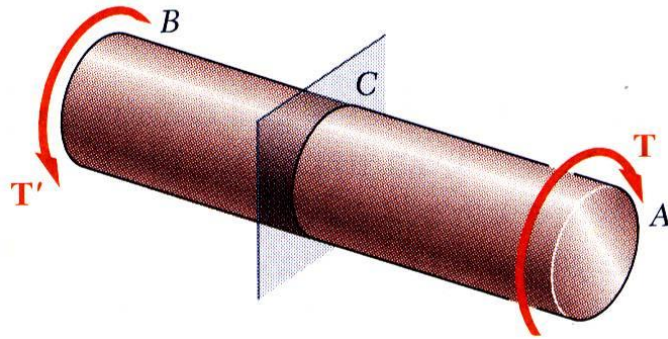
موزه الاستیک

زاویه پیچش

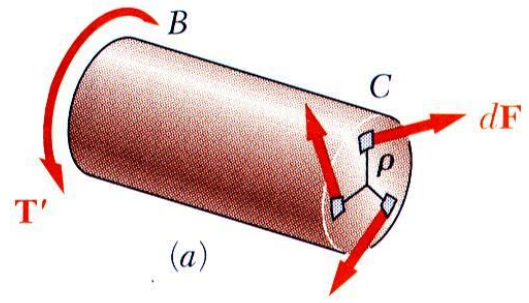
طراحی محور

موزه پلاستیک

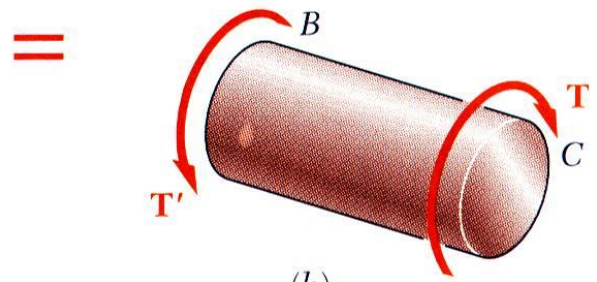
مبامت تکمیلی



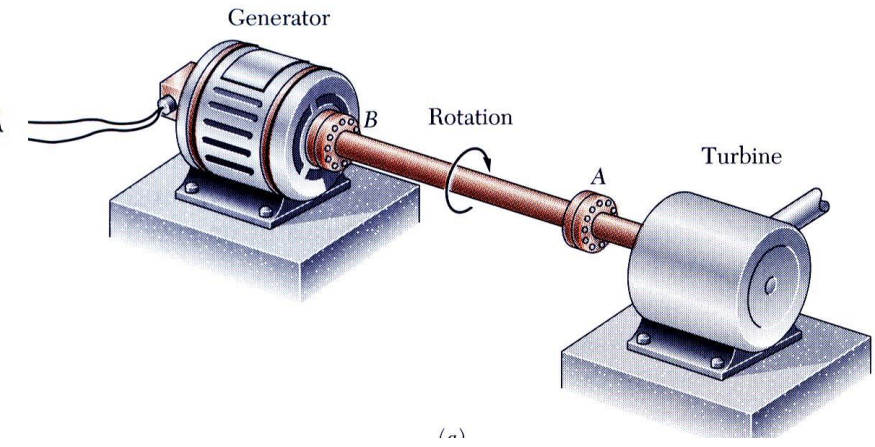
$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$



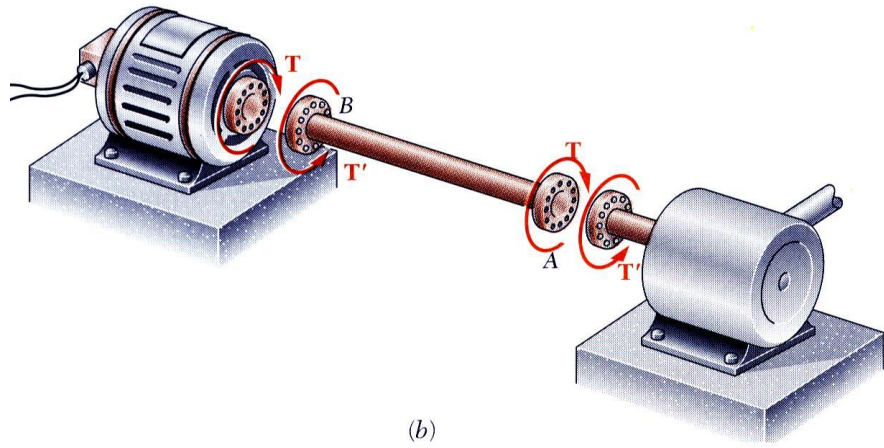
(a)



(b)

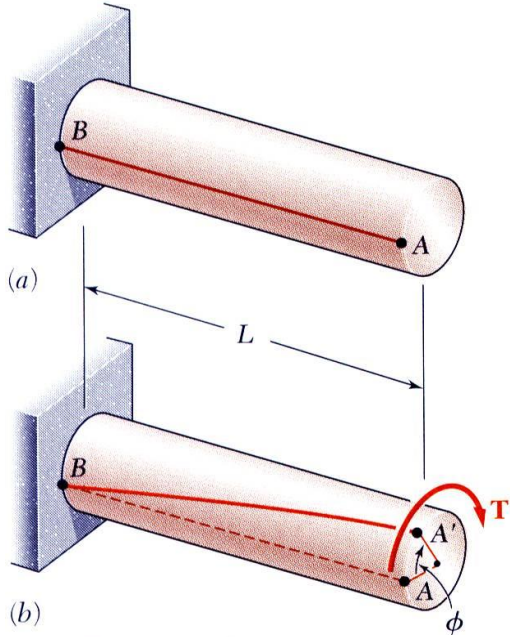


(a)



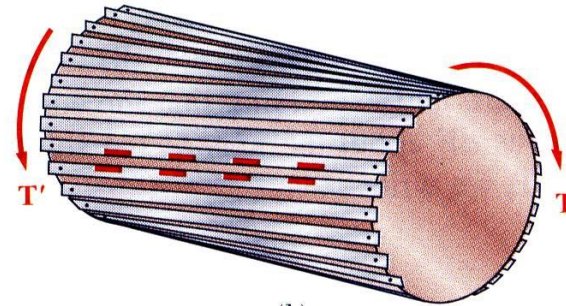
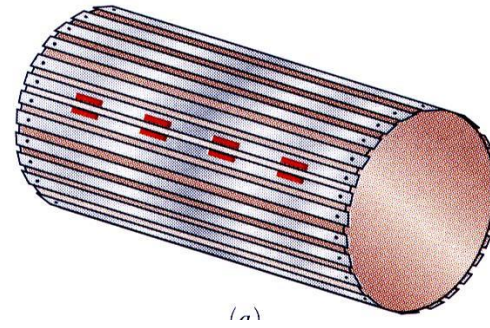
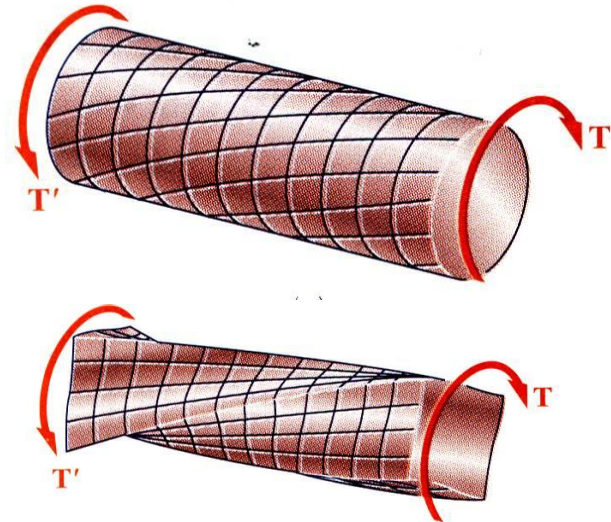
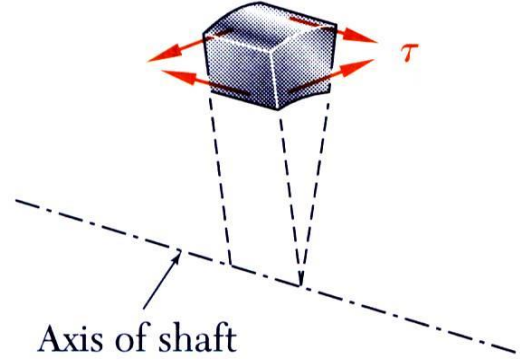
(b)

# تغییر شکل



$$\phi \propto T$$

$$\phi \propto L$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

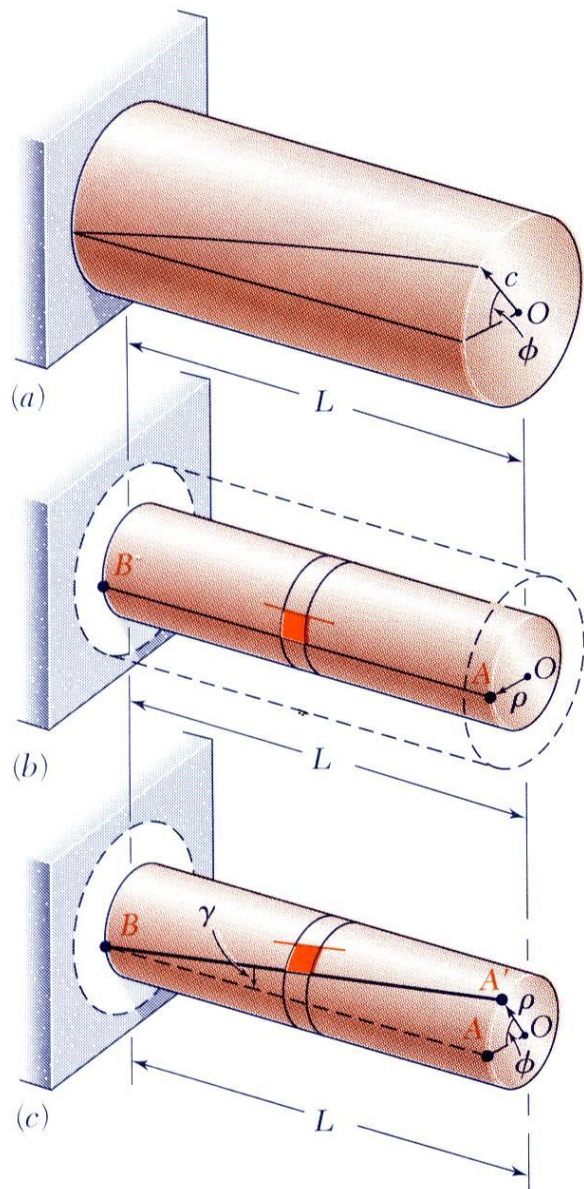
زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

# گرنش برشی



$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{or} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}$$

پیچش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیچش

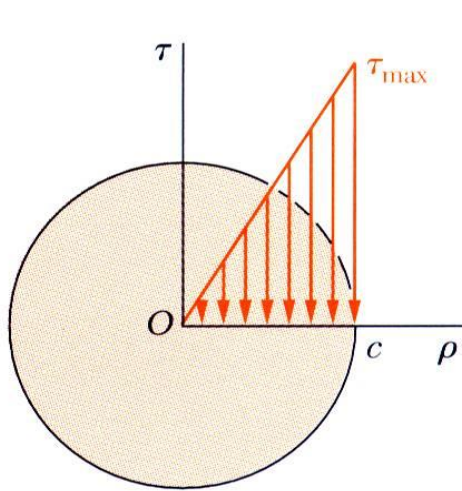
طراحی محور

موزه پلاستیک

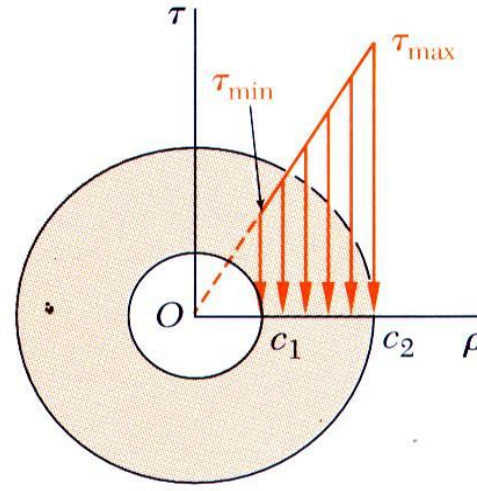
مبامت تکمیلی



# گرنش برشی در محدوده الاستیک



$$J = \frac{1}{2} \pi c^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$



$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{max}$$

$$\tau = G\gamma$$

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{max}}{c} J$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

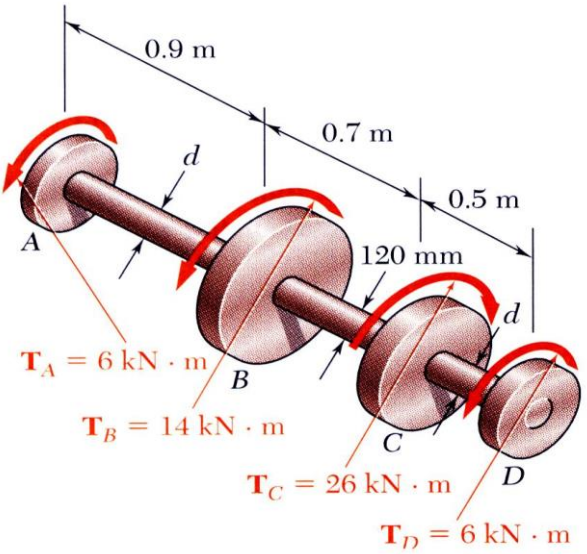
زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

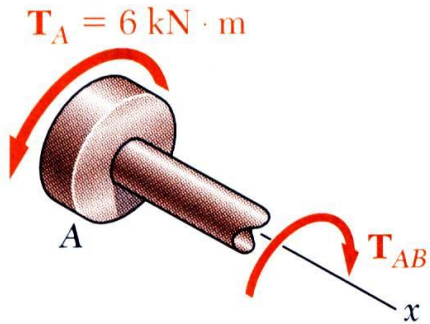
مبامت تکمیلی

# مثال



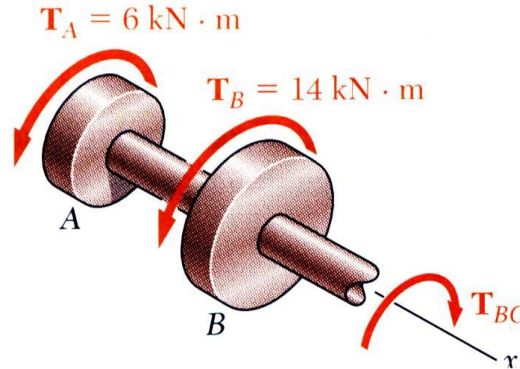
Shaft BC:  $D_i=90\text{mm}$  and  $D_o=120\text{mm}$ , Shafts AB & CD: solid of diameter  $d$ .

- (a) The min. and max. SS in shaft BC,
- (b) The required  $d$  for SS of 65 MPa.



$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB}$$

$$T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m} = T_{CD}$$



$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC}$$

$$T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

پیمایش

تغییر شکل

کرنش برشی

موزه الاستیک

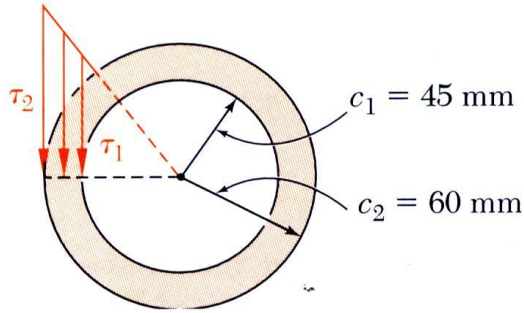
زاویه پیمایش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبانی تکمیلی

# مثال



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

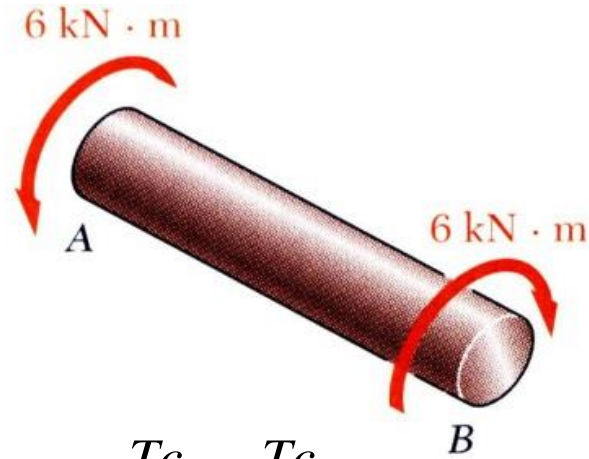
$$= 86.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

$$65 \text{ MPa} = \frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{\frac{\pi}{2} c^3}$$

$$c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



# زاویه پیچش در محدوده الاستیک



پیچش

تغییر شکل

گرنش برشی

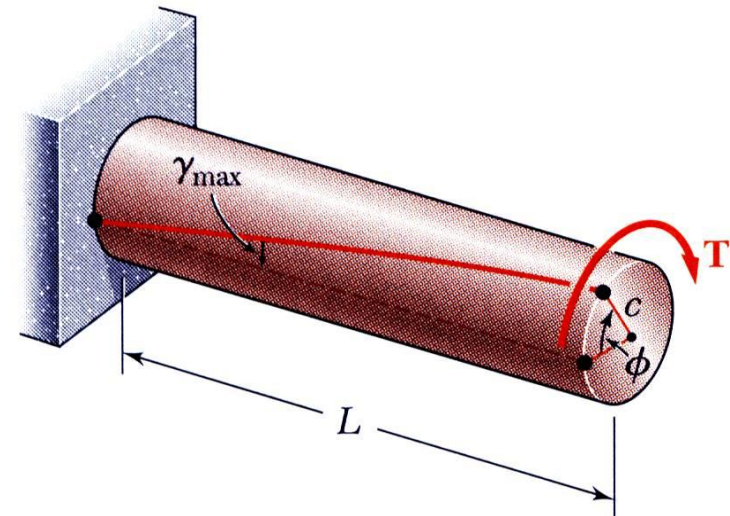
موزه الاستیک

زاویه پیچش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



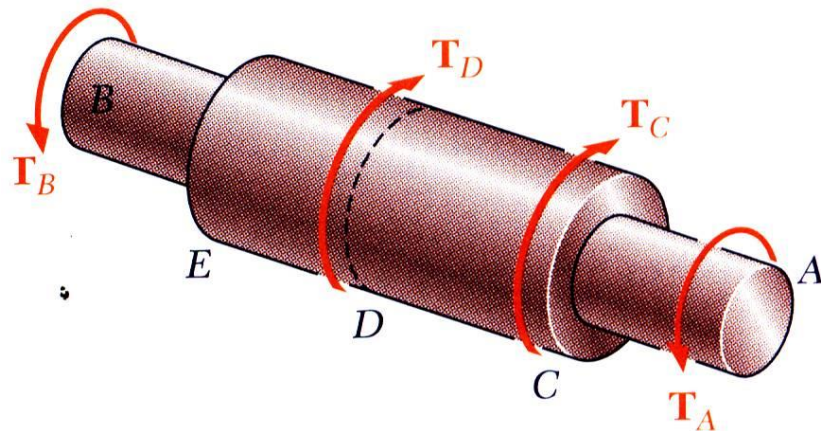
$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$



$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

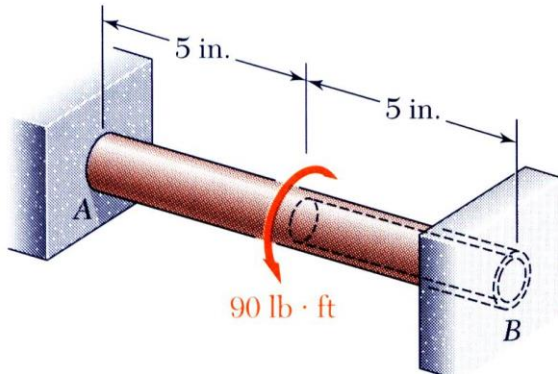
$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max}$$



$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$



# مثال



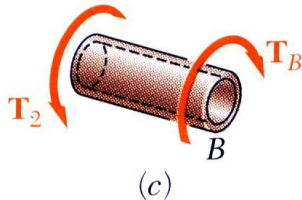
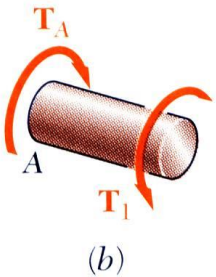
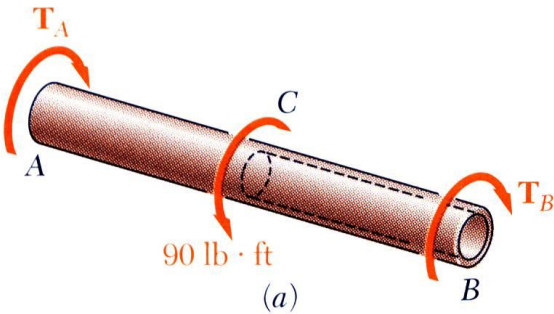
$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

$$\phi = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

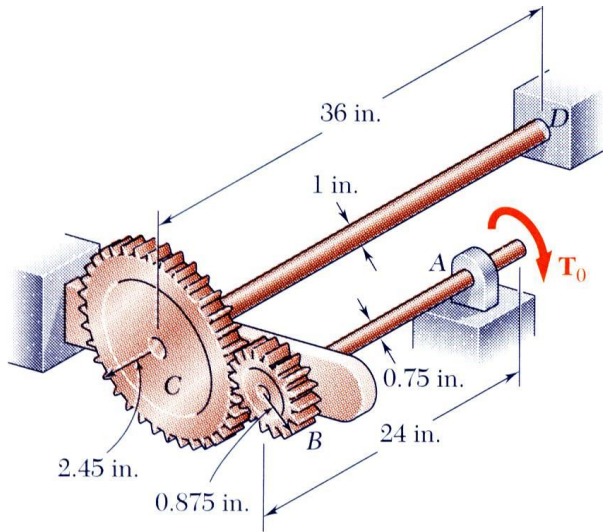
طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



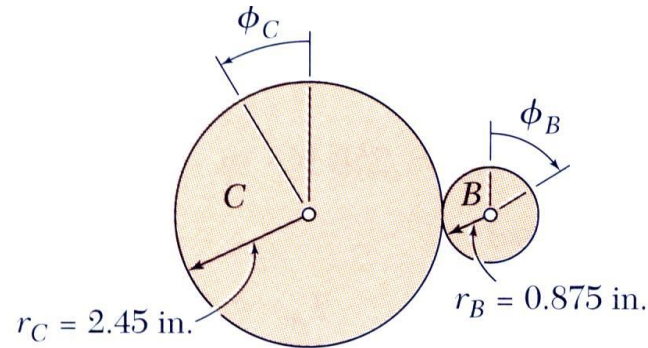
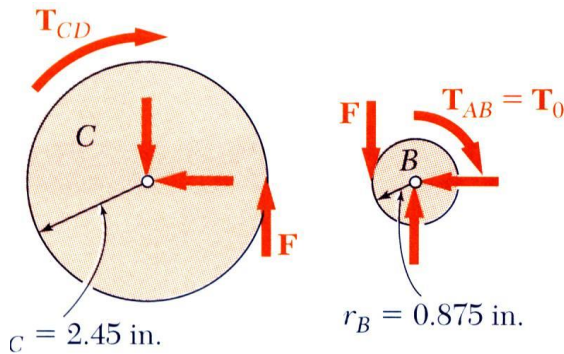
# مثال



$$G = 11.2 \times 10^6 \text{ psi}$$

The allowable shearing stress is 8 ksi,

- (a) the largest  $T_0$  of shaft AB,
- (b) The corresponding angle  $A$ .



$$r_B \phi_B = r_C \phi_C$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_B} \phi_C = \frac{2.45 \text{ in.}}{0.875 \text{ in.}} \phi_C$$

$$\phi_B = 2.8 \phi_C$$

$$\sum M_B = 0 = F(0.875 \text{ in.}) - T_0$$

$$\sum M_C = 0 = F(2.45 \text{ in.}) - T_{CD}$$

$$T_{CD} = 2.8 T_0$$

پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

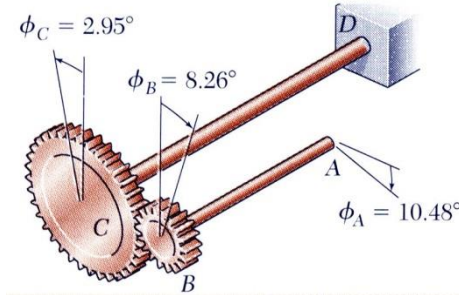
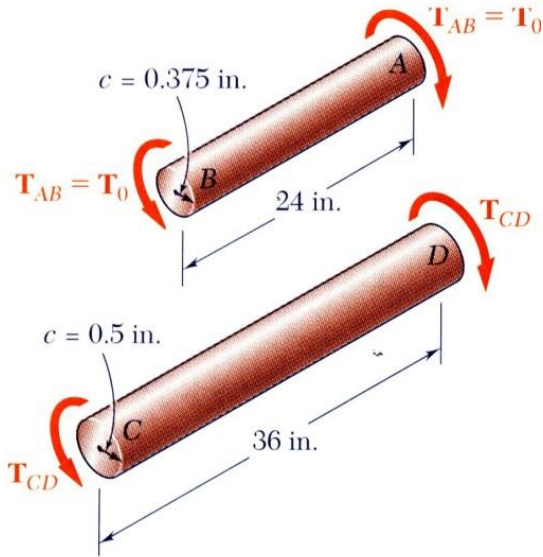
زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

# مثال



$$\tau_{\max} = \frac{T_{ABC}}{J_{AB}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4}$$

$$T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD}c}{J_{CD}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{2.8T_0(0.5 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4}$$

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{J_{AB}G} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.387 \text{ rad} = 2.22^\circ$$

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{J_{CD}G} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.514 \text{ rad} = 2.95^\circ$$

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 2.8(2.95^\circ) = 8.26^\circ$$

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.26^\circ + 2.22^\circ$$

$$\phi_A = 10.48^\circ$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

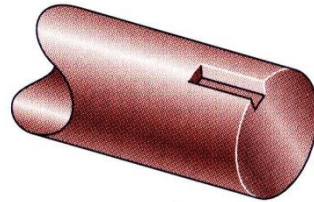
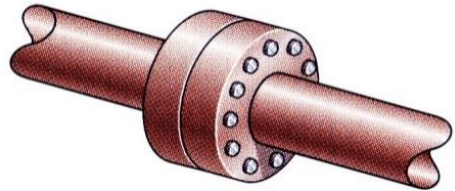
# طراحی محور



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi c^3}{2} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{solid shafts})$$

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{hollow shafts})$$



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

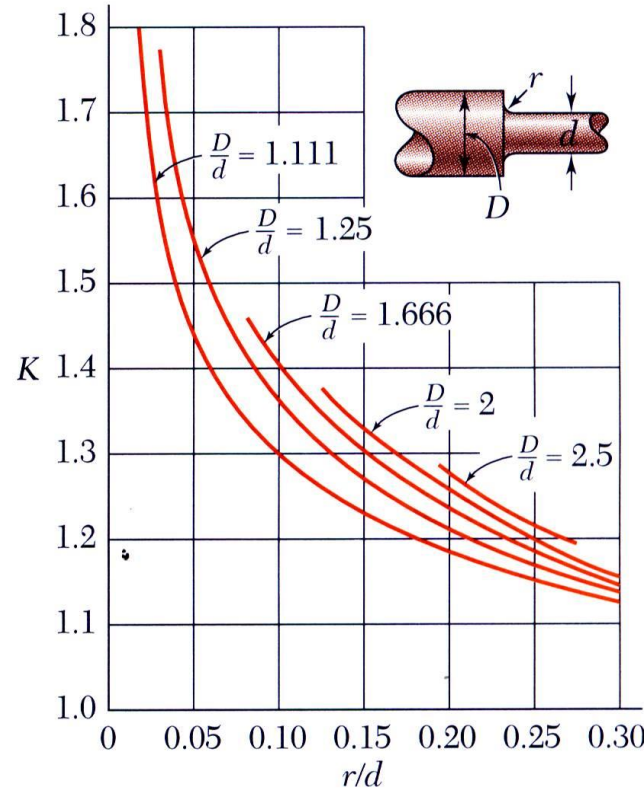
$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J}$$

$$P = T\omega = 2\pi fT$$

سرعت

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$

قدرت



پیمش

تغییر شکل

کرنش برشی

موزه الاستیک

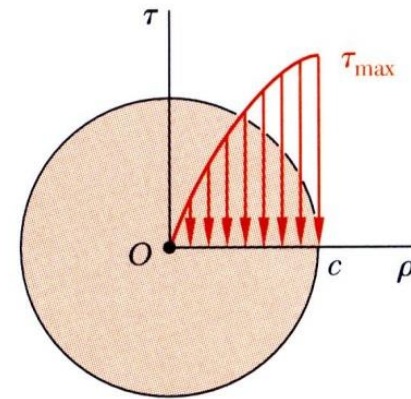
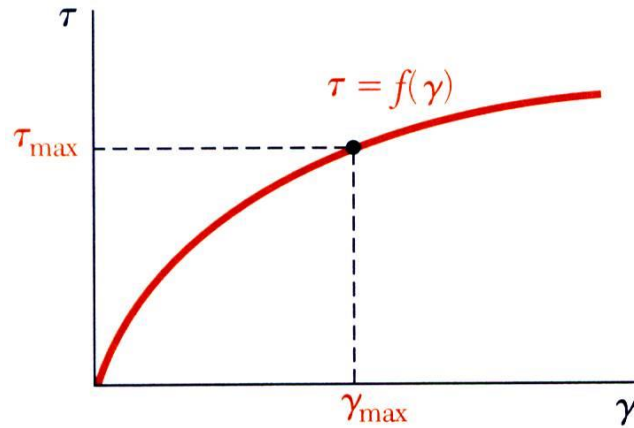
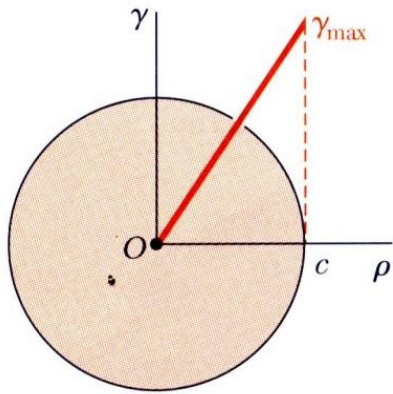
زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

# تغییر شکل پلاستیک



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$T = \int_0^c \rho \tau (2\pi \rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^2 \tau d\rho$$

پیمایش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

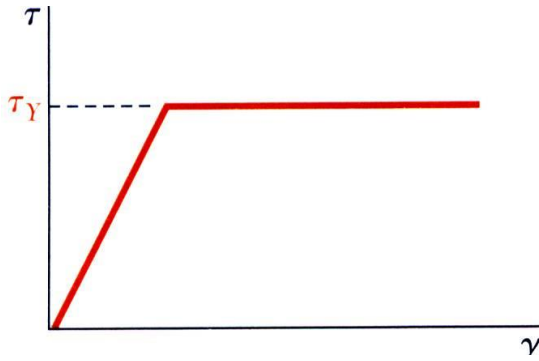
زاویه پیمایش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مباحث تکمیلی

# مواد الاستوپلاستيک



At the maximum elastic torque,

$$T_Y = \frac{J}{c} \tau_Y = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_Y \quad \phi_Y = \frac{L \gamma_Y}{c}$$

As the torque is increased, a plastic region develops around an elastic core ( $\tau = \frac{\rho}{\rho_Y} \tau_Y$ )

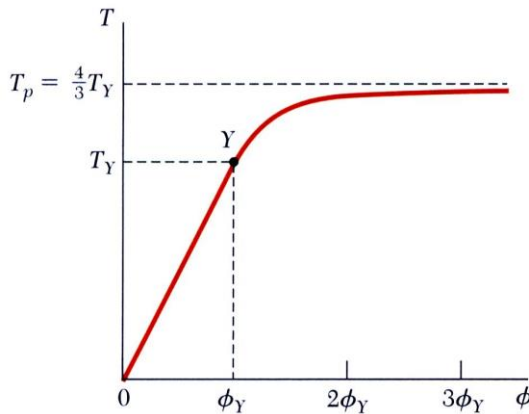
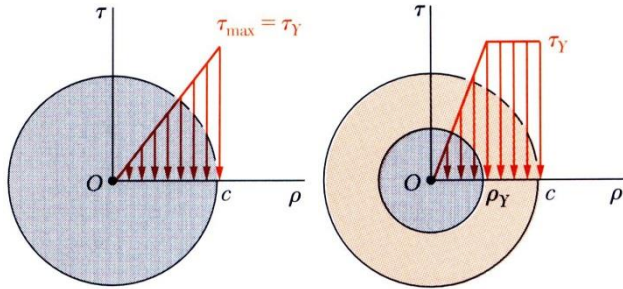
$$\rho_Y = \frac{L \gamma_Y}{\phi}$$

$$T = \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) = \frac{4}{3} T_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right)$$

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_Y^3}{\phi^3} \right)$$

As  $\rho_Y \rightarrow 0$ , the torque approaches a limiting value,

$$T_P = \frac{4}{3} T_Y = \text{plastic torque}$$



پیمش

تغییر شکل

کرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

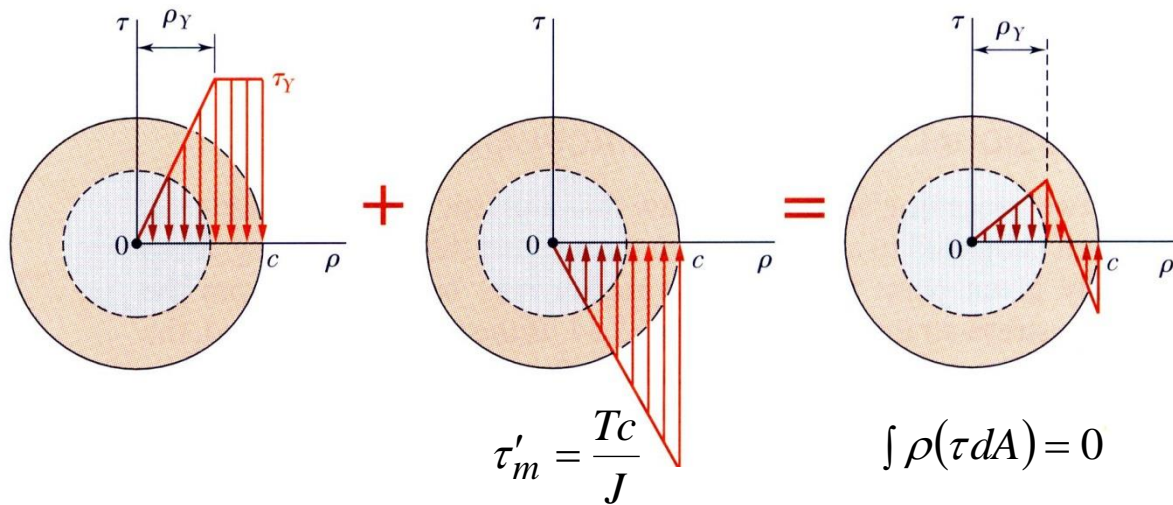
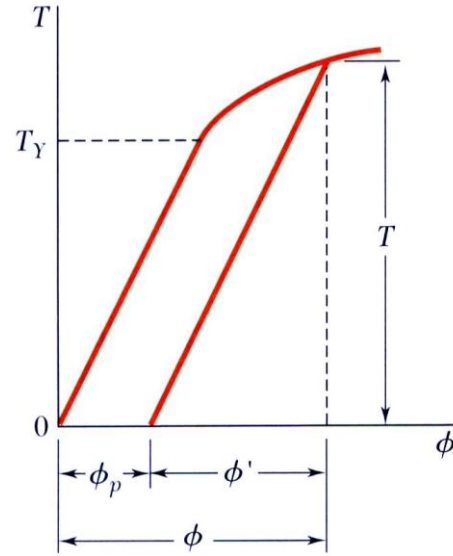
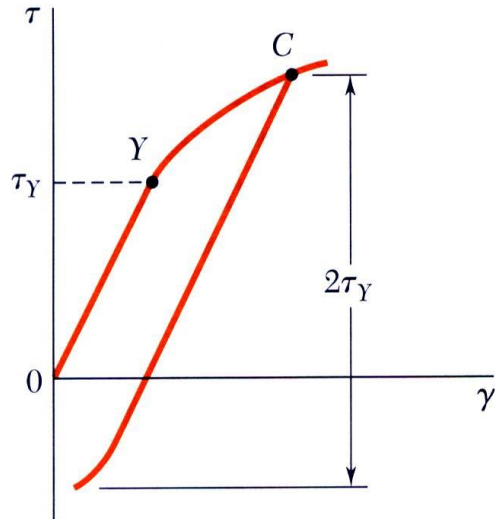
طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



# تنش های باقیمانده



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



## مثال



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

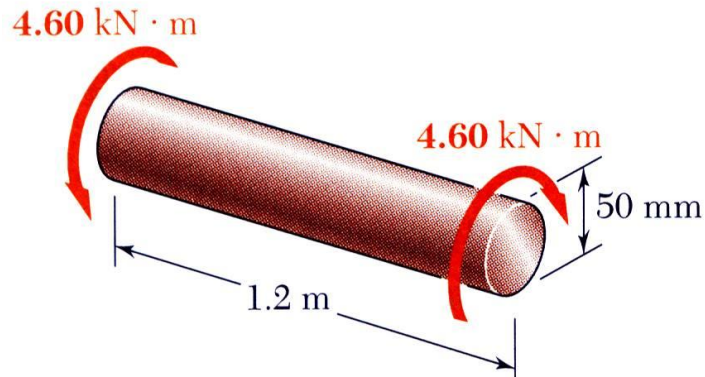
موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی



Elastoplastic material with  $\tau_Y = 150 \text{ MPa}$

(a) The radius of the elastic core,

(b) The angle of twist.  $G = 77 \text{ GPa}$

(c) The permanent twist,

(d) The distribution of residual stresses.

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) \Rightarrow \frac{\rho_Y}{c} = \left( 4 - 3 \frac{T}{T_Y} \right)^{1/3}$$

$$\frac{\phi}{\phi_Y} = \frac{\rho_Y}{c} \Rightarrow \phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c}$$

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (25 \times 10^{-3} \text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3 \text{ N})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\tau_Y = \frac{T_Y c}{J} \Rightarrow T_Y = \frac{\tau_Y J}{c}$$

$$\phi_Y = 93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$T_Y = \frac{(150 \times 10^6 \text{ Pa})(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{25 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\phi = \frac{93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi = 8.50^\circ$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = \left( 4 - 3 \frac{4.6}{3.68} \right)^{1/3} = 0.630 \quad \rho_Y = 15.8 \text{ mm}$$

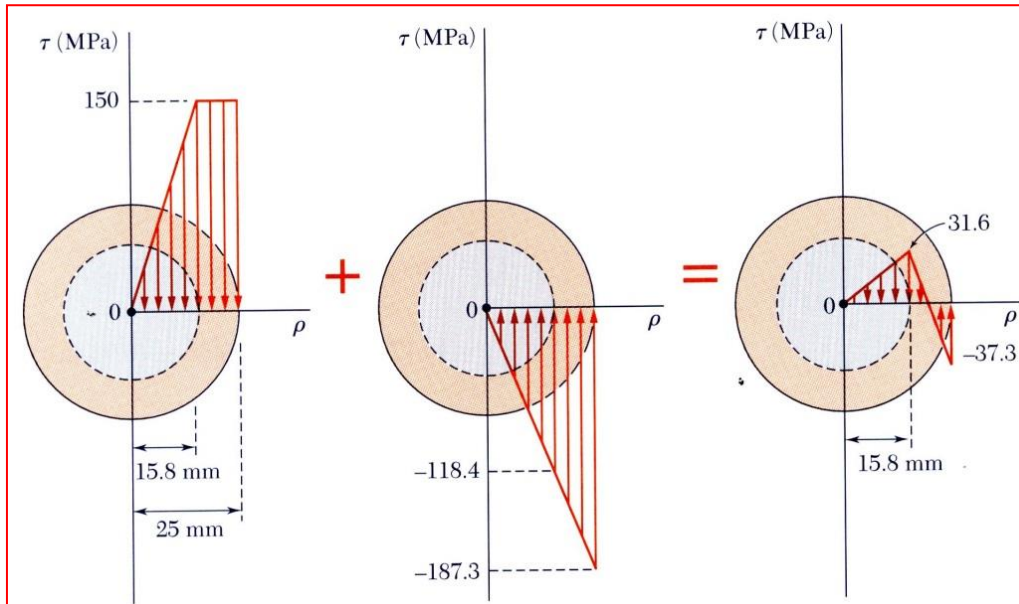
# مثال

Evaluate Eq. (3.16)

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(6.14 \times 10^9 \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_p = \phi - \phi' = (116.8 \times 10^{-3} - 116.8 \times 10^{-3}) \text{ rad} = 1.81^\circ$$

$$\tau'_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187.3 \text{ MPa}$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

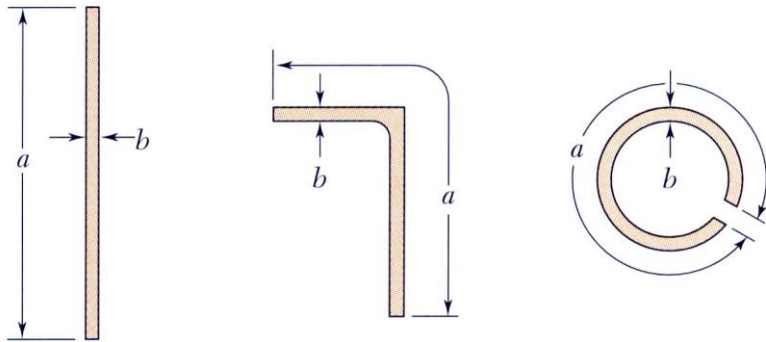
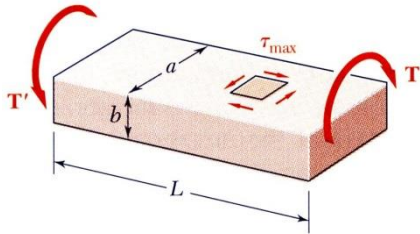
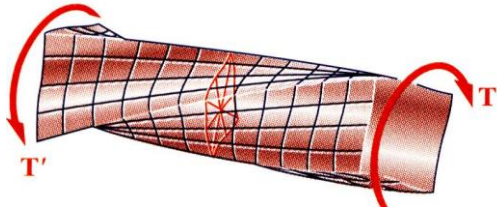
زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

# پیچش در اجسام غیر مدور



$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad \phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G}$$

**TABLE 3.1. Coefficients for Rectangular Bars in Torsion**

$a/b$	$c_1$	$c_2$
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
$\infty$	0.333	0.333



پیچش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

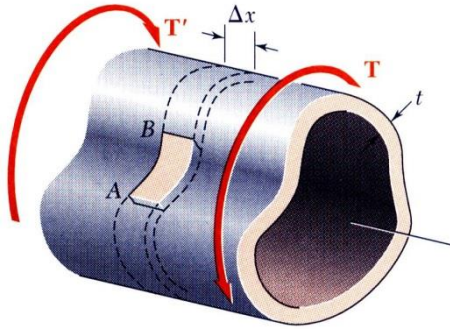
زاویه پیچش

طراحی محور

موزه پلاستیک

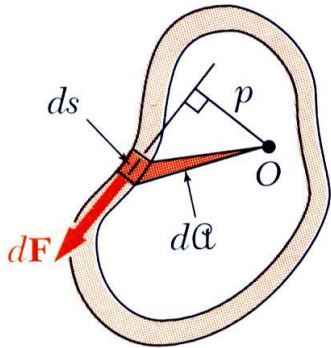
مبامت تکمیلی

# اجسام جدار نازک



$$\sum F_x = 0 = \tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x)$$

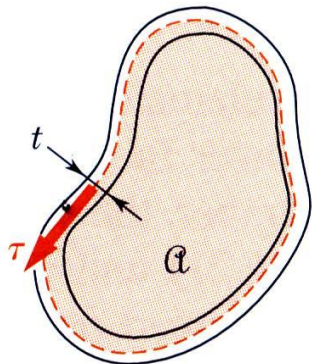
$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q = \text{shear flow}$$



$$dM_0 = p dF = p \tau (t ds) = q (p ds) = 2q dA$$

$$T = \oint dM_0 = \oint 2q dA = 2qA$$

$$\tau = \frac{T}{2tA}$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

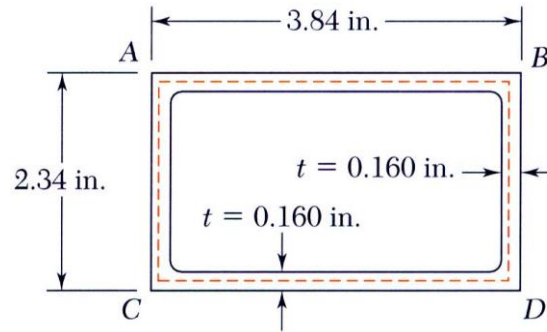
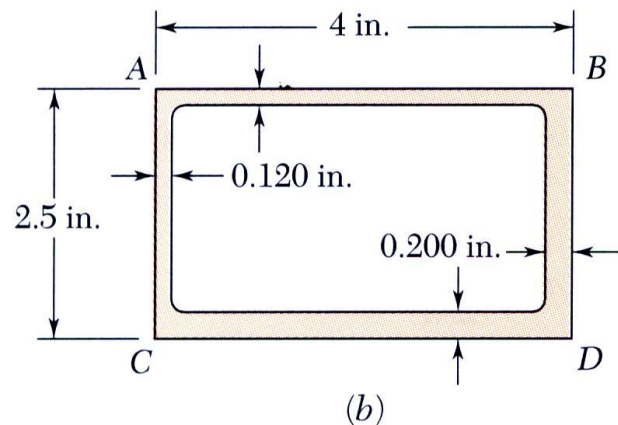
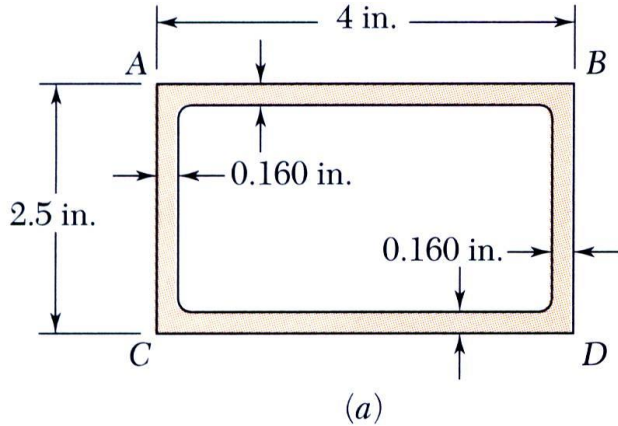
مبامت تکمیلی

## مثال

Aluminum has a torque of 24 kip-in.

(a) uniform wall thickness of 0.160 in.

(b) AB & CD: .120 in. CD and BD: .200 in.



$$A = (3.84 \text{ in.})(2.34 \text{ in.}) = 8.986 \text{ in.}^2$$

$$q = \frac{T}{2A} = \frac{24 \text{ kip-in.}}{2(8.986 \text{ in.}^2)} = 1.335 \frac{\text{kip}}{\text{in.}}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.160 \text{ in.}} = 8.34 \text{ ksi}$$

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.120 \text{ in.}} = 11.13 \text{ ksi}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.200 \text{ in.}} = 6.68 \text{ ksi}$$



پیمش

تغییر شکل

گرنش برشی

موزه الاستیک

زاویه پیمش

طراحی محور

موزه پلاستیک

مبامت تکمیلی

هر که از خود خشنود بود  
خشم گیرندگانش بسیارند.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام